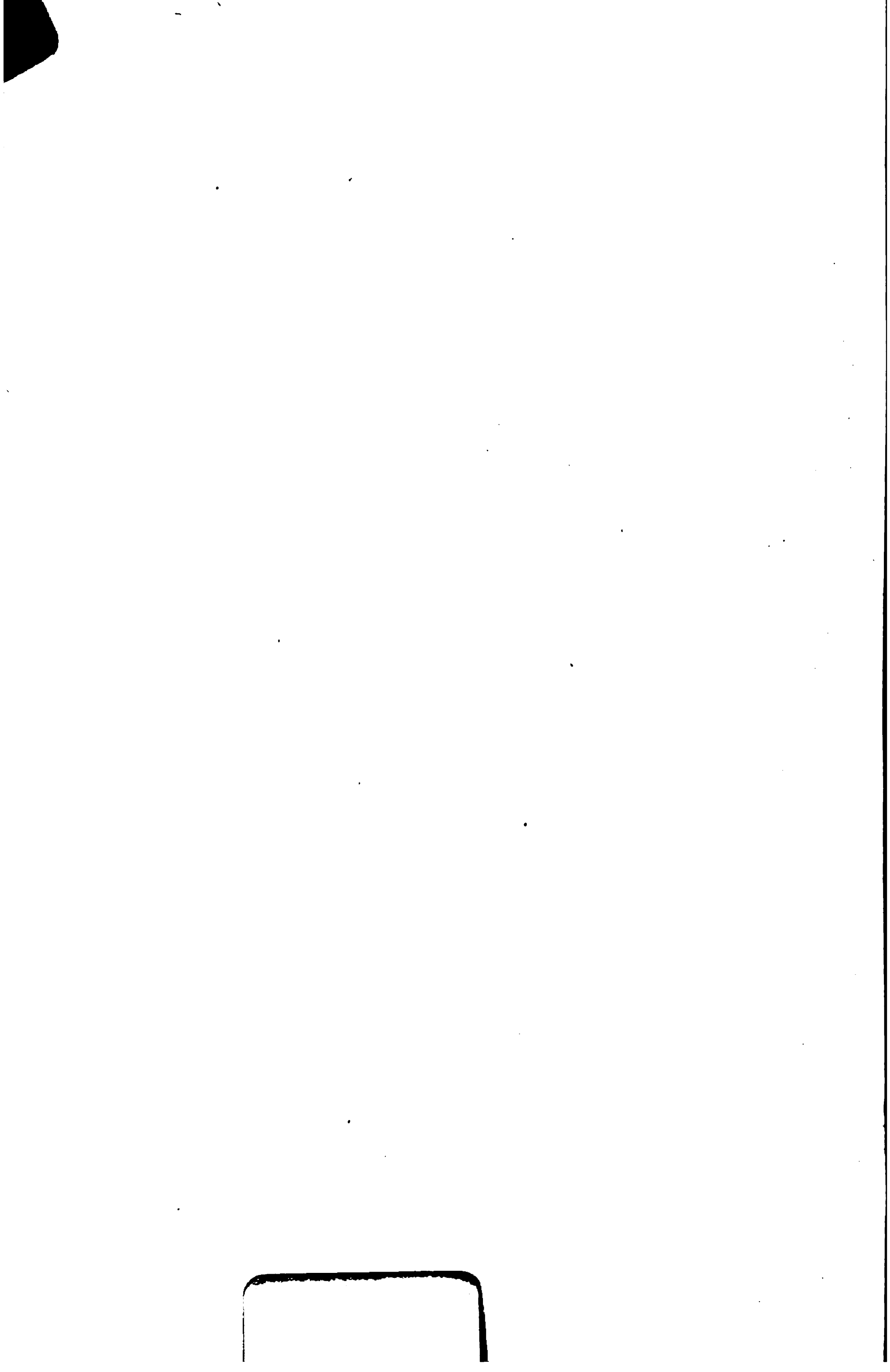




SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

HUNDERTSIEBZEHNTER BAND.

WIEN, 1908.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN KLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CXVII. BAND. ABTEILUNG II a.

JAHRGANG 1908. — HEFT I BIS X.

(MIT 1 KARTE, 4 DOPPELTAFELN, 10 TAFELN UND 98 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1908.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN KOMMISSION BEI ALFRED HÖLDER,

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTSBUCHHÄNDLER,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. I. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Die kubischen Abel'schen Gleichungen des Bereichs $(-\sqrt{31})$

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1908.)

1.

Die folgende Mitteilung bezieht sich auf einen Aufsatz Kronecker's[1] von gleichlautendem Titel, welcher eine besondere Art von kubischen zyklischen Gleichungen mit dem Bereich $(\sqrt{-31})$ angehörenden Koeffizienten behandelt. Es sind dies Gleichungen, bei welchen der Kubus der Lagrange-schen Resolvente in einer Potenz einer Primzahl p' aufgeht, welche den Bedingungen

$$\left(\frac{-31}{p'}\right) = 1 \qquad \left(\frac{-3}{p'}\right) = 1$$

genügt, ohne jedoch durch die Hauptform der Determinante -31 darstellbar zu sein.

2.

Kronecker hebt nur solche Gleichungen der genannten Art hervor, bei welchen der Kubus der Resolvente in seiner Darstellung durch Primfaktoren als Kubus erscheint. Es gibt aber auch Gleichungen, welche diese Eigenschaft nicht besitzen.

---

[1] Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1882.

Ist α eine imaginäre dritte Einheitswurzel, $\mathfrak{p}(\alpha)$ ein idealer Primfaktor von p' in dem Bereich $(\alpha, \sqrt{-31})$ und wird ein Ausdruck von der Form $f(\alpha)f(\alpha^2)^2$ kurz mit $\nabla f(\alpha)$ bezeichnet, so zeigt Kronecker an dem angeführten Orte, daß $\mathfrak{p}(\alpha)^3$, $\nabla\mathfrak{p}(\alpha)$ wirkliche Zahlen $H(\alpha)$, $\Theta(\alpha)$ in $(\alpha, \sqrt{-31})$ sind, daß jedoch $\Theta(\alpha)$ nicht der Kubus der Resolvente einer zyklischen Gleichung dritten Grades sein kann und weist auf die Gleichungen hin, deren Wurzeln x_0, x_1, x_2 bei beliebiger Wahl ihrer Summe in dem Bereich $(\sqrt{-31})$ aus den Gleichungen

$$(x_0+\alpha^2 x_1+\alpha x_2)^3 = \nabla H(\alpha)$$
$$(x_0+\alpha x_1+\alpha^2 x_2)^3 = \nabla H(\alpha^2)$$

hervorgehen.

Setzt man jedoch

$$x_0+\alpha^2 x_1+\alpha x_2 = \Theta(\alpha)^{\frac{1}{3}}\Theta(\alpha^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$x_0+\alpha x_1+\alpha^2 x_2 = \Theta(\alpha)^{\frac{2}{3}}\Theta(\alpha^2)^{\frac{1}{3}}$$

und bezeichnet die zweimalige Operation ∇ mit ∇^2, so ist

$$\nabla\Theta(\alpha) = \nabla^2\mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{p}(\alpha)^{[illegible]}\mathfrak{p}(\alpha^2)^{4}$$

und man erhält zyklische Gleichungen, bei welchen der Kubus der Resolvente kein Kubus im arithmetischen Sinne ist.

Diese Gleichungen haben die merkwürdige Eigenschaft, daß nicht schon $\nabla\mathfrak{p}(\alpha)$, wie bei den Primfaktoren ersten Grades in der Kreisteilung, sondern erst $\nabla^2\mathfrak{p}(\alpha)$ als Kubus einer Resolvente darstellbar ist.

3.

Als Beispiel diene die Primzahl [illegible]7.

Es sei

[illegible]

[illegible]

Die Gleichung

$$\varphi(\alpha^2) - \alpha n(\alpha) v = 7(t - \alpha v) + (2 - \sqrt{-3}) u$$

ergibt

$$(\varphi(\alpha^2) - \alpha n(\alpha) v)^2 = 49(t - \alpha v)^2 + 14(2 - \sqrt{-3}) u (t - \alpha v) + (2 - \sqrt{-3})^2 u^2;$$

es ist aber

$$\frac{49}{n(\alpha)} = \frac{49 n_1(\alpha)}{n(\alpha) n_1(\alpha)} = \frac{49 n_1(\alpha)}{7(2-\alpha^2)} = (2-\alpha) n_1(\alpha)$$

$$\frac{7(2-\sqrt{-3})}{n(\alpha)} = \frac{7(2-\sqrt{-3}) n_1(\alpha)}{n(\alpha) n_1(\alpha)} = -\alpha n_1(\alpha).$$

Sonach ist der Ausdruck

$$\frac{\varphi(\alpha^2)^2}{n(\alpha)} - \frac{(2-\sqrt{-3})^2}{n(\alpha)} u^2$$

und daher auch

$$\frac{\nabla \varphi(\alpha)}{n(\alpha)} - \frac{(2-\sqrt{-3})^2 \varphi(\alpha) u^2}{n(\alpha)}$$

eine ganze algebraische Form; weil aber

$$\frac{(2-\sqrt{-3})^2 \varphi(\alpha)}{n(\alpha)} =$$

$$= \frac{(2-\sqrt{-3})^2}{n(\alpha)} (7(t - \alpha v) + (2 + \sqrt{-3}) u + \alpha n(\alpha) v)$$

$$= \alpha (2-\sqrt{-3})^2 v + \frac{7(2-\sqrt{-3})}{n(\alpha)} (u + (2 - \sqrt{-3})(t - \alpha v))$$

algebraisch ganz ist, so ist auch $\frac{\nabla \varphi(\alpha)}{n(\alpha)}$ eine ganze algebraische Form $\psi(\alpha)$.

Ferner ist

$$7^3 = (8 + 3\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$7^2 (2 + \sqrt{-31}) = (-11 + 2\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$7(2 + \sqrt{-31})^2 = -(12 + \sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$(2 + \sqrt{-31})^3 = (1 - 2\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31}).$$

Das Produkt $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)$ hat demnach auf Grund der Kongruenz

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2) \equiv [(2+\sqrt{-3})u+(2+\sqrt{-31})v][(2-\sqrt{-3})u+ +(2+\sqrt{-31})v]$$
$$\equiv (2+\sqrt{-31})^2 v^2+4(2+\sqrt{-31})uv \pmod 7$$

die Gestalt

$$7A+(2+\sqrt{-31})B$$

und es wird

$$[\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)]^3 = (8-3\sqrt{-31})\chi,$$

wo A, B, χ ganz und ganzzahlig in $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-31}$, t, u, v sind.

Die Koeffizienten

$$\frac{7^3}{8-3\sqrt{-31}} = 8+3\sqrt{-31}$$

$$\frac{(2+\sqrt{-31})^6}{8-3\sqrt{-31}} = (8-3\sqrt{-31})(1-2\sqrt{-31})^2$$

von u^6, v^6 in χ sind teilerfremd. Denn es seien a, b die Wurzeln der Kongruenzen

$$16a \equiv 1 \pmod{7^3}$$
$$19b \equiv 1 \pmod{7^3}.$$

Es ist dann

$$(8-3\sqrt{-31})a = 16a-a(8+3\sqrt{-31}) \equiv 1$$
$$3(1-2\sqrt{-31})b = 19b-2b(8+3\sqrt{-31}) \equiv 1$$
$$(\mathrm{mod}\ 8+3\sqrt{-31})$$

und daher

$$9ab^2(8-3\sqrt{-31})(1-2\sqrt{-31})^2 \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 8+3\sqrt{-31}).$$

Sonach ist χ eine primitive Form.

Dasselbe gilt von ψ auf Grund der Gleichung

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^2) = \frac{\nabla\varphi(\alpha)}{n(\alpha)} \cdot \frac{\nabla\varphi(\alpha^2)}{n(\alpha^2)} = \frac{\varphi(\alpha)^3\varphi(\alpha^2)^3}{8-3\sqrt{-31}}$$
$$= \chi.$$

Die Gleichung

$$\alpha n(\alpha^2) = n(\alpha)+7(\alpha-1)$$

führt noch zu

$$\alpha^2 n(\alpha^2)^2 = n^2(\alpha)+14(\alpha-1)\,n(\alpha)+49(\alpha-1)^2$$

$$\frac{n(\alpha^2)^2}{n(\alpha)} = \alpha n(\alpha)+14(\alpha^2-\alpha)+\alpha(\alpha-1)^2\cdot\frac{49}{n(\alpha)}$$

$$= 45+3\alpha+(4+9\alpha)\sqrt{-31}.$$

Der Verband der Koeffizienten von $\varphi(\alpha)$ bildet demnach eine ideale Primzahl $\mathfrak{p}(\alpha)$ und es ist

$$\nabla\mathfrak{p}(\alpha) = n(\alpha)$$

$$\nabla n(\alpha) = \nabla^{(2)}\mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{p}(\alpha)^5\,\mathfrak{p}(\alpha^2)^4$$

$$\mathfrak{p}(\alpha)^3 = \frac{n^2(\alpha^2)}{n(\alpha)} = 45+3\alpha+(4+9\alpha)\sqrt{-31}.$$

Die Gleichungen

$$x_0+x_1+x_2 = 0$$

$$x_0+\alpha^2 x_1+\alpha\, x_2 = n(\alpha)^{\frac{1}{3}}\, n(\alpha^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$x_0+\alpha\, x_1+\alpha^2 x_2 = n(\alpha^2)^{\frac{1}{3}}\, n(\alpha)^{\frac{2}{3}}$$

führen zu der zyklischen Gleichung

$$x^3-\frac{1}{3}(8-3\sqrt{-31})x-\frac{1}{27}(3-44\sqrt{-31}) = 0.$$

Über eigentümliche Temperaturschwankungen von eintägiger Periode im Wolfgangsee

von

Dr. Felix M. Exner.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Jänner 1908.)

Schon vor Jahren wurde einmal der Versuch gemacht,[1] gelegentlich eines Sommeraufenthaltes am Wolfgangsee in Salzburg die Tiefe des Eindringens der täglichen Erwärmung in ein Wasserbecken zu bestimmen, wozu fortlaufende Temperaturmessungen in verschiedenen Seetiefen angestellt wurden. Da die Resultate damals keine befriedigenden waren, habe ich auf Anregung von Herrn Hofrat J. Hann und mit Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften aus der Boué-Stiftung im verflossenen Sommer 1907 die Beobachtungen mit anderen Instrumenten zu wiederholen versucht. Es sei mir gestattet, sowohl für die Anregung wie für die materielle Unterstützung auch an dieser Stelle bestens zu danken.

Gleich hier werde mitgeteilt, daß die Ergebnisse dieser Messungen nicht die gewünschten waren. Da mir nur ein einmonatlicher Urlaub zur Verfügung stand, der zum größten Teile in den regenreichen Juli 1907 fiel, konnte die Wirkung der Sonnenstrahlung auf die Wassertemperaturen nur an einigen wenigen Tagen beobachtet werden und die betreffenden Messungen sind zur Lösung unserer Frage vollkommen unzureichend.

---

[1] Messungen der täglichen Temperaturschwankungen in verschiedenen Tiefen des Wolfgangsees. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIX, Abt. IIa (1900).

Wenn trotzdem über diese Beobachtungsreihe hier etwas weniges mitgeteilt wird, so geschieht es wegen eigentümlich großer und ziemlich regelmäßiger Temperaturschwankungen, die in größerer Tiefe beobachtet wurden und nicht dem direkten Einflusse der Sonnenstrahlung zugeschrieben werden können.

Als Thermometer wurden elektrische eines neuartigen, von Prof. Alois Kreidl angegebenen und vom Glasbläser Haack in Wien ausgeführten Systems verwendet. Eine Beschreibung derselben erfolgt durch Herrn Prof. Kreidl in diesen Berichten.

Diese Instrumente sind leider noch nicht genügend ausprobiert und daher nicht vollkommen verläßlich. Die mit ihnen beobachteten Temperaturen können auf einige wenige Zehntelgrade fehlerhaft sein. Wenn ich trotzdem die mit ihnen ausgeführten Messungen mir vorzulegen erlaube, so geschieht es, weil die beobachteten Temperaturschwankungen die Fehlergrenzen weitaus übersteigen.

Die elektrischen Thermometer arbeiten als Widerstände, welche nach dem Stande des Quecksilbers im Kapillarrohre sich ändern. Es wird nämlich der Widerstand eines Kohlenfadens bestimmt, der vom oberen Ende des Thermometers bis in dessen Kugel hineinragt. So weit das Quecksilber in der Kapillarröhre steht, dient dasselbe als Leiter des elektrischen Stromes, darüber bildet der Kohlenfaden die elektrische Verbindung und repräsentiert einen Widerstand je nach dem Stande des Quecksilberfadens von 400 bis 900 Ohm.

Dieser Widerstand wird gemessen und aus ihm die Temperatur nach vorheriger Eichung bestimmt. Herr Prof. A. Kreidl war so gütig, mir die erforderlichen Widerstandsmeßapparate in einer sehr bequemen Form zur Verfügung zu stellen, wofür ich ihm auch hier bestens danke.

Die Meßstelle lag am Nordende des Wolfgangsees (Brunnwinkel). Ein verankertes Holzkreuz schwamm je nach dem Winde 30 bis 40 *m* entfernt vom Ufer, an einer Stelle, wo der See zirka 40 *m* tief war. Das Ufer bildet dort eine steile Felswand, die sich auch unter Wasser noch ein Stück fortsetzt. Das Holzkreuz trug einen Mast, von welchem die Verbindungsdrähte in das etwa 200 *m* entfernte Beobachtungshaus liefen.

Unter Wasser hingen die Thermometer mit wasserdicht verschlossenen Lötstellen an paragummierten Kupferkabeln.

Da die Absicht bestand, die Einwirkung der täglichen Periode der Sonnenstrahlung so weit hinab zu verfolgen, bis sie verschwindet, wurden die sechs vorhandenen Thermometer zwischen der Oberfläche und 21 *m* Tiefe verteilt, und zwar in folgenden Höhen unter der Oberfläche:

Thermometer Nr.	I	II	III	IV	V	VI
in Metern...........	0·65	1·90	4·07	7·24	12·20	21·12

Die fortlaufenden Beobachtungen, die alle drei Stunden gemacht wurden,[1] begannen am 20. Juli. Da zwei Thermometer nach dem Transporte reparaturbedürftig waren, konnten in den ersten Tagen nur vier verwendet werden. Waren die vom Mast am See über Stangen und Bäume ohne Isolatoren geführten Zuleitungsdrähte von Regen durchnäßt, so verloren sie leider trotz ihrer mit Wachs getränkten Hanfumspinnung die Isolation gegen den Erdboden dermaßen, daß die Messungen unmöglich wurden. Man mußte nach Regenwetter daher immer ein paar Stunden warten, bis die Drahtumhüllungen getrocknet waren.

Die beobachteten Temperaturen sind nebst der Lufttemperatur am Schlusse in extenso abgedruckt.

Wegen des sehr wechselreichen Wetters waren in der Zeit vom 20. Juli bis zum 6. August nur zwei kurze Reihen vollständiger Messungen bei teilweise bewölktem Himmel, aber ohne Regenfälle zu erhalten, welche im folgenden einzeln diskutiert werden.

Die erste Reihe mit Messungen der Temperatur an den vier obersten Meßstellen umfaßt vier schöne Tage vom 20. Juli, 2^h p., bis zum 24. Juli, 2^h p.; nur die letzten Beobachtungstermine dieser Reihe fallen schon in schlechteres Wetter.

Aus dieser Reihe wurde die tägliche Periode der Temperatur mit Elimination der unperiodischen Änderung während dieser Zeit gebildet und ist für die vier Meßstellen in Celsiusgraden hier zusammengestellt.

---

[1] Bei diesen wurde ich durch meine Frau und Herrn Karl R. v. Frisch unterstützt.

Temp. in ° C.	2^h a.	5^h a.	8^h a.	11^h a.	2^h p.	5^h p.	8^h p.	11^h p.
in I	14·3	14·3	14·3	14·5	**14·8**	14·4	*14·2	14·3
» II	14·3	14·3	14·3	14·4	**14·5**	14·3	*14·1	14·3
» III	14·2	14·0	14·2	**14·3**	14·2	*13·9	*13·9	14·2
» IV	13·8	13·6	14·2	**14·5**	13·4	*13·3	13·7	13·9

Fett gedruckt: Maximum, *: Minimum.

Weiter ergibt sich für den Mittelwert und die Amplitude (Differenz zwischen Maximum und Minimum):

	in 65 *cm*	190 *cm*	407 *cm*	724 *cm*
Mitteltemp. ° C. .	14·38	14·31	14·11	13·78
Amplitude	0·69	0·39	0·37	1·17

Neben der geringen Temperaturabnahme nach der Tiefe fällt hier vor allem der Gang der Amplitude in die Augen. Letztere nimmt in den oberen Schichten rasch ab, wie zu erwarten war; zwischen 2 und 4 *m* ist sie fast konstant, darunter nimmt sie sehr schnell zu, um in 7 *m* den Wert 1·2° zu erreichen. Es ist klar, daß diese Temperaturschwankung in 7 *m* Tiefe nicht durch direkte Wärmestrahlung verursacht sein kann, da sie in höheren Schichten viel geringer ist. Das Maximum fällt in 7 *m* auf den Vormittag, 11^h a., in höheren Schichten auf 2^h p., was gleichfalls einem direkten Zusammenhang der Periode oben und unten widerspricht. Im übrigen ist der Temperaturgang an der Meßstelle IV recht unregelmäßig.

Es ist klar, daß hier Umstände eine Rolle spielen, welche ein Verfolgen des Eindringens der Wärmestrahlung in die Tiefe unmöglich machen, Temperaturschwankungen, die, wenn sie reell sind, andere Ursachen haben müssen als Strahlung oder Leitung der Wärme von der Oberfläche hinab.

Es läge nahe, die eigentümliche Erscheinung auf Fehler der Temperaturbestimmung, auf Zufälle während der kurzen Beobachtungsreihe von vier Tagen oder Ähnliches zurückzuführen, wenn nicht die weiteren Beobachtungen die Realität

und Regelmäßigkeit dieser großen Temperaturschwankung erweisen würden.

Die weiteren Messungen vom 24. bis 31. Juli sind durch schlechte Isolation der Leitungsdrähte infolge von Regenwetter häufig unterbrochen. Erst am 31., nachmittags, begann eine längere Reihe teils trüber, teils heiterer Tage ohne Regen und hielt an, bis am 7. August die Messungen abgebrochen werden mußten. Die Periode vom 31. Juli bis 6. August nachts habe ich im folgenden vereinigt, da die großen Temperaturschwankungen in den tieferen Wasserschichten auch bei trübem Wetter eintraten. Der Einfluß der Sonnenstrahlung auf die obersten Schichten kann natürlich bei dieser Vereinigung heiterer und trüber Tage nicht klar zum Ausdrucke kommen.

Aus den Messungen vom 31. Juli, 11^h p., bis 6. August, 11^h p., ergeben sich nach Elimination der unperiodischen Temperaturzunahmen während dieser Zeit die folgenden Stundenwerte der Temperatur in den verschiedenen Tiefen:

	2^h a.	5^h a.	8^h a.	11^h a.	2^h p.	5^h p.	8^h p.	11^h p.
I......	17·5	17·5	*17·4	17·6	**18·0**	17·6	17·6	17·5
II.....	17·4	17·5	17·4	17·5	17·4	**17·6**	17·5	*17·3
III.....	16·6	**16·9**	16·7	16·7	16·6	16·6	*16·4	16·5
IV.....	13·6	15·4	16·2	**16·4**	15·7	15·1	14·5	*12·6
V.....	10·5	10·2	9·4	9·1	* 8·7	9·5	9·7	**10·6**
VI.....	**7·7**	7·2	6·9	*6·6	6·7	6·8	7·4	7·5

Für die Mitteltemperaturen und Amplituden der Perioden findet man:

	in 65 *cm*	190 *cm*	407 *cm*	724 *cm*	1220 *cm*	2112 *cm*
Mitteltemp. ° C. ...	17·60	17·45	16·61	14·92	9·69	7·11
Amplitude	0·63	0·25	0·45	3·78	1·96	1·14

Man sieht, daß zwischen 7 und 12 *m* eine »Sprungschichte« liegt, in welcher die Temperatur viel rascher als darüber und darunter mit der Tiefe abnimmt. Besonders auffallend ist aber die abnorme Amplitude der täglichen Temperaturschwankung an der vierten Meßstelle und darunter. Während der ersten Messungsreihe betrug sie in 724 *cm* Tiefe 1·17°, hier beträgt sie 3·78°. Aber auch in größerer Tiefe,

Ist α eine imaginäre dritte Einheitswurzel, $\mathfrak{p}(\alpha)$ ein idealer Primfaktor von p' in dem Bereich $(\alpha, \sqrt{-31})$ und wird ein Ausdruck von der Form $f(\alpha)f(\alpha^2)^2$ kurz mit $\nabla f(\alpha)$ bezeichnet, so zeigt Kronecker an dem angeführten Orte, daß $\mathfrak{p}(\alpha)^3$, $\nabla\mathfrak{p}(\alpha)$ wirkliche Zahlen $H(\alpha)$, $\Theta(\alpha)$ in $\alpha, \sqrt{-31}$ sind, daß jedoch $\Theta(\alpha)$ nicht der Kubus der Resolvente einer zyklischen Gleichung dritten Grades sein kann und weist auf die Gleichungen hin, deren Wurzeln x_0, x_1, x_2 bei beliebiger Wahl ihrer Summe in dem Bereich $(\sqrt{-31})$ aus den Gleichungen

$$(x_0+\alpha^2 x_1+\alpha\, x_2)^3 = \nabla H(\alpha)$$
$$(x_0+\alpha\, x_1+\alpha^2 x_2)^3 = \nabla H(\alpha^2)$$

hervorgehen.

Setzt man jedoch

$$x_0+\alpha^2 x_1+\alpha\, x_2 = \Theta(\alpha)^{\frac{1}{3}}\,\Theta(\alpha^2)^{\frac{2}{3}}$$
$$x_0+\alpha\, x_1+\alpha^2 x_2 = \Theta(\alpha)^{\frac{2}{3}}\,\Theta(\alpha^2)^{\frac{1}{3}}$$

und bezeichnet die zweimalige Operation ∇ mit $\nabla^{(2)}$, so ist

$$\nabla\Theta(\alpha) = \nabla^{(2)}\mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{p}(\alpha)^5\,\mathfrak{p}(\alpha^2)^4$$

und man erhält zyklische Gleichungen, bei welchen der Kubus der Resolvente kein Kubus in arithmetischem Sinne ist.

Diese Gleichungen haben die merkwürdige Eigenschaft, daß nicht schon $\nabla\mathfrak{p}(\alpha)$, wie bei den Primfaktoren ersten Grades in der Kreisteilung, sondern erst $\nabla^{(2)}\mathfrak{p}(\alpha)$ als Kubus einer Resolvente darstellbar ist.

3.

Als Beispiel diene die Primzahl 7.

Es sei

$$u(\alpha) = 7+\alpha^2(2+\sqrt{-31})$$
$$u_1(\alpha) = 7+\alpha^2(2-\sqrt{-31})$$
$$\varphi(\alpha) = 7t+(2+\sqrt{-3})u+(2+\sqrt{-31})v,$$

wo t, u, v Unbestimmte bezeichnen.

Die Gleichung

$$\varphi(\alpha^2) - \alpha n(\alpha) v = 7(t - \alpha v) + (2 - \sqrt{-3}) u$$

ergibt

$$(\varphi(\alpha^2) - \alpha n(\alpha) v)^2 = 49(t - \alpha v)^2 + 14(2 - \sqrt{-3}) u (t - \alpha v) + (2 - \sqrt{-3})^2 u^2;$$

es ist aber

$$\frac{49}{n(\alpha)} = \frac{49 n_1(\alpha)}{n(\alpha) n_1(\alpha)} = \frac{49 n_1(\alpha)}{7(2 - \alpha^2)} = (2 - \alpha) n_1(\alpha)$$

$$\frac{7(2 - \sqrt{-3})}{n(\alpha)} = \frac{7(2 - \sqrt{-3}) n_1(\alpha)}{n(\alpha) n_1(\alpha)} = -\alpha n_1(\alpha).$$

Sonach ist der Ausdruck

$$\frac{\varphi(\alpha^2)^2}{n(\alpha)} - \frac{(2 - \sqrt{-3})^2}{n(\alpha)} u^2$$

und daher auch

$$\frac{\nabla \varphi(\alpha)}{n(\alpha)} - \frac{(2 - \sqrt{-3})^2 \varphi(\alpha) u^2}{n(\alpha)}$$

eine ganze algebraische Form; weil aber

$$\frac{(2 - \sqrt{-3})^2 \varphi(\alpha)}{n(\alpha)} =$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{-3})^2}{n(\alpha)} (7(t - \alpha v) + (2 + \sqrt{-3}) u + \alpha n(\alpha) v)$$

$$= \alpha (2 - \sqrt{-3})^2 v + \frac{7(2 - \sqrt{-3})}{n(\alpha)} (u + (2 - \sqrt{-3})(t - \alpha v))$$

algebraisch ganz ist, so ist auch $\frac{\nabla \varphi(\alpha)}{n(\alpha)}$ eine ganze algebraische Form $\psi(\alpha)$.

Ferner ist

$$7^3 = (8 + 3\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$7^2 (2 + \sqrt{-31}) = (-11 + 2\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$7(2 + \sqrt{-31})^2 = -(12 + \sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$(2 + \sqrt{-31})^3 = (1 - 2\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31}).$$

die tägliche Schwankung des Temperaturgradienten. Bei etwa 11 *m* ist die Schwankung wieder sehr klein, darunter kehrt sie sich um, erreicht ein Maximum wohl unter 12 *m*, um dann neuerdings langsam herabzusinken. Die voll ausgezogene Kurve (11^h a.) zeigt die Sprungschichte (großen Temperaturgradienten) zwischen 7 und 12 *m*, die strichpunktierte Kurve (11^h p.) dieselbe zwischen 4 und 7 *m*; darunter ist der Temperaturgradient um 11^h p. fast ganz linear bis zu 21 *m* Tiefe. Es scheint also die Sprungschichte im Lauf eines Tages ihre Höhenlage ganz wesentlich zu verändern. Neben dieser Erscheinung geht noch die umgekehrte tägliche Periode der tieferen Schichten her. Leider bieten die sechs Meßstellen zu wenig Anhaltspunkte, um den Verlauf der Temperatur mit der Tiefe eingehender verfolgen zu können.

Zur Erklärung dieser ungewöhnlichen Erscheinungen wäre es am nächstliegenden, einen periodischen Fehler in der Temperaturbestimmung anzunehmen. Zieht man die am Schlusse abgedruckten Einzelablesungen zu Rate, so findet man aber, wie schon gesagt, daß dieser Gang der Temperatur vom 31. Juli bis zum 6. August jeden Tag beobachtet wurde. Da ist es denn schwer, sich vorzustellen, daß Fehler in der Temperaturmessung mit solcher Regelmäßigkeit eingetreten sein sollten. Würden die Apparate zur Widerstandsbestimmung irgendwie fehlerhaft funktioniert haben, so müßten wohl die Messungen an den Stellen IV, V und VI den gleichen Gang zeigen, nicht die von IV den gerade entgegengesetzten von V und VI. So bleibt wohl nichts anderes anzunehmen übrig, als daß diese Temperaturschwankungen reell sind.

Daß sie durch direkte Sonnenstrahlung bedingt sind, ist natürlich ausgeschlossen. Also muß man an periodische Strömungen denken, welche verschieden temperiertes Wasser an die Meßstellen bringen. Zuflüsse in den See sind in der Nähe des Beobachtungsortes allerdings vorhanden, nämlich ein nicht ganz kleiner Bach, der etwa 200 Schritt entfernt mündet, und eine kleine Quelle in größerer Nähe, vielleicht auch noch etliche andere Quellen, die unter Wasser münden mögen. Es ist aber nicht einzusehen, wie solche Zuflüsse bei der Abwesenheit jedes Gletschers oder Schneereservoirs in der Nähe eine

Die Gleichung

$$\varphi(\alpha^2) - \alpha n(\alpha) v = 7(t - \alpha v) + (2 - \sqrt{-3}) u$$

ergibt

$$(\varphi(\alpha^2) - \alpha n(\alpha) v)^2 = 49(t - \alpha v)^2 + 14(2 - \sqrt{-3}) u (t - \alpha v) + (2 - \sqrt{-3})^2 u^2;$$

es ist aber

$$\frac{49}{n(\alpha)} = \frac{49 n_1(\alpha)}{n(\alpha) n_1(\alpha)} = \frac{49 n_1(\alpha)}{7(2 - \alpha^2)} = (2 - \alpha) n_1(\alpha)$$

$$\frac{7(2 - \sqrt{-3})}{n(\alpha)} = \frac{7(2 - \sqrt{-3}) n_1(\alpha)}{n(\alpha) n_1(\alpha)} = -\alpha n_1(\alpha).$$

Sonach ist der Ausdruck

$$\frac{\varphi(\alpha^2)^2}{n(\alpha)} - \frac{(2 - \sqrt{-3})^2}{n(\alpha)} u^2$$

und daher auch

$$\frac{\nabla \varphi(\alpha)}{n(\alpha)} - \frac{(2 - \sqrt{-3})^2 \varphi(\alpha) u^2}{n(\alpha)}$$

eine ganze algebraische Form; weil aber

$$\frac{(2 - \sqrt{-3})^2 \varphi(\alpha)}{n(\alpha)} =$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{-3})^2}{n(\alpha)} (7(t - \alpha v) + (2 + \sqrt{-3}) u + \alpha n(\alpha) v)$$

$$= \alpha (2 - \sqrt{-3})^2 v + \frac{7(2 - \sqrt{-3})}{n(\alpha)} (u + (2 - \sqrt{-3})(t - \alpha v))$$

algebraisch ganz ist, so ist auch $\frac{\nabla \varphi(\alpha)}{n(\alpha)}$ eine ganze algebraische Form $\psi(\alpha)$.

Ferner ist

$$7^3 = (8 + 3\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$7^2 (2 + \sqrt{-31}) = (-11 + 2\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$7(2 + \sqrt{-31})^2 = -(12 + \sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31})$$

$$(2 + \sqrt{-31})^3 = (1 - 2\sqrt{-31})(8 - 3\sqrt{-31}).$$

Das Produkt $\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)$ hat demnach auf Grund der Kongruenz

$$\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2) \equiv [(2+\sqrt{-3})u+(2+\sqrt{-31})v][(2-\sqrt{-3})u+ \\ +(2+\sqrt{-31})v] \\ \equiv (2+\sqrt{-31})^2v^2+4(2+\sqrt{-31})uv \pmod 7$$

die Gestalt

$$7A+(2+\sqrt{-31})B$$

und es wird

$$[\varphi(\alpha)\varphi(\alpha^2)]^3 = (8-3\sqrt{-31})\chi,$$

wo A, B, χ ganz und ganzzahlig in $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-31}$, t, u, v sind.

Die Koeffizienten

$$\frac{7^3}{8-3\sqrt{-31}} = 8+3\sqrt{-31}$$

$$\frac{(2+\sqrt{-31})^6}{8-3\sqrt{-31}} = (8-3\sqrt{-31})(1-2\sqrt{-31})^2$$

von u^6, v^6 in χ sind teilerfremd. Denn es seien a, b die Wurzeln der Kongruenzen

$$16a \equiv 1 \pmod{7^3}$$
$$19b \equiv 1 \pmod{7^3}.$$

Es ist dann

$$(8-3\sqrt{-31})a = 16a-a(8+3\sqrt{-31}) \equiv 1$$
$$3(1-2\sqrt{-31})b = 19b-2b(8+3\sqrt{-31}) \equiv 1$$
$$(\mathrm{mod}\ 8+3\sqrt{-31})$$

und daher

$$9ab^2(8-3\sqrt{-31})(1-2\sqrt{-31})^2 \equiv 1 \pmod{8+3\sqrt{-31}}.$$

Sonach ist χ eine primitive Form.

Dasselbe gilt von ψ auf Grund der Gleichung

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^2) = \frac{\nabla\varphi(\alpha)}{n(\alpha)} \cdot \frac{\nabla\varphi(\alpha^2)}{n(\alpha^2)} = \frac{\varphi(\alpha)^3\varphi(\alpha^2)^3}{8-3\sqrt{-31}} \\ = \chi.$$

Die Gleichung

$$\alpha n(\alpha^2) = n(\alpha)+7(\alpha-1)$$

führt noch zu

$$\alpha^2 n(\alpha^2)^2 = n^2(\alpha)+14(\alpha-1)\,n(\alpha)+49(\alpha-1)^2$$

$$\frac{n(\alpha^2)^2}{n(\alpha)} = \alpha n(\alpha)+14(\alpha^2-\alpha)+\alpha(\alpha-1)^2\cdot\frac{49}{n(\alpha)}$$

$$= 45+3\alpha+(4+9\alpha)\sqrt{-31}.$$

Der Verband der Koeffizienten von $\varphi(\alpha)$ bildet demnach eine ideale Primzahl $\mathfrak{p}(\alpha)$ und es ist

$$\nabla\mathfrak{p}(\alpha) = n(\alpha)$$

$$\nabla n(\alpha) = \nabla^{(2)}\mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{p}(\alpha)^5\,\mathfrak{p}(\alpha^2)^4$$

$$\mathfrak{p}(\alpha)^3 = \frac{n^2(\alpha^2)}{n(\alpha)} = 45+3\alpha+(4+9\alpha)\sqrt{-31}.$$

Die Gleichungen

$$x_0+x_1+x_2 = 0$$

$$x_0+\alpha^2 x_1+\alpha\, x_2 = n(\alpha)^{\frac{1}{3}}\,n(\alpha^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$x_0+\alpha\, x_1+\alpha^2 x_2 = n(\alpha^2)^{\frac{1}{3}}\,n(\alpha)^{\frac{2}{3}}$$

führen zu der zyklischen Gleichung

$$x^3-\frac{1}{3}(8-3\sqrt{-31})x-\frac{1}{27}(3-44\sqrt{-31}) = 0.$$

der Luftbewegung längere Tage hindurch anhalten. Die eintägige Periode kann eine erzwungene Schwingung sein, sie kann aber auch zufällig nahe der Eigenschwingung des Seebeckens bei bestimmter Temperaturschichtung entsprechen; schließlich könnte diese Schichtung sich der ursächlichen Periode entsprechend hergestellt haben und so die erzwungene eine freie Schwingung geworden sein.

Freilich könnte man auch glauben, daß die ganze Erscheinung der Temperaturschwankungen sich nur auf ein dem Ufer verhältnismäßig nahes Gebiet des Seebeckens erstreckt und in irgend einem Zusammenhange mit den lokalen Verhältnissen des Sees am Beobachtungsorte steht. Für eine Erklärung der täglichen Schwankung stünde dann aber doch wieder nur die Sonnenwärme, die etwa die Ufer erwärmt, zur Verfügung, die an trüben Tagen nicht in Betracht kommen kann.

Die hier beschriebenen Beobachtungen können über die Ursache der Erscheinung zu keiner Klarheit verhelfen und machen nur den Wunsch rege, es mögen einmal ähnliche Beobachtungen an mehreren Punkten eines Sees zugleich und durch längere Zeit angestellt werden, wie dies in Schottland geschieht. Sie würden vielleicht auch Klarheit über die Art und Weise des Wärmetransportes in Seen von der Oberfläche nach abwärts bringen.

Anhang.

Temperaturbeobachtungen an den sechs Meßstellen in Celsiusgraden.

Datum	Zeit	I	II	III	IV	V	VI	Anmerkung
20./VII.	2^h p.	14·0	13·3	13·4	13·6	—	—	klar, mäßiger Wind
	5	13·5	13·1	13·2	13·1	—	—	» » »
	8	12·9	13·1	13·0	13·1	—	—	klar, fast windstill
	11	13·0	13·0	13·2	13·4	—	—	klar, Mondschein
21.	5 a.	13·5	13·3	13·6	13·6	—	—	klar, fast windstill
	8	13·7	13·4	13·7	13·7	—	—	klar, mäßiger Wind
	11	14·1	14·0	13·9	13·4	—	—	» schwacher Wind
	2 p.	14·4	14·0	13·9	13·4	—	—	» mäßiger Wind
	5	14·1	13·8	13·1	12·6	—	—	klar, windstill
	8	13·7	13·3	13·2	13·2	—	—	fast klar, Mondschein
	11	14·0	13·8	13·5	13·2	—	—	» » windstill
22.	2 a.	14·1	13·7	13·4	13·4	—	—	klar, schwacher Wind
	5	13·9	13·7	13·5	13·3	—	—	» » »
	8	14·0	13·9	13·7	14·1	—	—	» » »
	11	14·1	14·0	14·0	14·5	—	—	» mäßiger Wind

Datum	Zeit	I	II	III	IV	V	VI	Anmerkung
22./VII.	2h p.	14·5	14·5	14·0	13·3	—	—	klar, sehr schwacher Wind
	5	14·3	14·5	14·1	13·7	—	—	» schwacher Wind
	8	14·1	14·3	14·0	14·0	—	—	ganz klar, windstill
	11	14·0	14·0	13·9	13·7	—	—	» » Mondschein
23.	2 a.	14·3	14·7	14·1	13·4	—	—	» » windstill
	6	14·3	14·7	13·5	13·4	—	—	fast klar, ziemlich windstill
	8	14·4	14·7	14·4	13·7	—	—	klar, windstill
	11	14·8	14·9	14·6	14·7	—	—	teilweise bewölkt, windstill
	2 p.	15·3	15·2	14·6	14·2	—	—	» » NE-Wind
	5	14·7	14·9	14·5	14·5	—	—	bewölkt, windstill
	8	15·3	15·3	14·8	14·9	—	—	klar, windstill
	11	15·8	15·9	15·8	15·5	—	—	bewölkt, S-Wind, Wetterleuchten
24.	5 a.	15·6	15·6	15·7	13·9	—	—	teilweise bewölkt, windstill
	8	15·7	15·6	15·6	14·8	—	—	ganz klar
	11	15·8	15·6	15·3	14·4	10·9	7·7	fast ganz bedeckt, windstill
	2 p.	16·3	15·5	15·5	11·5	11·5	6·7	» » » schwacher Wind
	5	16·0	15·7	15·4	12·0	11·0	6·5	trüb, windstill
	8	16·1	16·8	15·9	13·8	12·2	8·1	Regenwetter

25.	11	16·3	16·8	16·3	11·7	12·2	—	regnerisch
	2 p.	16·7	16·5	15·3	11·8	11·6	6·7	teilweise bewölkt, NE-Wind
	5	16·5	16·3	14·7	11·4	10·9	6·8	» » »
	8	16·0	16·3	15·3	11·9	(12·2)	8·2	meist bewölkt, S-Wind
	11	17·4	(17·3)	16·6	13·4	(12·2)	8·3	bewölkt, schwacher S-Wind
26.	2 a.	17·5	(17·3)	16·7	12·4	(12·2)	7·5	» windstill
	8	17·7	17·4	17·3	—	11·2	8·2	trüb, naß, neblig
	$11^1/_2$	17·2	17·5	16·5	12·1	9·5	7·1	bewölkt, mäßiger Wind
	2 p.	17·4	17·4	15·9	11·9	10·0	6·7	» schwacher Wind
	5	18·0	17·6	16·7	13·8	—	—	trüb, regnerisch
	8	18·2	17·6	—	—	—	—	trüb, Regen aufgehört
27.	2 p.	17·5	17·2	15·8	12·4	(12·2)	7·7	meist bewölkt, zeitweise Sonne
29.	2 p.	18·3	—	16·5	14·8	(12·2)	7·6	klar, mäßiger Wind
	5	17·7	—	15·8	13·5	11·2	7·1	» schwacher Wind
	8	17·6	—	16·5	14·2	11·9	7·5	fast ganz klar, schwacher Wind
	11	19·5	—	17·6	13·4	(12·2)	8·7	klar
30.	2 a.	18·8	—	17·6	14·4	12·0	9·1	»
	5	18·5	—	17·8	15·8	11·9	8·6	meist klar
	8	18·2	—	17·4	16·1	10·1	7·3	teilweise bewölkt
	11	18·6	—	17·8	12·8	10·0	7·7	meist bewölkt, heftiger Wind
	2 p.	18·1	17·9	17·8	10·6	6·6	6·5	bewölkt, schwacher Wind

Datum	Zeit	I	II	III	IV	V	VI	Anmerkung
31./VII.	11½h a.	17·2	(17·3)	16·8	15·2	10·3	7·1	wechselnd bewölkt, vorher Regen
	5 p.	16·7	16·8	15·8	11·0	8·2	6·1	klar, vorher Regen
	8	16·5	16·7	15·7	12·8	12·2	9·2	meist bewölkt, windstill
	11	16·4	16·6	15·4	12·0	10·2	7·3	bewölkt
1./VIII.	5 a.	16·5	17·1	16·5	16·2	12·2	8·3	» , schwacher Wind
	8	16·7	17·2	16·5	16·4	8·7	6·3	» , » »
	11½	17·0	17·3	16·6	15·9	8·7	6·9	teilweise bewölkt
	2 p.	17·7	(17·3)	16·6	15·7	8·8	6·8	» » schwacher Wind
	5	17·0	17·2	16·5	11·1	10·2	6·7	» bewölkt, fast windstill
	8	16·7	17·2	15·8	10·3	10·2	8·3	» » » »
	11	16·4	17·0	15·7	11·5	11·6	7·8	bedeckt, windstill
2.	2 a.	16·5	17·1	16·1	12·3	10·6	8·5	» »
	5	16·5	17·2	16·2	14·4	10·0	6·7	fast ganz bedeckt, windstill
	8	16·7	17·1	16·1	15·5	9·2	7·0	bedeckt, windstill
	11	16·8	17·0	15·7	15·7	8·7	6·2	teilweise bewölkt
	2 p.	17·1	17·0	15·8	15·4	8·7	6·7	» » , schwacher Wind
	5	16·8	17·1	15·3	15·1	10·4	6·9	meist klar, schwacher Wind
	8	16·4	17·1	15·3	12·9	10·3	7·1	schwach bewölkt, schwacher Wind

	11	16·2	17·0	15·3	12·1	10·5	7·5	klar, windstill
3.	$6^3/_4$ a.	16·6	17·1	15·9	14·8	9·0	7·3	neblig, windstill
	8	16·5	17·0	15·8	15·1	9·3	7·0	klar, etwas neblig, windstill
	11	17·2	17·0	15·6	15·6	8·7	6·6	» mäßiger Wind
	2 p.	16·7	16·8	15·5	15·6	7·9	6·8	» » »
	5	16·5	16·8	15·3	14·7	8·0	6·8	» sehr schwacher Wind
	8	17·3	17·0	15·7	16·0	9·4	7·5	teilweise bewölkt, schwacher Wind
	11	17·2	(17·3)	16·2	12·1	10·3	7·6	klar, windstill
4.	2 a.	17·6	(17·3)	16·1	12·8	9·8	7·4	bewölkt, windstill
	5	17·4	(17·3)	16·2	15·2	10·0	7·2	teilweise bewölkt, windstill
	8	17·4	(17·3)	16·1	15·0	10·0	6·7	klar, windstill
	11	17·5	(17·3)	16·2	15·8	10·1	6·0	» mäßiger Wind
	$2^1/_4$ p.	17·4	(17·3)	16·1	15·5	9·1	6·3	» » »
	5	17·2	(17·3)	16·1	15·1	9·4	6·7	» schwacher Wind
	8	17·0	(17·3)	16·3	15·2	9·3	7·2	» windstill
	11	17·9	17·5	16·8	13·5	10·1	7·6	» »
5.	2 a.	18·0	17·5	16·9	14·5	10·2	7·6	» »
	5	17·9	17·4	16·9	15·8	10·4	7·1	» »
	8	17·7	17·4	16·7	15·6	9·6	7·3	» »
	11	18·0	17·3	16·9	15·9	8·8	6·5	schwach bewölkt, windstill
	2 p.	19·4	17·5	17·0	15·7	9·0	7·1	teilweise » »

Datum	Zeit	I	II	III	IV	V	VI	Anmerkung
5./VIII.	5h p.	18·7	17·8	17·2	16·2	9·7	7·3	klar, windstill
	8	19·2	17·8	17·4	14·2	9·0	7·1	» schwacher Wind
	3/4 11	19·7	17·8	17·6	13·2	10·6	7·0	» windstill
6.	2 a.	19·1	18·0	17·6	13·9	10·9	7·3	meist bewölkt, windstill
	5	19·1	18·8	18·7	15·4	9·2	6·5	teilweise bewölkt, mäßiger Wind
	8	19·1	18·3	18·7	19·1	9·2	7·0	meist » heftiger S-Wind
	1/2 11	19·3	18·8	18·8	19·3	9·4	7·3	klar, S-Wind
	2 p.	20·3	18·6	19·0	16·6	8·5	6·5	» windstill
	5	—	19·6	19·8	18·7	9·5	6·8	teilweise bewölkt, vorher Gewitterregen
	8	20·1	19·3	19·4	19·1	—	7·6	» » fast windstill
	11	19·2	18·1	18·9	14·3	10·9	8·1	—

Durch schlechte Isolation bei Regenwetter oder andere Umstände sind einzelne Messungen ausgefallen. Einige eingeklammerte Temperaturen sind unsicher, da der Meßapparat leider in bestimmten Widerstandsbereichen nicht sicher funktionierte.

Kriterien der Divergenz und Konvergenz von alternierenden unendlichen Kettenbrüchen

von

J. Anton Gmeiner in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Jänner 1908.)

1. Im XIV. Jahrgange der »Monatshefte für Mathematik und Physik« habe ich mehrere Konvergenzkriterien für alternierende unendliche Kettenbrüche aufgestellt und nachgewiesen. Es lassen sich nun, wie hier gezeigt werden soll, auf einem ähnlichen Wege, wie ich ihn dort eingeschlagen habe, auch Divergenzkriterien für die nämliche Klasse von Kettenbrüchen gewinnen, wobei sich nebenbei noch ein paar neue Konvergenzsätze ergeben werden.

In dem Kettenbruche

$$b_0 - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{b_n} + \ldots \tag{1}$$

seien die Elemente $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ lauter positive Zahlen, während das Anfangsglied b_0 vorläufig noch ganz willkürlich bleiben soll. Bezeichnet man mit $B_0, B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ die aufeinanderfolgenden Näherungsnenner des Kettenbruches (1), so sind zunächst

$$B_0 = 1,\; B_1 = b_1,\; B_2 = b_1 b_2 + 1$$

positive Zahlen und für B_3 ergibt sich

$$B_3 = b_3 B_2 - B_1 = b_3 B_2 - b_1 > b_3 - b_1;$$

es ist also auch B_3 positiv, wenn nur $b_3 \geqq b_1$ ist. Falls diese Bedingung erfüllt ist, hat man weiter

$$B_4 = b_4 B_3 + B_2 > B_2 > 0$$

und demzufolge

$$B_5 = b_5 B_4 - B_3 > b_5 B_2 - b_3 B_2 = (b_5 - b_3) B_2.$$

Somit ist, wenn $b_5 \geqq b_3$ ist, auch B_5 positiv. Dies legt die Vermutung nahe, daß, wenn allgemein die Beziehung

$$b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

besteht, die sämtlichen Näherungsnenner B_n positiv sein werden, was in der Tat auch zutrifft. Sind nämlich für irgend einen der natürlichen Zahlenreihe entnommenen Wert von ν die Näherungsnenner $B_0, B_1, B_2, \ldots B_{2\nu-1}, B_{2\nu}$ sämtlich positiv, so hat man, da

$$B_{2\nu} = b_{2\nu} B_{2\nu-1} + B_{2\nu-2} > B_{2\nu-2}$$

und

$$B_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} B_{2\nu-2} - B_{2\nu-3} < b_{2\nu-1} B_{2\nu-2}$$

ist,

$$B_{2\nu+1} = b_{2\nu+1} B_{2\nu} - B_{2\nu-1} > (b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1}) B_{2\nu-2},$$

also unter der Voraussetzung (2)

$$B_{2\nu+1} > 0$$

und daher auch

$$B_{2\nu+2} = b_{2\nu+2} B_{2\nu+1} + B_{2\nu} > 0.$$

Bedeuten ferner $A_0, A_1, A_2, \ldots$ die aufeinanderfolgenden Näherungszähler des Kettenbruches (1), so hat man

$$A_0 = b_0, \quad A_1 = b_0 b_1 - 1, \quad A_2 = b_2(b_0 b_1 - 1) + b_0.$$

Denken wir uns jetzt auch b_0 positiv und derart gewählt, daß

$$b_0 b_1 \geqq 1 \tag{3}$$

ist, so ist A_1 zugleich mit $b_0 b_1 - 1$ positiv oder Null, während A_0 und A_2 sowie auch alle übrigen Näherungszähler positiv ausfallen, wenn wir den Kettenbruch (1) wieder der Bedingung (2)

entsprechen lassen. Denn unter diesen Voraussetzungen ist zunächst

$$A_3 = b_3 A_2 - A_1 \geqq b_0(b_3 - b_1) + 1 \geqq 1$$

und

$$A_4 = b_4 A_3 + A_2 > 0.$$

Angenommen nun, es seien für einen bestimmten Wert von ν ($\nu \geqq 2$) die Zahlen $A_2, A_3, \ldots A_{2\nu-1}, A_{2\nu}$ sämtlich positiv, was für $\nu = 2$ sicher zutrifft, so ergibt sich aus

$$A_{2\nu} = b_{2\nu} A_{2\nu-1} + A_{2\nu-2} > A_{2\nu-2}$$

und

$$A_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} A_{2\nu-2} - A_{2\nu-3} \leqq b_{2\nu-1} A_{2\nu-2},$$

worin das letzte Gleichheitszeichen, nebenbei bemerkt, nur für den Fall, daß $\nu = 2$ ist, zur Geltung kommt, für $A_{2\nu+1}$ die Beziehung

$$A_{2\nu+1} = b_{2\nu+1} A_{2\nu} - A_{2\nu-1} > (b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1}) A_{2\nu-2},$$

also wegen (2)

$$A_{2\nu+1} > 0;$$

und demnach ist auch

$$A_{2\nu+2} = b_{2\nu+2} A_{2\nu+1} + A_{2\nu} > 0.$$

Somit sind von A_2 angefangen alle Näherungszähler positiv.

Ist ein beliebiger unendlicher Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \ldots$$

vorgelegt und bedeutet K_n seinen n^{ten} Näherungsbruch, A_n den Zähler, B_n den Nenner des letzteren, so besteht für alle Werte von n und r ($r \geqq 1$), wofern nur B_n und B_{n+r} von Null verschieden sind, die Formel[1]

$$K_{n+r} - K_n = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1} A_{n+2,n+r}}{B_n B_{n+r}}, \tag{4}$$

[1] Vergl. Stolz und Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, p. 478.

worin $A_{n+2,n+1} = 1$ ist, während im Falle, daß $r > 1$ ist, $A_{n+2,n+r}$ den Zähler des endlichen Kettenbruches

$$b_{n+2} + \frac{a_{n+3}}{b_{n+3}} \dot{+} \frac{a_{n+4}}{b_{n+4}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_{n+r}}{b_{n+r}}$$

vorstellt.

Will man die Formel (4) auf den Kettenbruch (1) anwenden, so hat man in derselben

$$a_\nu = (-1)^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n+1)$$

zu setzen, wodurch sie die Gestalt annimmt:

$$K_{n+r} - K_n = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{A_{n+2,n+r}}{B_n B_{n+r}}. \tag{5}$$

Daraus folgt, indem man $n = 0$ setzt,

$$K_r - K_0 = -\frac{A_{2,r}}{B_r}, \tag{6}$$

worin, falls r größer als 1 genommen wird, $A_{2,r}$ der Zähler des Kettenbruches

$$b_2 - \frac{1}{b_3} \dot{+} \frac{1}{b_4} \dot{-} \cdots \dot{+} (-1)^r \frac{1}{b_r}$$

ist. Wie oben gezeigt wurde, ist nun unter der Voraussetzung (2) $A_{2,r}$ für jeden Wert $r > 3$ positiv, wenn nur noch

$$b_2 b_3 \geqq 1 \tag{7}$$

ist, und man hat dann nach (6)

$$K_r < K_0 \quad (r = 4, 5, \ldots).$$

Genügt der Kettenbruch (1) überdies noch der Bedingung (3), so ist, wie wir gesehen haben, für $r > 1$

$$A_r > 0, \quad B_r > 0$$

und daher auch $K_r > 0$.

Ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man die Zahl c so bestimmen, daß

$$(b_0 + c) b_1 = 1$$

ist und man hat dann für $r \geqq 4$

$$0 < c + K_r < c + K_0,$$

d. i.

$$-c < K_r < K_0;$$

es hat also K_r bei $\lim r = +\infty$ jedenfalls zwei endliche Unbestimmtheitsgrenzen; somit besteht der Satz:

Erster Satz. Wenn in dem Kettenbruche (1)

$$b_2 b_3 \geqq 1 \text{ und allgemein } b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1}$$

ist, so ist derselbe entweder konvergent oder er schwankt zwischen zwei endlichen Grenzen.

2. Der Kettenbruch (1) konvergiert dann und nur dann, wenn die rechte Seite der Gleichung (5) beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ für jeden Wert von r den Grenzwert Null besitzt. Er divergiert demnach, wenn auch nur für einen bestimmten Wert von r nicht der Grenzwert Null vorhanden ist. Setzt man in der Formel (5) $r = 1$ und $n = 2\nu$, wobei ν jede natürliche Zahl sein kann, so nimmt sie die Gestalt an:

$$K_{2\nu+1} - K_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{1}{B_{2\nu} B_{2\nu+1}}$$

und hieraus folgt, wenn wir den Kettenbruch (1) den Bedingungen (2) unterwerfen,

$$|K_{2\nu+1} - K_{2\nu}| = \frac{1}{B_{2\nu} B_{2\nu+1}}. \tag{8}$$

Nun ist für $\nu \geqq 1$

$$B_{2\nu+1} = b_{2\nu+1} B_{2\nu} - B_{2\nu-1} < b_{2\nu+1} B_{2\nu} \tag{9}$$

und

$$B_{2\nu+2} = b_{2\nu+2} B_{2\nu+1} + B_{2\nu} < (1 + b_{2\nu+1} b_{2\nu+2}) B_{2\nu}.$$

Man hat daher der Reihe nach

$$B_2 = 1 + b_1 b_2$$
$$B_4 < (1 + b_3 b_4) B_2$$
$$B_6 < (1 + b_5 b_6) B_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{2\nu} < (1 + b_{2\nu-1} b_{2\nu}) B_{2\nu-2},$$

also

$$B_{2\nu} < (1+b_1b_2)(1+b_3b_4)\ldots(1+b_{2\nu-1}b_{2\nu}),$$

woraus sich mit Berücksichtigung von (9)

$$B_{2\nu}B_{2\nu+1} < b_{2\nu+1}\prod_{r=1}^{\nu}(1+b_{2r-1}b_{2r})^2 \tag{10}$$

ergibt. Aus (8) ersieht man, daß der Kettenbruch (1) divergiert, wenn das Produkt $B_{2\nu}B_{2\nu+1}$ bei unbegrenzt wachsendem ν endlich bleibt, und dies ist nach (10) sicher dann der Fall, wenn alle $b_{2\nu+1}$ unter einer positiven Zahl γ liegen und das unendliche Produkt

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1+b_{2r-1}b_{2r})$$

konvergiert. Das letztere konvergiert aber, wenn die unendliche Reihe

$$b_1b_2+b_3b_4+\ldots+b_{2\nu-1}b_{2\nu}+\ldots$$

konvergiert, welche wegen $b_{2\nu+1} < \gamma$ mit der Reihe

$$b_2+b_4+\ldots+b_{2\nu}+\ldots$$

zugleich konvergent oder divergent ist. Wir sind somit zu dem Divergenzkriterium gelangt:

Zweiter Satz. Bilden die Teilnenner mit ungeradem Index $b_1, b_3,\ldots b_{2\nu+1},\ldots$ eine nirgends abnehmende Folge von positiven Zahlen, welche jedoch bei $\lim \nu = +\infty$ unter einer endlichen Grenze bleiben, und konvergiert die unendliche Reihe

$$b_2+b_4+b_6+\ldots+b_{2\nu}+\ldots, \tag{11}$$

so divergiert der Kettenbruch (1).

Über die Art der Divergenz läßt sich nur dann etwas Bestimmtes aussagen, wenn zu den Voraussetzungen des Satzes noch die Bedingung $b_2b_3 \geqq 1$ hinzugefügt wird, und zwar schwankt sodann der Kettenbruch gemäß dem ersten Satze zwischen zwei endlichen Grenzen.

3. Es sei jetzt ein Kettenbruch von der allgemeineren Form

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \frac{a_3}{b_3} \dot{+} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \ldots \qquad (12)$$

vorgelegt, worin die a_n und b_n ($n = 1, 2, \ldots$) lauter positive Zahlen sein sollen. Zu demselben gibt es einen äquivalenten Kettenbruch von der soeben betrachteten Gestalt

$$b_0 - \frac{1}{h_1} \dot{+} \frac{1}{h_2} \dot{-} \frac{1}{h_3} \dot{+} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{1}{h_n} \dot{+} \ldots, \qquad (13)$$

dessen Teilnenner durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{b_1}{a_1}; \\ h_{2\nu} &= \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} b_{2\nu}, \\ h_{2\nu+1} &= \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1}, \\ &(\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

bestimmt sind, und von diesem wollen wir annehmen, daß er die Bedingungen des zweiten Satzes erfülle. Setzen wir

$$\frac{h_{2\nu+1}}{h_{2\nu-1}} = 1 + \varepsilon_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (15)$$

so muß demgemäß $\varepsilon_\nu \geqq 0$ sein und es muß, da $h_{2\nu+1}$ bei $\lim \nu = +\infty$ endlich bleiben soll, die Reihe

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_\nu + \ldots$$

konvergieren. Ebenso muß noch die der Reihe (11) hier entsprechende Reihe

$$h_2 + h_4 + h_6 + \ldots + h_{2\nu} + \ldots \qquad (16)$$

konvergent sein. Sind diese Bedingungen erfüllt, so divergiert der Kettenbruch (13) und somit auch (12).

Zufolge (14) hat man nun

$$\frac{h_{2\nu+1}}{h_{2\nu-1}} = \frac{a_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1} b_{2\nu-1}}$$

und daher nach (15)

$$a_{2\nu} = b_{2\nu-1} \frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu+1}} (1+\varepsilon_\nu).$$

Hieraus ergibt sich aber

$$a_2 a_4 \ldots a_{2\nu} = b_1 b_3 \ldots b_{2\nu-1} \frac{a_3 a_5 \ldots a_{2\nu+1}}{b_3 b_5 \ldots b_{2\nu+1}} \prod_{r=1}^{\nu} (1+\varepsilon_r) =$$

$$= \frac{b_1}{b_{2\nu+1}} a_3 a_5 \ldots a_{2\nu+1} \prod_{r=1}^{\nu} (1+\varepsilon_r),$$

so daß mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (14)

$$h_{2\nu} = \frac{a_1}{b_1} \prod_{r=1}^{\nu} \frac{1}{1+\varepsilon_r} \cdot \frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}$$

ist. Da das Produkt

$$\prod_{r=1}^{\nu} \frac{1}{1+\varepsilon_r}$$

bei $\lim \nu = +\infty$ zu einem von Null verschiedenen, positiven Grenzwerte konvergiert, so ist demnach die Reihe (16) mit der Reihe

$$\frac{b_2 b_3}{a_3} + \frac{b_4 b_5}{a_5} + \ldots + \frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} + \ldots$$

gleichartig und wir haben den Satz:

Dritter Satz. Ist in dem Kettenbruche (12) für alle Werte $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{a_{2\nu}}{c_{2\nu+1}} \geqq \frac{b_{2\nu-1}}{b_{2\nu+1}}$$

und konvergiert, wenn man

$$\frac{a_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1} b_{2\nu-1}} = 1 + \varepsilon_\nu$$

setzt, die unendliche Reihe

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_\nu+\ldots$$

und ebenso die Reihe

$$\frac{b_2 b_3}{a_3}+\frac{b_4 b_5}{a_5}+\ldots+\frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}+\ldots,$$

so divergiert der Kettenbruch.

Dieser Satz, welcher bei der Annahme $a_n = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ leicht in den zweiten Satz übergeführt werden kann, nimmt noch eine besonders einfache Gestalt an, wenn man darin $b_n = 1$ $(n = 1, 2 \ldots)$ sein läßt. Er lautet sodann:

Vierter Satz. Wenn in dem alternierenden Kettenbruche

$$b_0 - \frac{a_1}{1} \dot{+} \frac{a_2}{1} \dot{-} \frac{a_3}{1} \dot{+} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{a_n}{1} \dot{+} \ldots$$

für jeden Wert von ν $a_{2\nu} \geqq a_{2\nu+1}$ ist und, falls man

$$a_{2\nu} = a_{2\nu+1}(1+\varepsilon_\nu)$$

setzt, die Reihe

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_\nu+\ldots$$

und ebenso die Reihe

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{2\nu+1}}+\ldots$$

konvergiert, so divergiert der Kettenbruch.

4. Um zu weiteren Sätzen über die alternierenden Kettenbrüche zu gelangen, gehen wir jetzt von der Kettenbruchform

$$1 - \frac{a_1}{1} \dot{+} \frac{a_2}{1} \dot{-} \frac{a_3}{1} \dot{+} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{a_n}{1} \dot{+} \ldots \tag{17}$$

aus und betrachten dieselbe zunächst für den Fall, daß darin

$$a_{2\nu+1} \leqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{18}$$

ist. Unter dieser Voraussetzung sind die sämtlichen Näherungsnenner positiv.

Denn man hat

$$B_0 = B_1 = 1,$$
$$B_2 = B_1 + a_2 B_0 = 1 + a_2,$$
$$B_3 = B_2 - a_3 B_1 = 1 + a_2 - a_3 \geqq a_2,$$
$$B_4 = B_3 + a_4 B_2.$$

Ferner ist für $\nu \geqq 1$

$$B_{2\nu+1} = B_{2\nu} - a_{2\nu+1} B_{2\nu-1} = B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2} - a_{2\nu+1} B_{2\nu-1} =$$
$$= (1 - a_{2\nu+1}) B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2}$$

und

$$B_{2\nu+2} = B_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} B_{2\nu}.$$

Daraus ersieht man, daß, wenn $B_{2\nu-1}$ und $B_{2\nu}$ positiv sind, gemäß der Festsetzung (18) dann auch $B_{2\nu+1}$ und daher ebenso $B_{2\nu+2}$ positiv sein wird. Wegen $B_3 > 0$ und $B_4 > 0$ ist daher allgemein $B_{2\nu} > 0$ und $B_{2\nu+1} > 0$.

Bezüglich der Näherungszähler des Kettenbruches (17) hat man zunächst $A_0 = 1$ und $A_1 = 1 - a_1$. Es ist also A_1 positiv, Null oder negativ, je nachdem $a_1 < 1$, $= 1$ oder > 1 ist.

Lassen wir die Bedingung (18) auch noch für den Wert $\nu = 0$ erfüllt sein, so ist neben $a_1 = 1$ $A_1 = 0$ und neben $a_1 < 1$ $A_1 > 0$. Ferner hat man

$$A_2 = A_1 + a_2 A_0 > 0,$$
$$A_3 = A_2 - a_3 A_1 = (1 - a_3) A_1 + a_2 A_0 > 0$$

und man erkennt aus den Gleichungen

$$A_{2\nu+1} = A_{2\nu} - a_{2\nu+1} A_{2\nu-1} = A_{2\nu-1}(1 - a_{2\nu+1}) + a_{2\nu} A_{2\nu-2}$$

und

$$A_{2\nu+2} = A_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} A_{2\nu},$$

daß bei unserer Annahme über die Teilzähler $a_1, a_3, a_5, \ldots a_{2\nu+1}, \ldots$ die sämtlichen Näherungszähler von A_2 angefangen positiv sind. Da, wie wir gesehen haben, auch alle Näherungsnenner positiv sind, so ist demnach

$$K_r > 0 \quad (r = 2, 3, 4, \ldots). \tag{19}$$

Die Formel (4), welche im vorliegenden Falle die Gestalt

$$K_{n+r}-K_n = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1} A_{n+2,\, n+r}}{B_n B_{n+r}} \quad (r \geqq 1) \quad (20)$$

annimmt, ergibt, indem man darin $n = 0$ setzt,

$$K_r - K_0 = -\frac{a_1 A_{2,\,r}}{B_r}; \quad (21)$$

dabei ist $A_{2,\,1} = 1$ und $A_{2,\,r} (r > 1)$ der Zähler des Kettenbruches

$$1 - \frac{a_3}{1} \dotplus \frac{a_4}{1} \dot{-} \ldots \dotplus (-1)^r \frac{a_r}{1},$$

somit $A_{2,\,r} > 0$, wenn nur $r > 3$ ist. Die Gleichung (21) besagt demnach, daß

$$K_r < K_0 \quad (r > 3)$$

ist. Da aber hier $K_0 = 1$ ist, so besteht im Hinblick auf (19) die Beziehung

$$0 < K_r < 1 \quad (r > 3), \quad (22)$$

d. h. aber:

Fünfter Satz. Ein Kettenbruch von der Form (17), welcher den Bedingungen (18) genügt, ist entweder konvergent oder er schwankt zwischen zwei endlichen Grenzen; der Grenzwert desselben, beziehungsweise seine Unbestimmtheitsgrenzen liegen im Intervalle (0, 1), wenn noch $a_1 \leqq 1$ ist.

Setzt man in der Formel (20) $n = 2\nu$, so geht sie über in

$$K_{2\nu+r} - K_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu+1} A_{2\nu+2,\, 2\nu+r}}{B_{2\nu} B_{2\nu+r}}. \quad (23)$$

Nach dem Vorstehenden hat man daher

$$K_{4\mu+r} - K_{4\mu} \leqq 0, \quad K_{4\mu+2+r} - K_{4\mu+2} \geqq 0; \quad (24)$$

das Gleichheitszeichen kommt an beiden Orten nur dann zur Geltung, wenn $r = 3$ und $a_{4\mu+3} = 1$, beziehungsweise $a_{4\mu+5} = 1$ ist.

Für die ungeraden Werte von n ($n = 2\nu+1$) ergibt sich aus (20)

$$K_{2\nu+1+r} - K_{2\nu+1} = (-1)^{\nu} \frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu+2} A_{2\nu+3,\,2\nu+1+r}}{B_{2\nu+1} B_{2\nu+1+r}};$$

hierin ist $A_{2\nu+3,\,2\nu+1+r}$ wegen

$$A_{2\nu+3,\,2\nu+1+r} = B_{2\nu+2,\,2\nu+1+r}$$

stets positiv. Somit ist

$$K_{4\mu+1+r} - K_{4\mu+1} > 0, \quad K_{4\mu+3+r} - K_{4\mu+3} < 0. \tag{25}$$

Aus (24) und (25) folgt

$$K_{4\mu} \geqq K_{4\mu+3} > K_{4(\mu+1)} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

und

$$K_{4\mu+1} < K_{4\mu+2} \leqq K_{4(\mu+1)+1} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Die in einer und derselben Kette von Ungleichungen (26) oder (27) befindlichen K_r haben sicher für sich je einen endlichen Grenzwert, da sich dieselben bei wachsendem Index r in einem und demselben Sinne ändern und außerdem die Beziehung (22) besteht. Der Kettenbruch (17) konvergiert oder oszilliert, je nachdem diese beiden Grenzwerte einander gleich sind oder nicht. Da von den beiden Näherungsbrüchen $K_{2\nu}$ und $K_{2\nu+1}$ stets der eine der Kette (26), der andere der Kette (27) angehört, zufolge (23) aber

$$K_{2\nu+1} - K_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu+1}}{B_{2\nu} B_{2\nu+1}} \tag{28}$$

ist, so konvergiert oder oszilliert demnach der Kettenbruch (17), je nachdem der Ausdruck

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu+1}}{B_{2\nu} B_{2\nu+1}}$$

bei $\lim \nu = +\infty$ den Grenzwert Null hat oder nicht. Dabei ist die Konvergenz des genannten Kettenbruches, wenn sie überhaupt vorhanden, stets eine unbedingte in dem von Herrn Pringsheim erklärten Sinne.[1] Denn zufolge (26) und (27) ist

---

[1] Vergl. Enzyklopädie, I, p. 127.

der Grenzwert des Kettenbruches von jedem seiner Näherungsbrüche verschieden, falls ein solcher überhaupt existiert.

Außerdem kann man noch bemerken, daß der Kettenbruch (17) unter der Voraussetzung (18) ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Kettenbruch ist, je nachdem das Gleichheitszeichen in (18) nur für eine endliche Anzahl von Werten von ν oder aber für unendlich viele dieser Werte Geltung hat; denn im ersteren Falle ist von einer bestimmten Stelle an jeder Näherungsbruch von jedem seiner Vorgänger verschieden, im letzteren Falle dagegen gibt es, wie groß man auch r wählen mag, immer noch Näherungsbrüche K_r, welche einem ihrer Vorgänger gleich sind.[1]

Um zu Konvergenzkriterien für den Kettenbruch (17) zu gelangen, genügt es, an Stelle der Ausdrücke zu beiden Seiten der Gleichung (28) deren absolute Beträge zu betrachten, so daß an Stelle dieser Gleichung die folgende tritt:

$$|K_{2\nu+1}-K_{2\nu}| = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu+1}}{B_{2\nu} B_{2\nu+1}}. \tag{29}$$

Zufolge der bereits zu Beginn dieser Nummer aufgestellten Gleichungen

$$B_{2\nu+1} = (1-a_{2\nu+1}) B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2}$$

und

$$B_{2\nu+2} = B_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} B_{2\nu} \tag{30}$$

ist

$$B_{2\nu+1} \geqq a_{2\nu} B_{2\nu-2} \quad (\nu > 0) \tag{31}$$

und hiernach

$$B_{2\nu+2} \geqq a_{2\nu} B_{2\nu-2} + a_{2\nu+2} B_{2\nu},$$

und da nach (30)

$$B_{2\nu} = B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2} > a_{2\nu} B_{2\nu-2} \quad (\nu > 0)$$

ist, so hat man für $\nu > 0$

$$B_{2\nu+2} > a_{2\nu}(1+a_{2\nu+2}) B_{2\nu-2}.$$

---

[1] Vergl. meine eingangs erwähnte Abhandlung.

Ersetzt man hier ν nacheinander durch 1, 2, 3,... $\nu-1$, so erhält man die Ungleichungen

$$B_4 > a_2(1+a_4)B_0,$$
$$B_6 > a_4(1+a_6)B_2,$$
$$B_8 > a_6(1+a_8)B_4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$B_{2\nu-2} > a_{2\nu-4}(1+a_{2\nu-2})B_{2\nu-6}$$
$$B_{2\nu} > a_{2\nu-2}(1+a_{2\nu})B_{2\nu-4}$$

und durch Multiplikation derselben ergibt sich

$$B_{2\nu}B_{2\nu-2} > a_2a_4\dots a_{2\nu-2}(1+a_4)(1+a_6)\dots(1+a_{2\nu})B_0B_2,$$

also, da $B_0 = 1$ und $B_2 = 1+a_2$ ist,

$$B_{2\nu}B_{2\nu-2} > a_2a_4\dots a_{2\nu-2}(1+a_2)(1+a_4)\dots(1+a_{2\nu}).$$

Somit hat man mit Rücksicht auf (31)

$$B_{2\nu}B_{2\nu+1} > a_2a_4\dots a_{2\nu}(1+a_2)(1+a_4)\dots(1+a_{2\nu}).$$

Demnach ist gemäß der Gleichung (29)

$$|K_{2\nu+1}-K_{2\nu}| < \frac{a_1a_3\dots a_{2\nu+1}}{(1+a_2)(1+a_4)\dots(1+a_{2\nu})}. \tag{32}$$

Der hier rechtsstehende Ausdruck hat bei $\lim \nu = +\infty$ jedenfalls dann den Grenzwert Null, wenn der Zähler desselben zur Null konvergiert. Da aber die vorstehende Formel unter der Voraussetzung (18) hergeleitet wurde, so besteht der Satz:

Sechster Satz. Der Kettenbruch (17), in welchem

$$a_{2\nu+1} \leqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, konvergiert, und zwar unbedingt, wenn

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, a_{2\nu+1} = 0$$

ist.

Dieses Konvergenzkriterium habe ich auf anderem Wege bereits in der erwähnten Abhandlung hergeleitet. Die Formel (32) liefert aber noch ein neues Kriterium. Es besteht nämlich zufolge (18) neben derselben auch die Ungleichung

$$|K_{2\nu+1}-K_{2\nu}|<\frac{a_1}{(1+a_2)(1+a_4)\ldots(1+a_{2\nu})}$$

und hier hat die rechte Seite bei $\lim \nu=+\infty$ den Grenzwert Null, wenn das im Nenner stehende Produkt nach $+\infty$ divergiert, also wenn die unendliche Reihe

$$a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{2\nu}+\ldots$$

divergiert. Daraus folgt:

Siebenter Satz. Der Kettenbruch (17), in welchem

$$a_{2\nu+1}\leqq 1 \quad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

ist, konvergiert unbedingt, wenn die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, a_{2\nu}$$

divergiert.

5. Die vorstehenden Konvergenzkriterien lassen sich leicht auf Kettenbrüche von der Form

$$b_0-\frac{a_1}{b_1}\dot{+}\frac{a_2}{b_2}\dot{-}\frac{a_3}{b_3}\dot{+}\ldots\dot{+}(-1)^n\frac{a_n}{b_n}\dot{+}\ldots \tag{33}$$

übertragen. Zu diesem Zwecke denken wir uns den Kettenbruch (33) auf die Form

$$b_0-\frac{k_1}{1}\dot{+}\frac{k_2}{1}\dot{-}\frac{k_3}{1}\dot{+}\ldots\dot{+}(-1)^n\frac{k_n}{1}\dot{+}\ldots \tag{34}$$

gebracht; es gebe also eine unbegrenzte Folge von Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n, \ldots$ von der Beschaffenheit, daß der Kettenbruch

$$b_0-\frac{c_1k_1}{c_1}\dot{+}\frac{c_1c_2k_2}{c_2}\dot{-}\frac{c_2c_3k_3}{c_3}\dot{+}\ldots\dot{+}(-1)^n\frac{c_{n-1}c_nk_n}{c_n}\dot{+}\ldots \tag{35}$$

mit (33) identisch ist. Durch gliedweise Vergleichung von (35) mit (33) findet man

$$c_n = b_n, \quad c_1 k_1 = a_1, \quad c_{n-1} c_n k_n = a_n \quad (n > 1),$$

woraus sich

$$k_1 = \frac{a_1}{b_1} \text{ und } k_n = \frac{a_n}{b_{n-1} b_n} \quad (n > 1) \tag{36}$$

ergibt.

Da das Anfangsglied b_0 auf die Konvergenz oder Divergenz des Kettenbruches keinen Einfluß hat, so kann man auf den Kettenbruch (34) den sechsten Satz anwenden. Beachtet man dabei, daß die Kettenbrüche (33) und (34) einander äquivalent sind, so gewinnt man hiedurch im Hinblick auf die Beziehungen (36) das Kriterium:

Achter Satz. Der Kettenbruch (33) konvergiert unbedingt, wenn darin

$$b_{2\nu} b_{2\nu+1} \geqq a_{2\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu} b_{2\nu+1}} = 0$$

ist.

Dieses Kriterium ist von dem in den »Monatsheften für Math. und Phys.«, XIV, p. 273, vorgeführten, mit derselben Nummer versehenen Kriterium nur formell verschieden.

In der nämlichen Weise folgt aus dem siebenten Satze:

Neunter Satz. Der Kettenbruch (33) konvergiert unbedingt, wenn darin

$$b_{2\nu} b_{2\nu+1} \geqq a_{2\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist und außerdem die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1} b_{2\nu}}$$

divergiert.

6. Divergenzkriterien von entsprechender Einfachheit scheinen sich für die der Bedingung (18) unterworfenen Kettenbrüche (17) nicht aufstellen zu lassen. Daß es aber unter denselben wirklich auch divergente gibt, kann an einem Beispiele gezeigt werden. Die Bedingung (18) ist erfüllt, wenn wir

$$a_{2\nu+1} = 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

setzen, wonach der Kettenbruch (17) die besondere Gestalt

$$1 - \frac{1}{1} + \frac{a_2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{a_4}{1} - \ldots \tag{37}$$

erhält, und man hat für diesen Fall

$$B_{2\nu} = B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2} \quad \text{und} \quad B_{2\nu+1} = B_{2\nu} - B_{2\nu-1},$$

also

$$B_{2\nu+1} = a_{2\nu} B_{2\nu-2}$$

und demnach

$$B_{2\nu} B_{2\nu+1} = a_{2\nu} B_{2\nu-2} B_{2\nu-1} + a_{2\nu}^2 B_{2\nu-2}^2.$$

Wegen $B_0 = B_1 = 1$ ergibt sich hieraus nacheinander

$$B_2 B_3 = a_2 + a_2^2,$$

$$B_4 B_5 = a_2 a_4 + a_2^2 a_4 + a_4^2 B_2^2,$$

$$B_6 B_7 = a_2 a_4 a_6 + a_2^2 a_4 a_6 + a_4^2 a_6 B_2^2 + a_6^2 B_4^2,$$

. . . .

$$B_{2\nu} B_{2\nu+1} = a_2 a_4 \ldots a_{2\nu} + a_2^2 a_4 \ldots a_{2\nu} + a_4^2 a_6 \ldots a_{2\nu} B_2^2 + \ldots + a_{2\nu}^2 B_{2\nu-2}^2,$$

so daß man

$$\frac{B_{2\nu} B_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} = 1 + a_2 + \frac{a_4}{a_2} B_2^2 + \frac{a_6}{a_2 a_4} B_4^2 + \ldots + \frac{a_{2\nu}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu-2}} B_{2\nu-2}^2$$

hat. Wählt man hier die Elemente $a_2, a_4, \ldots a_{2\nu}, \ldots$ in der Weise, daß

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{4}\frac{a_2}{B_2^2}, \quad a_6 = \frac{1}{8}\frac{a_2 a_4}{B_4^2}, \ldots$$

$$a_{2\nu} = \frac{1}{2^\nu}\frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}^2}$$

ist, was ja zulässig ist, so wird

$$\frac{B_{2\nu} B_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^\nu} < 2$$

und die Formel (29) liefert nunmehr die Ungleichung

$$|K_{2\nu+1} - K_{2\nu}| > \frac{1}{2},$$

der zufolge der Kettenbruch (37) bei der hier getroffenen Wahl der Elemente $a_2, a_4, \ldots a_{2\nu}, \ldots$ divergiert.

7. Wir wollen nun den Kettenbruch

$$1 - \frac{a_1}{1} \dot{+} \frac{a_2}{1} \dot{-} \frac{a_3}{1} \dot{+} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{a_n}{1} \dot{+} \ldots \tag{38}$$

noch unter der Voraussetzung, daß darin

$$a_{2\nu+1} \leqq 1 + a_{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{39}$$

sei, betrachten. Diese Bedingung ist weiter als die frühere (18), welche nur einen besonderen Fall von (39) bildet.

Da hier für $\nu \geqq 1$ wieder die Gleichungen

$$B_{2\nu} = B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2}, \quad B_{2\nu+1} = B_{2\nu} - a_{2\nu+1} B_{2\nu-1} \tag{40}$$

gelten, so hat man neben $B_0 = B_1 = 1$ zunächst

$$B_3 = 1 + a_2 - a_3,$$

und, indem man für $B_{2\nu}$ in der zweiten Gleichung (40) seinen Wert aus der ersten einsetzt, gewinnt man für $B_{2\nu+1}$ den Ausdruck

$$B_{2\nu+1} = (1 - a_{2\nu+1}) B_{2\nu-1} + a_{2\nu} B_{2\nu-2}. \tag{41}$$

Ersetzt man in der zweiten Gleichung (40) unter der Voraussetzung, daß $\nu > 1$ ist, ν durch $\nu - 1$, so erhält man

$$B_{2\nu-1} = B_{2\nu-2} - a_{2\nu-1} B_{2\nu-3},$$

also

$$B_{2\nu-2} = B_{2\nu-1} + a_{2\nu-1} B_{2\nu-3}$$

und demnach ergibt sich aus (41)

$$B_{2\nu+1} = (1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1}) B_{2\nu-1} + a_{2\nu-1} a_{2\nu} B_{2\nu-3} \quad (\nu > 1). \quad (42)$$

Aus dieser Darstellung von $B_{2\nu+1}$ ersieht man, daß, wenn $a_3 < 1 + a_2$, also $B_3 > 0$ ist, alle Näherungsnenner mit ungeradem und daher zufolge der ersten Gleichung (40) auch alle mit geradem Index positiv sind.

Dagegen ist neben $a_3 = 1 + a_2$ $B_3 = 0$, aber $B_5 > 0$, mag nun $a_5 = 1 + a_4$ oder $a_5 < 1 + a_4$ sein. B_7 ist Null, wenn neben $a_3 = 1 + a_2$ auch $a_7 = 1 + a_6$ ist, dagegen hat es einen positiven Wert, wenn nur $a_7 < 1 + a_6$ ist.

Nehmen wir jetzt an, es sei

$$a_{4\mu+3} = 1 + a_{4\mu+2} \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots m); \quad (43)$$

dann findet man aus (42) nacheinander

$$B_3 = 0, \; B_7 = 0, \; B_{11} = 0, \ldots B_{4m-1} = 0, \; B_{4m+3} = 0,$$

während sich daraus wegen $B_1 = 1$

$$B_5 > 0, \; B_9 > 0, \ldots B_{4m+1} > 0, \; B_{4m+5} > 0$$

ergibt. Falls neben (43)

$$a_{4m+7} < 1 + a_{4m+6}$$

ist, so folgt aus (42) weiter $B_{4m+7} > 0$ und allgemein

$$B_{2\nu+1} > 0 \quad \text{für } \nu = 2m+4, \, 2m+5, \, 2m+6, \ldots$$

Da die Näherungsnenner mit ungeradem Index niemals negativ sind, so sind jene mit geradem Index gemäß der ersten Gleichung (40) jedenfalls positiv und wir haben daher den Satz:

Zehnter Satz. Der Kettenbruch (38), welcher der Bedingung

$$a_{2\nu+1} \leqq 1+a_{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügt, ist dann und nur dann unbestimmt, d. h. er enthält unendlich viele Näherungsbrüche mit verschwindendem Nenner, wenn darin das Gleichheitszeichen mindestens für alle ungeraden Werte von ν Geltung hat.

So ist z. B. unbestimmt der Kettenbruch

$$1 - \frac{1}{1} + \frac{2}{1} - \frac{3}{1} + \ldots + (-1)^n \frac{n}{1} + \ldots$$

Schließen wir nunmehr den Fall, daß die Gleichung

$$a_{2\nu+1} = 1 + a_{2\nu}$$

für alle ungeraden Werte von ν besteht, aus, so sind mindestens von einer bestimmten Stelle $n = n_0$ an alle Näherungsnenner B_n von Null verschieden und es gilt daher wieder die Beziehung (29), d. i.

$$|K_{2\nu+1} - K_{2\nu}| = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{2\nu+1}}{B_{2\nu} B_{2\nu+1}} \tag{44}$$

für alle Werte von ν, wofür $2\nu \geqq n_0 - 1$ ist. Ferner folgt jetzt aus den Gleichungen (40), da von den Näherungsnennern B_n keiner negativ ist,

$$B_{2\nu+1} \leqq B_{2\nu} \tag{45}$$

und

$$B_{2\nu+2} = B_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} B_{2\nu} \leqq (1 + a_{2\nu+2}) B_{2\nu};$$

man hat also

$$B_2 = 1 + a_2,$$
$$B_4 < (1 + a_4) B_2,$$
$$B_6 \leqq (1 + a_6) B_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_{2\nu-2} \leqq (1 + a_{2\nu-2}) B_{2\nu-4},$$
$$B_{2\nu} \leqq (1 + a_{2\nu}) B_{2\nu-2}$$

und, indem man diese Relationen in entsprechender Weise miteinander multipliziert,

$$B_{2\nu} < \prod_{1}^{\nu} {}_r (1 + a_{2r}).$$

Somit ist wegen (45)

$$B_{2\nu} B_{2\nu+1} \leqq B_{2\nu}^2 < \prod_{1}^{\nu} {}_r (1 + a_{2r})^2$$

und daher zufolge (44)

$$|K_{2\nu+1} - K_{2\nu}| > \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} : \prod_{1}^{\nu} {}_r \left(1 + \frac{1}{a_{2r}}\right)^2.$$

Dieses Resultat besagt, daß der Kettenbruch (38) divergiert, wenn der Quotient

$$\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}$$

beständig über einer positiven Zahl bleibt und das unendliche Produkt

$$\prod_{1}^{\infty} {}_\nu \left(1 + \frac{1}{a_{2\nu}}\right)$$

konvergent ist. Da das letztere dann und nur dann konvergiert, wenn die unendliche Reihe

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2\nu}} + \ldots$$

konvergiert, so gilt der Satz:

Elfter Satz. Genügt der Kettenbruch (38) der Bedingung

$$a_{2\nu+1} \leqq 1 + a_{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{46}$$

und gibt es eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit, daß für jeden Wert von ν

$$\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} > \delta \tag{47}$$

ist, so divergiert derselbe, wenn die unendliche Reihe

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2\nu}} + \ldots \tag{48}$$

konvergiert.

Da über die Art der Divergenz nichts ausgesagt ist, so bleibt der Satz auch für den Fall richtig, daß für alle ungeraden Werte von ν $a_{2\nu+1} = 1 + a_{2\nu}$ ist, nur sind dann die zweite und dritte Bedingung überflüssig (vergl. den vorigen Satz).

Aus dem soeben gefundenen elften Satze fließen noch ein paar einfachere Divergenzkriterien, und zwar:

Zwölfter Satz. Es sei in dem Kettenbruche (38) durchweg

$$a_{2\nu} \geqq a_{2\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{49}$$

und wir setzen

$$a_{2\nu} = a_{2\nu+1}(1 + \varepsilon_\nu); \tag{50}$$

sind sodann die beiden unendlichen Reihen

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_\nu + \ldots \tag{51}$$

und

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2\nu}} + \ldots$$

konvergent, so divergiert der Kettenbruch.

Beweis. Zunächst kann man bemerken, daß neben (49) auch die Bedingung (46) erfüllt ist. Ferner hat man zufolge (50)

$$\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} = a_1 : \prod_{r=1}^{\nu} (1 + \varepsilon_r).$$

Wenn nun die Reihe (51) konvergiert, so hat das Produkt

$$\prod_{r=1}^{\nu} (1 + \varepsilon_r)$$

bei $\lim \nu = +\infty$ einen endlichen Grenzwert g ($g \geqq 1$) und es ist

$$\prod_{r=1}^{\nu} (1 + \varepsilon_r) \leqq g,$$

worin das Gleichheitszeichen mit Rücksicht auf den Fall steht, daß von einer bestimmten Stelle des ν an auch alle ε_ν verschwinden können.

Demnach ist hier

$$\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} \geqq \frac{a_1}{g},$$

so daß für jede Zahl $\delta < \frac{a_1}{g}$ die Beziehung (47) gilt. Da endlich auch im Satze 12 die Konvergenz der Reihe (48) verlangt ist, so sind neben den Bedingungen dieses Satzes immer auch jene des Satzes 11 erfüllt, wodurch die Richtigkeit des ersteren dargetan ist.

Ein Vergleich des in Nr. 3 hergeleiteten vierten Satzes mit dem vorstehenden Satze 12 zeigt, daß sich diese beiden Kriterien nur dadurch voneinander unterscheiden, daß die in dem letzteren auftretende Reihe (48) im ersteren durch die Reihe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2\nu+1}} + \ldots \tag{52}$$

ersetzt ist. Da nun aus der Konvergenz der hier angeschriebenen Reihe auf Grund der für beide Kriterien geltenden Voraussetzung (49) jene der Reihe (48) folgt, so erweist sich das Kriterium 4 als eine Folge des Kriteriums 12 und das letztere ist somit schärfer, d. h. von größerer Tragweite als das erstere, weil ja die Reihe (48) konvergieren kann, ohne daß deshalb auch die Reihe (52) zu konvergieren braucht.

Dreizehnter Satz. Wenn in dem Kettenbruche (38)

$$a_{2\nu} \leqq a_{2\nu+1} \leqq a_{2\nu}+1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{53}$$

ist und die Reihe

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2\nu}} + \ldots$$

konvergiert, so divergiert derselbe.

Zufolge (53) besteht nämlich die Beziehung (46) für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ und zugleich ist

$$\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} \geqq a_1,$$

so daß hier auch die Bedingung (47) erfüllt ist. Somit genügt der Kettenbruch des Satzes 13 allen Voraussetzungen des Satzes 11 und er ist daher divergent.

8. Wir wollen nun noch das Kriterium 11 auf Kettenbrüche von der Form

$$b_0 - \frac{1}{b_1} \dot{+} \frac{1}{b_2} \dot{-} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{1}{b_n} \dot{+} \ldots \tag{54}$$

übertragen. Zu diesem Behufe bestimmen wir in dem mit (54) äquivalenten Kettenbruche

$$b_0 - \frac{c_1}{c_1 b_1} \dot{+} \frac{c_1 c_2}{c_2 b_2} \dot{-} \frac{c_2 c_3}{c_3 b_3} \dot{+} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{c_{n-1} c_n}{c_n b_n} \dot{+} \ldots$$

die Zahlen $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ in der Weise, daß

$$c_n b_n = 1, \quad \text{also} \quad c_n = \frac{1}{b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Der Kettenbruch (54) erlangt dadurch die Gestalt

$$b_0 - \frac{a_1}{1} \dot{+} \frac{a_2}{1} \dot{-} \frac{a_3}{1} \dot{+} \ldots \dot{+} (-1)^n \frac{a_n}{1} \dot{+} \ldots$$

und auf diese Kettenbruchform ist, da das Anfangsglied b_0 die Konvergenz oder Divergenz nicht beeinflußt, der Satz 11 anwendbar. Hiebei ist

$$a_1 = \frac{1}{b_1} \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{b_{n-1} b_n} \quad (n > 1) \tag{55}$$

zu setzen, so daß die Bedingung (46) in

$$b_{2\nu+1} \geqq \frac{b_{2\nu-1}}{1 + b_{2\nu-1} b_{2\nu}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

übergeht.

Die zweite Voraussetzung des Satzes 11, d. i. die Formel (47), erscheint zufolge (55) nunmehr in der Gestalt

$$1 : b_{2\nu+1} > \delta$$

oder einfacher, indem man $1 : \delta = \gamma$ setzt,

$$b_{2\nu+1} < \gamma \quad (\gamma > 0).$$

Endlich tritt noch an Stelle der Reihe (48) die Reihe

$$b_1 b_2 + b_3 b_4 + \ldots + b_{2\nu-1} b_{2\nu} + \ldots$$

Mithin können wir sagen:

Vierzehnter Satz. Der Kettenbruch (54) divergiert, wenn sämtliche Teilnenner mit ungeradem Index unter einer und derselben positiven Zahl γ liegen,

$$b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1} : (1 + b_{2\nu-1} b_{2\nu}) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{56}$$

ist und die unendliche Reihe

$$b_1 b_2 + b_3 b_4 + \ldots + b_{2\nu-1} b_{2\nu} + \ldots \tag{57}$$

konvergiert.

Man kann noch hinzufügen, daß der genannte Kettenbruch unbestimmt ist, wenn in (56) das Gleichheitszeichen mindestens für alle ungeraden Werte von ν Geltung hat.

Auch möge schließlich noch bemerkt sein, daß das vorstehende Kriterium als besonderen Fall das Kriterium 2 in Nr. 2 in sich enthält. Denn neben $b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1}$ besteht stets auch die Beziehung (56) und aus der Konvergenz der Reihe (11) folgt, da die $b_{2\nu+1}$ endlich bleiben, jene der Reihe (57).

Über einige Eigenschaften der allgemeinen Fläche dritter Ordnung

von

Gustav Kohn in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Jänner 1908.)

Die Eigenschaften der allgemeinen Fläche dritter Ordnung, welche man im folgenden entwickelt findet, fließen aus einer gemeinsamen Quelle. Ihre Quelle ist die Bemerkung, daß die Punkte, in denen die sechs Paare von homologen Geraden einer Schläfli'schen Doppelsechs eine beliebige Ebene treffen, auf der sie enthaltenden Plankurve dritter Ordnung sechs Paare homologer Punkte der nämlichen (1, 1)-Korrespondenz darstellen.

Die auf diese Weise in den ebenen Schnittkurven einer kubischen Fläche bestimmten (1, 1)-Korrespondenzen werfen ein Licht auf die verschiedenen Graßmann'schen Erzeugungsweisen der Fläche.

Die Frage nach den Ebenen, für welche zwei von diesen (1, 1)-Korrespondenzen identisch werden, leitet von einer neuen Seite zu bereits in die Theorie aufgenommenen kovarianten Flächen und zu Relationen zwischen ihnen. Es ergeben sich Kurven vierter Klasse, welche 18 Flächengeraden zu Biplanaren haben, als Basiskurven von Flächenscharen zweiter Klasse, in denen je drei Doppeldreihyperboloide vorkommen. Es folgen markante Relationen für gewisse Tripel von Geradenschnittpunkten der Fläche dritter Ordnung.

Die 45 Punkte, in welchen je zwei von den 15 Flächengeraden zusammentreffen, welche nach Ausscheidung der Geraden eine Doppelsechs noch übrig bleiben, zerfallen in 15 Tripel von bezüglich einer und derselben Fläche zweiter Ordnung konjugierten Punkten, der Fläche zweiter Ordnung nämlich, bezüglich welcher die Doppelsechs zu sich selbst

polar ist. Die 270 Verbindungsebenen solcher Punkttripel, welche man im ganzen erhält, gehen zu je 9 durch einen von 120 ausgezeichneten Punkten. Jeder dieser Punkte tritt auf als Scheitel eines Kegels dritter Klasse, der nicht nur diese 9 Ebenen zu Tangentialebenen, sondern auch 18 Flächengeraden zu Tangenten hat. Dieser Kegel wird eingehüllt von den Ebenen, welche ein Tripel von windschiefen Geraden der kubischen Fläche (und damit auch schon fünf andere Tripel) in der Weise treffen, daß auf der Schnittkurve die drei Treffpunkte den nämlichen Tangentialpunkt aufweisen.

§ 1. Die in den ebenen Schnittkurven einer kubischen Fläche durch eine Schläfli'sche Doppelsechs induzierte (1, 1)-Korrespondenz.

Nach Schläfli bilden zwei Sextupel von Geraden

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

eine Doppelsechs auf einer Fläche dritter Ordnung, wenn je zwei Geraden desselben Sextupels windschief sind, während jede Gerade eines Sextupels nur zu der ihr im anderen Sextupel homologen Geraden windschief ist, seine fünf übrigen Geraden aber schneidet. Es schneiden sich also die Geraden $a_i b_k$, wenn $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \ldots 6)$. Ihre Ebene trifft die Fläche dritter Ordnung in einer Geraden, welche mit c_{ik} bezeichnet wird, wobei $c_{ik} \equiv c_{ki}$, d. h. die Gerade c_{ik} ist die Schnittlinie der Ebenen $a_i b_k$ und $a_k b_i$.

Damit ist die übliche Bezeichnungsweise für die 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung in einer Form in Erinnerung gebracht, welche es erlaubt, den nachstehenden, für unsere Entwicklungen grundlegenden Satz auszusprechen.

Schneidet man eine Schläfli'sche Doppelsechs von Geraden einer Fläche dritter Ordnung mit einer beliebigen Ebene, so bilden die Schnittpunkte sechs Paare entsprechender Punkte einer und derselben (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art auf der ebenen Schnittkurve der Fläche.

Eine (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art auf einer Plankurve dritter Ordnung vom Geschlecht Eins[1] ist nämlich durch ein Paar entsprechender Punkte bestimmt und das Kriterium dafür, daß zwei Punktepaare PP' und QQ', je zwei homologe Punkte derselben (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art darstellen, besteht darin, daß der Schnittpunkt der beiden Geraden PQ', QP' auf der Kurve liegt. Dieses Kriterium ist aber für die Paare von Schnittpunkten der Geradenpaare $a_i b_i$ und $a_k b_k$ erfüllt, denn die zu ziehenden beiden Geraden liegen beziehungsweise in den Ebenen $a_i b_k$, $a_k b_i$ und ihr Schnittpunkt befindet sich also auf der Schnittlinie c_{ik} dieser beiden Ebenen.

Wird die schneidende Ebene zur Tangentialebene der kubischen Fläche, so geht der eben bewiesene Satz in den folgenden über, den ich schon bei einer früheren Gelegenheit aufgestellt habe:[2]

Durch eine Doppelsechs wird in dem Tangentenbüschel eines beliebigen Punktes der kubischen Fläche eine Projektivität induziert, welche die Haupttangenten des Punktes zu Doppelstrahlen hat und den sechs Tangenten, welche je einen Strahl des ersten Sextupels der Doppelsechs treffen, beziehungsweise die sechs Tangenten als entsprechend zuweist, welche je einen (und zwar den homologen) Strahl des zweiten Sextupels der Doppelsechs treffen.

§ 2. Die Graßmann'schen perspektiven Beziehungen der Fläche dritter Ordnung auf die Ebenenbündel der Flächenpunkte.

Eine Doppelsechs von Geraden der kubischen Fläche bestimmt, wie wir im vorhergehenden gesehen haben, auf jeder ebenen Schnittkurve der Fläche eine nicht orientierte (1, 1)-Korrespondenz, d. h. zwei (1, 1)-Korrespondenzen, welche zueinander invers sind. Eine von diesen beiden Korrespondenzen ist erst fixiert, wenn angegeben wird, welches von den beiden Sextupeln der Doppelsechs das erste sein soll oder, wie wir

---

[1] Vergl. Salmon-Fiedler, Höh. Kurven, 2. Aufl., Art. 358, und Em. Weyr, diese Sitzungsberichte, Bd. 87, p. 843 f.

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. 114, p. 1452.

sagen wollen, wenn die Doppelsechs orientiert ist. Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Sachverhältnisse läßt sich folgendermaßen aussprechen.

Durch Angabe einer orientierten Doppelsechs wird das Ebenenbündel, dessen Zentrum ein beliebiger Punkt P der kubischen Fläche ist, auf die Fläche abgebildet, wenn man einer Ebene des Bündels immer den Flächenpunkt P' zuordnet, der in dieser Ebene dem Punkte P in der durch die Doppelsechs auf der Schnittkurve induzierten Korrespondenz entspricht.

Es soll nun gezeigt werden, daß, wenn man in analoger Weise das Ebenenbündel eines zweiten Flächenpunktes Q perspektiv auf die Fläche abbildet, die beiden Bündel P und Q kollinear aufeinander bezogen erscheinen, vorausgesetzt, daß man in ihnen je zwei Ebenen als entsprechend ansieht, die denselben Flächenpunkt abbilden.

Zum Zwecke des Beweises erinnern wir daran, daß durch die Doppelsechs zwei Systeme von kubischen Raumkurven auf der Fläche dritter Ordnung bestimmt sind.[1] Die Kurven des einen Systems haben die Geraden des einen Sextupels der Doppelsechs zu Bisekanten und treffen die des anderen überhaupt nicht, während die Kurven des zweiten Systems sich den beiden Sextupeln gegenüber umgekehrt verhalten. Aus einer Kurve des einen Systems leitet man alle Kurven des zweiten dadurch ab, daß man die ∞^2 Flächen zweiter Ordnung durch sie hindurchlegt und mit der kubischen Fläche zum Schnitt bringt. Auf einer beliebigen ebenen Schnittkurve der Fläche dritter Ordnung wird deswegen ein solches System von kubischen Raumkurven die Punkttripel einer Vollschar bestimmen.

Wir verwenden nun den Satz,[2] daß durch eine Vollschar von Punkttripeln auf einer Plankurve dritter Ordnung eine

---

[1] So z. B. Cremona, Grundzüge einer Theorie der Oberflächen (Berlin 1870), Art. 238.

[2] Dieser Satz rührt von Em. Weyr her, vergl. diese Sitzungsberichte Bd. 88, p. 437.

(1, 1)-Korrespondenz zweiter Art gegeben ist, welche irgend einem Punkte R dieser Kurve den gemeinsamen dritten Schnittpunkt der Verbindungslinien der Punktepaare als entsprechend zuweist, welche den Punkt R zu je einem Tripel der Vollschar ergänzen. Es wird also durch die kubischen Raumkurven der Fläche, welche das Sextupel der Geraden $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ zu Bisekanten haben, auf jeder ebenen Schnittkurve der kubischen Fläche eine (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art bestimmt sein.

Um ein Paar entsprechender Punkte dieser Korrespondenz anzugeben und sie dadurch zu bestimmen, genügt es zu beachten, daß eine der kubischen Raumkurven des betrachteten Systems von der Geraden a_1 in Verbindung mit einem Kegelschnitt dargestellt wird, in welchem eine beliebig durch die Gerade b_1 hindurchgelegte Ebene die Fläche dritter Ordnung noch durchdringt. Denn dieser Kegelschnitt trifft die Gerade a_1, weil a_1 und b_1 windschief sind, hat aus dem analogen Grunde mit den Geraden $b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ je einen Punkt gemein und schneidet die Gerade b_1 in zwei Punkten, während die Gerade a_1 mit jeder von den Geraden $b_2 b_3 b_3 b_5 b_6$ einen Punkt gemein hat. Vermöge dieser zerfallenden kubischen Raumkurve ist jetzt sofort zu sehen, daß in einer beliebigen ebenen Schnittkurve der Fläche dem Treffpunkte der Geraden a_1 der Treffpunkt der Geraden b_1 entspricht. Die Korrespondenz ist also identisch mit jener, welche wir als durch die Doppelsechs der Geraden $a_i b_i$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ induziert bezeichnet haben.

Nach dieser Hilfsbetrachtung kehren wir zum angestrebten Nachweis zurück und ziehen die kubische Raumkurve des betrachteten Systems heran, welche durch die beiden Flächenpunkte P und Q hindurchgeht. Vermöge dieser Raumkurve können wir jetzt in einer beliebig durch den Punkt P gelegten Ebene η den diesem Punkte entsprechenden P' konstruieren:

Auf der Schnittkurve der Ebene η mit der Fläche dritter Ordnung bestimmt unsere kubische Raumkurve ein Punktetripel, dem der Punkt P angehört und dessen weitere Punkte eine Verbindungslinie aufwiesen, die als dritten Schnittpunkt den Punkt P' ausschneidet. Mit anderen Worten, dem Punkte P' der Fläche ist jene Ebene des Bündels P zugeordnet, welche

die vom Punkte P' ausgehende Bisekante unserer kubischen Raumkurve projiziert.

Analog wird auch dem Punkte P' jene Ebene im Bündel Q zugewiesen sein, welche die vom Punkte P' ausgehende Bisekante unserer kubischen Raumkurve projiziert. Entsprechende Ebenen der beiden Bündel P und Q projizieren immer dieselbe Bisekante einer kubischen Raumkurve, welche ihre Scheitel enthält, und damit ist die Beziehung zwischen diesen beiden Bündeln als kollinear erwiesen.

§ 3. Die Doppeldreihyperboloide.

Zu je drei windschiefen Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung gehören drei andere, welche sie treffen. Solche sechs Geraden nennt R. Sturm[1] eine Doppeldrei und die sie enthaltende Fläche zweiter Ordnung bezeichnet er als Doppeldreihyperboloid.

Es liegen z. B. die Geraden

$$a_1\, a_2\, a_3,\ b_4\, b_5\, b_6$$

auf einem derartigen Hyperboloid H_1, ein zweites H_2 enthält die Geraden

$$b_1\, b_2\, b_3,\ a_4\, a_5\, a_6,$$

ein drittes H_3 die Geraden

$$c_{12}\, c_{23}\, c_{31},\ c_{45}\, c_{56}\, c_{64}.$$

In ähnlicher Weise werden überhaupt die Doppeldreihyperboloide sich zu Tripeln ordnen, da je drei windschiefe Geraden der Fläche dritter Ordnung ein solches Hyperboloid bestimmen, und zu jedem Tripel von windschiefen Geraden zwei andere gehören, von deren Geraden keine eine Gerade des ersten Tripels trifft.

Vermöge der Geraden der Hyperboloide H_1, H_2, H_3, die wir kennen, und ihrer Inzidenzverhältnisse[2] sind wir in der

---

[1] In seinem Buche über Flächen dritter Ordnung (Leipzig 1867). Später hat R. Sturm den Ausdruck Doppeldrei für solche zwei Geradentripel fallen lassen und nennt sie »ergänzende Tripel« (Math. Ann., Bd. 23, p. 290).

[2] Die Gerade $c_{\mu\nu}$ wird nur geschnitten von den vier Geraden a_μ, a_ν, b_μ, b_ν sowie von denjenigen sechs Geraden c, deren Indices von μ und ν verschieden sind. Siehe z. B. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., III, p. 83.

Lage, 12 gemeinsame Ebenen dieser drei Flächen zweiter Klasse anzugeben, und zwar:

$$a_1 b_2 c_{12},\ a_2 b_3 c_{23},\ a_3 b_1 c_{31},\ a_4 b_5 c_{45},\ a_5 b_6 c_{56},\ a_6 b_4 c_{64}$$
$$a_2 b_1 c_{12},\ a_3 b_2 c_{23},\ a_1 b_3 c_{31},\ a_5 b_4 c_{45},\ a_6 b_6 c_{56},\ a_4 b_6 c_{64}.$$

Von diesen Ebenen gehen 27mal vier durch denselben Punkt, z. B. durch den Punkt $a_1 b_4$ die Ebenen

$$a_1 b_2 c_{12},\ a_1 b_3 c_{31},\ a_6 b_4 c_{64},\ a_5 b_4 c_{45}.$$

Wir schließen:

Die Doppeldreihyperboloide erscheinen zu Tripeln in der Weise angeordnet, daß je drei demselben Tripel angehörige derselben Schar von Flächen zweiter Klasse angehören.

Die 12 Ebenen, welche wir für die Basis dieser Schar angegeben haben, lassen sich in einfacher Weise kennzeichnen.

Nach Steiner gibt es 120 Paare konjugierter Trieder für die kubische Fläche, d. h. Paare von Triedern, welche sich in lauter Flächengeraden durchdringen. Nach Cremona[1] ordnen sich diese Triederpaare in bestimmter Weise zu 40 Tripeln an und in unseren 12 Ebenen erkennt man die Ebenen von zwei Paaren konjugierter Trieder, welche demselben Tripel angehören. Es ist also gezeigt:

Die 12 Ebenen von je zwei Steiner'schen Triederpaaren, welche demselben Cremona'schen Tripel angehören, sind Schmiegungsebenen für eine und dieselbe Kurve vierter Klasse, erster Art.

Auf alle diese Verhältnisse fällt ein neues Licht, wenn man jetzt neben der Doppelsechs

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

noch die Doppelsechs von Geraden derselben Fläche dritter Ordnung

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$$

[1] L. Cremona, Grundzüge einer Theorie der Oberflächen (Berlin 1870), Art. 261, und Ist. Lomb. Rend. (2), 3 (1870), p. 209; C. Jordan, C. R., 70, p. 326, und Traité des substitutions (Paris 1870), p. 316 und 365.

in Betracht zieht, welche mit ihr die sechs Geraden $a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6$ gemein hat, die auf dem Doppeldreihyperboloide H_1 liegen.

In der Schnittkurve irgend einer Ebene wird von jeder dieser beiden Doppelsechsen eine nicht orientierte (1, 1)-Korrespondenz induziert und es erhebt sich die Frage nach jenen Ebenen τ_i, für welche die von der einen Doppelsechs induzierte Korrespondenz mit der von der anderen Doppelsechs induzierten übereinstimmt. Die Geraden $a_1 b_1$ schneiden ein Paar entsprechende Punkte der einen Korrespondenz aus, die Geraden $a_1 c_{23}$ ein Paar der anderen und es scheinen zunächst zwei Möglichkeiten vorzuliegen: Die Korrespondenz, welche dem Schnittpunkt der Geraden a_1 den Schnittpunkt der Geraden b_1 zuweist, könnte entweder übereinstimmen mit der Korrespondenz, welche dem Schnittpunkt der Geraden a_1 den Schnittpunkt der Geraden c_{23} zuweist, oder aber mit der zu ihr inversen Korrespondenz. Die erste Möglichkeit ist aber für keine Ebene realisiert, denn sie besagt, daß in der nämlichen (1, 1)-Korrespondenz, dem Schnittpunkte von a_1 sowohl der von b_1 als der von c_{23} entspricht, d. h., daß die Schnittpunkte von b_1 und c_{23} mit der betreffenden Ebene zusammenfallen. Dies kann aber nie geschehen, weil die Geraden b_1 und c_{23} windschief sind.

Sind für eine Ebene τ_i die beiden Korrespondenzen identisch, so entsprechen immer in der nämlichen (1, 1)-Korrespondenz auf der Schnittkurve dieser Ebene den Treffpunkten des ersten Sextupels der ersten Doppelsechs, die Treffpunkte ihres zweiten Sextupels der Reihe nach und den Treffpunkten des zweiten Sextupels der zweiten Doppelsechs, der Reihe nach die Treffpunkte ihres ersten Sextupels. Aus der Existenz von diesen 12 Paaren entsprechender Punkte kann man mannigfache Schlüsse über die Ebene τ_i ziehen, wenn man für irgend zwei derselben das in § 1 erwähnte Kriterium dafür zur Verwendung bringt, daß zwei Punktpaare entsprechende Punkte derselben (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art auf einer Plankurve dritter Ordnung bilden.

Den wichtigsten Aufschluß bekommen wir dadurch, daß wir die Punktepaare betrachten, welche von den beiden Geradenpaaren $a_1 b_1$ und $c_{13} a_2$ ausgeschnitten werden. Nach

dem erwähnten Kriterium muß die Verbindungslinie der Schnittpunkte von a_1 und a_2 der Verbindungslinie der Schnittpunkte von b_1 und c_{13} auf der Fläche begegnen, d. h. diese beiden Verbindungslinien müssen den nämlichen Punkt als dritten Schnittpunkt mit der Fläche aufweisen. Der dritte Schnittpunkt der zweiten Verbindungslinie wird aber in der Geraden a_3 liegen, weil die Ebene der Geraden $b_1 c_{13}$ die Fläche noch in dieser Geraden schneidet. Die Bedingung für die Ebene η wird deshalb dahin gehen, daß die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit den Geraden a_1 und a_2 die Gerade a_3 trifft, d. h., daß sie das Hyperboloid dieser drei Geraden berührt. Wir finden:

Die Tangentialebenen eines Doppeldreihyperboloids lassen sich als jene Ebenen charakterisieren, für welche die beiden Schläfli'schen Doppelsechsen, denen die sechs Flächengeraden des Doppeldreihyperboloids angehören, dieselbe (1,1)-Korrespondenz induzieren.

Die Anwendung des Kriteriums auf die Schnittpunktepaare der Ebene η mit den Geradenpaaren $a_1 b_1$ und $a_1 c_{23}$ führt zu folgendem Satze:

Die Ebenen, auf welchen drei windschiefe Geraden der kubischen Fläche solche drei Schnittpunkte bestimmen, daß die Verbindungslinie der beiden ersten durch den Tangentialpunkt geht, den der dritte auf der Schnittkurve der Ebene mit der kubischen Fläche besitzt, umhüllen ein Doppeldreihyperboloid.

Jedes Doppeldreihyperboloid entsteht in dieser Weise auf sechs verschiedene Arten.

Wollen wir jetzt neben dem Doppeldreihyperboloid H_1 auch die Doppeldreihyperboloide H_2, H_3 betrachten, so haben wir zu diesem Zwecke noch eine dritte Doppelsechs heranzuziehen, also folgende drei Doppelsechsen nebeneinander ins Auge zu fassen:

$$\downarrow\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{vmatrix} \quad \uparrow\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{vmatrix} \quad \downarrow\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

Je zwei von diesen drei Doppelsechsen haben sechs Gerade gemein, welche die Doppeldrei einer von den drei

Flächen zweiter Ordnung H_1, H_2, H_3 bilden. Der Satz, daß diese drei Doppeldreihyperboloide derselben Schar angehören, tritt jetzt in Evidenz, wenn man berücksichtigt, daß jedes dieser drei Hyperboloide von den Ebenen berührt wird, auf welchen zwei andere von den drei Doppelsechsen dieselbe (1, 1)-Korrespondenz induzieren. Eine gemeinsame Tangentialebene zweier von diesen Flächen ist dadurch charakterisiert, daß alle drei Doppelsechsen auf ihr die nämliche Korrespondenz induzieren und damit je zwei unter ihnen.

Der Umstand, daß auf einer Ebene alle drei Doppelsechsen dieselbe (1, 1)-Korrespondenz bestimmen, übersetzt sich, wie man aus dem obigen Schema der Geraden dieser Doppelsechsen entnimmt, in die Aussage, daß die Schnittpunkte der sechs Geradentripel

$$a_1 b_1 c_{23} \quad a_2 b_2 c_{31} \quad a_3 b_4 c_{12} \quad a_4 b_4 c_{56} \quad a_5 b_5 c_{64} \quad a_6 b_6 c_{45}$$

mit der Ebene je einen Zyklus bilden für eine und dieselbe ternärzyklische (1, 1)-Korrespondenz auf der Schnittkurve der Ebene mit der Fläche dritter Ordnung. Wir sind deswegen in der Lage, das oben gefundene Ergebnis über die Basiskurve der Schar, welcher die drei Flächen zweiter Klasse $H_1 H_2 H_3$ angehören, in der folgenden Weise zu präzisieren.

Die Ebenen, welche ein Tripel von windschiefen Geraden der Fläche dritter Ordnung so treffen, daß die Spurpunkte auf der Schnittkurve ein Inflexionstripel[1] bilden, treffen noch fünf weitere Tripel von windschiefen Flächengeraden in der nämlichen Weise und umhüllen eine Kurve vierter Klasse, erster Art. Der durch diese Kurve bestimmten Flächenschar zweiter Klasse gehören drei Doppeldreihyperboloide an und zu ihren Schmiegungsebenen gehören 12 Tritangentialebenen der Fläche dritter Ordnung.

Für diese Kurve lassen sich von unserem Standpunkt aus noch andere Schmiegungsebenen angeben, Verbindungsebenen

---

[1] Jedes Tripel einer ternärzyklischen (1, 1)-Korrespondenz ist ein Inflexionstripel, d. h. es entsteht, wenn man drei in gerader Linie befindliche Wendepunkte von einem Kurvenpunkt aus auf die Kurve projiziert; vergl. Em. Weyr, diese Sitzungsberichte, Bd. 87, p. 871/2.

von je drei Schnittpunkten von Geradenpaaren der Fläche dritter Ordnung. Doch verzichten wir auf Ausführungen nach dieser Richtung.

§ 4. Die Schnittpunkte von Geradenpaaren der Fläche dritter Ordnung und das Polarsystem einer Doppelsechs.

Bei Auszeichnung einer Doppelsechs von Geraden der kubischen Fläche — und auf eine Auszeichnung der Doppelsechs $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \end{matrix}$ gründet sich unsere Bezeichnungsweise für die Flächengeraden — zerfallen die übrigen 35 Doppelsechsen in zwei Typen.[1] Doppelsechsen des einen Typus, die sechs Geraden mit der ausgezeichneten Doppelsechs gemein haben, wurden schon oben betrachtet. Eine Doppelsechs vom zweiten Typus ist:

$$\begin{matrix} a_1 b_1 c_{23} c_{24} c_{25} c_{26} \\ a_2 b_2 c_{13} c_{14} c_{15} c_{16}. \end{matrix}$$

Sie hat vier Gerade, $a_1 b_1 a_2 b_2$, mit der ausgezeichneten Doppelsechs gemein.

Die Frage nach den Ebenen, in welchen die beiden orientierten Doppelsechsen

$$\Big\downarrow \begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \Big\downarrow \begin{matrix} a_1 b_1 c_{23} c_{24} c_{26} c_{26} \\ a_2 b_2 c_{13} c_{14} c_{15} c_{16} \end{matrix},$$

deren Orientierung durch Pfeile angedeutet ist, dieselbe (1, 1)-Korrespondenz auf der Schnittkurve induzieren, beantwortet sich sofort. Denn einerseits ist aus dem Geradenschema der ersten Doppelsechs deutlich, daß dem Schnittpunkte von a_1 der von b_1 entspricht, andrerseits aus dem Geradenschema der zweiten Doppelsechs, daß ihm der Schnittpunkt von a_2 entspricht. Es muß also der Schnittpunkt von b_1 mit dem von a_2 übereinstimmen und wir finden, daß die fraglichen Ebenen ein Bündel bilden, dessen Scheitel der Schnittpunkt der Geraden b_1 und a_2 ist.

---

[1] Siehe z. B. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., III, p. 84.

Wir hätten aber dieselben Ebenen auch durch die Bedingung erhalten, daß für ihre Schnittkurven die Geradenpaare $a_2 b_2$ und $c_{24} c_{14}$ zwei Paare entsprechender Punkte derselben (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art bestimmen und können infolgedessen den Satz aussprechen:

Teilt man vier windschiefe Gerade der kubischen Fläche in zwei Paare, so bilden die Ebenen, welche diese Geradenpaare so treffen, daß die Verbindungslinien ihrer Schnittpunktepaare sich auf der Fläche schneiden, ein Ebenenbündel, dessen Scheitel der Schnittpunkt von gewissen zwei Flächengeraden ist.

Kehrt man in einer von den beiden obigen Doppelsechsen die Orientierung um, so ergeben sich jetzt in ganz analoger Weise als Ebenen, auf denen von den beiden Doppelsechsen dieselbe (1, 1)-Korrespondenz induziert wird, die Ebenen des Bündels, dessen Scheitel der Schnittpunkt $a_1 b_2$ ist.

Die Ebenen nun, welche sowohl durch den Punkt $b_1 a_2$ als auch durch den Punkt $a_1 b_2$ hindurchgehen, werden die Gesamtheit derjenigen Ebenen darstellen, für welche die durch die erste orientierte Doppelsechs induzierte Korrespondenz sowohl mit der durch die zweite orientierte Doppelsechs induzierten Korrespondenz als auch mit ihrer inversen identisch wird. Die Paare entsprechender Punkte einer (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art auf einer Plankurve dritter Ordnung, die mit ihrer inversen identisch ist, bilden bekanntlich ein System korrespondierender Punkte auf der Kurve, so daß wir sagen können:

Die Ebenen, auf deren Schnittkurven die homologen Geradenpaare zweier Doppelsechsen, die vier gemeinsame Geraden aufweisen, Paare korrespondierender Punkte desselben Systems bestimmen, bilden ein Ebenenbüschel, dessen Achse zwei bestimmte Schnittpunkte von Geradenpaaren der Fläche verbindet.

Wenn wir nun zu gleicher Zeit die drei Doppelsechsen

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$	$a_1 b_1 c_{23} c_{24} c_{25} c_{26}$	$a_3 b_3 c_{41} c_{42} c_{45} c_{46}$
$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$	$a_2 b_2 c_{13} c_{14} c_{15} c_{16}$	$a_4 b_4 c_{31} c_{32} c_{35} c_{36}$

betrachten, welche paarweise vier Geraden gemein haben, so besagt die in diesem Paragraph gemachte Bemerkung, daß eine Ebene, in deren Schnittkurve die erste und zweite Doppelsechs dieselbe Korrespondenz induzieren, durch einen der beiden Punkte $a_1 b_2$, $b_1 a_2$ hindurchgehen muß und analog eine Ebene, in deren Schnittkurve die zweite und dritte, beziehungsweise die dritte und erste Doppelsechs dieselbe Korrespondenz induzieren, durch einen der beiden Punkte $c_{23} c_{14}$, $c_{24} c_{13}$ beziehungsweise einen der beiden Punkte $a_3 b_4$, $a_4 b_3$.

Daraus folgt aber, daß die drei Punktepaare

$$a_1 b_2,\ b_1 a_2;\quad c_{23} c_{14},\ c_{24} c_{13};\quad a_3 b_4,\ a_4 b_3$$

die Gegeneckenpaare für ein vollständiges Vierseit darstellen müssen, denn es folgt, daß jede Ebene, welche durch einen Punkt des ersten Paares und einen Punkt des zweiten Paares geht, auch einen Punkt des dritten Paares enthält.[1]

Halten wir dieses Ergebnis mit dem Satze von F. Schur zusammen, daß die sechs Paare von homologen Geraden einer Doppelsechs immer sechs Paare von reziproken Polaren für eine und dieselbe Fläche zweiter Ordnung bilden,[2] dann sehen wir, daß von den drei Gegeneckenpaaren des Vierseits zwei, nämlich $a_1 b_2$, $a_2 b_1$, und $a_3 b_4$, $a_4 b_3$ von Punktepaaren gebildet werden, welche konjugiert sind im Schur'schen Polarsystem der Doppelsechs $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$. Nach einem wohlbekannten Satze von Hesse ist nun auch das dritte Gegeneckenpaar des vollständigen Vierseits, das Punktepaar $c_{23} c_{14}$, $c_{24} c_{13}$, konjugiert in diesem Polarsystem. Allgemein findet man auf diese Weise, daß die beiden Schnittpunkte von Geradenpaaren der Fläche $c_{ik} c_{lm}$, $c_{il} c_{km}$ konjugiert sind im genannten Polarsystem, wenn unter i, k, l, m, n irgend vier verschiedene von den Zahlen 1, 2, . . . 6 verstanden werden. Daher gehören zu vier Werten

---

[1] Diese Ebenen, welche sechs Schnittpunkte von Geradenpaaren der Fläche dritter Ordnung enthalten, werden erhalten, wenn man nach den Ebenen fragt, auf deren Schnittkurven sechs windschiefe Flächengeraden drei Paare korrespondierender Punkte desselben Systems bestimmen.

[2] F. Schur, Math. Ann., 18, p. 9. Einen sehr durchsichtigen Beweis des Satzes von Schur gibt Th. Reye, Math. Ann., Bd. 55.

i, k, l, m der Stellenzeiger drei Schnittpunkte von Geradenpaaren, welche in dem Polarsystem paarweise konjugiert sind, nämlich die Punkte

$$c_{ik}c_{lm},\ c_{il}c_{km},\ c_{im}c_{kl}.$$

Wir können dieses Ergebnis in dem folgenden Satze festlegen:

Sondert man von den 27 Geraden einer kubischen Fläche die Geraden einer Doppelsechs ab, so ordnen sich die 45 Punkte, in denen sich die übrigbleibenden 15 Geraden paarweise treffen, in 15 Tripel konjugierter Punkte einer und derselben Fläche zweiter Ordnung an, und zwar ist dies die Schursche Fläche, bezüglich welcher die ausgeschiedene Doppelsechs von Flächengeraden sich selbst polar ist.

§ 5. Die Ebenen, auf deren Schnittkurven die Spurpunkte von zwei windschiefen Flächengeraden denselben Tangentialpunkt besitzen.

Unter den (1, 1)-Korrespondenzen zweiter Art auf einer allgemeinen Plankurve dritter Ordnung gibt es bekanntlich, von der Identität abgesehen, nur drei involutorische. Ihre Paare entsprechender Punkte bilden die drei Systeme von korrespondierenden Punkten auf der Kurve, wobei zwei korrespondierende Punkte dadurch charakterisiert sind, daß ihre Tangentialpunkte identisch sind.

Wenn wir jetzt die Frage nach den Ebenen aufwerfen, auf deren Schnittkurven die zwei von der Doppelsechs $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}$ bestimmten zueinander inversen (1, 1)-Korrespondenzen identisch sind, so haben wir damit nach den Ebenen gefragt, auf deren Schnittkurven die Spurpunkte eines Paares von homologen Geraden dieser Doppelsechs denselben Tangentialpunkt besitzen.

Soll die (1, 1)-Korrespondenz, in welcher dem Spurpunkt von a_1 derjenige von b_1 entspricht, identisch sein mit der (1, 1)-Korrespondenz, in welcher dem Spurpunkt b_2 der Spurpunkt von a_2 entspricht, so ist dem schon erwähnten (§ 1) Kriterium zufolge nur erforderlich, daß die Verbindungslinie

der Spurpunkte von a_1 und b_1 und die Verbindungslinie der Spurpunkte von a_2 und b_2 einander auf der Schnittkurve oder, was auf dasselbe hinaus kommt, auf der Fläche treffen. Führt man die Konstruktion dieser beiden Verbindungslinien für die Ebenen eines beliebigen Büschels g aus, so wird ihr Treffpunkt, wie leicht zu sehen, eine kubische Raumkurve beschreiben. Denn die eine Verbindungslinie wird längs der drei Geraden $g a_1 b_1$, die andere längs der drei Geraden $g a_2 b_2$ gleiten und den Schnittpunkt dieser beiden Verbindungslinien, daher die kubische Raumkurve beschreiben, welche die Regelflächen zweiter Ordnung der Geraden $g a_1 b_1$ und der Geraden $g a_2 b_2$ außer der Geraden g noch gemein haben. Für die Abzählung der Schnittpunkte dieser Raumkurve mit der Fläche dritter Ordnung, welche außerhalb der Flächengeraden $a_1 a_2 b_1 b_2$ liegen, ist zu beachten, daß diese Geraden Bisekanten der kubischen Raumkurve sind und daß die Punkte $a_1 b_2$ und $a_2 b_1$ auf ihr liegen. Es werden deswegen von den neun Schnittpunkten der kubischen Raumkurve mit der Fläche dritter Ordnung sechs auf die genannten vier Flächengeraden zu liegen kommen und nur die drei übrigen werden Ebenen des Büschels g von der verlangten Eigenschaft liefern. Diese Ebenen umhüllen also eine Fläche dritter Klasse, welche mit Φ_3 bezeichnet werden soll.

Die Fläche Φ_3 können wir vollständig kennzeichnen, indem wir zeigen, daß sie alle 12 Geraden $a_i b_i$ der Doppelsechs enthält. Um z. B. zu erkennen, daß jede durch die Gerade a_3 hindurchgelegte Ebene der Fläche angehört, hat man nur zu beachten, daß für eine solche Ebene die Spurpunktpaare von a_1, a_2 und b_1, b_2 tatsächlich so beschaffen sind, daß die zugehörigen Verbindungslinien sich auf der Fläche dritter Ordnung treffen. Dies ist selbstverständlich, weil die zweite Verbindungslinie mit der Flächengeraden a_3 identisch ist, welche sowohl die Gerade b_1 als Gerade b_2 schneidet.

Wir können unser Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Besitzen auf einer ebenen Schnittkurve der Fläche dritter Ordnung die Spurpunkte von zwei windschiefen Flächengeraden den nämlichen Tangentialpunkt, so gilt dasselbe noch für die Spurpunkte von fünf anderen Paaren von windschiefen

Geraden der Fläche. Diese sechs Paare windschiefer Geraden bilden die Paare homologer Geraden einer Doppelsechs und die Fläche dritter Klasse, welche diese sechs Geradenpaare dieser Doppelsechs enthält, ist der Ort der Ebenen, auf deren Schnittkurven die Treffpunkte der Doppelsechs die angegebene Eigenschaft besitzen.

Wir können für die Fläche dritter Klasse Φ_3 die 15 Geraden angeben, welche sie außer den 12 Geraden a_i, b_i noch besitzt. Es sind dies die Verbindungslinien der Punktepaare $a_i b_k, a_k b_i (k, i = 1, 2 \ldots 6)$. Dies folgt unmittelbar aus der Bemerkung daß die Fläche Φ_3 unserer Fläche dritter Ordnung in dem Polarsystem entsprechen muß, welche homologe Geraden der Doppelsechs ineinander überführt, weil durch dieses Polarsystem der Fläche dritter Ordnung eine Fläche dritter Klasse zugeordnet wird, welche die Geraden der Doppelsechs a_i, b_k enthält.[1]

§ 6. Die ebenen Schnitte, auf denen die Spurpunkte von drei windschiefen Flächengeraden denselben Tangentialpunkt aufweisen.

Was können wir über eine Ebene aussagen, welche drei windschiefe Geraden der Fläche dritter Ordnung, z. B. $a_1\, b_1\, c_{23}$ so trifft, daß die Treffpunkte auf der Schnittkurve denselben Tangentialpunkt besitzen?

In der Schnittkurve einer solchen Ebene wird die (1, 1)-Korrespondenz involutorisch sein, welche eine Doppelsechs induziert, in welcher zwei von den drei Geraden $a_1\, b_1\, c_{23}$ als homologe Geraden vorkommen, d. h. jede der drei folgenden Doppelsechsen wird eine involutorische Korrespondenz induzieren.

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & c_{56} & c_{64} & c_{45} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix}.$$

[1] Zu der kovarianten Fläche dritter Klasse Φ_3 ist bereits F. Schur (Math. Ann., 18) von anderer Seite her gelangt und Th. Reye hat (Math. Ann., 55) einen merkwürdigen Zusammenhang derselben mit der Fläche dritter Ordnung entwickelt.

Aus dem Geradenschema dieser drei Doppelsechsen kann man ablesen, daß für unsere Schnittkurve im ganzen sechs Geradentripel so beschaffen sein werden, daß ihre Spurpunkte einander paarweise in einer von einer der drei Doppelsechsen induzierten involutorischen (1, 1)-Korrespondenz zugeordnet sind, nämlich die Geradentripel

$$a_1 b_1 c_{23},\ a_2 b_2 c_{31},\ a_3 b_3 c_{12}$$
$$a_4 b_4 c_{56},\ a_5 b_5 c_{64},\ a_6 b_6 c_{45}.$$

Die Spurpunkte jedes dieser Geradentripel besitzen also denselben Tangentialpunkt.

Man erkennt, daß die zu den drei Tripeln der ersten Zeile gehörigen Tangentialpunkte in einer geraden Linie liegen und die zu den drei Tripeln der zweiten Zeile gehörigen in einer zweiten geraden Linie. Denn man bestätigt sofort, daß die Spurpunkte von zwei verschiedenen Tripeln derselben Zeile entnommenen Geraden eine Verbindungslinie liefern, welche durch den Spurpunkt einer Geraden des dritten Tripels dieser Zeile hindurchgeht (z. B. geht die Verbindungslinie der Spurpunkte von a_1 und b_2 durch den Spurpunkt von c_{12}, weil $a_1 b_2 c_{12}$ derselben Ebene angehören). Wenn aber drei Punkte einer Plankurve dritter Ordnung in gerader Linie liegen, so gilt ein Gleiches bekanntlich von ihren Tangentialpunkten.

Das folgende Ergebnis ist gewonnen.

Besitzen auf einer ebenen Schnittkurve einer Fläche dritter Ordnung die Spurpunkte von drei windschiefen Flächengeraden einen gemeinsamen Tangentialpunkt, so gilt das gleiche noch für fünf andere Tripel von windschiefen Geraden der Fläche. Die sechs Tangentialpunkte der sechs Punktetripel, welche man so erhält, verteilen sich zu je dreien auf zwei gerade Linien.

Wir fragen nun weiter nach den ebenen Schnittkurven der Fläche, auf denen die Spurpunkte von vier windschiefen Flächengeraden, z. B. $a_1\, b_1\, c_{23}\, c_{24}$ denselben Tangentialpunkt besitzen. Damit dies für eine ebene Schnittkurve zutreffe, ist notwendig und ausreichend, daß die (1, 1)-Korrespondenz zweiter Art, welche zwei von den Spurpunkten einander zu-

ordnet, immer identisch sei mit derjenigen, welche die beiden übrigen (in irgend einer Reihenfolge) einander zuordnet. Das heißt so viel, die beiden (1, 1)-Korrespondenzen müssen identisch sein, welche durch irgend eines der folgenden drei Paare von Doppelsechsen (bei beliebiger Orientierung) induziert werden.

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6 \qquad a_3\,b_3\,c_{41}\,c_{42}\,c_{45}\,c_{46}$$
$$b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6 \qquad a_4\,b_4\,c_{31}\,c_{32}\,c_{35}\,c_{36}$$

$$a_1\,a_2\,a_3\,c_{56}\,c_{64}\,c_{45} \qquad b_1\,b_2\,b_4\,c_{56}\,c_{63}\,c_{35}$$
$$c_{23}\,c_{31}\,c_{12}\,b_4\,b_5\,b_6 \qquad c_{24}\,c_{41}\,c_{12}\,a_3\,a_5\,a_6$$

$$a_1\,a_2\,a_4\,c_{56}\,c_{63}\,c_{35} \qquad b_1\,b_2\,b_3\,c_{56}\,c_{64}\,c_{45}$$
$$c_{24}\,c_{41}\,c_{12}\,b_3\,b_5\,b_6 \qquad c_{23}\,c_{31}\,c_{12}\,a_4\,a_5\,a_6$$

Zwei Doppelsechsen jedes Paares haben vier gerade Linien gemein. Sollen sie ohne Rücksicht auf die Orientierung in einer Ebene dieselbe (1, 1)-Korrespondenz induzieren, so ist erforderlich und ausreichend, daß die Ebene durch gewisse zwei Geradenschnittpunkte geht (§ 3), diese drei Paare von Geradenschnittpunkten sind für die drei Paare von Doppelsechsen, beziehungsweise die folgenden drei Punktepaare:

$$a_3\,b_4,\;\; a_4\,b_3$$
$$a_3\,b_4,\;\; c_{12}\,c_{56}$$
$$a_4\,b_3,\;\; c_{12}\,c_{56}.$$

Es gibt also nur eine einzige Ebene von der verlangten Eigenschaft und diese verbindet die drei Punkte

$$a_3\,b_4,\;\; a_4\,b_3,\;\; c_{12}\,c_{56}.$$

Aus dem Geradenschema der obigen sechs Doppelsechsen, deren Paare homologer Geraden auf der Schnittkurve unserer Ebene Paare korrespondierender Punkte bestimmen, entnimmt man nun, daß je zwei Spurpunkte von Geraden jedes der folgenden vier Geradenquadrupel paarweise korrespondierende Punkte sind.

$$a_1\,b_1\,c_{23}\,c_{24}$$
$$a_2\,b_2\,c_{13}\,c_{14}$$
$$a_5\,b_5\,c_{26}\,c_{24}$$
$$a_6\,b_6\,c_{13}\,c_{14}$$

Auch von den drei Punkten $a_3 b_4$, $a_4 b_3$, $c_{12} c_{56}$ erkennt man, daß je zwei von ihnen korrespondierende Punkte auf der Schnittkurve unserer Ebene bilden.

Es ergibt sich daher der Satz:

Es gibt eine einzige Ebene, welche vier windschiefe Geraden einer Fläche dritter Ordnung so trifft, daß die Treffpunkte auf der Schnittkurve einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzen. Diese Ebene trifft noch drei weitere Quadrupel von Flächengeraden in dieser Weise. Sie ist die Verbindungsebene der Schnittpunkte von drei Paaren von Geraden der Fläche, welche mit derselben Flächengeraden je in einer Ebene liegen, und auch diese drei Schnittpunkte haben auf der Schnittkurve einen gemeinsamen Tangentialpunkt.

Kehren wir wieder zu den Ebenen, auf deren Schnittkurven die drei windschiefen Geraden $a_1 b_1 c_{23}$ Spurpunkte mit gemeinsamen Tangentialpunkt bestimmen, zurück! Die Frage nach dem Orte dieser Ebenen ist leicht zu beantworten, denn es handelt sich um die gemeinsamen Ebenen von zwei Flächen dritter Klasse. Es wird nämlich eine Fläche dritter Klasse von den Ebenen gebildet, auf deren Schnittkurven die Geraden a_1 und b_1 korrespondierende Punkte bestimmen, und eine zweite von den Ebenen, auf deren Schnittkurven $a_1 c_{23}$ korrespondierende Punkte bestimmen (§ 5). Diese beiden Flächen enthalten beziehungsweise die beiden Doppelsechsen von Flächengeraden

$$\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1 a_2 a_3 c_{56} c_{64} c_{56} \\ c_{23} c_{31} c_{12} b_4 b_5 b_6 \end{matrix}$$

wie in § 5 dargetan ist, wo die erste dieser beiden Flächen mit Φ_3 bezeichnet wird. Die zweite wollen wir jetzt mit Φ_3' bezeichnen.

Die beiden Doppelsechsen enthalten sechs gemeinsame Geraden, nämlich

$$a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6$$

und jede Ebene durch eine von ihnen wird als gemeinsame Tangentialebene der Flächen Φ_3 und Φ_3' unserer Forderung entsprechen, aber bei zerfallender Schnittkurve. Sehen wir von

diesen uneigentlichen Lösungen ab, so bleibt als Ort der Ebenen, die unserer enger gefaßten Fragestellung genügen, wie wir zeigen wollen, eine Kegelfläche dritter Klasse übrig.

Die sechs Geraden $a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 b_6$ gehören nämlich einem Doppeldreihyperboloid H_1 an und ihre sechs Ebenenbüschel bilden den gesamten gemeinsamen Ebenort sowohl für H_1 und Φ_3 als auch für H_1 und Φ_3'. Daraus folgt, daß es in der Schar der Flächen dritter Klasse, die durch Φ_3 und Φ_3' bestimmt ist, eine gibt, welche die Fläche zweiter Klasse H_1 als Bestandteil enthält. Wird der Punkt mit T bezeichnet, der als Fläche erster Klasse den zweiten Bestandteil dieser zerfallenden Fläche dritter Klasse bildet, dann sind die von T ausgehenden Tangentialebenen der Flächen Φ_3 und Φ_3' identisch und bilden die Gesammtheit der Ebenen, welche im engeren Sinne den Bedingungen unserer Fragestellung genügen. Damit ist bewiesen, daß die fraglichen Ebenen eine Kegelfläche dritter Klasse bilden.

Wir können eine Reihe von Ebenen angeben, welche diesem Kegel dritter Klasse angehören. Zunächst die 18 Ebenen, welche den Kegelscheitel T mit den Geraden der beiden Doppelsechsen

$$\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 & \qquad & a_1 a_2 a_3 c_{56} c_{64} c_{45} \\ b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 & \qquad & c_{23} c_{31} c_{12} b_4 b_5 b_6 \end{matrix}$$

verbinden, denn das sind vom Punkte T ausgehende Tangentialebenen der Fläche Φ_3, beziehungsweise Φ_3'.

Ferner wird die Verbindungsebene der drei Punkte

$$a_3 b_4, \; a_4 b_3, \; c_{12} c_{56}$$

eine Tangentialebene des Kegels sein, da oben gezeigt ist, daß auf ihrer Schnittkurve die vier Geraden $a_1 b_1 c_{23} c_{24}$ vier Punkte mit gemeinsamem Tangentialpunkte bestimmen. In analoger Weise erhalten wir im ganzen neun Tangentialebenen des Kegels dritter Klasse als die neun Ebenen, welche je eines der folgenden neun Punktetripel verbinden:

$$\begin{matrix} a_1 b_4, \; a_4 b_1, \; c_{23} c_{56}; & a_1 b_5, \; a_5 b_1, \; c_{23} c_{64}; & a_1 b_6, \; a_6 b_1, \; c_{23} c_{45} \\ a_2 b_4, \; a_4 b_2, \; c_{31} c_{56}; & a_2 b_5, \; a_5 b_2, \; c_{31} c_{64}; & a_2 b_6, \; a_6 b_2, \; c_{31} c_{45} \\ a_3 b_4, \; a_4 b_2, \; c_{12} c_{56}; & a_3 b_5, \; a_5 b_3, \; c_{12} c_{64}; & a_3 b_6, \; a_6 b_3, \; c_{12} c_{45} \end{matrix}$$

Wir finden:

Von den 270 Ebenen, welche je drei Treffpunkte von solchen Geradenpaaren der kubischen Fläche verbinden, deren Ebenen die Fläche in derselben dritten Geraden treffen, gehen je neun durch einen von 120 Punkten. Solche neun Ebenen berühren eine Kegelfläche dritter Klasse, welche 18 Geraden der kubischen Fläche zu Tangenten hat. Die Tangentialebenen dieser Kegelfläche treffen sechs Tripel von windschiefen Flächengeraden so, daß die Treffpunkte jedes Tripels auf der Schnittkurve der Fläche dritter Ordnung einen gemeinsamen Tangentialpunkt aufweisen.

Über die Reflexion der Sonnenstrahlung an Wasserflächen

von

Dr. Wilh. Schmidt.

Aus der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

I. Theoretische Berechnung des vom Wasser reflektierten Anteils für verschiedene Einfallswinkel.

Es ist bekannt, daß das Verhältnis zwischen der Intensität des auf eine spiegelnde Fläche einfallenden Lichtes und der des reflektierten nicht unabhängig ist vom Einfallswinkel des ursprünglichen Strahles. Wird unpolarisiertes Licht vorausgesetzt, ferner daß die spiegelnde Fläche keine metallische Reflexion zeigt, so ergibt sich nach Fresnel zwischen der Intensität des einfallenden Lichtes J und der des reflektierten R die Beziehung

$$\frac{R}{J} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)} \tag{1}$$

(i Einfallswinkel, r Brechungswinkel, beide verbunden durch die Gleichung

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n). \tag{2}$$

Für die Reflexion an einem optisch dichteren Medium bedeutet die Formel (1), daß bei senkrechter Inzidenz fast die

gesamte Energie in den Körper eindringt, während eine Vergrößerung des Einfallswinkels eine bedeutende Schwächung des letzteren Anteils mit sich bringt, so daß unter Umständen mehr als die Hälfte reflektiert wird.

Die Formel (1) ist nun ohneweiters auch auf Wasser anwendbar, nur muß man für den Brechungsquotienten n einen Wert wählen, welcher dem Energiemaximum der benützten Strahlung entspricht (eigentlich müßte man für jede Wellenlänge das Verhältnis gesondert berechnen). Bei der angestrebten nicht allzugroßen Genauigkeit mochte es genügen, $n = 0 \cdot 75$ anzunehmen (beiläufig dem Na-Licht entsprechend). Man erhält so die folgende Tabelle, in welcher unter dem Kopfe i die Einfallswinkel angeführt sind, unter r die Winkel des gebrochenen Strahles mit dem Einfallslot und unter $\frac{R}{J}$ die Werte jenes Verhältnisses zwischen reflektierter und einfallender Strahlungsenergie, ausgedrückt in Prozenten der letzteren.

i	r	$\frac{R}{J}$ in Prozenten
0°	0° 00′	2·04
10	7 29	2·04
20	14 52	2·06
30	22 02	2·14
40	28 50	2·45
50	35 05	3·36
60	40 31	5·97
70	44 49	13·35
80	47 38	34·79
90	48 35	100·00

Bei einem Einfallswinkel von 0° wird also der Betrag von 2·04% reflektiert; bei zunehmendem Einfallswinkel nimmt dieser Betrag anfangs sehr langsam zu, bis etwa $i = 60°$, dann wächst er sehr schnell. Bei streifender Inzidenz dringt nichts mehr in die Flüssigkeit ein.

II. Experimentelle Bestätigung.

Die durch die Theorie gegebenen Werte wären für alle Berechnungen verwendbar, wenn man wüßte, daß das Wasser nicht jene Eigentümlichkeiten der Spiegelung aufweist, die man unter dem Namen »metallische Reflexion« zusammenfaßt. Daß dies für die Strahlen des sichtbaren Spektrums nicht der Fall ist, sieht man ohneweiters. Für ultrarote Strahlen hingegen, soweit diese noch in der Gesamtstrahlung der Sonne in Betracht kommen, konnte die Frage nur durch das Experiment entschieden werden.

Die dazu notwendige Anordnung war sehr einfach: In ein weites, flaches Gefäß wurde Wasser gegossen und das ganze so aufgestellt, daß die von der Oberfläche zurückgeworfenen Sonnenstrahlen auf ein weiter rückwärts aufgestelltes Ångström'sches Kompensationspyrheliometer fielen. Man war zwar so auf Einfallswinkel von bestimmter Größe beschränkt, da diese gleich dem Zenithabstande der Sonne waren; es wurde aber kein Versuch gemacht, durch Aufstellen eines Heliostaten und Spiegelung den Strahlen beliebige Einfallswinkel zu geben, da auf diese Weise das Sonnenlicht stark geschwächt worden wäre, überdies aber sehr umständliche Nachweise notwendig geworden wären, daß kein integrierender Bestandteil der gesamten Sonnenstrahlung dabei verloren ging. Gerade für diese kleinen Einfallswinkel waren ja auch keine besonderen Verhältnisse zu erwarten, da ja schon die Theorie für $\frac{R}{J}$ nahezu den gleichen Wert bei allen Einfallswinkeln zwischen 40° und 0° ergibt.

Das Ångström'sche Pyrheliometer war eines von denen, die an der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie zur Messung der Intensität der Sonnenstrahlung verwendet werden. Als Galvanometer wurde ein nicht allzu empfindliches d'Arsonval-scher Konstruktion benützt, während die Stärke des Heizstromes von einem Siemens & Halske'schen Milliampèremeter angegeben wurde.

Mit dieser Apparatanordnung läßt sich die Genauigkeit der Messung ziemlich weit treiben. Sie ist wesentlich bedingt durch

die Empfindlichkeit des Galvanometers, fand aber bei diesen Versuchen eine Einschränkung insbesondere durch die Inkonstanz der Sonnenstrahlung. Fehler, welche sich durch kleine Verschiedenheiten der zwei Platinstreifchen ergeben, gleicht man dadurch aus, daß man eine zweite Messung macht, in der beide ihre Rollen vertauscht haben: das früher beschattete Streifchen wird bestrahlt, das andere durch den elektrischen Strom erwärmt. Das Mittel beider Messungen wird als richtiger Wert angenommen. Auf gleiche Weise wird der Fehler eliminiert, der durch im Galvanometerstromkreise auftretende Potentialdifferenzen, wie sie sich durch verschiedene Temperatur leicht einstellen, verursacht wird.

Das arithmetische Mittel beider Ablesungen zu nehmen, ist gestattet, solange die Werte nicht zu sehr verschieden sind. Ist jedoch das letztere der Fall, so ergibt sich der der tatsächlich eingestrahlten Wärmemenge entsprechende genaue Wert des Heizstromes zu:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{5}$$

(a_1 und a_2 die Stärken des Heizstromes bei den zwei Einstellungen). Man sieht ohneweiters, daß diese Korrektur die aus beiden oben erwähnten Fehlerquellen hervorgehenden Fehler ausgleicht.

Andere Ungenauigkeiten, welche die Versuchsanordnung mit sich bringen mochte, liegen in der Beschaffenheit der reflektierenden Wasseroberfläche. Geringe Verunreinigungen durch Staub etc. hatten, wie Versuche ergaben, einen zu vernachlässigenden Einfluß. Mehr störend waren die Wellenbewegungen, die sich nur mit Schwierigkeiten vermeiden ließen, da größtenteils in freier Luft gearbeitet werden mußte; ein Schirm gegen die Luftströmungen setzte ihren Einfluß stark herab. Bei dem Verlauf der Kurve für $\frac{R}{J}$ ist es übrigens selbstverständlich, daß für kleinere Einfallswinkel diese schwachen Wellen das Resultat nur wenig ändern konnten, während bei niederem Sonnenstand verschiedene Wirkungsweisen denkbar waren. Es mochte nämlich das Sonnenbild so stark schwanken, daß eine Einstellung auf dasselbe nicht mit der erforderlichen

Genauigkeit vorgenommen werden konnte (bei ruhigem Wasser war dies leicht), dann wurde das Sonnenbild aber auch in seiner Intensität geschwächt. Man erhielt also zu niedrige Resultate. War hingegen der Einfallswinkel schon sehr groß, so wurde er durch die schwachen Wellen für einzelne Partien noch um einige Grade vergrößert, für andere hingegen etwas verkleinert. Aus der Kurve für jenes Verhältnis von $\frac{R}{J}$ ergibt sich, daß jene Vergrößerung die Verkleinerung an Wirkung bei weitem übertreffen wird, daß man also zu hohe Werte erhält.

Fremde Strahlungen, die fälschenden Einfluß ausüben konnten, waren ziemlich ausgeschlossen. So konnte auch die Wärmestrahlung des Wassers nicht in Betracht kommen, da dieses stets ziemlich dieselbe Temperatur hatte wie das Pyrheliometer. Es trat auch tatsächlich stets ein Zurückgehen des Galvanometers auf den Nullpunkt ohne Heizstrom ein, sobald in den Weg der direkten Sonnenstrahlung ein Schirm gestellt wurde.

Mit diesen Apparaten wurde die Messung in der Weise vorgenommen, daß zuerst eine Ablesung bei auf die Sonne gerichtetem Pyrheliometer gemacht wurde (bestehend aus den zwei Einzelmessungen für jedes der beiden Platinstreifchen), hierauf wurde der Apparat auf das Spiegelbild der Sonne eingestellt und so das zweite Wertepaar gewonnen; den Schluß bildete wieder eine Messung der direkten Sonnenstrahlung. Die Intensität der letzteren ändert sich ja fortwährend, auch an vollkommen heiteren Tagen, man mußte also für die auf die Wasseroberfläche auftreffende Strahlung den Mittelwert der Messungen vor und nach dem eigentlichen Versuche nehmen. Diese Änderung ist besonders bei niedrigem Sonnenstande bedeutend, so daß also hier die Genauigkeit eine kleinere wird.

Die Ergebnisse der einzelnen Versuche bei ruhiger Wasseroberfläche sind in der folgenden Tabelle, zu Mitteln vereinigt, angeführt, daneben auch die nach den Fresnel'schen Formeln folgenden Werte. Da sich die Temperatur des Apparates während der Dauer eines Versuches nie erheblich veränderte, ist es klar, daß man nicht auf die nach der Formel $Q = Ka^2$ berechneten Werte der zugestrahlten Wärme zurückgehen

mußte, sondern für das Verhältnis $\frac{R}{J}$ den Wert $\frac{a^2}{a'^2}$ nehmen durfte, wenn a und a' die Stromstärken sind, welche die reflektierte und die direkte Strahlung kompensieren.

Anzahl der Messungen	Einfallswinkel i	$\frac{R}{J}$ beobachtet	$\frac{R}{J}$ berechnet	Differenz beob. — ber.
		in Prozenten		
2	43·0°	2·4	2·64	— 0·2
3	46·5	3·1	2·94	+ 0·2
8	4[illegible]·8	3·31	3·34	± 0·0
4	53·1	3·68	3·91	— 0·2
3	55·0	4·23	4·22	± 0·0
4	57·2	4·9	4·96	— 0·1
4	59·5	5·85	5·81	+ 0·1
3	63·0	7·5	7·45	± 0·0
5	71·2	14·3	14·88	— 0·6
11	75·6	22·6	22·4	+ 0·2
4	81·5	40·6	40·7	— 0·1
2	83·[illegible]	48·[illegible]	47·6	— 0·4

Die Werte, welche in Kolumne 3 stehen, stimmen mit denen der vierten Kolumne vorzüglich überein. Die Abweichungen (fünfte Spalte) sind durchwegs so klein, daß sie durch die Beobachtungsfehler erklärt werden können.

Aus dieser Tabelle ergibt sich also, daß die Sonnenstrahlen, soweit sie für uns in Betracht kommen, vom Wasser vollständig den Fresnel'schen Formeln gemäß reflektiert werden. Es ist also gestattet, diese den Berechnungen zu Grunde zu legen.

Es mag nun noch auf die Abweichungen hingewiesen werden, welche durch Wellenbewegung hervorgerufen werden. So ergaben drei Messungen bei einem Einfallswinkel von 52·2° den Wert von 3·4% für das Verhältnis $\frac{R}{J}$ anstatt 3·7%, wie die Rechnung verlangt. Andere Messungen, bei denen ebenfalls schon während der Beobachtung notiert wurde, daß die Oberfläche stark bewegt war, lieferten für $i = 68 \cdot 4°$

$$\frac{R}{J} = 9 \cdot 5\%$$

statt 11·5%. Man sieht also, wie hier, bei nicht zu großen Einfallswinkeln, die Beträge durch die Wellen herabgedrückt werden. Andere, bei bewegtem Wasser gemachte Messungen lieferten für $i = 79 \cdot 1°$

$$\frac{R}{J} = 36\%,$$

während die Formel 31·8% verlangt. Hier wurde das Verhältnis also vergrößert, ein Resultat, das man sich auf die Weise erklären kann, daß auf der der Sonne zugekehrten Vorderseite der Wellen die Reflexion wegen Verringerung des Einfallswinkels zwar verringert, an der der Sonne abgewendeten Seite hingegen wegen des flacheren Auffallens der Strahlen ganz bedeutend vermehrt wird. Diese Wirkung wird man also eventuell in Betracht zu ziehen haben.

III. Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Verhältnisse auf der Erde.

Das starke Zunehmen des reflektierten Anteiles bei niedrigem Sonnenstande wird nun nicht ohne Einfluß auf die Erwärmung des Wassers und dadurch auf dessen Verdunstung und die Temperatur der untersten Luftschicht sein. Bei hohem Einfallswinkel der Strahlen, wo die zugestrahlte Wärme schon bedeutend kleiner ist, wird auch von dieser noch ein großer Teil durch Reflexion verloren gehen, es werden also jene Gegenden, in denen die Sonne tiefer steht, einen noch kleineren Teil zurückbehalten als die Theorie ergibt.

Selbstverständlich beziehen sich die folgenden Berechnungen nur auf die Strahlung gegen eine Wasseroberfläche.

Da aber eben der größte Teil der Erde vom Meere bedeckt ist, wird das einen großen Anteil am gesamten Wärmehaushalte der Erde nehmen.

Zunächst soll versucht werden, zu berechnen, welcher Teil der gesamten, einer Wasserkugel zugestrahlten Wärme durch Reflexion verloren geht. Da es sich nur darum handelt, die Größenordnung der in Betracht kommenden Beträge festzulegen, konnte für alle folgenden Betrachtungen, auch diejenigen, welche sich auf eine bestimmte geographische Breite beziehen, die Deklination der Sonne als $\delta = 0^\circ$ angenommen werden.

Nimmt man eine Kugelzone, die von jenen Kreisen begrenzt ist, welche Zenithabstände der Sonne α und $\alpha + \delta\alpha$ aufweisen, so empfängt sie den Betrag von

$$a^2 A\pi \sin 2\alpha d\alpha$$

an Wärme. a ist der Erdradius, A die der Flächeneinheit zugestrahlte Wärmemenge. Von dieser Wärme wird der Anteil $\frac{R}{J} = \rho(\alpha)$ reflektiert, so daß man als Verhältnis der gesamten, von der Wasseroberfläche reflektierten Wärmemenge zu der der ganzen Erde zugestrahlten

$$q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\alpha) \sin 2\alpha d\alpha$$

erhält.

Will man erfahren, nach welcher Richtung hin die Reflexion am größten ist, so hat man unter den Größen

$$\rho(\alpha) . \cos \alpha$$

das Maximum zu suchen. Diese Werte sind in der zweiten Spalte der folgenden Tabelle für Winkel von 10 zu 10 Graden gerechnet. Die dritte Kolumne gibt die Mittelwerte dieser Größen für die entsprechenden Intervalle, wie sie auf graphischem Wege gewonnen wurden. In der letzten Spalte finden sich die Anteile an q, welche den einzelnen Intervallen zukommen. Wie diese letzten Werte in Prozenten der gesamten auf die Kugel fallenden Strahlung angegeben sind, so die der dritten Spalte

in Prozenten der gesamten, auf einen gleichbreiten, durch die Pole und den der Sonne gerade gegenüberliegenden Punkt der Oberfläche führenden Streifen fallenden Wärme.

α	$\rho(\alpha) \cos \alpha$	Mittelwerte von $\rho(\alpha) \cos \alpha$	$\pi \rho(\alpha) \sin 2\alpha$	Mittelwerte von $\pi \rho(\alpha) \sin 2\alpha$
0°	2·04		0·00	
		0·35		0·19
10	2·00		0·22	
		0·34		0·56
20	1·94		0·42	
		0·33		0·87
30	1·85		0·58	
		0·33		1·17
40	1·88		0·75	
		0·35		1·57
50	2·16		1·04	
		0·50		2·32
60	2·98		1·62	
		0·64		3·66
70	4·56		2·69	
		0·96		6·38
80	6·04		3·74	
		0·76		4·80
90	0·00		0·00	
Σ		4·56		21·52

Die Zahlen der zweiten Spalte geben nun auch die Helligkeiten, unter denen das Spiegelbild der Sonne in der Kugel, von verschiedenen Seiten aus gesehen, erscheint. Da der Winkel, für den die Funktion $\rho(\alpha).\cos \alpha$ ein Maximum wird, bei ziemlich genau 80° liegt, so folgt, daß die Kugel am hellsten glänzt, bei einem Winkel Sonne—Kugelmittelpunkt—Beobachter gleich 160°. Die Helligkeit in dieser Richtung ist fast genau das Dreifache von der, welche ein auf der Seite der Sonne stehender Beobachter wahrnimmt. Diese Verhältnisse lassen sich sehr deutlich der Fig. 1 entnehmen, in welcher die Helligkeiten als Längen auf den die Richtung der reflektierten Strahlen gebenden Radien vom Kugelmittelpunkt aus abgetragen sind.

Die Bedeutung der in der dritten Spalte der Tabelle a. v. S. stehenden Zahlen, $\int \rho(\alpha) \cos \alpha d\alpha$ über die aufeinanderfolgenden 10°-Intervalle erstreckt, wird sich später ergeben.

Die nächste Spalte gibt die Wärmemengen, welche von Kugelzonen gleicher Breite $d\alpha$ mit dem Öffnungswinkel α reflektiert werden. Auch hier bemerkt man ein Maximum für $\alpha = 80°$. Diese Werte wurden, um die gesamte von der Wasserkugel reflektierte Wärme zu erhalten, über die betreffenden Intervalle integriert und lieferten so die Zahlen der letzten Spalte. Man sieht hier, welch bedeutender Anteil der Strahlung gerade von jener Partie, welche wegen des großen Einfalls-

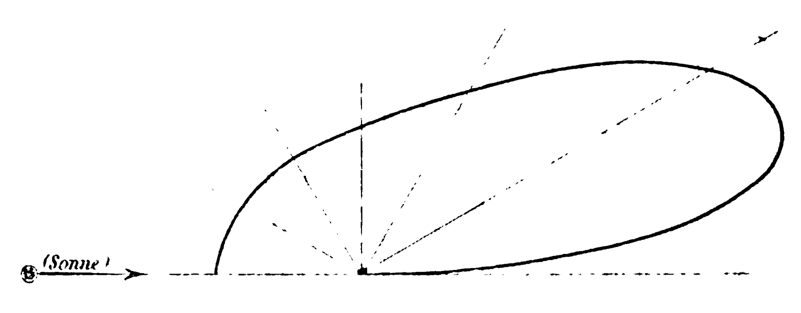


Fig. 1.

winkels sehr wenig Strahlen von der Sonne erhält, reflektiert wird, nämlich der Anteil von 4·8% von der Zone zwischen $\alpha = 80°$ und $\alpha = 90°$.

Einen überraschend hohen Wert nimmt aber die Summe der in der letzten Spalte stehenden Größen an: man erhält für den Gesamtverlust der Erde durch Reflexion 21·5% der von der Sonne zugestrahlten Wärme. Das ist nun ein Betrag, der auf die klimatischen Verhältnisse von großem Einfluß sein muß, besonders da dieser Ausfall sich nicht aus allen Breiten in gleicher Weise deckt. Die niederen Breiten haben nämlich nur kurze Zeit im Tage niederen Sonnenstand, während dessen Dauer für höhere Breiten immer zunimmt und mit ihr auch die Menge der reflektierten, der Erde entzogenen Wärme. Um sich über die dabei in Betracht kommenden Beträge ein Urteil bilden zu können, wurden für zwei Parallele, den von 40° und

70° Breite, die während der einzelnen Stunden des Tages reflektierten Wärmemengen gerechnet, in Prozenten der gesamten, während des Tages zugestrahlten Wärme. Wie man leicht sieht, gelten für den Äquator die in der dritten Spalte der vorhergehenden Tabelle enthaltenen Werte. Die Rechnung wurde, da sie bloß eine Übersicht geben sollte, für den einfachsten Fall, den Äquinoktialtag ($\delta = 0°$), durchgeführt. Die Anteile selbst beziehen sich auf die angeführten Stunden des Vormittags und die entsprechenden des Nachmittags zusammen.

Zeit	Äquator	40° Breite	70° Breite
$6^h 00^m$ — $6^h 40^m$	0·76	0·93	1·29
6 40 — 7 20	0·96	1·45	2·55
7 20 — 8 00	0·64	1·18	3·11
8 00 — 8 40	0·50	0·79	3·16
8 40 — 9 20	0·35	0·61	2·91
9 20 —10 00	0·33	0·52	2·74
10 00 —10 40	0·33	0·47	2·53
10 40 —11 20	0·34	0·45	2·39
11 20 —12 00	0·35	0·43	2·34
6 00 —12 00	4·56	6·83	23·02

Wie die Kurven der Intensitäten des reflektierten Lichtes ergeben, ist am Äquator die von der Wasseroberfläche rückgestrahlte Wärme um $6^h 40^m$ a. am stärksten; ihr Betrag nimmt später ab, bleibt aber dann ziemlich konstant. Unter einer Breite von 40° tritt das Maximum schon etwas später ein, kurz nach 7^h a., während es sich bei 70° Breite um 8^h a. findet. Hier ist es aber schon bedeutend abgeflacht, es erhebt sich nur wenig über die den ganzen Tag über fast gleich hohen Werte.

Von großem Interesse sind nun die für den ganzen Tag gebildeten Summen; so verliert eine bestimmte Wasserfläche unter dem Äquator nur etwas über 4·5% der ihr theoretisch während des Tages zukommenden Wärme, unter 40° Breite

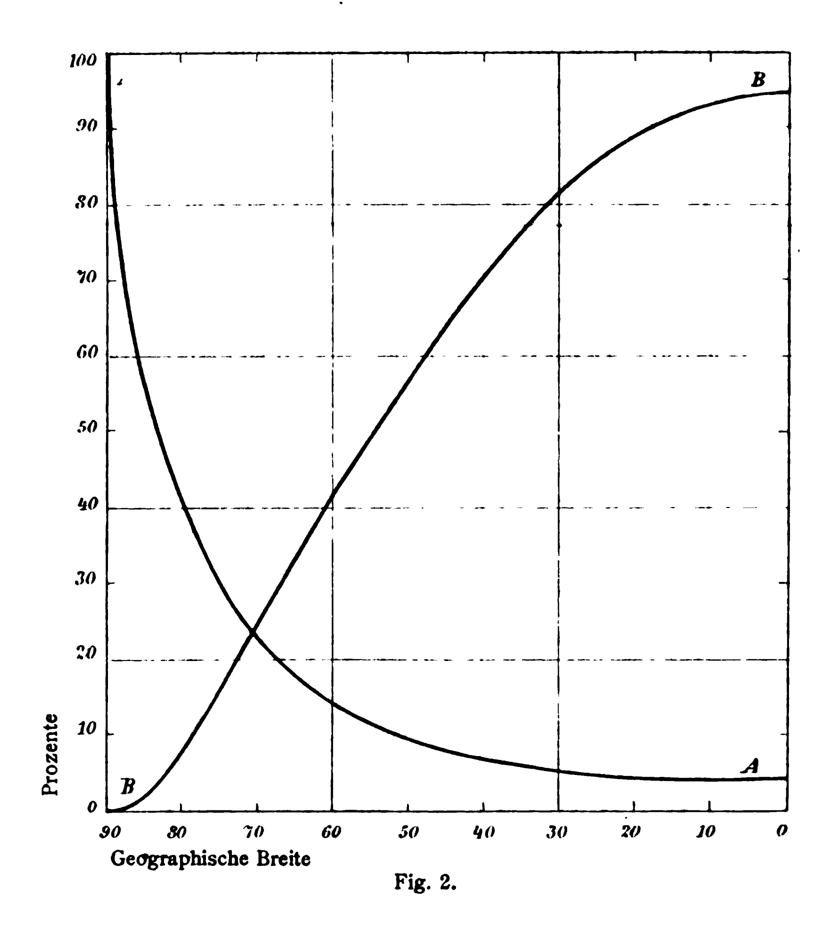


Fig. 2.

sind es schon 6·8%, während man bei 70° den bedeutenden Ausfall von 23% erhält, am Pol volle 100%. Gerade in diesen hohen Breiten wird der Verlust um so mehr ins Gewicht fallen, da sie ohnedies eine bedeutend geringere Wärmemenge zugestrahlt erhalten. Aus Fig. 2 (Kurve *AA*), wo diese Verhältnisse veranschaulicht sind, kann man entnehmen, daß eine Wasserfläche unter 80° Breite nur mehr 59%, eine unter 85° Breite

nur 43% von der ihr theoretisch zukommenden Strahlungsenergie erhalten würde. Kurve *BB* derselben Figur stellt hingegen die Beträge der gesamten ins Wasser eindringenden Strahlungsenergie unter verschiedenen Breiten dar in Prozenten der dem Äquator zugestrahlten Energie.

Alle diese Zahlen gelten nun für eine freie Wasseroberfläche. Treffen die Sonnenstrahlen auf Land, so findet keine regelmäßige Reflexion mehr statt, sondern Licht und Wärme werden diffus zerstreut. Die auf diese Weise zurückgestrahlten Energiebeträge ändern sich zwar auch mit dem Einfallswinkel, sind aber kaum direkt zu bestimmen. Man kann nur die eine Angabe machen, daß hier der Verlust geringer sein dürfte als beim Wasser.

Die Wirkung des Ausfalles der Energiezufuhr durch die Reflexion wird man also vornehmlich auf der größtenteils von Wasser bedeckten Südhalbkugel der Erde zu erwarten haben.

Eine andere Frage ist das Verhalten von mit Eis bedeckten Flächen gegenüber der Einstrahlung. Da der Brechungsquotient von Eis sich nur wenig von dem des Wassers unterscheidet, werden auch die Werte für ρ nur wenig voneinander unterschieden sein. Der Betrag der Reflexion ergibt sich auch tatsächlich für $i = 0°$ zu 1·80%, für $i = 80°$ zu 34·00%, während die entsprechenden Zahlen für Wasser 2·04% und 34·79% sind. Die früher angeführten Verhältnisse werden sich also auch bei den mit Eis bedeckten arktischen Gebieten finden. Allerdings wird hier die Unregelmäßigkeit der Oberfläche nicht die extremsten Fälle verwirklicht werden lassen, sondern es wird ein größerer Anteil als die Rechnung ergibt, in das Eis eindringen.

Es handelt sich nun darum, zu entscheiden, ob die durch Reflexion zurückgestrahlte Wärme wirklich für die Erde verloren geht. Der reflektierte Strahl hat ja einen gleich langen Weg durch die Atmosphäre zurückzulegen, wie bis zur Reflexion, und auf diesem Wege könnte er wieder zirka 0·6 seiner Intensität verlieren. Dem hat man entgegenzuhalten, daß es hauptsächlich ganz bestimmte Spektralgebiete sind, für welche die Atmosphäre starke Absorption zeigt und eben diese Gebiete

sind im Strahle, bis er zur Erdoberfläche kommt, schon größtenteils ausgelöscht. Der reflektierte Strahl wird also auf seinem Weg viel weniger geschwächt werden.

Ein anderer Umstand kommt auch noch dazu. Für das Leben auf der Erde und die klimatologischen Verhältnisse ist hauptsächlich die Temperatur der gerade auf der Oberfläche aufliegenden Luftschicht ausschlaggebend. Diese bezieht aber ihre Wärme fast ausschließlich von dem darunterliegenden Boden, der von der Sonne bestrahlt wird. Die Lufttemperatur wird also durch die Wärme gegeben sein, welche tatsächlich in den Boden eindringt. Damit behalten also alle die früheren Schlüsse ihre Gültigkeit.

Auf einige besondere Wirkungsweisen der dargelegten Verhältnisse möge noch hingewiesen werden. Die ins Wasser eindringende Strahlung ist bei niedrigem Sonnenstande ziemlich klein. Für alle Lebewesen darin, die auf Licht und Wärme angewiesen sind, wird also der Tag bedeutend kürzer, eine Erscheinung, die um so mehr ins Gewicht fällt, da für die Lebensprozesse eher die längere Dauer der wärmeren Zeit Bedeutung hat als die maximale Intensität der Strahlung.

Die entgegengesetzte Wirkung wird sich an den Ufern der Seen finden. Dort empfangen die Hänge besonders des Ost- und Westufers abends und morgens nicht unbedeutende Beträge strahlender Wärme vom Seespiegel reflektiert und diese Wärme wird um so größere Wirkung für den Pflanzenwuchs haben (speziell den Weinbau), da sie von einer ganz besonderen Richtung, halb von unten, kommt.

Diese Erscheinung hat auch schon einen Beobachter gefunden. Das besonders günstige Klima, welches die Hänge des Westufers des Genfersees zeigen, bewog M. L. Dufour[1] dazu, Messungen der reflektierten Sonnenstrahlung vorzunehmen, allerdings mit ziemlich unzureichenden Apparaten. Er fand auch tatsächlich, daß nicht zu vernachlässigende Beträge von der Wasseroberfläche zurückgeworfen werden,

---

[1] Recherches sur la réflexion de la chaleur solaire. Lausanne 1873.

ebenso, daß dieser Anteil mit sinkendem Sonnenstand zunimmt. Seine Messungen haben insofern Wert, als sie die besprochenen Wirkungen auch an dem bewegten Wasser eines Sees erwiesen haben. Es wäre allerdings der Mühe wert, mit den jetzigen verfeinerten Apparaten die Versuche zu wiederholen.

Mit den vorliegenden Ausführungen soll nun nicht gesagt sein, daß niedrige Temperaturen in höheren Breiten zum größten Teil auf die Verluste durch Reflexion zurückzuführen sind, wohl aber sollte hingewiesen werden auf eine Wirkung, welche die extremen Verhältnisse, die durch andere Umstände bedingt werden, noch steigert. Gerade für die höchsten Breiten darf man sie nicht vernachlässigen, wird sie aber auch dann zu berücksichtigen haben, wenn man mit einiger Wahrscheinlichkeit eine etwas genauere Übersicht über den absoluten Wärmehaushalt der Erde aufstellen will.

Daß die gebrachten Überlegungen nicht auf rein theoretischen Schlüssen beruhen, sondern auch tatsächlich ihr Gegenstück in der Wirklichkeit haben, sollen die eingangs angeführten Versuche beweisen, welche wohl einen zur Genüge übereinstimmenden Gang der theoretisch und experimentell ermittelten Werte zeigen.

Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten

von

Dr. Wilh. Schmidt.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

I.

In einem rechtwinklig parallelepipedischen Gefäß von der Gesamthöhe H befinden sich zwei Flüssigkeiten von den spezifischen Gewichten ρ und ρ'. Die schwerere bilde eine Schicht von der Dicke h, die Höhe der anderen Flüssigkeit sei $H - h = h'$.

In der Grenzschicht beider Flüssigkeiten werden sich nun stehende Schwingungen ausbilden können, die außer von den angegebenen Größen nur mehr von der Länge des Gefäßes abhängen werden. Ihre Schwingungsdauer soll gerechnet werden.

Die Schwingungen mögen Sinusschwingungen sein, die Flüssigkeiten wirbelfrei. Man kann dann ein Geschwindigkeitspotential einführen von der Form (für die schwerere Flüssigkeit):

$$\varphi = \mathfrak{z} . \{\cos (bx + abt) + \cos (bx - abt)\}$$

Der Koordinatenursprung ist hiebei in die eine Seitenfläche verlegt gedacht, die X-Achse gibt die Richtung der Länge des Gefäßes, die z-Koordinaten sind vertikal nach aufwärts positiv gerechnet. Da Schwingungen nach der Breite des Gefäßes nicht stattfinden sollen, ist in der Gleichung kein Glied mit y enthalten, $\mathfrak{z}$ hingegen ist eine Funktion von z allein.

Aus der Kontinuitätsgleichung und der Bedingung, daß auf dem Boden des Gefäßes die Bewegung in der z-Achse gleich Null ist, ergibt sich

$$\mathfrak{z} = A . (e^{bz} + e^{-bz}),$$

also erhält man:

$$\varphi = A.(e^{bz}+e^{-bz}).\{\cos(bx+abt)+\cos(bx-abt)\} \qquad 1)$$

als Geschwindigkeitspotential für die erste Flüssigkeit und auf ähnliche Weise für die zweite:

$$\varphi' = A'(e^{(H-z)b'}+e^{-(H-z)b'})\{\cos(b'x+a'b't)+\cos(b'x-a'b't)\} \qquad 1')$$

Die Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen liefern:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{p}{\rho}+gz=0;$$

differenziert man diese Gleichung nach der Zeit und läßt das Glied $\frac{\partial c^2}{\partial t}$ fort unter der Annahme, daß die Wellen wenig lebhaft sind, so erhält man

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \qquad 2)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho'}\frac{\partial p'}{\partial t}-g\frac{\partial\varphi'}{\partial z}=0 \qquad 2')$$

für die zweite Flüssigkeit.

In der Grenzschicht der Flüssigkeiten müssen nun die Druckänderungen in beiden gleich sein. Rechnet man also aus 2) und 2') $\frac{\partial p}{\partial t}$, beziehungsweise $\frac{\partial p'}{\partial t}$, so wird die Gleichsetzung dieser zwei Werte für $z=h$ eine Beziehung zwischen den noch vollkommen unbestimmten Größen A, A', a, a', b und b' geben.

Setzt man in die so erhaltene Gleichung

$$\rho\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}=\rho'\left\{\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right\} \text{ (für } z=h) \qquad 3)$$

die Werte von φ und φ' aus 1) und 1') ein, beachtet ferner, daß sie für jedes x und t gültig sein muß, so erhält man die beiden Beziehungen:

$$Ab\rho\{g(e^{bh}-e^{-bh})-a^2b(e^{bh}+{}^{-bh})\}=$$
$$=A'b'\rho'\{-g(e^{b'h'}-e^{-b'h'})-a'^2b(e^{b'h'}+e^{-b'h'})\} \qquad 4)$$

und

$$\cos(bx + abt) + \cos(bx - abt) =$$
$$= \cos(b'x + a'b't) + \cos(b'x - a'b't). \quad 5)$$

Die letzte Gleichung muß nun wieder für beliebiges x und t gelten, also auch für $t = 0$, woraus

$$\cos bx = \cos b'x$$

für jedes x, also

$$b = b'; \quad 6)$$

ebenso gibt $x = 0$, in 5) eingesetzt,

$$\cos abt = \cos a'b't$$

bei beliebigem t, also

$$a = a' \quad 7)$$

Nun müssen in der Grenzschicht wegen der Kontinuität der Verschiebungen auch die Geschwindigkeitskomponenten in der z-Richtung gleich sein, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}$$

für $z = h$ oder

$$A(e^{bh} - e^{-bh}) = -A'(e^{bh'} - e^{-bh'}) \quad 8)$$

Wird Gleichung 4) durch Gleichung 8) dividiert unter Berücksichtigung von 6) und 7), so ergibt sich:

$$\rho(Qa^2b - g) + \rho'(Q'a^2b + g) = 0, \quad 9)$$

wenn Q statt $\frac{e^{bh} + e^{-bh}}{e^{bh} - e^{-bh}}$ und Q' statt des entsprechenden Ausdruckes für h' gestzt wird.

Es sind nun nur noch die Bedingungen zu erfüllen, daß an der rechten und linken Seitenwand des Gefäßes die Komponenten der Bewegung und mit diesen auch die Komponenten der Geschwindigkeit in der x-Richtung verschwinden müssen. Für $x = 0$ ist das schon der Fall, für $x = l$ (l die Länge des Gefäßes) erhält man aber aus $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ die Reihe von Lösungen:

$$b = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \ldots \text{ allgemein } \frac{n\pi}{l} \ (n \text{ ganze Zahl}) \quad 10)$$

Damit sind alle Größen gegeben, welche zur Bestimmung der Schwingungsdauer notwendig sind. Für diese liefern unsere Ansätze den Ausdruck:

$$\tau = \frac{2\pi}{ab};$$

setzt man hier ab aus 9) ein unter Berücksichtigung von 10), so wird

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l\pi}{ng}}\sqrt{\frac{Q\rho + Q'\rho'}{\rho - \rho'}} \qquad 11)$$

$$\text{für } n = 1, 2 \ldots$$

Es ergibt sich auch hier eine unendliche Reihe möglicher Schwingungen, von denen die Grundschwingung nur einen Knoten in der halben Länge aufweist; die erste Oberschwingung ($n = 2$ gesetzt) zeigt deren zwei u. s. f. In diese Einzelschwingungen kann man eine für einen bestimmten Zeitpunkt beliebig vorgegebene Oberflächenform auflösen und erhält die tatsächlich erfolgende Schwingung als Superposition aller dieser. Man hat also wirklich die allgemeinste Lösung. Die Schwingungsgleichung selbst für alle Punkte aufzustellen hat weiter keine Schwierigkeit: man braucht bloß die errechneten Konstanten in die Gleichungen $\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt = x$ für den Bereich der schwereren und in $\int \frac{\partial \varphi'}{\partial x} dt = x$ für die leichtere Flüssigkeit einzusetzen.

Die Formel 11) ist auch ganz ähnlich gebaut wie die gewöhnlich für Seiches benützte, nur ist bei dieser der letzte Faktor $\sqrt{Q}$. Wie man sieht, erhält man diese Form aus 11), wenn das spezifische Gewicht der Flüssigkeit in der oberen Schicht so klein angenommen wird, daß man es gegenüber dem der unteren vernachlässigen kann.

Der Einfluß des spezifischen Gewichtes der oberen Flüssigkeit äußert sich durch Vergrößerung der Schwingungsdauer für eine bestimmte Troglänge. Wird die Differenz $\rho - \rho'$ kleiner, so wächst die Schwingungsdauer schließlich sehr schnell und nähert sich für unendlich kleine Werte jener Differenz dem Betrag ∞. In diesem Falle können, da ja auch der Anlaß hiezu

fehlt, keine Schwingungen auftreten. Alle möglichen Werte für τ werden also zwischen diesem und dem anderen Extremwert liegen, den die Formel für gewöhnliche Seiches liefert ($\rho' = 0$).

Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Mächtigkeit beider Schichten ist ziemlich kompliziert. Diese finden sich nämlich in Q und Q'. Für die meisten Betrachtungen ist aber die Erleichterung erlaubt, welche die Annahme größerer Dicke der Schichten mit sich bringt. Q und Q' nähern sich dann immer mehr der Einheit. So erhält man z. B. für $h . b = 1$, d. h. $\frac{h}{l} = \frac{1}{\pi}$, $Q = 1 \cdot 30$. Wird hingegen $h . b = \pi$, d. h. $h = l$, dann ergibt sich $Q = 1 \cdot 0035$. Für die Betrachtung der Fälle also, wo die Tiefe des Gefäßes zumindest gleich der Wellenlänge ist, kann man mit der vereinfachten Formel rechnen:

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{l\pi}{ng}} \cdot \sqrt{\frac{\rho+\rho'}{\rho-\rho'}} \qquad 12)$$

Es ist nun interessant, daß man zu derselben Formel auf einem ganz verschiedenen Wege gelangen kann. Es ist ja gleichgültig, auf welche Weise man sich die Wellen entstanden und unterhalten denkt. Man kann sie z. B. so erzeugen, daß man den beiden Schichten von Flüssigkeiten gleiche, aber entgegengesetzte Geschwindigkeiten erteilt. Helmholtz und Wien haben diesen Fall berechnet und für Wellen, deren Höhe gegenüber ihrer Länge zu vernachlässigen ist, die Beziehung aufgestellt:

$$a_1^2\rho + a_2^2\rho' = \frac{g\lambda(\rho-\rho')}{2\pi} \qquad 13)$$

a_1 und a_2 sind die Geschwindigkeiten in der unteren und oberen Flüssigkeitsschicht relativ zu den entstehenden Wellensystemen, also für unseren Fall

$$a_1 = -a_2 = \frac{\lambda}{\tau},$$

wenn λ die Wellenlänge darstellt. Da für entstehende stehende Wellen in unseren früheren Bezeichnungen $\lambda = \frac{2l}{n}$ ist, erhält man aus 13):

$$\tau = 2\sqrt{\frac{l\pi}{ng}} \cdot \sqrt{\frac{\rho+\rho'}{\rho-\rho'}},$$

also genau die Formel 12).

Wählt man hingegen h und h' sehr klein gegenüber l, dann nähert sich Q und Q' beziehungsweise dem Wert $\frac{l}{\pi h}$ und $\frac{l}{\pi h'}$ und die Schwingungsdauer wird:

$$\tau = 2l\sqrt{\frac{\frac{\rho}{h}+\frac{\rho'}{h'}}{ng(\rho-\rho')}},$$

eine Form, die von B. R. Watson, Geogr. Journ. Lond. 1904, verwendet wurde.

II.

Die gewonnenen Resultate zu überprüfen, wurden einige Versuche gemacht, die allerdings bei der Ausführung in kleinen Dimensionen nicht mehr als angenäherte Werte liefern konnten. Als untere schwerere Flüssigkeit diente eine Lösung von Chlorcalcium in Wasser, darüber befand sich eine Schicht reinen Wassers. Um Mischung zu vermeiden, war dieses zuerst eingefüllt worden, dann die Lösung durch ein bis an den Boden reichendes Rohr zugeführt. Das Gefäß war ein kleines parallelepipedisches Batterieglas, welches oben nach vorgenommener Füllung durch ein Brettchen geschlossen wurde, einerseits um die Bedingungen der Rechnung zu erfüllen, insbesondere aber um jeden Einfluß der sonst entstehenden Schwingungen der freien Oberfläche zu zerstören. Die Grenzlinie der Flüssigkeiten war ziemlich gut sichtbar, auch dann, wenn durch Neigen des Gefäßes die Schwingungen eingeleitet worden waren.

Im folgenden sind die Resultate angeführt mit Benützung der Bezeichnungen von früher. Gerechnet wurde nach der vereinfachten Formel 12), da der hiebei gemachte Fehler 1% nicht erreichen konnte.

1. $\rho = 1\cdot31$	$l = 9\cdot65\, cm$	$l = 50\, cm$
$\rho' = 1$	τ_b[1] $= 1\cdot00$ sec	$\tau_b = 0\cdot74$ sec
$h = 6\cdot75\, cm$	τ_r[1] $= 0\cdot96$ sec	$\tau_r = 0\cdot69$ sec
$h' = 10\cdot75\, cm$		
2. $\rho = 1\cdot16$	$l = 9\cdot65\, cm$	$l = 5\cdot0\, cm$
$\rho' = 1$	$\tau_b = 1\cdot38$ sec	$\tau_b = 1\cdot03$ sec
$h = 8\cdot15\, cm$	$\tau_r = 1\cdot30$ sec	$\tau_r = 0\cdot95$ sec
$h' = 8\cdot95\, cm$		
3. $\rho = 1\cdot058$	$l = 9\cdot65\, cm$	$l = 5\cdot0\, cm$
$\rho' = 1$	$\tau_b = 2\cdot19$ sec	$\tau_b = 1\cdot68$ sec
$h = 7\cdot65\, cm$	$\tau_r = 2\cdot09$ sec	$\tau_r = 1\cdot51$ sec
$h' = 9\cdot65\, cm$		
4. $\rho = 1\cdot026$	$l = 9\cdot65\, cm$	$l = 5\cdot0\, cm$
$\rho' = 1$	$\tau_b = 3\cdot28$ sec	$\tau_b = 2\cdot46$ sec
$h = 8\cdot0\, cm$	$\tau_r = 3\cdot10$ sec	$\tau_r = 2\cdot24$ sec
$h' = 8\cdot85\, cm$		

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung ist eine zufriedenstellende. Daß das Experiment durchwegs höhere Werte lieferte als die Rechnung, mag von der Reibung in der Flüssigkeit herrühren, zum Teil aber auch in der Adhäsion an den Gefäßwänden begründet sein, die sich insbesondere in der Nähe des Meniskus zeigte. Dadurch wäre auch der Umstand erklärt, daß sich die größeren Abweichungen bei Versuchen mit geringerer Troglänge ergeben.

III.

Es gibt nun auch Fälle, wo sich diese Verhältnisse in der Natur finden. Man darf sie allerdings nicht in den stehenden Schwingungen der Seen suchen, denn bei Berücksichtigung des spezifischen Gewichtes der Luft würde sich die Schwingungsdauer nur um zirka $1^0/_{00}$ vergrößern. Man wird also nach solchen Beispielen Umschau halten müssen, wo die

---

[1] τ_b ist die aus den Beobachtungen folgende Schwingungsdauer, τ_r die berechnete.

Unterschiede in den spezifischen Gewichten klein genug sind, um alle die vorher berechneten Wirkungen hervortreten zu lassen.

Nun sind sowohl in Luft wie auch im Wasser der Seen und des Meeres Schichtungen vorhanden, die etwa unseren Bedingungen entsprechen: die tiefere Lage nehmen die spezifisch schwereren ein, darüber haben sich die leichteren ausgebreitet. Auf welche Weise die Unterschiede im spezifischen Gewicht hervorgebracht sind, ob sie, wie es bei einer großen Zahl der Fälle statthat, auf Temperaturverschiedenheiten beruhen oder ihren Grund — z. B. beim Meerwasser — in verschiedenem Salzgehalt haben, ist zunächst für die Berechnung belanglos; doch soll, um ein anschaulicheres Bild zu ermöglichen, hier die erstere Ursache angenommen werden.

Es habe sich z. B. in einem Talkessel kalte Luft angesammelt, darüber lagere wärmere. Es wird dann ein ganz leiser Anstoß, z. B. ein schwaches Lüftchen, das in der oberen Schicht dahinstreicht, genügen, die stehenden Schwingungen auszulösen, welche in der Grenzschicht auftreten können. Die Schwingungsdauer wird diesmal bloß von den Dimensionen des Beckens und den spezifischen Dichten der Luftschichten abhängen. Im folgenden sind unter der vereinfachenden Annahme, daß man Q wie auch $Q' = 1$ setzen könne, bei verschiedenen Temperaturdifferenzen in den Schichten die Längen der Becken gerechnet, welche die bestimmte Schwingungsdauer von 1 sec, 10 sec, 1 min, 10 min entstehen lassen. Zu bemerken ist, daß durchwegs nur die Grundschwingung gerechnet ist, da sich die Oberschwingungen zu dieser geradeso verhalten wie bei Seiches eines Mediums.

1. Temperaturdifferenz 10° (0 und —10°)	$\tau = 1$ sec	$l = 1\cdot456$ *cm*
	$\tau = 10$ sec	$l = 145\cdot6$ *cm*
	$\tau = 1$ min	$l = 52\cdot38$ *m*
	$\tau = 10$ min	$l = 5\cdot238$ *km*
2. Temperaturdifferenz 3° (0 und —3°)	$\tau = 1$ sec	$l = 0\cdot431$ *cm*
	$\tau = 10$ sec	$l = 43\cdot1$ *cm*
	$\tau = 1$ min	$l = 15\cdot5$ *m*
	$\tau = 10$ min	$l = 1550$ *m*

3. Temperaturdifferenz 1° (0 und —1°)

$$\begin{cases} \tau = 1 \text{ sec} & l = 0\cdot143\, cm \\ \tau = 10 \text{ sec} & l = 14\cdot32\, cm \\ \tau = 1 \text{ min} & l = 5\cdot152\, m \\ \tau = 10 \text{ min} & l = 515\cdot2\, m \end{cases}$$

Zum Vergleich seien noch die Zahlen danebengesetzt, welche bei Seiches eines Mediums auftreten (bei den gewöhnlich so benannten):

$$4. \begin{cases} \tau = 1 \text{ sec} & l = 78\, cm \\ \tau = 10 \text{ sec} & l = 7800\, cm \\ \tau = 1 \text{ min} & l = 278\, m \\ \tau = 10 \text{ min} & l = 27\cdot80\, km \end{cases}$$

Man sieht, wie gewaltig der Unterschied zwischen den Zahlen von 4 und denen der anderen Fälle ist: die Troglänge, welche eine Schwingungsdauer von 1 min hervorbringt, ist im letzten Falle = 278 *m*, während die anderen Bedingungen beziehungsweise 52·4, 15·5 und 5·2 *m* verlangen. Allerdings sind die Unterschiede der Schwingungsdauer für eine bestimmte Troglänge nicht so bedeutend, denn diese verhalten sich bei den eben angegebenen Bedingungen wie

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 : \tau_4 = 1\cdot38 : 2\cdot54 : 4\cdot40 : 0\cdot60.$$

Dadurch, daß über der unteren kälteren Luftschicht eine andere von nicht zu sehr geringerem spezifischen Gewicht liegt, wird die Schwingungsdauer auf zirka das Doppelte, Vierfache, Siebenfache gebracht. Sie wird um so mehr vergrößert, je geringer die Temperatur- und mit ihnen die Dichtenunterschiede beider Schichten werden. Für den Temperatursprung 0° wird, wie leicht erklärlich ist, die Schwingungsdauer unendlich groß.

Eine andere Illustration der Formel mag der Fall bieten, daß in einem abgeschlossenen Seebecken sich in der Tiefe das kältere Wasser, z. B. von 4° C., gesammelt hat, während darüber um 10° wärmeres lagert. Die spezifischen Gewichte sind dann $\rho = 1\cdot000$ und $\rho' = 0\cdot999271$, der Faktor $\sqrt{\frac{\rho+\rho'}{\rho-\rho'}}$ ergibt sich = 52·37. Die Schwingungsdauer einer stehenden Welle, die jetzt unter diesen Bedingungen in der Grenzschicht entstehen mag, wird das 52·4fache der einfachen Seichesschwin-

gung betragen, also nach Tagen gemessen werden können, wenn diese Stunden währt.

Auch Schichtung von Wasser verschiedenen Salzgehaltes kann die Ursache des Entstehens derartiger unterseeischer Wellen sein; doch wird man entsprechend den größeren Dichtenunterschieden, die man hier antrifft, mit kleinerer Schwingungsdauer rechnen können.

Bei allen diesen Überlegungen sind nun einige Vernachlässigungen gemacht, welche die gewonnenen Zahlen nicht ohneweiters auf konkrete Fälle anwenden lassen. Die am meisten ins Gewicht fallende ist wohl die, daß Q wie auch Q' gleich der Einheit gesetzt wurden, was bei einer verlangten Genauigkeit von $1^0/_{00}$ erlaubt ist, sobald die Troglänge nicht mehr als das π-fache der Schichttiefe ist. Da man in den Fällen 1 bis 3 die obere Schicht sich unbegrenzt vorzustellen hat, wird man auch weiterhin $Q' = 1$ annehmen können, Q hingegen erhält andere Werte, so z. B. für ein Verhältnis der Troglänge zur Tiefe $= 10:1$ den Betrag

$$Q = 3 \cdot 28.$$

Für gleiche Troglänge erhöhen sich dadurch die Schwingungsdauern auf das 1·81fache bei einfachen Seiches, anders ist jedoch das Verhältnis für Schwingungen in der Grenzschicht zweier Medien. Rechnet man unter diesen Bedingungen den Fall 1 nach, so erhält man für den Faktor $\frac{Q\rho + Q'\rho'}{\rho - \rho'}$ den Wert 113·55, also das 2·15fache von früher. Man wird daher die oben angeführten Troglängen durch 2·15 zu dividieren haben, um die jetzt geltenden zu erhalten oder, wenn die Troglängen die gleichen bleiben sollen, die Schwingungsdauer, welche dort angegeben ist, mit 1·47 multiplizieren müssen. In gleicher Weise erledigt sich auch die Umrechnung der anderen Fälle, doch wird bei den geringeren Temperaturunterschieden auch der Faktor, welcher den Unterschied gegen früber gibt, kleiner, wenn auch nur unbedeutend.

Neben dieser Korrektur, welche durch die geringe Tiefe des Troges veranlaßt wird, hat man noch eine zweite zu berücksichtigen. Es wird nämlich die Luft der unteren Schicht

beim Aufsteigen abgekühlt, die der oberen beim Niedersinken auf der anderen Seite vom Knoten (es ist hier zunächst nur von der Grundschwingung die Rede) erwärmt. Kann man trockene Luft voraussetzen, ferner, daß man die Vorgänge als adiabatische betrachten darf, so wird bei einer mittleren Hebung der Partie auf der einen Seite vom Knoten um 100 *m* eine Temperaturerniedrigung um 1° C. sich einstellen, welcher eine ebenso große Temperaturerhöhung der tiefer gesunkenen Luftmasse auf der anderen Seite des Knotens entspricht. Falls vorher in der oberen wie in der unteren Luftschicht adiabatisches Temperaturgefälle geherrscht hat (man kann ohneweiters als Grundlage der obigen Rechnungen die potentielle Temperatur wählen), dürfen die vorher erhaltenen Resultate streng angewandt werden; anders ist es jedoch bei geringerem Gefälle. Findet sich z. B. in der oberen wie in der unteren Luftschicht für sich durchwegs die gleiche Temperatur vor, so wird für den eben angenommenen Fall einer mittleren Hebung auf der einen Seite des Knotens um 100 *m* die Temperaturdifferenz zwischen beiden Schichten um zirka 1° vergrößert;[1] man hat also für die erste roheste Annäherung mit diesem neuen Werte zu rechnen. Dabei muß man aber stets im Auge behalten, daß dieses Verfahren einen Extremwert liefert und der richtige zwischen diesem und dem für adiabatisches Temperaturgefälle geltenden liegt. Es ist also hier auch die Amplitude der Schwingung von Einfluß, der sich vorzüglich dort geltend macht, wo die Temperaturdifferenzen anfangs nur geringe sind; es mag hier vielleicht möglich sein, die so eintretende Verkürzung der Schwingungsdauer zu bestimmen.

Für das Entstehen derartiger stehender Schwingungen braucht man übrigens keinen Temperatursprung vorauszusetzen; sie werden vielmehr auch eintreten können bei stetiger Temperaturschichtung der Luft, sofern diese noch ein stabiles Gleichgewicht darstellt. Wird das letztere gestört, z. B. dadurch, daß ein bestimmtes Luftquantum in die Höhe gehoben wird, so setzen sogleich Schwingungen um die frühere Ruhelage ein,

---

[1] Den Wert von 1° erhält man dann, wenn die verdrängten Luftmassen seitlich ausweichen; im konkreten Fall ist der Betrag stets geringer.

für welche man auf die eben angegebene Weise einen Minimalwert der Schwingungsdauer erhält, welcher niemals erreicht werden kann.

In der ursprünglichen Ableitung wurde noch die Voraussetzung gemacht, die Wellen seien wenig lebhaft oder genauer, man könne die bei den Schwingungen auftretenden Beschleunigungen gegenüber der Schwerebeschleunigung vernachlässigen. Da diese Annahme auch den Berechnungen einfacher Seiches zu Grunde gelegt wird, darf man sie wohl auch hier, wo die Schwingungen viel langsamer geschehen, anwenden.

Daß Wellen von der eben besprochenen Art sich in der Natur finden, ist ohneweiters wahrscheinlich; sie wurden auch in einzelnen Fällen schon nachgewiesen.[1] Allerdings werden sie, da sie ein abgeschlossenes oder beinahe abgeschlossenes Becken zur Voraussetzung ihrer Entstehung haben, sich nicht so häufig finden wie die Helmholtz'schen Wogen, welche zu ihnen in demselben Verhältnis stehen wie die vom Wind erregten Wasserwellen zu den stehenden Seespiegelschwankungen, den Seiches. Mit den letzteren haben sie die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Stärke des erregenden Windes gemein, unterscheiden sich aber von ihnen durch die Abhängigkeit vom spezifischen Gewicht. Ein genaueres Nachrechnen der in Beobachtungen vorliegenden Werte wird allerdings erst auf Grund einer Weiterführung der Theorie auf dem von Crystal eingeschlagenen Wege möglich sein.

---

1 Vergl. Watson, Movements of the waters of Loch Ness, Geographical Journal, London, Bd. 24 (1904); Watson, Nature, Bd. 69 (1903), p. 174; A. Defant, Denkschriften Wien. Akad., 1906; F. M. Exner, diese Sitzungsberichte, 1908.

Zur hypergeometrischen Differentialgleichung

von

Georg Pick in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

Die konsequente Durchführung des formentheoretischen Gesichtspunktes bei der Behandlung der hypergeometrischen Funktion, wie sie in der Dissertation von Herrn C. Schellenberg[1] beabsichtigt ist, macht vor der Differentialgleichung dieser Funktion Halt. Auch die einschlägigen Entwickelungen von Herrn Klein[2] bringen keine endgültige Erledigung des Gegenstandes.

Die nachfolgende Mitteilung gibt die hypergeometrische Differentialgleichung in solcher invarianter Gestalt, daß alle speziellen Formen der Gleichung in übersichtlicher Weise aus derselben hervorgehen. Die Grundauffassung beruht dabei auf der eindeutigen Darstellung der hypergeometrischen Funktion in den Perioden eines gewissen elliptischen Integrals erster Gattung, welche zuerst von Herrn Klein erschlossen, dann von Herrn Papperitz[3] und neuerdings in geschlossener Form von Herrn Wirtinger[4] verwirklicht worden ist. Es ist ganz im

---

[1] Neue Behandlung der hypergeometrischen Funktion etc. Göttingen 1892.

[2] Über die hypergeometrische Funktion. Autogr. Vorlesungsheft, Göttingen 1894. Vergl. insbesondere die weiter unten noch zu besprechende Bemerkung Nr. 3 in der Vorlesung vom 7. Dezember 1903.

[3] Über die Darstellung der hypergeometrischen Transzendenten durch eindeutige Funktionen. Math. Ann., 34.

[4] Zur Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale. Diese Sitzungsber., 1902. — Vergl. auch: Eine neue Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale. Diese Sitzungsber., 1903.

Sinne dieser Auffassung, die hypergeometrischen Formen als Invarianten einer Grundform vierter Ordnung anzusehen, wie es im folgenden geschieht.

Auf Verallgemeinerungen, die nahegelegt sind, soll nicht weiter eingegangen werden. Auch die Möglichkeit, statt der binären Grundform vierter Ordnung eine ebene Kurve dritter Ordnung u. s. w. zur Grundlage zu nehmen, sei hier bloß angedeutet.

1.

Eine Form Π der Koeffizienten einer binären Grundform vierten Grades

$$f = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + \ldots + a_4 x_2^4,$$

die nur von den Invarianten

$$g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$$

abhängt, läßt sich stets als Form der Perioden ω_1, ω_2 des elliptischen Integrals

$$\int \frac{(x dx)}{\sqrt{f}}$$

ansehen. Wenn sie als solche den Grad ν besitzt, so ist sie in den a_i vom Grade $-\frac{\nu}{2}$. Es kommt nun für das Folgende darauf an, gewisse Differentialoperationen, die auf Π wirkend gedacht werden, in verschiedenen Gestalten schreiben zu können, je nach Wahl der unabhängigen Veränderlichen. Mit den Perioden zweiter Gattung η_1, η_2 läßt sich die Operation

$$\Delta = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \tag{1}$$

bilden. Bekanntlich ist auch

$$\Delta = -6 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} - \frac{1}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3}. \tag{2}$$

Aber ferner findet sich

$$\Delta = -\sum_i h_i \frac{\partial}{\partial a_i}, \tag{3}$$

worin h_i die Koeffizienten der Hesse'schen Form $(f, f)^2$ von f sind, so daß Δ im wesentlichen den Aronhold'schen Prozeß für die Grundform f darstellt. Bezeichnet endlich

$$a = \frac{a''}{a'}$$

eine Wurzel der Gleichung

$$a_0 + 4a_1 x + \ldots + a_4 x^4 = 0$$

und sieht man a allein als veränderlich an, so ist

$$\Delta = -\left(2f_1 \frac{d}{da} + \frac{\nu}{2} f_2\right), \tag{4}$$

unter f_1, f_2 die normierten einseitigen Derivierten von f für den Wert $x = a$ verstanden:

$$f_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{df}{dx}\right)_a, \quad f_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_a \quad \text{etc.}$$

Für die Wiederholung der Operation Δ ergibt sich mit Zuhilfenahme der Formel

$$\Delta(\rho_\eta) = -\frac{g_2}{12}\rho_\omega,$$

wobei

$$\rho_\omega = \rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2, \quad \rho_\eta = \rho_1\eta_1 + \rho_2\eta_2$$

und ρ_1, ρ_2 Unbestimmte sind:

$$\left[\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial\omega_2}\right)^2 \Pi\right]_{\rho=\eta} = \Delta^2(\Pi) + \frac{\nu g_2}{12}\Pi. \tag{5}$$

Man findet ferner unter der Voraussetzung, daß nur die Wurzel a von $f = 0$ veränderlich ist,

$$\Delta(f_1) = -2f_1 f_2, \quad \Delta(f_2) = -\frac{8}{3} f_1 f_3 + f_2^2,$$

hieraus

$$\Delta^2(\Pi) = 4f_1^2 \frac{d^2\Pi}{da^2} + (2\nu+4)f_1 f_2 \frac{d\Pi}{da} + \left(\frac{4\nu}{3} f_1 f_3 + \frac{\nu(\nu-2)}{4} f_2^2\right)\Pi \tag{6}$$

und weiter vermöge (5)

$$\left[\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial\omega_2}\right)^2 \Pi\right]_{\rho=\eta} = 4f_1^2 \frac{d^2\Pi}{da^2} + (2\nu+4)f_1 f_2 \frac{d\Pi}{da} + \left(\nu f_1 f_3 + \frac{\nu(\nu-1)}{4} f_2^2\right)\Pi. \tag{7}$$

Diese Formeln benützen wir insbesondere unter der Voraussetzung $\nu = 1$. Dann ist

$$\frac{\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial\omega_2}\right)^2 \Pi}{(\omega_1\rho_2 - \omega_2\rho_1)^2}$$

von den ρ unabhängig und möge kurz mit

$$D(\Pi)$$

bezeichnet werden.[1] Durch Auflassung der Homogenität geht $D(\Pi)$ einfach in den zweiten einseitigen Differentialquotienten von Π über, also in

$$\frac{d^2\Pi}{d\tau^2} \quad \left(\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Aus der Legendre'schen Relation

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = -2\pi i$$

[1] Auf die Existenz dieser charakteristischen Kovarianten von allgemeinen Formen positiver ganzzahliger Ordnung habe ich zuerst in der Abhandlung »Über die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung« (diese Sitzungsber. 18[illegible]) aufmerksam gemacht. Sie sind daselbst »Derivate der Ausgangsform« benannt. In seiner Inauguraldissertation (Königsberg 18[illegible]) macht Herr [illegible] die Bemerkung, daß das Resultat [illegible] maliger einseitiger Derivation einer Form [illegible] Ordnung als Kovariante der Form zu betrachten ist, was im wesentlichen dasselbe besagen will.

ergibt sich jetzt

$$\left[\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}\right)^2 \Pi\right]_{\rho=\eta} = -4\pi^2 . D(\Pi)$$

und aus Formel (5) folgt

$$D(\Pi) = -\frac{1}{4\pi^2} \Delta^2(\Pi) - \frac{g_2}{48\pi^2} \cdot \Pi. \tag{8}$$

2.

Die Klein-Schellenberg'sche hypergeometrische Form ist durch die Gleichung

$$\Pi = (ab)^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} (ac)^{-\frac{\alpha+\gamma}{2}} (ad)^{-\frac{\alpha+\delta}{2}} (bc)^{-\frac{\beta+\gamma}{2}} (bd)^{-\frac{\beta+\delta}{2}} (cd)^{-\frac{\gamma+\delta}{2}}$$
$$\times \int (ax)^{\alpha-\frac{1}{2}} (bx)^{\beta-\frac{1}{2}} (cx)^{\gamma-\frac{1}{2}} (dx)^{\delta-\frac{1}{2}} (xdx)$$

definiert, wobei das Integral in bekannter Weise als Doppelumlaufsintegral zu führen ist, und die Bedingung

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$$

erfüllt sein muß. Viel einfacher schreibt man die Form nach Wirtinger:

$$\Pi = i^{\alpha} \int (\sigma u)^{2\alpha} (\sigma_{10} u)^{2\beta} (\sigma_{01} u)^{2\gamma} (\sigma_{11} u)^{2\delta} du,$$

das Integral erstreckt auf geeignetem Wege in der Ebene von

$$u = \int \frac{(xdx)}{\sqrt{f}},$$

worin f eine biquadratische Form der x mit den Wurzeln

$$a = \frac{a''}{a'},\; b = \frac{b''}{b'},\; c = \frac{c''}{c'},\; d = \frac{d''}{d'}$$

bedeutet.

Es bezeichne nun, zunächst nicht homogen geschrieben, $\varphi(x)$ jene Form zweiter Ordnung, die durch die Gleichung

$$\frac{\varphi}{f} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d}$$

definiert wird. Ist $h = \frac{h''}{h'}$ ein willkürlicher Hilfspunkt, so hat man in homogener Gestalt

$$\frac{\varphi}{f} = \alpha\frac{(ha)}{(ax)(hx)} + \beta\frac{(hb)}{(bx)(hx)} + \gamma\frac{(hc)}{(cx)(hx)} + \delta\frac{(hd)}{(dx)(hx)}.$$

Diese Form nun ist, wie leicht zu sehen, als (irrationale) Kovariante von f zu betrachten, sie genügt den bekannten Differentialgleichungen der Invariantentheorie.

Mit Zuhilfenahme dieser Form läßt sich die Differentialgleichung von Π in die einfache Gestalt setzen:

$$D(\Pi) - \frac{1}{32\pi^2}(\varphi, \varphi)^2 . \Pi = 0. \tag{I}$$

Um sie speziell als Gleichung nach den Perioden ω_1, ω_2 zu schreiben, genügt es, f in der Weierstrass'schen Normalform anzunehmen. Man erhält

$$D(\Pi) + \frac{1}{4\pi^2}\{\lambda^2(e_1-e_2)(e_1-e_3) + \mu^2(e_2-e_3)(e_2-e_1) + \\ + \nu^2(e_3-e_1)(e_3-e_2)\}\Pi = 0, \tag{II}$$

wo λ, μ, ν die Bedeutung

$$\lambda = \alpha+\beta, \quad \mu = \alpha+\gamma, \quad \nu = \alpha+\delta$$

haben.[1] Man hat sich hier natürlich unter e_1, e_2, e_3 die bekannten Modulformen zweiter Stufe zu denken.

Ersetzt man ferner $D(\Pi)$ nach Gleichung (8), so ergibt sich

$$\Delta^2(\Pi) + \left(\frac{g_2}{12} + \frac{1}{8}(\varphi, \varphi)^2\right)\Pi = 0. \tag{III}$$

---

[1] In nicht invarianter Schreibweise findet sich diese Gleichung bei Papperitz a. a. O., Gleichung (III) und (4).

Je nachdem man hier $\Delta^2(\Pi)$ mittels (2) oder mittels (3) ausdrückt, erhält man die Differentialgleichung nach g_2, g_3 oder nach den Koeffizienten von f; beide Gestalten der Gleichung dürften völlig neu sein.[1]

Endlich folgt aus (6) oder (7):

$$4f_1^2\frac{d^2\Pi}{da^2}+6f_1f_2\frac{d\Pi}{da}+\left(f_1f_3+\frac{1}{8}(\varphi_1\varphi)^2\right)\Pi=0, \qquad \text{(IV)}$$

woraus sich die gewöhnliche Form der Gleichung ergibt. Um diesen Vergleich zu erleichtern, sei noch Folgendes erwähnt. Ist $f(x)$ eine (nicht homogen geschriebene) Form n^{ter} Ordnung mit der Wurzel $x=a$, und ist

$$\psi(x)=\frac{1}{n}\,\frac{f(x)}{x-a}$$

von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so gilt für die normierten einseitigen Derivierten die Relation

$$\psi_{k-1}(a)=\frac{1}{k}f_k(a).$$

Die Form Π besitzt die charakteristische Eigenschaft, an den singulären Stellen entgegengesetzt gleiche Entwicklungsexponenten zu haben. Anderweitige Formen erhält man in bekannter Weise durch Anbringung geeigneter Multiplikatoren. Auf die Herleitung ihrer Differentialgleichungen aus derjenigen von Π braucht wohl nicht eingegangen zu werden.

---

[1] Natürlich genügt Π als Funktion der f-Koeffizienten noch vier weiteren partiellen Differentialgleichungen: denjenigen einer Invariante vom Grade $-\frac{1}{2}$. Ähnliches gilt, wenn die Wurzeln der Grundform a, b, c, d als Variable benützt werden: hier tritt zu der Gleichung zweiter Ordnung nach irgend einer derselben noch das wohlbekannte System partieller Gleichungen einer Invariante nach den Wurzeln der Grundform. Hiemit erledigt sich wohl die Bemerkung von Herrn Klein, auf die eingangs (Fußnote) hingewiesen wurde.

Bestimmung spezifischer Wärmen von Leitern bei verschiedenen Temperaturen

von

Ernst Lecher,
k. M. k. Akad.

(Mit 9 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

Bei manchen Messungsmethoden des Thomsoneffektes[1] und ebenso bei Messungen des Peltiereffektes ist die Kenntnis der Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur notwendig. Nun sind die bisher vorliegenden Bestimmungen der spezifischen Wärme bei hohen Temperaturen vielleicht nicht ganz einwandfrei; auch erscheint es wünschenswert, die thermoelektrischen Konstanten und die spezifische Wärme an ein und demselben Material zu messen. Zu einer eventuellen Wiederholung meiner Arbeit über den Thomsoneffekt mußte ich also zunächst eine genauere Methode zur Bestimmung der spezifischen Wärme bei verschiedenen Temperaturen ausarbeiten.

Die Hauptvorwürfe, welche wider die bisherigen einschlägigen Versuchsanordnungen erhoben werden können, sind folgende:

1. Es wurden gegen die Oxydierung der untersuchten Materialien bei hohen Temperaturen gar keine oder nur ungenügende Schutzmaßregeln getroffen. Es müssen alle derartigen Arbeiten im Vakuum vorgenommen werden.[2]

---

[1] E. Lecher, diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, p. 1599 (1905); E. Bausenwein, diese Sitzungsberichte, Bd. CXIII, Abt. IIa, p. 663 (1904).

[2] Eine Ausnahme bildet die Arbeit von B. Oberhoffer, siehe p. 136 vorliegender Arbeit.

2. Man bestimmte nie die wirkliche spezifische Wärme bei irgend einer Temperatur, sondern nur die mittlere zwischen weiten Temperaturgrenzen, was, wie p. 135 gezeigt werden wird, zu großen Fehlerquellen Veranlassung geben kann.

Die im folgenden verwendete Methode ist schon einmal in einer etwas ähnlichen Anordnung von A. Campbell[1] versucht worden. Doch arbeitete Campbell nur bis 280° C. und es gestattet die ganze Art seiner Beobachtung (vor allem die Vernachlässigung jeder Temperaturkorrektion wegen des Wärmeverlustes) nur ganz roh angenäherte Resultate. Auch die Messungen von Jäger-Diesselhorst,[2] welche jedoch nur bis zu einer Temperatur von 100° reichen, weisen einige analoge Züge auf.

Die Grundidee meiner Versuchsanordnung ist die folgende: Der zu untersuchende Draht *NN* befindet sich in einem auf die betreffende Temperatur erhitzten und evakuierten Porzellanrohre. An irgend einer Stelle dieses Drahtes ist ein kleines Thermoelementchen angebracht, das mit einem Galvanometer in Verbindung steht. Senden wir nun durch den Draht *NN* während einer bestimmten Zeit einen Wechselstrom von bestimmter Stärke, so wird das Galvanometer einen Ausschlag zeigen, der um so größer ist, je größer der Widerstand und je kleiner die spezifische Wärme des Drahtes *NN* ist. Es müssen also gleichzeitig bei verschiedenen Temperaturen dieser Galvanometerausschlag und der Widerstand des Drahtes gemessen werden.

Zunächst wurde durch Vorversuche konstatiert, daß eine direkte Beeinflussung des Galvanometers durch den Wechselstrom nicht stattfand. Zu dem Zwecke lötete ich an einen Konstantandraht von etwa 3 *mm* Durchmesser in zwei diametral gegenüberliegenden Stellen je ein Konstantandrähtchen von etwa $^1/_8$ *mm* Durchmesser an, die zu einem empfindlichen Galvanometer führten. Bekanntlich gibt dann ein starker Gleichstrom, der den dicken Konstantandraht durchfließt, in diesem

---

[1] A. Campbell, Proc. of Roy. Soc. Edinburgh, 14, p. 404 (1887).

[2] W. Jäger und H. Diesselhorst, Wissenschaftliche Abhandlungen der physikalisch-technischen Reichsanstalt, III, p. 362 (1900).

Galvanometer immer einen Ausschlag; es ist praktisch unmöglich, an einem von einem starken Strom durchflossenen Drahte zwei Punkte absolut gleicher Potentialdifferenz herauszufinden. Durchfließt aber den Hauptdraht ein Wechselstrom (bis 40 Amp.), so bleibt das Galvanometer vollständig in Ruhe.

Versuchsanordnung.

Der zu untersuchende Draht *NN* (Durchmesser etwa 3 bis 4 *mm*) ist in der in der schematischen Fig. 1 dargestellten Form gebogen; nur denke man sich den oberen Teil der Figur um eine die ganze Figur in der Mitte durchquerende Horizontallinie um etwa 90° gegen die untere Hälfte verdreht. Dadurch liegen die gebogenen Teile ganz knapp nebeneinander. Die

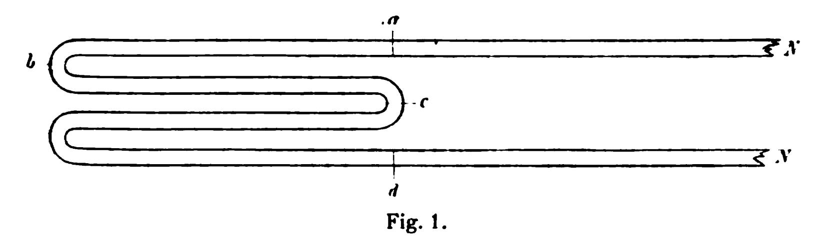


Fig. 1.

Entfernung zwischen den Punkten *a* und *b* ist etwa 16 *cm*. In den Punkten *a*, *b*, *c* und *d* sind kleine Thermoelementchen aus Konstantan und Eisen (Drahtdurchmesser $^1/_8$ *mm*) leitend befestigt.

Es wurden zwei verschiedene Befestigungsarten ausprobiert. Die eine war folgende: Es wurde ein Ende des Konstantandrähtchens mit einem Ende des Eisendrähtchens hart verlötet und das überschüssige Lot behutsam abgefeilt. Der Hauptdraht war mit einer Durchbohrung von etwas über $^1/_2$ *mm* Durchmesser versehen und es wurde dann die Lötstelle genau in die Mitte dieses Loches eingeschoben. Ein kräftiger Hammerschlag auf den dicken Draht *NN* bewirkte einen bleibenden ausgezeichneten Kontakt. Die durch diesen Hammerschlag verursachte Deformation des Hauptdrahtes ist, wie das Folgende zeigen wird, vollständig gleichgültig. Bei der zweiten Befestigungsmethode wurde der Hauptdraht an zwei

gegenüberliegenden Stellen etwas angebohrt und in diese kleinen Löcher wurden die Konstantan-, beziehungsweise Eisendrähtchen hart eingelötet. Da die Resultate beider Befestigungsweisen kaum voneinander differierten, wurde bei den später mitzuteilenden Versuchen die erste Methode angewendet, zumal hier die Lötung bei hohen Temperaturen weniger leicht leidet. Der in Fig. 1 gezeichnete Teil des Drahtes, also *a*, *b*, *c* und *d*, kommt in die Mitte *m* eines 2 *m* langen Porzellanrohres *P*, dessen innerer Durchmesser 4 *cm* beträgt (schematische Fig. 2). Diese Porzellanröhre wieder befindet sich in einem großen Ofen von Heraeus *O*, dessen Länge etwa 60 *cm* und dessen innerer Durchmesser etwa

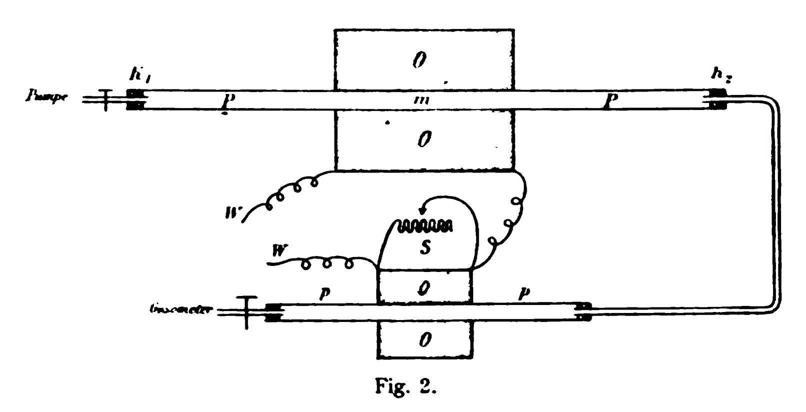


Fig. 2.

4·5 *cm* beträgt. Das Rohr wurde so lang genommen, damit auch bei den stärksten Erhitzungen die Enden vollständig kalt bleiben. Die verschiedenen (in Fig. 2 nicht gezeichneten) Drähte im Inneren des Ofens waren durch kleine Porzellanröhrchen vor gegenseitiger Berührung geschützt und wurden überdies durch Asbestschnüre in ihrer gegenseitigen Lage fixiert. Beide Enden der Röhre *P* waren durch Kautschukpfropfen verschlossen. Im Pfropfen K_1 mündete die Leitung einer Gaedepumpe, während durch den Pfropfen K_2 eine Glasröhre zu einer dünnen Porzellanröhre *p* von etwa 1 *m* Länge und 2 *mm* lichtem Durchmesser ging, welche in einem kleineren elektrischen Ofen *o* sich befand. Der heizende Wechselstrom *WW* durchfloß beide Öfen *O* und *o* in Serie, wobei er in *S* noch einen Shunt passierte, da *o* weniger Heizstrom brauchte.

Den Kautschukpfropfen K_2 durchsetzten alle (in Fig. 2 nicht gezeichneten) Drahtleitungen des Ofens *O*: die zwei Hauptdrähte *NN*, die acht Drähte der vier Thermoelementchen *a*, *b*, *c* und *d* und noch zwei weitere Drähte eines Thermoelementes *e* (dessen Zweck später in Fig. 3 ersichtlich gemacht werden wird). Jedes dieser Drahtenden führt zu einem eigenen Quecksilbernapf und es bildete die Vereinigung aller dieser Näpfe ein Schaltbrett, in dem man durch passende Drahtbügel die für die verschiedenen Schaltungen nötigen Kombinationen leicht vornehmen konnte. Eine Zeichnung dieser ganzen ziemlich umfangreichen Anordnung dürfte wohl entbehrlich sein.

Widerstandsmessung. Zu diesem Zwecke wurde ein Gleichstrom (Größenordnung 1 Amp.) durch den Hauptdraht *NN* geschickt, dessen Stärke an einem großen Normalampèremeter von Weston abgelesen werden konnte. Die von *a* und *d* weggehenden Eisendrähte führten zu einem Millivoltmeter *V* von Siemens. Die Bestimmung des Widerstandes W_t erfolgte durch gleichzeitige Strom- und Spannungsmessung.

Temperaturmessungen. In der kleinen Porzellanröhre *p* befindet sich ein Vergleichsthermoelement Konstantan-Eisen *f* (in Fig. 2 nicht gezeichnet). Die Temperatur dieses Ofens *o* wurde gemessen entweder durch ein PtRh-Pt-Thermoelement mit dem Siemens'schem Voltmeter *V* oder durch ein bis 500° C. reichendes Quecksilberthermometer (beide Thermometer waren von der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg geeicht und lagen im Ofen *o* außerhalb der ausgepumpten Porzellanröhre *p*). Das Vergleichsthermoelement *f* aber habe ich in einen luftleeren Raum (in die Mitte des Ofens *o*) gebracht, weil sich von vornherein nicht sagen ließ, ob nicht vielleicht bei hohen Temperaturen Unterschiede bei der Angabe solcher Thermoelemente Eisen-Konstantan auftreten können, je nachdem, ob sie im Vakuum oder im lufterfüllten Raume sich befinden. Die thermoelektrische Kraft von *a*, *b*, *c*, *d* und *f* wurde mit dem Millivoltmeter *V* von Siemens gemessen, das zwei Skalen besaß, von denen eine direkt die Temperatur für das PtRh-Pt-Element angab. Zur Messung der viel größeren thermoelektrischen Kräfte der Konstantan-Eisen-Elemente mußten natürlich von Fall zu Fall Widerstände vorgeschaltet

werden, deren Größe aber in die Temperaturberechnung nicht eingeht. Während von all diesen Thermoelementen die einen Lötstellen sich im Ofen befanden, waren die zweiten Lötstellen durch Isolierband isoliert, gleichzeitig mit Quecksilberthermometern in passenden Gruppen weit entfernt vom Ofen in Watta verpackt, so daß auch ihre Temperatur in jedem Falle direkt bestimmt werden konnte. Man berechnet dann durch einfache Reduktionen die wirklichen Temperaturen der Punkte *a*, *b* und *c*; es wurde dann das Mittel dieser Temperaturen als Durchschnittstemperatur des Hauptdrahtes angenommen (siehe Beispiel p. 122).

Auf diese Weise ergab sich die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur. Doch ist kaum nötig zu erwähnen, daß die Widerstandsbestimmungen viel genauer erfolgen konnten als die Temperaturbestimmungen, was jedoch für das Schlußresultat von minderer Bedeutung ist, da ja die Widerstandsänderung innerhalb des Intervalles einiger Grade keine allzu große ist.

Wechselstromtemperaturanstieg. Es wurde ein Wechselstrom verwendet, der bei den tieferen Temperaturen etwa 18 Amp. und bei den hohen etwa 10 Amp. betrug. Dieser Strom wurde nicht aus derselben Leitung wie der Heizstrom entnommen, wodurch ja gerade im kritischen Versuchsmoment die Temperatur des Ofens alteriert würde, sondern aus einer anderen Phase des mir zu Gebote stehenden Dreileitersystems. Der durch die Joule'sche Wärme dieses Stromes erzeugte Temperaturanstieg wurde an dem Thermoelement *b* gemessen. Dazu war aber bei hohen Temperaturen notwendig, daß zunächst die durch diese hohen Temperaturen hervorgebrachte Thermokraft durch eine gleich große möglichst kompensiert wurde. Zu diesem Zwecke befand sich im Ofen *O* in der Röhre *P* in möglichster Nähe von *b*, also möglichst auf gleicher Temperatur, aber vollständig von diesem isoliert, ein gleiches Thermoelement *e* (siehe die schematische Fig. 3). Diese beiden Thermoelemente konnten gegeneinandergeschaltet und mit dem Galvanometer G_1 verbunden werden. Da ein genaues Einstellen des Galvanometers auf Null trotzdem fast nie eintrat, wurde in die Leitung noch ein kleiner Shunt *s*

hineingebracht, der durch eine Hilfsbatterie B und einen verschiebbaren Widerstand leicht mit einer solchen Potentialdifferenz versehen werden konnte, daß der Galvanometerausschlag immer schnell auf Null zurückzubringen war. Da es sich in dieser Leitung um die Messung von Temperaturdifferenzen von nur 5 bis 10° C. handelte, waren alle äußeren kritischen Stellen ebenso wie das Galvanometer vorsichtig in Watta verpackt. Läßt man dann den Wechselstrom durch den Hauptdraht NN gehen, so wird selbstverständlich nur das Thermoelement b (nicht aber e) erwärmt und man erhält dann nur den dieser Erwärmung entsprechenden Galvanometerausschlag. Das hier in Verwendung stehende Galvanometer G_1 war ein Drehspulengalvanometer von Edelmann, in dem aber

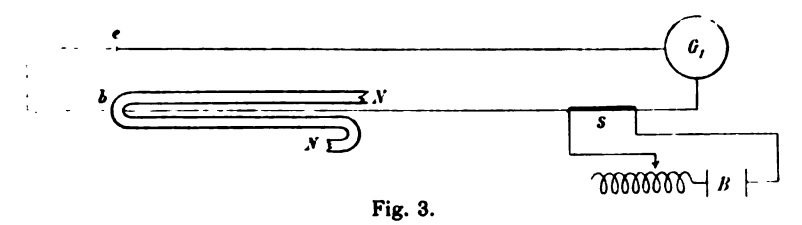


Fig. 3.

sowohl der Aufhängedraht als auch die untere Ableitungsspirale durch einen dünnen Silberdraht (Durchmesser 0·03 *mm*) ersetzt war.

Um die Korrektur des beim Durchleiten des Wechselstromes durch NN erzeugten Temperaturanstieges wegen des Wärmeverlustes des Drahtes möglichst klein zu machen, wurde der Wechselstrom nur durch etwa 30 Sekunden in NN eingeschaltet. Man hätte dann bei den verschiedenen Versuchen, um sie direkt aufeinander reduzieren zu können, immer genau mit der gleichen Zeit und immer genau mit der gleichen Stromstärke (oder mit genau gemessenen Zeiten und Stromstärken) arbeiten müssen. Nun ist die exakte Einhaltung oder Messung eines so kleinen Zeitintervalles kaum durchzuführen. Ebenso war die Stärke des Wechselstromes, welcher der Straßenleitung entnommen wurde, so schwankend, daß hier die Anbringung eines Kontrollversuches notwendig erschien. Es wurde darum der Versuchswechselstrom auch durch einen (außerhalb des Ofens liegenden) etwa 3 *mm* dicken Konstantan-

draht *KK* geschickt, der mit dem Hauptdrahte *NN* in Serie geschaltet war (diese Serienschaltung ist in der schematischen Fig. 4 nicht gezeichnet). In der Mitte des Konstantandrahtes *KK* war in genau derselben Weise wie bei *b* ein Thermoelementchen Konstantan-Eisen *g* befestigt. Dieses Thermoelementchen führte zu einem zweiten Galvanometer G_2, welches von identischer Beschaffenheit wie G_1 war. Auch diese Galvanometerleitung ebenso wie der Draht *KK* waren vorsichtig in Watta verpackt. Ich beobachtete nun den Ausschlag im Galvanometer G_1 (derselbe sei ϑ_1), indes der Ausschlag im Galvanometer G_2 (derselbe sei ϑ_2) von einer Hilfskraft[1] beobachtet wurde, während derselbe Wechselstrom während etwa 30 Sekunden sowohl *KK*

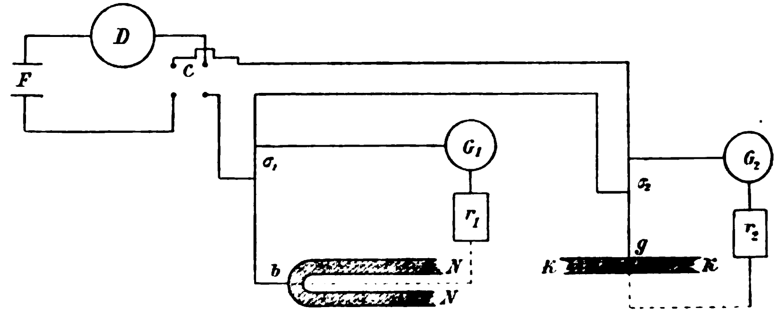


Fig. 4.

als *NN* durchfloß. Stromschwankungen oder Fehler in der Zeitbestimmung beeinflußten beide gleichzeitigen Messungen in gleicher Weise, so daß eine Reduktion dieser beiden Beobachtungen aufeinander diese Fehlerquellen vollständig beseitigte. Bevor aber diese gleichzeitigen Ablesungen gemacht wurden, mußten die für die gegenseitige Reduktion dieser Werte notwendigen Beziehungen in folgender Weise gewonnen werden (siehe schematische Fig. 4). Aus einer Akkumulatorenbatterie *F* fließt ein Gleichstrom durch das Präzisionsampèremeter von Weston *D* und dann über den Kommutator *C* durch σ_1 und σ_2. Es ist σ_1 ein Teil der Thermoelementleitung

[1] Die Mehrzahl dieser zeitraubenden Ablesungen machte mein Assistent, Herr Dr. E. Weiß, dem ich hier für diese große Dienstleistung bestens danke.

br_1G_1; hingegen ist σ_2 ein Teil der Thermoelementleitung gr_2G_2. Hier bedeuten r_1 und r_2 Widerstände. Die Größe von σ_1 und σ_2 ist gleichgültig, dieselbe bleibt aber während der Gesamtheit aller zusammengehörigen Versuchsserien ungeändert. Diese σ_1 und σ_2, kurze Konstantandrähte, waren vorsichtig in Watta verpackt. Zunächst ist die Leitung von gr_2G_2 offen; ein Strom A_1 (abgelesen in D) ergibt beim Kommutieren von C einen Ausschlag B_1 in G_1. Dann wird die Leitung von br_1G_1 geöffnet und die von gr_2G_2 geschlossen; ein Strom A_2 (in D gemessen) gibt beim Kommutieren von C im Galvanometer G_2 einen Ausschlag B_2. Natürlich sind A_1 und A_2 bei verschiedenen Versuchsreihen sehr verschieden, da die Widerstände r_1 und r_2, deren Wertbestimmung überflüssig, bei den verschiedenen Temperaturen des Ofens O darum verschieden gemacht wurden, damit der Ausschlag ϑ_1, respektive ϑ_2 bei den Hauptversuchen immer möglichst über denselben Skalenbereich sich erstreckte. Bilden wir nun $\frac{B_1}{A_1} = R_1$ und $\frac{B_2}{A_2} = R_2$, so sind das die gegenseitigen Reduktionskoeffizienten der Galvanometer G_1 und G_2 für die betreffende Versuchsreihe. Es wird darum vor und nach jeder Versuchsreihe R_1 und R_2 bestimmt.[1]

Nachdem dies geschehen, werden die Akkumulatoren F abgeschaltet und die sonstige Umschaltung für den Hauptversuch vorgenommen, der in der gleichzeitigen Messung des Temperaturanstieges in b (durch G_1) und in g (durch G_2) besteht, indes ein und derselbe Wechselstrom KK und NN während etwa 30 Sekunden durchfließt. Die beobachteten Ausschläge ϑ_1 und ϑ_2 entsprechen den Temperaturanstiegen von NN, respektive KK. Diese Temperaturanstiege müssen genau wie bei analogen kalorimetrischen Messungen behandelt werden und es muß daher eine Korrektur wegen des Wärmeverlustes erfolgen. Über die Berechnung dieser Korrektur siehe p. 123.

Durch Anbringung dieser Korrekturen werden aus den im Galvanometer abgelesenen Temperaturanstiegen ϑ_1 und ϑ_2 die

[1] Die Schaltung dieser Reduktionsmessung war in Wirklichkeit nur bei Zimmertemperatur so einfach, als ich sie hier geschildert. Bei höheren Temperaturen wurde die Leitung $bG_1\sigma_1$ in der in Fig. 3 geschilderten Weise kompensiert.

Werte Θ_1 und Θ_2 berechnet; der wirkliche Temperaturanstieg in NN und KK sei $\beta_1\Theta_1$, respektive $\beta_2\Theta_2$, wobei β Konstanten bedeuten, welche sich für eine Versuchsreihe, wo die Empfindlichkeit des Galvanometers gleich bleibt, nicht ändern. Dadurch, daß derselbe Wechselstrom i während derselben Zeit sowohl NN als auch KK durchfließt, ergeben sich folgende Gleichungen. Es sei die durch den Wechselstrom in NN, respektive KK erzeugte Wärme Q_1, respektive Q_2; dann ist

$$Q_1 = \alpha i^2 w_1 t = s_1 m_1 \frac{\beta_1\Theta_1}{R_1}$$

und

$$Q_2 = \alpha i^2 w_2 t = s_2 m_2 \frac{\beta_2\Theta_2}{R_2}.$$

α ist die Konstante der Joule'schen Wärme; w, s und m sind Widerstände, spezifische Wärmen und Massen der Längeneinheit für den Draht NN (Index 1), respektive KK (Index 2). Setzen wir $i^2 t$ aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so erhalten wir, da ja $s_2 m_2 w_2$ in KK (Zimmertemperatur) und ebenso β_1 und β_2 konstant bleiben:

$$s_1 = k \frac{w_1}{m_1} \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \frac{R_1}{R_2}.$$

w_1 ist der Widerstand, m_1 die Masse der Längeneinheit des Drahtes NN. Setze ich für den Widerstand bei verschiedenen Temperaturen den nach meiner Messung bestimmten Widerstand W_t, so nehme ich auf die Verlängerung keine Rücksicht; mein W_t ist zu groß. Denselben prozentualen Fehler begehe ich aber, wenn ich m_1 als unabhängig von der Temperatur annehme. Ich erhalte somit für die spezifische Wärme bei irgend einer Temperatur t, wenn $\varkappa$ eine Konstante ist,

$$s_t = \varkappa W_t : [(\Theta_1 : \Theta_2)(R_2 : R_1)]. \qquad 1)$$

Diese spezifische Wärme ist direkt proportional dem Widerstand und umgekehrt dem auf eine bestimmte Strom-

stärke und bestimmte Zeiteinheit reduzierten Temperaturanstieg in *b*, welch »Temperaturanstieg« durch den Ausdruck der eckigen Klammer gegeben ist.

Ausführung der Versuche.

Ich habe nun einige Versuche zunächst nur gemacht, um die Methode zu prüfen. Darum wählte ich Nickel und Eisen, da hier größere Änderungen der spezifischen Wärme mit der Temperatur zu erwarten waren. Da aber die Resultate meiner Experimente mir mindestens ebenso genau erscheinen als die Ergebnisse meiner Vorarbeiter, will ich im folgenden darüber einiges berichten.

Zunächst wurde die Porzellanröhre gut ausgepumpt und der Ofen gleichzeitig auf etwa 1000° erhitzt. Ich möchte erwähnen, daß die Dichtung in dem ganzen auszupumpenden System eine so vorzügliche war, daß der Luftdruck, als ich nach mehr als zweimonatlichem Fernsein am Ende der Ferien ins Laboratorium zurückkehrte, in dem ausgepumpten System sich um kaum 1 *mm* geändert hatte.

Es ist überraschend, wie viel Gas beim ersten Erhitzen, besonders aus dem Eisendrahte, herausgeht.[1] Wenn man aber mehrmals durch einige Stunden erhitzt und gleichzeitig auspumpt, so tritt keinerlei neue Gasentwicklung mehr auf, auch nicht nach längerer Abkühlung und neuerlichem Erhitzen.

Den Gang der Auswertung der einzelnen Ablesungen möge folgendes Beispiel eines Versuches klar machen. Dasselbe bezieht sich auf die Messung von Nickeldraht bei einer hohen Temperatur.

Temperaturbestimmung und Widerstandsmessung. Zunächst wurde, nachdem Ofen *O* und *o* durch längere Zeit auf den entsprechenden Temperaturen gehalten worden waren, die Ausschläge des Siemensvoltmeters *V* abgelesen, während nacheinander die Thermoelementchen *a*, *b*, *c* oder *f* eingeschaltet waren; dabei mußte wegen der zu großen Empfindlichkeit von *V* ein entsprechender, während dieses Versuchs-

---

[1] Siehe die jüngst erschienene Arbeit von G. Belloc, Gas occlus dans les aciers. C. R., tome CXLV, p. 1281 (1907).

abschnittes natürlich gleich bleibender Widerstand, z. B. 400 Ω, vorgeschaltet werden. In dem hier zu schildernden Beispiele war die Reihenfolge und die Größe der einzelnen Ablesungen

f...118·6, *c*...150·1, *b*...155·2, *a*...148·0.

Dann wurde das im Ofen *o* befindliche Quecksilberthermometer oder in diesem Beispiele das PtRh-Pt-Thermoelement (in *V* eingeschaltet und) abgelesen. Natürlich war hier jeder Widerstand aus der Leitung entfernt. Diese Ablesung erfolgte in der zweiten Skala des Voltmeters, das direkt Celsiustemperaturgrade angibt; die Ablesung lieferte (nach Einrechnung der Korrektion wegen der Temperatur der zweiten Lötstelle 26° C.) 576° C. Ebenso wurde natürlich bei eventuellen Ablesungen mit dem Quecksilberthermometer die Fadenkorrektur berücksichtigt.

Hierauf wurden die Widerstandsmessungen gemacht, wobei wieder vor dem Millivoltmeter *V* kein Widerstand vorgeschaltet war. Es ergab sich

Spannung	: Strom	= Widerstand
158·1	: 0·791	= 2000.10^n
160·1	: 0·802	= 1996 »
151·8	: 0·760	= 1998 »
	Mittel	= 1998

Da es sich nur um relative Werte handelt, so ist die Bestimmung des Exponenten *n* gleichgültig. Hierauf wurden die Temperaturmessungen in *O* wiederholt, wobei natürlich wieder die früheren Widerstände (also in unserem Falle 400 Ω) vor *V* vorgeschaltet worden waren. Man erhielt

a...148·1, *b*...155·4, *c*...150·3, *f*...119·0.

Die durch das PtRh-Pt-Element angegebene Temperatur war jetzt nach Korrektur 578° C.

Das Mittel von *c*, *b* und *a* vor und *a*, *b* und *c* nach der Widerstandsmessung ergibt 151·2. Das entsprechende Mittel von *f* ist 118·8, die Temperatur der anderen Lötstellen von *a*, *b*, *c* und *f* war 26°. Die thermoelektrischen Ausschläge

151·2 und 118·8 verhalten sich somit wie die Temperaturdifferenzen der Lötstellen x und (577°—26°). Daraus ergibt sich als gesuchte Temperaturdifferenz $x = 701$ und nach Zuschlag der Temperatur 26° der kalten Lötstelle erhalten wir als Temperatur des NN-Drahtes 727° C. Diese Temperatur gilt für die Widerstandsmessung.[1] (Diese zusammengehörigen Endwerte sind in Tabelle I, III und V eingetragen.)

»Temperaturanstieg«. Unmittelbar nach diesen Ablesungen wird zunächst der gegenseitige Reduktionsfaktor der Galvanometer G_1 und G_2 bestimmt (Schaltung nach Fig. 4). Es ergab sich

$$A_1 = 0\cdot657,\quad B_1 = 1647,\quad A_2 = 1\cdot332,\quad B_2 = 1406.$$

Man erhält also

$$\frac{B_1}{A_1} = R_1 = 2507 \quad \text{und} \quad \frac{B_2}{A_2} = R_2 = 1057.$$

$\frac{R_2}{R_1} = 4216$ ergibt den gegenseitigen Reduktionsfaktor; rechnet man hier immer vier Stellen, so ist bei der relativen Berechnung der Stellenwert gleichgültig.

Nun tritt die eigentliche Hauptschaltung in Wirksamkeit und es muß der in b durch den Wechselstrom in NN erzeugte Temperaturanstieg bestimmt werden.

Es würde hier wohl zu weit führen, wenn ich auch nur ein einziges Beispiel der durch etwa 25 Glockenschläge eines Metronoms, deren Zeitdistanz 5 Sekunden betrug, gleichzeitig beobachteten Stellungen der Galvanometer G_1 und G_2 ausführlich hinschriebe. Es wurde zunächst eine kurze Vorperiode (drei bis fünf Schläge) beobachtet, dann weiter, währenddem der Wechselstrom durch sechs Schläge (bei ganz hohen Temperaturen nur vier Schläge) geschlossen war; dann erfolgte noch die Beobachtung einer größeren Nachperiode. Es dauerte

[1] In diesem Beispiel ist die Differenz der Temperaturen der beiden Öfen O und o ganz besonders groß. In den meisten Fällen betrug derselbe etwa 20°. In obigen Berechnungen ist angenommen, daß die thermoelektrische Kraft Eisen-Konstantan innerhalb dieser Temperaturdifferenzen sich mit den Temperaturen linear ändert. Das ist innerhalb der Versuchsfehler sicher richtig.

nämlich ziemlich lange, bis nach Abschaltung des erwärmenden Wechselstromes eine Regelmäßigkeit im Abfalle der Temperatur eintrat.

Die Anbringung der Korrektur war für den Ausschlag ϑ_2 des Galvanometers G_2 durch entsprechendes Mittelnehmen der Vor- und Nachperiode sehr einfach

Umständlich wurde hingegen (besonders bei hohen Temperaturen) die Berechnung der Korrektur für die Ausschläge ϑ_1 im Galvanometer G_1. Ich zeichnete hier für jeden einzelnen Fall ein kleines Diagramm mit den Galvanometerstellungen als Abszissen und dem Wärmeverlust als Ordinaten. Aus diesem Diagramm wurden dann die Korrekturen für die einzelnen Mittelwerte des eigentlichen Temperaturanstieges gerechnet.[1] Wenn b auf einer hohen Temperatur sich befindet, so ist diese Korrektion sehr groß und erreicht oft 50% des Endwertes. Auch ist es mißlich, daß für die extremste Galvanometerstellung die Korrektur aus der Diagrammkurve extrapoliert werden muß. Gleichwohl stimmen die Schlußresultate so genau überein, daß selten Abweichungen von mehr als 1% vom Mittel vorkommen.

Vor jeder solchen Messung von ϑ_1 und ϑ_2 wird die Temperatur von b, d. h. der Ausschlag im Voltmeter V, verzeichnet. Die entsprechenden, in vorliegendem Beispiele gefundenen Zahlen sind:

b	Θ_1	Θ_2	$\Theta_1 : \Theta_2$
150·3	13·78	886	1555
149·9	14·46	950	1523
149·0	13·91	900	1545
Mittel..149·7			1541

[1] Es ist dies dieselbe Methode, welche Pfaundler in seinem Lehrbuche »Müller-Pouillet«, III, p. 175 (1907) schildert. Bei der Größe der Korrektur zog ich obige Berechnung, wie sie Pfaundler, p. 177, l. c., gibt, vor. Allerdings mußte ich da nur für die in dieser Arbeit mitgeteilten Werte 91 Diagramme zeichnen. Mit Einrechnung der nicht publizierten Vorversuche waren es über 200.

Θ bedeutet die wegen des Wärmeverlustes korrigierten Galvanometerausschläge. Da diese Messungen der Quotienten $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ recht gut übereinstimmen, so begnügte ich mich hier mit drei Werten, manchmal nahm ich auch mehr.

(In den späteren Tabellen II, IV und VI sind die Einzelwerte von b in der ersten und die Einzelwerte von $(\Theta_1 : \Theta_2)$ in der dritten Vertikalreihe verzeichnet, indes die Mittel der $(\Theta_1 : \Theta_2)$ in der vierten Vertikalsäule sich finden.)

Schließlich wurde nochmals der gegenseitige Reduktionsfaktor, und zwar

$$R_1 = 2507, \quad R_2 = 1060$$

gemessen.

Das Mittel aus diesen

$$(R_2 : R_1) = 4228$$

und dem entsprechenden Werte auf p. 123 ergibt den Schlußwert 4222 für den gegenseitigen Reduktionsfaktor dieser Versuchsserie (fünfte Vertikalreihe der Tabellen II, IV und VI).

Es ist dann der Quotient aus Gleichung 1) auf p. 120

$$[(\Theta_1 : \Theta_2) : (R_2 : R_1)] = 6506$$

das Schlußresultat der Versuche über den »Temperaturanstieg« (sechste Vertikalreihe in den Tabellen II, IV und VI).

Um schließlich die Temperatur von b zu finden, wurde das Mittel der drei obigen Messungen, nämlich 149·7, in derselben Weise verarbeitet wie die Mittel von a, b und c auf p. 122. Man erhält dann für b als wirkliche Mitteltemperatur 720° C. Diese Zahl ist aber nur die Anfangstemperatur des Versuches und muß daher noch eine Korrektur erfahren. Am Ende der Versuchsreihe wurde statt der Galvanometerleitung G_1 das Voltmeter V eingeschaltet und noch einmal dieselbe Zeit wie beim Hauptversuche der gleiche Wechselstrom durch NN geleitet; man erhielt so den ungefähren Temperaturanstieg, natürlich nach den nötigen Umrechnungen direkt in Celsiusgraden. In unserem Falle betrug der Anstieg etwa 6°, d. h. der Versuch begann bei 720° und endete bei 726°; es ist also hier

der Mittelwert für die Versuchstemperatur (zweite Vertikalkolumne in den Tabellen II, IV und VI) 723° C.

Versuchsresultate.

Die folgende Tabelle I enthält die für Nickel gewonnenen Werte für die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur. Die Widerstandswerte sind selbstverständlich nur relativ.

Tabelle I.

Widerstand Ni im Vakuum.

Temperatur...	20	222	315	323	349	387	478	505	724
Widerstand...	455	922	1250	1275	1400	1505	1660	1689	1998

In Tabelle II erhellt die Bedeutung der einzelnen Bezeichnungen aus dem vorhergehenden Kapitel. Die sechste Vertikalreihe enthält unter dem Schlagworte »reduzierter Temperaturanstieg« den auf unveränderliche Empfindlichkeit des Galvanometers gestellten und wegen des Wärmeverlustes korrigierten Temperaturanstieg, den ein und derselbe Wechselstrom während ein und derselben gleichen Zeit in *b* hervorbringen würde, wenn *b* die in der zweiten Vertikalreihe angegebene Temperatur hat.

In Fig. 5 sind die Schlußwerte der Tabellen I und II in willkürlichem Maß eingezeichnet. Die Abszissen bedeuten Temperaturen in Celsiusgraden. Die Kurve mit der Bezeichnung »Widerstand« entspricht Tabelle I, wobei aber alle Werte verdoppelt wurden; die Kurve mit der Bezeichnung »Temperaturanstieg« entspricht der sechsten Vertikalsäule der Tabelle II.

Nach Formel 1) auf p. 120 gibt der Quotient von zwei zusammengehörigen Ordinaten dieser Kurve die spezifische Wärme von Nickel. Die siebente Vertikalreihe der Tabelle II gibt jene Widerstände, welche aus der entsprechenden Kurve in Fig. 5 zu den in der zweiten Vertikalreihe der Tabelle II angegebenen Temperaturen gehören. Die letzte Vertikalreihe

Tabelle II.

Ni in vacuo.

Temperatur		$\Theta_1 : \Theta_2$		$\frac{R_2}{R_1}$	Reduzierter Temperaturanstieg	Widerstand	Spezifische Wärme
b	Celsius	Einzeln	Mittel				
	23	4825 4838 4866 4864 4820	484	4000	1937	925	4776
1000 1034 1040 1040	221	8040 8100 8180 8143	812	4006	3251	1840	5660
1214 1190 1166	320	9790 9770 9637	973	3943	3837	2534	6604
1579 1560 1557	331	9770 9753 9500	967	4014	3883	2630	6773
1490 1480 1470	354	9830 9685 9681	973	4000	3893	2828	7265
1643 1655 1667	390	1197 1201 1223	1207	3985	4810	3022	6284
1435 1420 1405 1400	454	1290 1300 1301 1295	1296	3952	5121	3238	6323
1471 1489 1499	471	1298 1298 1293	1296	3985	5164	3298	6387
1549 1543 1589 1568	501	1373 1365 1373 1345	1364	4000	5456	3368	6173
1490 1499 1503	723	1555 1523 1545	1541	4222	6506	3097	6143

dieser Tabelle enthält endlich die »spezifische Wärme« (natürlich auch in relativen Werten). Die diagrammatische Darstellung bringt Fig. 5 in der Kurve »Spezifische Wärme«.

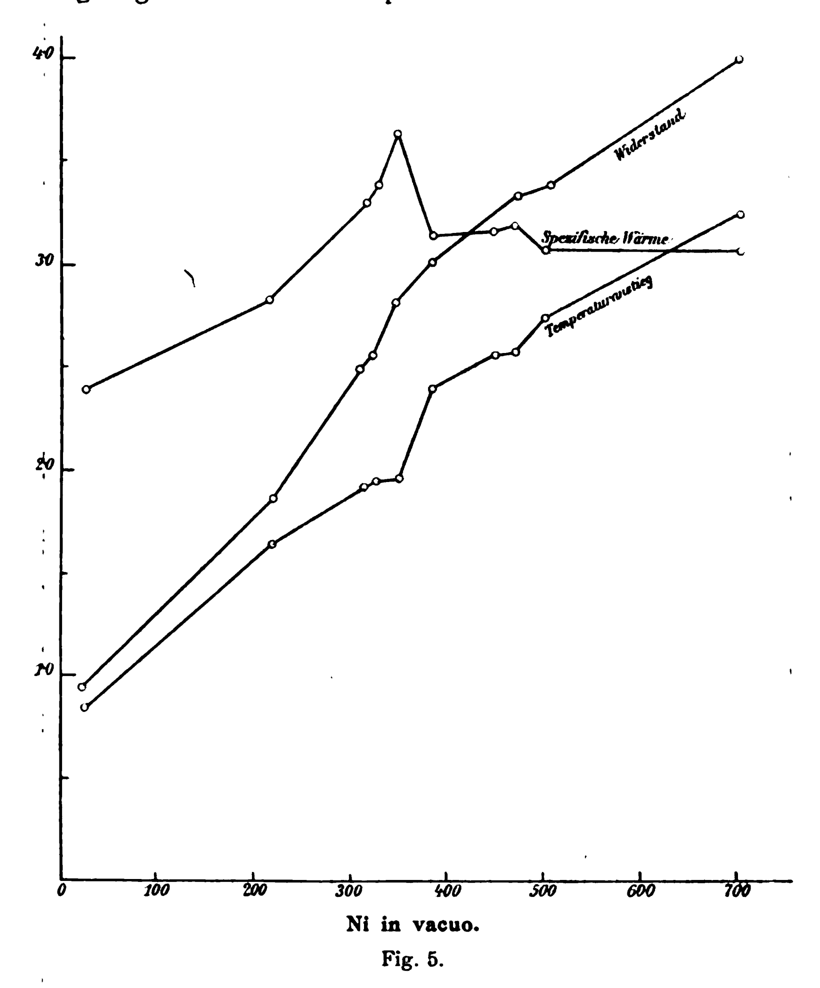


Fig. 5.

Die chemische Analyse ergab für den untersuchten Nickel:

Qualitativer Befund: Nickel, Eisen, Kohle.

Quantitativer Befund:

Nickel (elektrolyt. best.)	99·2 %
Eisen (gravimetr. best.)......	0·47
Kohle (aus der Diff. ber.)	0·33

Die Tabellen III und IV enthalten die analogen Ergebnisse für Eisen im Vakuum. Ebenso sind die entsprechenden Werte in Fig. 6 in analoger Weise dargestellt.

Tabelle III.

Widerstand Fe in vacuo.

Temperatur...	20	191	314	567	655	727	826	930	19
Widerstand...	928	1782	2627	4928	5961	6634	7926	8342	930

Schließlich wurde auch noch Fe in H untersucht. Dieses Gas wurde aus chemisch reinem Zink und Schwefelsäure dargestellt, durch Permanganat, Kalilauge, Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd gereinigt und langsam in das evakuierte Gefäß eingelassen, während das Eisen auf etwa 900° C. erhitzt war. Die analogen Versuche ergeben Tabelle V und VI.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß diese Versuche besonders bei höheren Temperaturen unzuverläßlich erscheinen. Es wird nämlich da die Wärmekorrektion des Temperaturanstieges infolge der großen Wärmeleitfähigkeit des Wasserstoffes[1] ungewöhnlich groß; darum dürften die für die Temperatur 786° C. gegebenen Zahlen gewiß unrichtig sein und ich habe die Messungen bei höheren Temperaturen nicht weiter mitgeteilt. Immerhin erscheint es als nicht unmöglich, daß im Wasserstoff eine Veränderung des Eisens vor sich geht, welche auch die spezifischen Wärmen ändert. So zeigt z. B. die letzte Horizontalreihe in Tabelle VI, welche bei gewöhnlicher Temperatur, nachdem alle anderen Messungen durchgeführt waren, vorgenommen wurde, vielleicht eine kleine Verminderung der spezifischen Wärme. Wegen der Unsicherheit dieser Versuche in H teile ich auch die diagrammatische Darstellung nicht mit.

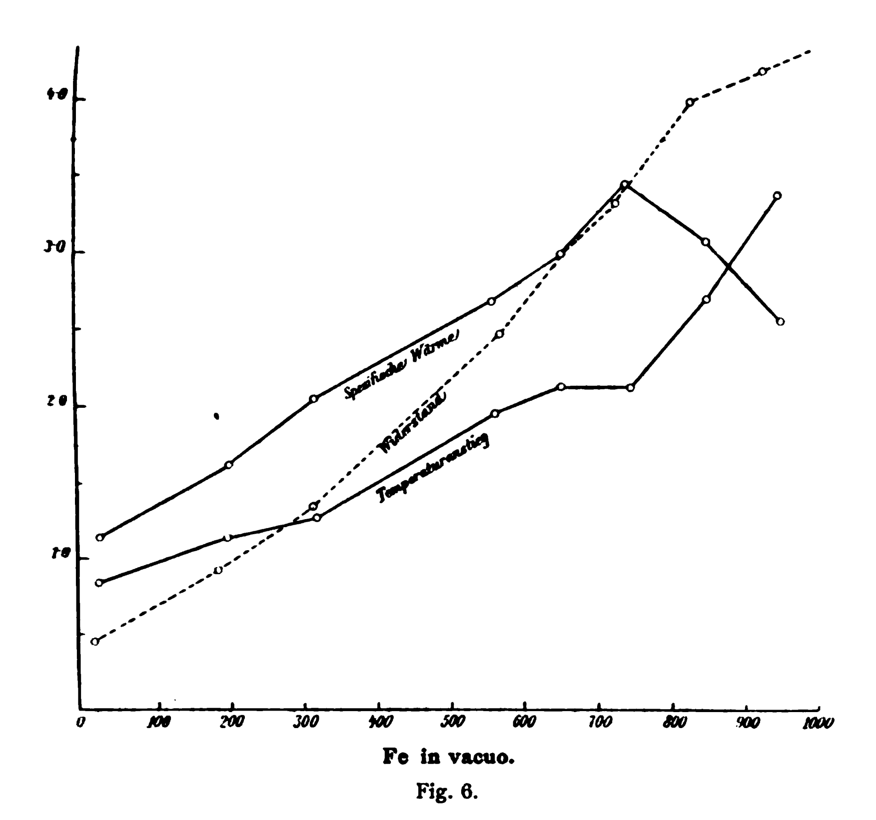
---

[1] Ich beabsichtige, durch eine kleine Veränderung der hier mitgeteilten Methode die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit der Gase von der Temperatur zu bestimmen.

Tabelle IV.

Fe in vacuo.

Temperatur		$\Theta_1 : \Theta_2$		$\frac{R_2}{R_1}$	Reduzierter Temperaturanstieg	Widerstand	Spezifische Wärme
b	Celsius	Einzeln	Mittel				
	24	957 957 958	957	876	839	473	564
941 931 930	198	1303 1301 1303	1302	877	1142	915	801
1546 1553 1583	318	1201 1223 1229	1213	1062	1288	1326	1030
1518 1549 1567	560	1287 1305 1313	1302	1403	1827	2436	1333
1521 1555 1574 1594	656	1091 1090 1113 1096	1098	1822	2000	2982	1491
1543 1532 1538 1539	744	1104 1082 1107 1112	1101	1818	2002	3429	1713
1565 1576 1580 1585 1589	850	1455 1480 1480 1465 1468	1470	1800	2646	4010	1517
1620 1622 1626 1628 1622	948	1152 1186 1130 1122 1160	1150	2905	3840	4210	1260
	25	982 983 984	983	867	853	476	558



Fe in vacuo.

Fig. 6.

Tabelle V.

Widerstand Fe in H.

Temperatur ..	21	334	560	627	742	767	850	19
Widerstand ..	932	2763	4710	5459	6792	7222	8000	931

Die chemische Analyse ergab für den verwendeten Eisendraht:

Qualitativer Befund: Eisen, Spuren von Mangan und wenig Kohle.

Quantitativer Befund:

Eisen (elektrolyt. best.) .... 99·5%
Kohle und Mangan (Diff.) ..... 0·5

Tabelle VI.

Fe in H.

Temperatur		$\Theta_1 : \Theta_2$		$\frac{R_2}{R_1}$	Reduzierter Temperaturanstieg	Widerstand	Spezifische Wärme
b	Celsius	Einzeln	Mittel				
	24	8253 8500 8372 8461 8463	841	858	722	480	665
1667 1665 1681	341	1494 1450 1444	1463	857	1254	1408	1123
1512 1513 1520	573	1965 1918 2005	1963	857	1682	2423	1441
1483 1487 1494	640	1577 1494 1551	1541	1254	1932	2801	1450
1580 1572 1578	768	1560 1569 1700	1610	1253	2017	3619	1794
1443 1446 1476	786	999 964 933	965	1767	1705	3700	2170 ?
	23	8530 8506 8470	850	859	730	475	651

Diskussion der Resultate und der Methode.

Die von mir mitgeteilten Resultate ließen sich durch verschiedene Maßnahmen verbessern.

Es entstand bei meinen Messungen ein Fehler dadurch, daß der zur Heizung verwendete Strom der Straßenleitung entnommen wurde und daher in hohem Grade veränderlich

war. Dadurch erschien es unmöglich, die Temperatur des Ofens für etwa eine Stunde — so lange dauerte eine einzelne Versuchsserie mindestens — konstant zu erhalten. Dies äußert sich z. B. in der Inkonstanz der zusammengehörigen Zahlen der ersten Vertikalreihe in Tabelle II, IV und VI. Doch fällt der Fehler nicht sehr ins Gewicht, da ja eine kleine Horizontalverschiebung eines Punktes in den Diagrammen die Kurvengestalt nicht allzu sehr ändert.

Ferner hätte der Hauptdraht *NN* etwas dicker genommen werden sollen, wenn ein stärkerer Wechselstrom zur Erzeugung des Temperaturanstieges zur Verfügung gestanden hätte. Das eingelötete Thermoelementchen *b* ist nämlich in seinem abweichenden Wasserwerte nicht berücksichtigt und dieser Fehler würde um so kleiner, je größer die erwärmte Hauptmasse ist. Schließlich — und dies dürfte der Hauptfehler sein — gaben die Galvanometer G_1 und G_2 nicht prompt die in jedem Augenblicke wirklich vorhandene Thermokraft an. Dieselben geraten in eine gewisse Schwingung, bleiben daher im Anfang etwas zurück und pendeln dann um die wirkliche Stellung in nicht bestimmbarer Weise hin und her. Hier müßten Galvanometer verwendet werden, die bei gleicher Empfindlichkeit eine viel kleinere Eigenschwingung besitzen.[1]

Gleichwohl halte ich die von mir gewonnenen Resultate für besser als die bisher auf diesem Gebiete vorliegenden Messungen. Der Vorteil der von mir angewandten Methode dürfte vielleicht am schnellsten in die Augen springen, wenn ich meine Resultate mit den entsprechenden anderweitigen letzten Ergebnissen dieses Gebietes vergleiche.

Die letzte Messung der spezifischen Wärme von Nickel bei hohen Temperaturen rührt meines Wissens von W. A. Tilden[2] her. Dieser hat nicht die wirklichen, sondern die mittleren spezifischen Wärmen gemessen, d. h. jene Wärmemengen, welche ein auf die Temperatur *t* erwärmter Körper abgibt, wenn er auf 15° abgekühlt wird. Daraus findet Tilden die

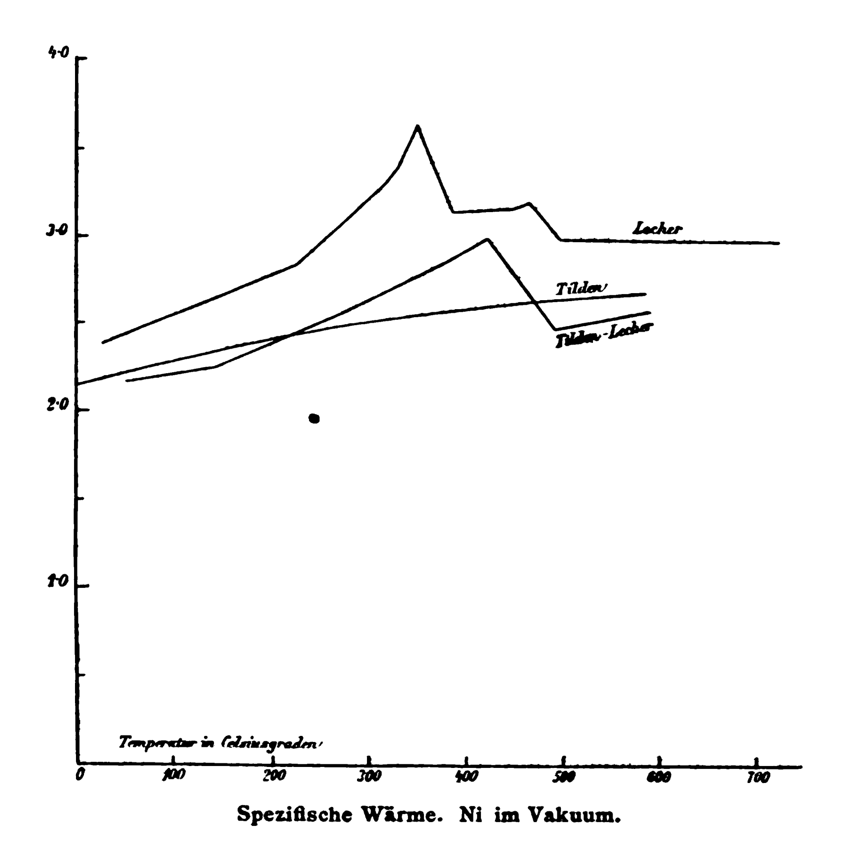
---

[1] Über genaue Berechnung derartiger Fehler siehe Jaeger-Diesselhorst, l. c., p. 369.

[2] W. A. Tilden, Phil. Trans. London (A), 201, p. 37 (1903).

mittleren spezifischen Wärmen; er erhält für die hier in Betracht kommenden

Temperaturen ..	100°,	185°,	350°,	415°,	435°,	550°,	630°
die Werte	0·1084,	0·1101,	0·1186,	0·1227,	0·1240,	0·1240,	0·1246



Spezifische Wärme. Ni im Vakuum.

Fig. 7.

Die Wärmemenge, die notwendig ist, um von einem Nullpunkt aus die Einheitsmasse auf die Temperatur t zu erhitzen, sei Q und sie ergibt sich aus den eben gegebenen Zahlen durch Multiplikation mit den entsprechenden Temperaturintervallen. Diese Werte von Q bringt Tilden in die Gleichung

$$Q^3+aQ+bt^2+ct+f=0.$$

Die wirkliche spezifische Wärme bei verschiedenen Temperaturen erhält er dann durch $\frac{dQ}{dt}$. Diese Ergebnisse von Tilden sind in Fig. 7 in der Kurve mit der Überschrift »Tilden« gegeben. Ich glaube nun, daß durch Abrundung der Tildenschen Beobachtungen, wie sie zur Einführung in die hyperbolische Formel notwendig ist, viele Einzelheiten der Resultate verloren gehen und darum habe ich die wirkliche spezifische Wärme direkt aus den Beobachtungen von Tilden zu berechnen versucht. Es sei Q_t die Wärme, welche zur Erwärmung von 15° auf t notwendig ist und es sei Q_{t_1} die Wärme, welche notwendig ist, um dasselbe Nickelstück von der Temperatur 15° auf die Temperatur t_1 zu bringen. Dann ist $Q_{t_1} - Q_t$ die Wärme, welche zur Erwärmung von t auf t_1 notwendig ist. Diese Größe, dividiert durch die Temperaturdifferenz $(t_1 - t)$, ergibt dann die wirkliche spezifische Wärme für die Temperatur $\frac{t+t_1}{2}$. Diese so erhaltene Kurve habe ich in der Fig. 7 durch die Kurve mit der Überschrift »Tilden-Lecher« gegeben. Diese Kurve zeigt nun ganz analog meinen Versuchen gleichfalls das plötzliche Ansteigen, allerdings bei einer etwas höheren Temperatur. Letzteres dürfte vielleicht dadurch zu erklären sein, daß Tilden die Temperatur durch ein Platinwiderstandsthermometer maß, welches für 0°, 100° und 184° (Siedepunkt des Anilins) geeicht war. Es mußte also bei 400° schon eine ziemliche Extrapolation stattfinden. Darum dürften vielleicht meine direkt mit einem geeichten Quecksilberthermometer gemessenen Temperaturen richtiger sein. Die absolute Höhe der Abszissen ist bei allen Kurven willkürlich und ohne irgend eine gegenseitige Beziehung. Der relative Gang der beiden Kurven muß dann als ähnlich bezeichnet werden.

Von sonstigen früheren Messungen versuchte ich auch die von Pionchon in analoger Weise wie die von Tilden auszuwerten. Ich habe die von ersterem in Tableau XX gegebenen Zahlen[1] dazu verwendet, scheiterte aber, so paradox das klingen mag, daran, daß seine Beobachtungen viel zu zahl-

---

[1] Pionchon, Annales de chimie et de physique (VI), 11, p. 84.

reich sind. Liegen nämlich die Temperaturen t und t_1 zu nahe aneinander, so sind auch die Größen Q_t und Q_{t_1} einander fast gleich und die Fehlerquellen dieser Werte kommen bei ihrer Differenz in ganz sinnstörender Weise zum Ausdrucke. Die von mir nach Pionchon berechneten Zahlen gehen in Zickzackform hin und her und sind ganz unbrauchbar. Nun sind aber gerade für jene physikalisch und chemisch interessanten Temperaturen, wo plötzliche Änderungen der Kurven eintreten, möglichst eng aneinander liegende Beobachtungen wünschenswert und da versagen die bisher angewandten Methoden vollständig, indes meine direkte Bestimmungsart von derartigen Fehlern natürlich vollständig frei ist. Diesen Vorteil betonen auch Jäger und Diesselhorst.[1]

Fig. 8 gibt meine Resultate über die spezifische Wärme des Eisens und ich habe auch hier gleichzeitig einige der früheren Beobachtungen eingetragen. Nach Abschluß meiner Versuche erschien eine Arbeit über denselben Gegenstand von B. Oberhoffer.[2] Den Fehler der Oxydation vermeidet Oberhoffer dadurch, daß er den Hohlraum des elektrischen Ofens direkt in Verbindung brachte mit einem Eiskalorimeter und beide gleichzeitig auspumpte. Diese Anordnung scheint mir viel schwieriger zu behandeln als die meine, wobei ganz besonders die unangenehmen Eigenschaften des Eiskalorimeters betont seien. Auch hier habe ich zunächst versucht, die direkten Messungen Oberhoffer's zur Bestimmung der wirklichen spezifischen Wärme zu verwenden und auch hier erschien dieses aus ganz analogen Gründen wie eben bei den Nickelmessungen von Pionchon unmöglich. Nun hat aber Oberhoffer eine Tabelle[3] mit abgerundeten Werten der mittleren spezifischen Wärmen gegeben und daraus berechnete ich die in Fig. 8 mitgeteilte Kurve mit der Aufschrift »Oberhoffer-Lecher«. Ebenso hat die alten Messungen von Pionchon[4]

---

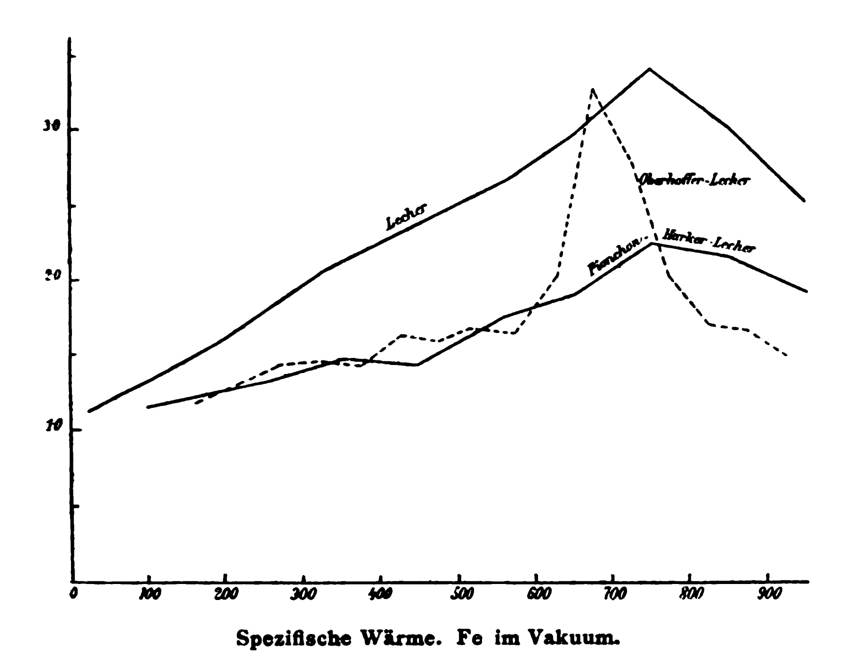
[1] L. c., p. 302.

[2] B. Oberhoffer, Metallurgie von W. Borchers und F. Wüst, Aachen, Bd. 4, p. 427 (1907).

[3] L. c., p. 429.

[4] L. c., p. 72.

über Eisen Harker[1] in abgerundete Zahlen korrigiert und gezeigt, daß diese Werte mit seinen eigenen Messungen recht gut übereinstimmen. Aus diesen Werten berechnete ich die wirklichen spezifischen Wärmen, wie sie in Fig. 8 in der Kurve mit der Überschrift »Pionchon-Harker-Lecher« gegeben sind. Die Messungen von Pionchon und Harker sind beide



Spezifische Wärme. Fe im Vakuum.

Fig. 8.

nach der Mischungsmethode durchgeführt, wobei die Oxydation durch entsprechende Einhüllung in Platin oder Porzellan zu vermeiden gesucht wurde und wo überdies das erhitzte Eisen nicht direkt in das Kalorimeterwasser, sondern in einen in diesem befindlichen Hohlraum fallen gelassen wurde. Die Originalversuche von Harker stimmen bis etwa 800° vollständig mit denen von Pionchon überein. Die Spitze der Kurve liegt dann genau an derselben Stelle und in fast gleicher Höhe, nur sinken dann für höhere Temperaturen über 800°

---

[1] J. A. Harker, Phil. Mag. (6), 10, p. 438 (1905).

die Werte von Harker so scharf ab wie bei keinem anderen Beobachter.

Die in Fig. 8 gezeichneten drei Kurven sind in ihrem Charakter gleich, zeigen aber doch sehr verschiedene Eigenheiten. Hier ist meine Kurve so eingezeichnet, daß der Anfang derselben bei 20° ungefähr dem wirklichen Werte der spezifischen Wärme auch der absoluten Größe nach entspricht. Es sind also diese drei Kurven nicht nur relativ, sondern auch absolut zu nehmen. Die Zusammensetzung der untersuchten Eisensorten war verschieden. Pionchon arbeitete zum Teil mit kohlenfreiem, im Wasserstoffstrome reduziertem Eisenschwamm. Der Kohlengehalt bei Harker war 0·01%, bei Oberhoffer 0·06%; es war also mein Eisen das kohlenstoffreichste. Ob die Verschiedenheit der Kurven durch diese Verschiedenheit des Kohlenstoffgehaltes oder durch die Verschiedenheit der angewandten Methoden zu erklären sei, läßt sich wohl schwer entscheiden; doch dürfte das letztere wahrscheinlicher sein. Jedenfalls zeigt sich, daß auch hier bei Eisen die spezifische Wärme in jenem interessanten Temperaturintervall plötzlich ansteigt, in dem auch alle anderen physikalischen Eigenschaften sich ändern.[1] Das Maximum meiner Kurve und das von Pionchon und Harker liegen an genau derselben Stelle, 750°, indes die von Oberhoffer etwas tiefer liegt. Doch könnte diesbezüglich vielleicht eine bessere Übereinstimmung stattfinden, wenn bei der Temperatur von etwa 700° die gerade hier fehlenden entsprechenden Werte gegeben wären.

Meine Kurve zeigt auch noch eine schwache Knickung bei etwa 310° und ebenso bei ungefähr gleicher Temperatur die Kurve von Pionchon und eventuell auch die von Ober-

---

[1] Um nur einige der jüngsten Zahlen anzuführen:

Harrisson (Phil. Mag., 6, VIII, p. 195 [1904]) zeigt, daß für Fe die Permeabilität bei 760° plötzlich sinkt und bei 855° verschwindet.

Chatelier (C. R., 129, p. 331 [1899]) findet für Eisen mit 0·5% C, d. i. der Kohlenstoffgehalt des von mir untersuchten Materiales aus der Untersuchung des Ausdehnungskoeffizienten eine Umwandlungstemperatur von 728°, was mit meiner Zahl 750° recht gut übereinstimmt u. s. w.

hoffer, wiewohl hier die Zickzackform bis etwa 600° eine genaue Interpretation erschwert.[1]

Ein gewaltiger Unterschied zeigt sich aber zwischen allen drei Versuchen in der Art des Anstieges. Die zwischen zwei Ordinaten eingeschlossene Fläche gibt die zur Erwärmung für dieses Temperaturintervall notwendige Wärme. Man sieht nun, daß zu einer Erwärmung auf etwa 750° meine Versuche eine bedeutend größere Zahl liefern als die von Oberhoffer, während der entsprechende Wert bei Pionchon am kleinsten ist. Lassen wir die Werte von Pionchon-Harker, bei denen die Oxydation vielleicht doch eine gewisse Rolle gespielt haben mag, weg, so wäre die Aufdeckung des Unterschiedes meiner Versuchsresultate und der von Oberhoffer von großem Interesse. Ansichten darüber ohne experimentelle Begründung auszusprechen, erscheint schwierig. Jedenfalls spielt hier die Schnelligkeit der Erwärmung, respektive Abkühlung eine große Rolle. Bei mir wird das Material durch Stunden hindurch langsam bis zum betreffenden Punkte erwärmt, indes die Werte von Oberhoffer gewonnen werden, während das Material plötzlich von etlichen 800° oder mehr auf 0° sich abkühlt. Vielleicht könnte man in folgender allgemeiner Überlegung die Erklärung des vorliegenden Unterschiedes der fraglichen Differenz suchen.

Der Ausdruck »spezifische Wärme für die Temperatur t« ist nach der derzeitigen Definition $\frac{dQ}{dt}$.

Für H_2O z. B. ergibt die Temperaturabhängigkeit dieses Wertes in der Gegend von 0° ungefähr die in Fig. 9, linker Teil, skizzierte Kurve. Für 0° C. wird dann die spezifische Wärme von H_2O unendlich.

Würde man hingegen annehmen, daß der Schmelzpunkt von H_2O kein mathematischer Temperaturpunkt ist, daß z. B. beim Erwärmen des Eises schon etwas unter 0° durch eine

[1] Diese sonderbare Wellenform findet sich merkwürdigerweise auch bei Versuchen von N. Stücker (diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, p. 657 [1905]). Möglicherweise rührt dieselbe in beiden Fällen von Versuchsfehlern her, doch verdiente die Sache eine Nachprüfung und es muß bei Wiederholung der Versuche diese Gegend diesbezüglich genauer durchforscht werden.

Lockerung der Eismolekel eine Vorbereitung zum Schmelzen geschaffen würde und daß andrerseits im Wasser beim Abkühlen von oben her gegen 0° schon etwas über 0° eine zum Erstarren vorbereitende Umlagerung der Wassermolekel stattfinde, so würde dieser Verlauf durch die rechte Kurve von Fig. 9 charakterisiert. In der Region dieser molekularen Umlagerungen findet ein plötzlicher Kurvenanstieg statt. Dann bestehen die Ordinaten dieses Teiles der Linien zum Teil aus

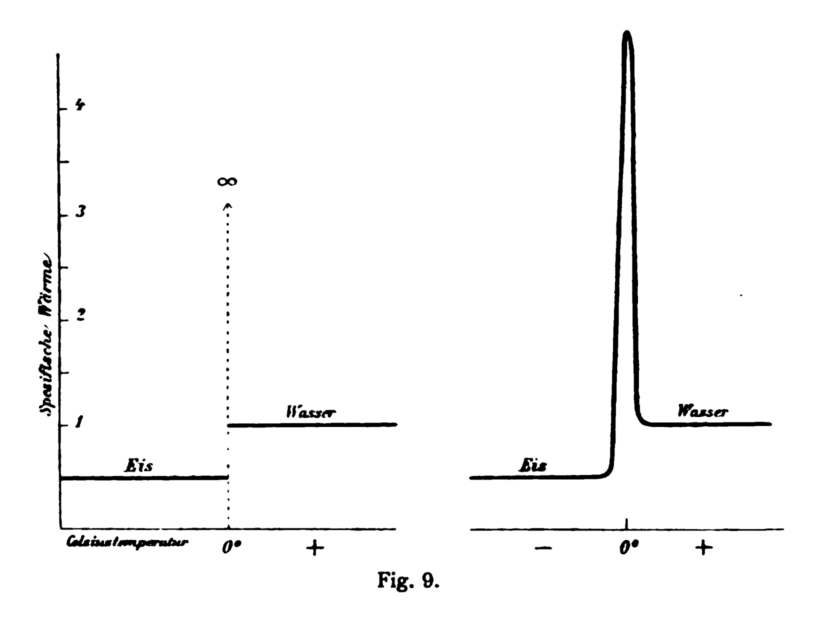


Fig. 9.

der zum Temperaturanstieg nötigen Energie und zum Teil aus der zur molekularen Umlagerung nötigen Energie.

Spezifische Wärme = Erwärmungsenergie + Umwandlungsenergie.

Fassen wir den Schmelzpunkt von H_2O als mathematischen Temperaturpunkt, so wird bei 0° C. die spezifische Wärme unendlich. Es scheint hier die Existenz des Begriffes der spezifischen Wärme aufzuhören sowie ohne Temperaturanstieg latente Umwandlungswärme ins Spiel tritt. Allgemeiner wäre natürlich die in der rechten Seite von Fig. 9 niedergelegte Darstellungsform, deren experimentelle Widerlegung wohl kaum möglich, da ja das Umlagerungsintervall beliebig

klein genommen werden kann. Es würde dann innerhalb dieses Umlagerungstemperaturintervalles der Anstieg der spezifischen Wärme sehr groß, aber nie unendlich.

In den von mir untersuchten Nickel- und Eisenkurven haben wir ein solches Umwandlungsgebiet bei 350°, respektive 750° innerhalb eines sehr weiten Temperaturintervalles. In diesen Regionen besteht ein großer Teil der von mir als spezifische Wärme gemessenen Größen aus Umwandlungsenergie, während die eigentliche »Erwärmungsenergie« wahrscheinlich eine viel regelmäßigere Kurve bilden würde. Das Gesetz von Dulong-Petit bezöge sich dann, abgesehen von sonstigen Überlegungen, zunächst nicht auf die Größe der spezifischen Wärme, sondern nur auf einen Teil dieser Größe, auf die »Erwärmungsenergie«.[1]

Vielleicht ist meine Fe-Kurve gegenüber der von Oberhoffer darum flacher, weil beim langsamen Erwärmen sich die Umwandlung des Eisens allmählich, d. h. schon bei tieferen Temperaturen beginnend, vollzieht und vielleicht ist der Integralwert der Oberhoffer'schen Kurve darum kleiner, weil sein plötzlich abgekühltes Eisen durch zu rasches Erstarren keine vollständige Umwandlung erlitt.

[1] Ganz analoge Bemerkungen macht A. Wiegand, Ann. d. Phys., XXII, p. 105 (1907) in seinen interessanten Untersuchungen über die Richarz'sche Theorie des Dulong-Petit'schen Gesetzes.

XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.

Eine Methode zur Aufzeichnung phonographischer Wellen

von

Fritz Hauser,

Assistent am Phonogramm-Archiv der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Februar 1908.)

Bei den zahlreichen und verschiedenartigen Aufnahmen, welche im Phonogramm-Archiv im Laufe der Zeit gesammelt wurden, konnte man oft schon mit unbewaffnetem Auge auf den Platten eine auffallende Verschiedenheit der Wellenformen beobachten. Die näheren Details derselben genau zu differenzieren, gelang selbstverständlich selbst mit dem Mikroskope nicht. Es wäre aber von großem Werte, sowohl für die Phonetik als auch für viele andere Gebiete der Wissenschaft die phonographischen Aufnahmen einwandfrei in ihren Kurvenformen analysieren zu können. Viele Fragen, welche Akzent, Rythmus, Tonhöhe, Vokalcharakter etc. etc. betreffen, könnten dann vielleicht mit Sicherheit beantwortet werden.

Schon von Hensen, Pipping, Hermann, M'Kendrick, Boeke, Scripture und anderen wurde an der Beantwortung der Frage gearbeitet, wie man die Form der Schallwellen, die auf das Ohr wirkend einen bestimmten und bekannten Klang erzeugen, feststellen kann.

Die Methoden, welche Hensen,[1] Pipping[2] angewendet haben und die erste Methode von Hermann[3] erlauben nicht,

[1] Hensen, Zeitschrift für Biologie, Bd. XIII, N. F., V, p. 291 ff.

[2] Pipping, Zeitschrift für Biologie, Bd. XXVII, p. 1 ff.

[3] Hermann, Archiv für die gesamte Physiologie, Bd. XLV, p. 582 ff.

wie ich es für notwendig erachte, die erhaltenen Kurven durch die Wiedergabe der ursprünglichen Aufnahme am Phonographen zu kontrollieren; wie dies bereits am alten Edisonschen Phonographen Jenkin und Ewing,[1] Lahr,[2] Fick[3] und am neuen Phonographen Hermann,[4] M'Kendrick,[5] Boeke[6] und Scripture[7] getan haben.

Ich habe im Jahre 1904 mit der Konstruktion eines Apparates begonnen, der erlauben sollte, die phonographisch verzeichneten Wellen sehr bedeutend vergrößert auf Papier zu übertragen und konnte einen solchen am 24. Juni des genannten Jahres der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien vorführen. Ich adaptierte für die vorliegenden Zwecke einen Archiv-Phonographen Type I[8] und erinnere nur daran, daß auf dem Archiv-Phonographen der Stift die Wellen nicht wie bei dem Edison-Phonographen auf Walzen, sondern wie bei dem Grammophon in einer Spirallinie auf einer Platte einschreibt, die Ordinaten der geschriebenen Wellen aber nicht wie bei dem Grammophon radiär auf der Plattenfläche stehen, sondern wie bei dem Edison-Phonographen senkrecht auf die Fläche in die Tiefe eingegraben werden.

Aus alsbald zu nennenden Gründen können nur Kurven von solchen Platten gezeichnet werden, welche auf dem Phonographen abgehobelt, besprochen, eventuell abgehört, aber nachher nicht mehr abgehoben wurden. Demnach besteht die Schreibeinrichtung im wesentlichen aus dem verwendeten

---

[1] Jenkin und Ewing, Nature, Bd. XVIII, p. 340, 394 (1878); Transact. R. S. Edinb., Bd. XXVIII, p. 745 (1879).

[2] Lahr, Ann. d. Physik, N. F., Bd. XXVII, p. 94.

[3] Fick, Beiträge zur Physiologie zu C. Ludwig's 70. Geburtstage, 1886, p. 23.

[4] Hermann, Archiv für die gesamte Physiologie, Bd. LIII, p. 1 ff.

[5] M'Kendrick, Journal of anat. and physiologie, Bd. XXIX, p. 583—592.

[6] Boeke, Archiv für die gesamte Physiologie, Bd. L, p. 307 ff.

[7] Freiherr v. Hagen, Prometheus, Jahrgang XVII, Nr. 833 (1905).

[8] II. Bericht über den Stand der Arbeiten der Phonogramm-Archivs-Kommission, erstattet in der Sitzung der Gesamt-Akademie vom 11. Juli 1902 von Sigm. Exner als Obmann der Kommission. (Erschienen im Anzeiger der Akademie).

Archiv-Phonographen, ferner einem an seiner Spitze abgerundeten Saphir-Stift, der bei Drehung der Scheibe in der Schriftfurche gleitet und den Wellen entsprechend sich hebt und senkt. Diese Bewegungen werden mittels eines Fühlhebels auf einer Kymographiontrommel verzeichnet. Letztere und der Phonograph sind so miteinander verbunden, daß ihre Rotationsgeschwindigkeiten stets in demselben Verhältnisse zueinander stehen. Als vorteilhaft hat es sich auch erwiesen, Zeitmarken in der Schrift anzubringen. Sie entstehen dadurch, daß auf der Platte nach der Besprechung radiäre Linien eingeritzt wurden, die sich in den Kurven als Haken kenntlich machen.

Bei dem für diese Zwecke adaptierten Archiv-Phonographen wurde das Uhrwerk beseitigt und der Antrieb mittels Elektromotor, Transmissionen und Schneckenübertragungen hergestellt. Die Schnurscheibe dieses Phonographen verbinde ich beim Hobeln, der Aufnahme und der Wiedergabe unter Zwischenschaltung von Stufenscheiben mit dem ebenerwähnten Motor, beim Schreiben mit der Achse eines Kymographions. Die Tourenzahl der Aufnahmsplatte kann für das Hobeln, die Aufnahme und Wiedergabe von 26 Touren pro Minute bis 685 beliebig variiert werden, beim Schreiben, welches, um Schleuderungen des Schreibsystems zu verhindern, sehr langsam vorgenommen werden muß, liegen die Grenzen für eine Tour der Wachsplatte zwischen 2 Minuten 19 Sekunden und 2 Stunden 20 Minuten. Der Gleichstrommotor, welcher mir als Bewegungsquelle dient, wird von einer Akkumulatorenbatterie gespeist, um möglichst frei von Stromschwankungen zu sein.

Soll eine Aufnahme zum Zwecke der Abschreibung gemacht werden, so muß man, wie folgt, vorgehen. Da es unmöglich ist, die Wachsplatte, wenn man sie von der Scheibe abgehoben hat, wieder genau in der gleichen Stellung, respektive Lage aufzusetzen, die Platte vielmehr dann immer etwas schlägt, wobei ein wellenförmiges, sich kreuzendes, unübersichtliches Bild der Kurven auf dem Kymographion entstehen würde, ist es vor allem nötig, die Wachsplatte vor der Aufnahme am Apparat selbst zu hobeln. Das Hobeln und die darauffolgende Aufnahme finden in ganz gewöhnlicher Weise statt, wie in dem bereits zitierten II. Bericht der Phonogramm-Archivs-

Kommission genau beschrieben ist. Da es von größter Wichtigkeit ist, die genaue Tourenzahl der Aufnahme zu kennen, habe ich am Rande der die Aufnahmsplatte tragenden Scheibe in gleicher Entfernung 10 Stifte angebracht, welche beim Drehen der Scheibe jedesmal einen elektrischen Kontakt unterbrechen. Auf einem kleinen schnellaufenden Kymographion wird durch einen elektrischen Schreiber jede solche Unterbrechung durch einen Strich markiert. Oberhalb dieser Marken schreibt ein zweiter Schreiber von einer Uhr aus $^1/_4$ Sekunden, so daß nach beendeter Aufnahme leicht die genaue Tourenzahl derselben ausgemessen werden kann. Zu diesen beiden Schreibern fügte ich noch einen dritten, welcher mit einem Taster in Verbindung steht. Mittels dieses Tasters kann man sowohl den Beginn der Aufnahme als auch die Stellen, an welchen einzelne Laute oder besonders interessierende Teile der Aufnahme sich befinden, registrieren. Später beim Abschreiben ist man dann im stande, diese Stellen wieder zu finden und zu berücksichtigen. Jede Aufnahme soll, bevor man sie abzuschreiben versucht, abgehört werden, damit man sich überzeugt, wie sie ausgefallen ist. Selbstverständlich kann die Schreibvorrichtung nur die Wellen registrieren, welche auf der Platte eingegraben wurden, und nur wenn die Wiedergabe für das Ohr ein treues Bild des Gesprochenen, Gesungenen etc., überhaupt des Aufgenommenen gibt, ist zu erwarten, daß die gewonnene Kurve auch tatsächlich den Schallwellen der Aufnahme entspricht. Befriedigt die Wiedergabe, so wird auf der Wachsplatte, welche die Aufnahme trägt, durch radiäre Striche eine genaue Zehnteilung vorgenommen. Zu diesem Zwecke befinden sich an der Unterseite der die Platten tragenden Scheibe in gleichen Abständen von der Achse und voneinander 10 konische Vertiefungen. An einer, neben dieser Scheibe parallel zu ihrer Achse stehenden, gußeisernen Säule wird eine kräftige Stahlfeder befestigt, welche eine kegelförmige Spitze an die Unterseite der Scheibe anpreßt. Bei einer bestimmten Stellung dieser Scheibe wird nun diese Spitze in eine der konischen Vertiefungen hineingedrückt und fixiert dadurch die Scheibe in dieser Stellung. Wird die Spitze wieder aus der Vertiefung herausgezogen und die Scheibe weiter gedreht, so sinkt die

Spitze nach $^1/_{10}$ Umdrehung in die nächste Vertiefung hinein, fixiert jetzt diese Stellung und so fort bei einer ganzen Umdrehung zehnmal. Diese Vorrichtung bezeichne ich als Teilvorrichtung. In den Arm, der bis jetzt nacheinander den Hobel und die beiden Diaphragmen trug, wird die Ritzvorrichtung befestigt. Dieselbe besteht aus einem Stahlmesserchen, welches, an einer drehbaren Achse montiert, mit seiner Spitze auf der Wachsplatte ruht. Der Druck, welchen das Messer auf die Platte ausübt, kann durch Auflegen von Gewichten variiert werden. Der die Ritzvorrichtung tragende Arm wird nun bei einer durch die Teilvorrichtung fixierten Stellung der Platte über dieselbe hinweggezogen, wobei das Messerchen einen feinen radiären Strich in die Platte eingräbt, welcher beim späteren Abschreiben auf dem Kymographion als deutliche Marke sichtbar wird.

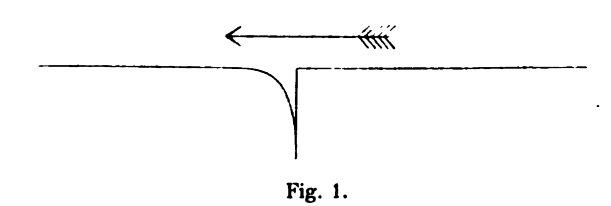


Fig. 1.

Fig. 1 zeigt eine solche Marke auf einer wellenlosen Strecke. Auch mitten in den Wellen ist dieselbe leicht zu erkennen. In weiterer Fortführung des ebenbeschriebenen Vorganges wird die Wachsplatte in zehn gleiche Teile geteilt. Der Vorteil dieser Teilung besteht darin, daß die auf dem Kymographion zwischen zwei solchen Marken registrierten Wellen, respektive Perioden immer genau dem zehnten Teil des Umfanges einer Schriftlinie auf der Aufnahmsplatte entsprechen, mag auch ein Schnurlauf gleiten, der Motor ungleichmäßig gehen oder irgend ein anderes unerwartetes Ereignis eintreten. Außerdem wird die Berechnung der Tonhöhe eines aufgenommenen Tones und bei bekannter Tonhöhe die Konstruktion der Periode des aufgenommenen Lautes wesentlich erleichtert und vereinfacht. Ich glaube, an einem kurzen Beispiel letzteren Vorteil am besten veranschaulichen zu können. Wurde mit

123 Touren der Wachsplatte pro Minute aufgenommen, so berechnet sich daraus $20^1/_2$ Zehnteltouren pro 1 Sekunde. Sind zwischen zwei Marken am Kymographion genau 17 Schwingungen oder Perioden zu zählen, so resultiert ein Ton von $17 \times 20^1/_2 = 348 \cdot 5$ Schwingungen pro Sekunde. Und umgekehrt, wurde unter denselben Verhältnissen ein bestimmter Ton von 348·5 Schwingungen aufgenommen, so müssen zwischen zwei Marken am Kymographion sich 17 Schwingungen oder Perioden befinden. Besonders bei nicht ausgesprochenen Periodenformen erleichtert die Kenntnis der genauen Anzahl innerhalb der gegebenen Strecke wesentlich die Auffindung der Periode.

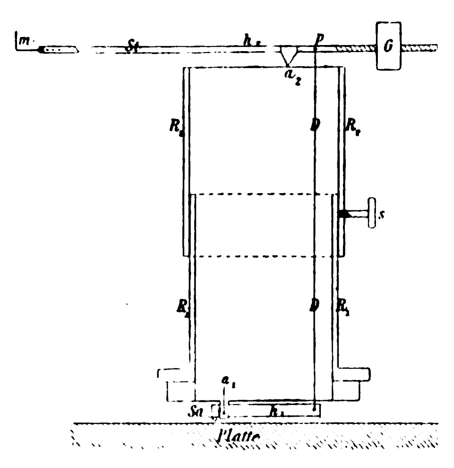


Fig. 2.

Ist die Platte geteilt, so kann mit dem Schreiben der Wellen begonnen werden. Zunächst wird, nach Entfernung der früher erwähnten Stahlfeder, an Stelle der Ritzvorrichtung die Schreibvorrichtung in den Arm eingesetzt. Dieselbe besteht, wie in Fig. 2 ersichtlich, aus zwei gut aufeinander passenden Röhren R_1 und R_2, deren gegenseitige Stellung durch die Druckschraube s fixiert werden kann. An dem unteren Ende des Rohres R_1 befindet sich eine Achse a_1, um welche der Hebel h_1, der auf einer Seite einen Saphierstift trägt, leicht drehbar ist. Am oberen Ende des Rohres R_2 ist die Achse a_2 für den Hebel h_2 angebracht. Beide Hebel sind durch den Draht D verbunden. Durch Verschieben des Rohres R_2 über dem Rohre R_1 kann man den Hebel h_2 in die gewünschte Lage bringen. Nachdem der Hebel h_1 mit seinem Saphier *Sa* der Platte fest angedrückt wird — es muß nämlich immer ein Übergewicht bei der Spitze m des Hebels h_2 bestehen —, kann sich seine Lage durch das Verschieben des Rohres R_2 nicht ändern und nachdem D ein

starrer Draht von bestimmter Länge ist, welcher beide Hebel verbindet, so ist auch der Aufhängepunkt p des Drahtes D am Hebel h_2 fixiert. Beim Aufwärtsschieben des Rohres R_2 wird nun die Achse a_2 gehoben, die Lage des Aufhängepunktes p kann aber nicht verändert werden, infolgedessen muß sich der Hebel h_2 schiefstellen und die Spitze m wird gehoben. Beim Abwärtsschieben des Rohres R_2 wird a_2 gesenkt, p ist fixiert, also muß es im Verhältnisse zu a_2 steigen und die Spitze m muß abwärts sinken. Mit einiger Übung gelingt es leicht, mit dieser Vorrichtung die Spitze m des Hebels h_2 auf eine bestimmte Höhe einzustellen. Um das Übergewicht des Hebelsystems, welches sich als Druck auf die Platte äußert, variieren zu können, ist am Hebel h_2 das Laufgewicht G angebracht. Erfahrungsgemäß ist es am vorteilhaftesten, wenn dieser Druck $30 g$ beträgt. Die beiden Arme des Hebels h_1 stehen im Verhältnisse 1 : 8, das Verhältnis der Arme des Hebels h_2 kann variiert werden. Gewöhnlich stehen die Verhältnisse 1 : 63 oder 1 : 125 in Verwendung. Aus diesen Verhältnissen beider Hebel ergibt sich eine Vergrößerung von rund 500 und 1000. Der Hebel h_2 endet auf der Seite der Spitze m in eine leichte Federpose P (Fig. 3). Dieselbe ist in



Fig. 3.

starrer Verbindung mit dem Endstücke E, welches mit dem Hütchen K ein Stück bildet. In dieses ragt die Spitze m hinein, um welche das Endstück E leicht drehbar ist. Das rechtwinklig gebogene Stück m, welches in den horizontalen Strohhalm St unbeweglich eingefügt ist, steht nicht vertikal, sondern ist um weniges geneigt, wodurch das Stück E mit der Federpose P an eine entgegengehaltene Fläche (das Kymographion) sich mit einem Teil seines Eigengewichtes anlegt.

Ich habe früher schon erwähnt, daß die Schnurscheibe des Apparates beim Schreiben mit einem Kymographion in Verbindung steht. Dieses wird nun durch Vermittlung von zwei

Schrauben ohne Ende und einer Stufenscheibe von dem Elektromotor in Bewegung gesetzt. Das Verhältnis der Winkeldrehung zwischen der Aufnahmsplatte und der Kymographiontrommel ist ein konstantes und beträgt 8 : 31. Die Kymographiontrommel senkt sich beim Drehen automatisch, so daß die Wellen in Spirallinien auf ihr registriert werden. Für gewöhnlich beträgt die Senkung bei einer Umdrehung 10 *mm*, wurde aber Schall von besonders hoher Intensität aufgenommen, so daß zu befürchten ist, daß die Wellen ineinander geschrieben würden, so läßt sich die Senkung der Kymographiontrommel bei einer Umdrehung auf 15 *mm* stellen. Hat sich die Trommel um ihre ganze Höhe gesenkt, ist also vollbeschrieben, so löst sie selbst mittels eines elektrischen Kontaktes den Motor, welcher als Bewegungsquelle dient, aus. Um eine voll aufgenommene Platte, welche die Rede von $1^1/_2$ Minuten enthält, abzuschreiben, benötige ich bei einer Umdrehungsdauer der Aufnahmsplatte von 45 Minuten 67·5 Stunden, wobei ich beim Schreiben nie die geringste Schleuderung beobachten konnte.

Die mit dieser Methode gewonnenen Kurven für Vokale stimmen mit den von Hermann[1] publizierten im wesentlichen überein.

---

[1] Hermann, Archiv für die gesamte Physiologie, Bd. LXI (1895), Tafeln.

Das Fortschreiten der Flutwelle im Adriatischen Meere

von

Generalmajor Dr. **Robert v. Sterneck,**

k. M. k. Akad.

(Mit 1 Tafel und 1 Kartenbeilage.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1908.)

Über das Phänomen der Gezeiten im Adriatischen Meere waren bisher nur jene Resultate bekannt, welche seitens der Adria-Kommission der kaiserl. Akademie in den Jahren 1869 bis 1870 ermittelt wurden. Es wurden damals nebst anderen wertvollen Daten über die physikalischen Eigenschaften dieses Meeres auch die Hafenzeiten von sechs Orten, nämlich: Triest, Pola, Fiume, Zara, Lesina und Corfu bestimmt.

Auf Grund dieser tatsächlich beobachteten Daten wurden seither die Hafenzeiten vieler anderer Orte durch Interpolation ermittelt, die man in den Seekarten, nautischen Tafeln u. s. w. vorfindet. Auf Grundlage dieser Daten habe ich vor einigen Jahren versucht, den wahrscheinlichen Verlauf der Isorachien (Linien gleicher Hafenzeiten) für das Adriatische Meer zu zeichnen.[1]

Gelegentlich der Aufstellung von Flutmessern in Rogožnica und auf der kleinen Insel Sestrice (Porto Tajer) seitens des k. u. k. Militärgeographischen Institutes für Zwecke der Kontrolle des Präzisionsnivellements und der trigonometrischen Höhenbestimmung hat es sich jedoch gezeigt, daß die interpolierten Werte für die Hafenzeiten nicht immer richtig sind, und daß daher auch die von mir gezeichneten Isorachien von der Wahrheit abweichen.

---

[1] Mitteilungen des k. u. k. Militärgeogr. Institutes, Bd. XXII.

Dieser Umstand veranlaßte mich, über das Fortschreiten der Flutwelle im Adriatischen Meere eingehende Untersuchungen auszuführen und stehen gegenwärtig 33 neubestimmte, vollkommen verläßliche Stationen der Untersuchung zur Verfügung.

Es sei mir gestattet, allen, die meine Arbeit gefördert haben, hier den verbindlichsten Dank auszusprechen, insbesondere Seiner Exzellenz dem Herrn Feldmarschalleutnant Otto Frank, Kommandant des k. u. k. Militärgeographischen Institutes, für die zeitweilige Überlassung der Registrierblätter der Flutmesser des Institutes, den Herren Hafenbeamten und Organen der k. k. Seebehörde, bei welchen ich stets das freundlichste Entgegenkommen und die möglichste Unterstützung der Arbeiten fand, und schließlich auch, und nicht im geringsten Maße meinem Sohne Robert, o. ö. Professor der Mathematik an der k. k. Universität Graz, welcher sich mit Freude nach Maßgabe seiner freien Zeit an meinen Arbeiten beteiligte und mir den Aufenthalt in dem schönen Dalmatien doppelt angenehm machte.

Über die Beobachtungen, die hiezu verwendeten Apparate, die angewandten Methoden sowie über die erhaltenen Resultate soll im nachfolgenden berichtet werden.

Unabhängig von den Ursachen ihres Entstehens pflanzt sich die Flutwelle wie jede andere Welle auf der Wasserfläche fort und gelangt je nach der Entfernung und ihrer Geschwindigkeit in den Küstenorten zu verschiedenen Zeiten an. Die Kenntnis der Zeiten des Eintreffens dieser Welle in den verschiedenen Orten ist es demnach, die wir zur Erforschung des Fortschreitens der Flutwelle benötigen.

Da es unausführbar ist, an allen Küstenorten gleichzeitig an demselben Tage das Eintreffen einer und derselben Flutwelle zu beobachten, so ist es notwendig, zu den Beobachtungen solche Wellen auszuwählen, welche periodisch zu ganz bestimmten Zeiten in den einzelnen Orten eintreffen. Es sind dies jene Flutwellen, welche zur Zeit der Syzygien entstehen und deren Eintreffen die Hafenzeiten der verschiedenen Orte bestimmen. Im gewöhnlichen Sinne bezeichnet man mit Hafenzeit eines Ortes den Zeitunterschied zwischen dem Eintreffen

der Flut oder Gegenflut und der oberen, beziehungsweise unteren Kulmination des Mondes zur Zeit des Voll- oder Neumondes. Sie ist in den einzelnen Orten verschieden, je nach der Zeit, welche die Flutwelle benötigt, dahin zu gelangen, für einen und denselben Ort bleibt sie jedoch, wie langjährige Erfahrung lehrt, stets konstant.

Zu der Untersuchung über die Fortpflanzung der Flutwelle im Adriatischen Meere war ich nun bemüht, an möglichst vielen, längs der Küste verteilten Orten die Hafenzeiten zu bestimmen. Nach einem im Herbste 1906 unternommenen und gelungenen Vorversuche wurden die Hafenzeiten von 24 Orten in Dalmatien und im Küstenlande ermittelt. Auf zwei Stationen, den Inseln Pelagosa und S. Andrea, habe ich bereits 1904 Beobachtungen ausgeführt und auf sechs Stationen wurden seitens des k. u. k. Militärgeographischen Institutes Flutmesser für längere Zeit behufs Ermittlung der Höhe des Mittelwassers für Zwecke des Nivellements aufgestellt. Dieselben lieferten gleichzeitig auch wertvolle Beobachtungsreihen über die Hafenzeiten. Die stündlichen Ablesungen der Wasserhöhen von diesen Flutmessern sind in den Bänden XXIII bis XXVII der Mitteilungen des Militärgeographischen Institutes veröffentlicht und hatte überdies der Kommandant dieses Institutes, Feldmarschalleutnant Otto Frank, die Güte, mir zeitweilig auch die Originalaufzeichnungen dieser Flutmesser behufs direkter Entnahme der Hafenzeiten freundlichst zur Verfügung zu stellen

Außerdem hat mein Sohn im vergangenen Herbste auf drei Stationen an der Ostküste Italiens die Hafenzeiten bestimmt, so daß gegenwärtig ganz gleichartige verläßliche Bestimmungen der Hafenzeiten von 33 Stationen für das Studium des Fortschreitens der Futwelle zur Verfügung stehen. Erst durch die drei Stationen in Italien konnte der wahre Verlauf der Flutbewegung erkannt und festgestellt werden; sie waren für die ganze Arbeit maßgebend. Denn auch an der italienischen Küste war bis dahin das Material nur äußerst spärlich vorhanden und verleiteten überdies die vorhandenen Angaben zu irrigen Annahmen.[1]

[1] Dies bezieht sich hauptsächlich auf die Hafenzeit von Ancona; die übrigen Angaben für die Hafenzeiten, nämlich: Chioggia (10^h3), Porto Corsini

Der größte Teil der Arbeiten wurde im Frühjahre und Herbste 1907 ausgeführt.

1. Die Instrumente.

Zu den Beobachtungen eignen sich am besten selbstregistrierende Apparate, sogenannte Flutmesser, welche durch eine kontinuierliche Linie den jeweiligen Wasserstand in zweckmäßiger Verjüngung verzeichnen. Aus der Zeichnung ist man im stande, durch verschiedene Konstruktionen die Eintrittszeit des höchsten Wassers zu ermitteln.

Derartige Apparate sollen möglichst einfach konstruiert, leicht transportabel sein und schnell aufgestellt und abgetragen werden können, damit es möglich wird, an jedem Voll- oder Neumonde eine Station zu absolvieren. Auch müssen sie dem Wetter und hohem Seegange widerstehen.

Im Herbste 1906, zu Beginn der Arbeit, verwendete ich zu den Beobachtungen nur einen Apparat (Nr. 5), im Frühjahre 1907 deren zwei (Nr. 5 und 6) und im Herbste, als mein Sohn die Beobachtungen in Italien ausführte, noch einen dritten (Nr. 7). Es ist selbstverständlich, daß bei der sukzessiven Herstellung der Apparate stets den früher gemachten Erfahrungen Rechnung getragen wurde, so daß der letzte Apparat (Nr. 7) bereits sehr kompendiös ausfiel; er ist in einem Kistchen von $36 \times 26\,cm$ und $24\,cm$ Höhe (Außendimensionen) eingeschlossen und wiegt 7 *kg*, kann daher mit Leichtigkeit mit der Hand getragen und bei Eisenbahnfahrten als Handgepäck ins Coupé mitgenommen werden.

Der Apparat besteht im wesentlichen aus zwei Teilen, dem eigentlichen Flutmesser und dem Brunnenrohre mit den Teilen zu seiner Befestigung; letztere bestehen aus einigen langen Hölzern und entsprechend langen Schraubenbolzen, welche beim Transporte im Innern des Brunnenrohres verpackt werden, so daß der Apparat bei den Übersiedlungen nur aus zwei Teilen besteht. Das Brunnenrohr ist aus vier Brettern

---

(10^h7), Bari (3^h2) und Brindisi (2^h7) wollen wir wegen der geringen Zahl der italienischen Stationen auch in dieser Arbeit wieder verwenden.

zusammengenagelt, ist 2·5 *m* lang und hat einen quadratischen Querschnitt von 15 *cm* Innendimension. Unten ist es durch einen Boden geschlossen, ober welchem sich seitwärts eine Wassereinlaßöffnung von 8 *mm* Durchmesser befindet.

Es wird im Hafen an einem Kai in etwa 80 *cm* tiefem Wasser lothrecht aufgestellt und durch zwei 2·4 *m* lange Hölzer von 7 *cm* quadratischem Querschnitte festgehalten; der größere Teil desselben liegt auf dem Kai auf und wird mit Steinen oder dergleichen beschwert, während das andere Ende derselben zwei Durchbohrungen im Abstande von 25 *cm* für zwei starke, 35 *cm* lange Schraubenbolzen hat, mittels welcher das Brunnenrohr zwischen diese Hölzer sehr fest eingeklemmt werden kann. Behufs Erzielung einer besseren Auflage dieser Hölzer auf dem Kai werden zwei 1 *m* lange Hölzer untergelegt und gleichfalls verschraubt. Auf felsigem Meeresufer wurde das Brunnenrohr in eine passende Felsenspalte eingelassen und diese dann mit Steinen ausgefüllt. Auf flachem, sandigem Ufer, z. B. an der italienischen Küste, wo Hafenbauten mangeln, wurden die Badeanstalten zur Aufstellung verwendet, indem das Brunnenrohr mittels Eisenbändern oder Latten an den Pfählen oder sonstigen geeigneten Teilen befestigt wurde.

Auf das obere offene Ende des Brunnenrohres wird der eigentliche Apparat zwischen Latten aufgesetzt und angeschraubt. Er ist in einem hölzernen versperrbaren Kasten, der bei den Apparaten Nr. 5 und 6 eine Außendimension von 30×50 und 25 *cm* Höhe hatte, eingeschlossen, der etwas über der halben Höhe in zwei Teile, den Deckel und den eigentlichen Kasten geteilt ist. Durch innen und außen übergreifende Ränder aus dünnem Bandeisen ist das Eindringen des Wassers verhindert.

Auf einer horizontalen eisernen Welle von 8 *mm* Durchmesser und 10 *cm* Länge ist eine hölzerne Rolle von 10 *cm* Durchmesser und 20 *mm* Breite aufgesteckt, auf welcher eine dünne mit Wachs eingefettete Rebschnur aufgewickelt ist, an deren Ende der Schwimmer befestigt ist. Letzterer besteht aus einem Holzzylinder von 10 *cm* Durchmesser und 5 *cm* Höhe. Selbstverständlich sind diese sowie die noch später zu erwähnenden Holzteile reichlich mit Firnis eingelassen.

Die Welle trägt noch eine zweite kleinere hölzerne Rolle mit drei flachen Einkerbungen von 5, 4 und 3 *cm* Durchmesser, welche je nach der nötigen Verjüngung in Verwendung kommen. Beide Rollen sind der leichteren Justierung wegen auf der Welle drehbar und können mittels Schraubenklemmen mit ihr fest verbunden werden.

Auf der kleineren Rolle ist eine Schnur aufgewickelt, welche über die fixe Rolle *m* (vergl. die Figur) läuft und deren Ende sich auf der Rolle *K* von 6 *cm* Durchmesser aufwickelt, wenn der Schwimmer steigt, oder abwickelt, wenn er sinkt. Mit der Welle dieser Rolle ist noch eine zweite Rolle von 2 *cm* Durchmesser fest verbunden, an welcher ein Gewicht von etwa $^1/_8$ *kg* als Gegengewicht für den Schwimmer wirkt und die Schnur immer gespannt erhält. Beide Rollen sowie ihre gemeinsame Welle sind gleichfalls der leichteren Adjustierung wegen verstellbar und klemmbar. In diese Schnur ist ein kleiner, sehr leicht beweglicher Wagen von 11 *cm* Länge eingeschaltet, welcher auf den Schienen *S S'* läuft, deren eine dem Wagen mit seinen eingekerbten Rädern zur geradlinigen Führung dient. Dieser Wagen macht daher die Bewegungen des Schwimmers in horizontaler Richtung und in verjüngtem Maße mit. Die Bewegung des Wagens ist durch Anschläge entsprechend begrenzt. Der Wagen trägt an einer 10 *cm* langen Welle einen 7 *cm* langen Arm, an dessen Ende in einer Öse der Bleistift eingesetzt wird.

Die Spitze dieses Bleistiftes ruht auf einem hohlen hölzernen Zylinder von 30 *cm* Länge und 9 *cm* Durchmesser, beziehungsweise auf dem auf dem Zylinder aufgespannten Registrierblatte. Der Zylinder ist auf einer horizontalen stählernen Achse von 8 *mm* Durchmesser aufgesteckt, auf welcher er gedreht und durch eine Klemme *P* mit ihr fest verbunden werden kann. Am Ende dieser Achse ist ein Zahnrad von 5 *cm* Durchmesser aufgesetzt, welches in einen Trieb der Uhr *u* eingreift und in 27 Stunden einmal umgedreht wird. Diese Drehung macht der Zylinder, wenn er an der Achse festgeklemmt ist, mit; es entspricht daher auf dem Registrierblatte eine Stunde etwa 1 *cm*.

Die Uhr ist eine kleine Pendeluhr mit achttägigem Gange, sie wird jedoch während der Beobachtungen täglich aufgezogen;

zu ihrem Schutze ist sie mit einem Holzkästchen umgeben. Mittels eines kleinen Lineals von 6 *cm* Breite, dessen Kante an die Vorderwand des Uhrkastens angehalten wird, werden am Anfang und Ende des aufgewickelten Registrierblattes zwei Marken mittels Bleistift gezogen, deren Verbindungslinie am abgewickelten Blatte als Ausgang zur Ermittlung der relativen Höhen der Wasserstände dient. Die Abszissen der gezeichneten Flutkurve entsprechen alsdann der Zeit, die Ordinaten den Höhen der jeweiligen Wasserstände.

Auf jedem Registrierblatt wird Anfang und Ende der Flutkurve durch ein Zeitzeichen markiert, indem man die große Rolle mit der Hand etwas bewegt, so daß der Bleistift eine kleine gerade Linie zeichnet. Zu derselben wird Datum, Stunde und Minute in Ortszeit notiert; es kann daher zu jedem Kurvenpunkt die zugehörige Ortszeit dem Registrierblatt bis auf 0·1 Stunde genau entnommen werden. Unmittelbar vor dem Anfangszeitzeichen wird der kleine, infolge des Eingreifens des Zahnrades entstehende tote Gang des Zylinders durch eine Bewegung desselben im entsprechenden Sinne beseitigt. Beim Apparat Nr. 6 wird dem Zylinder durch ein Gewicht ein Antrieb erteilt, so daß kein toter Gang vorhanden ist.

Zu den Zeitangaben dienten gut regulierte Taschenuhren, welche jeweilig nach den Uhren der Telegraphenämter auf mitteleuropäische Zeit gestellt wurden. Mittels der einer Karte entnommenen geographischen Längen konnten auf den Registrierblättern stets richtige Ortszeiten angegeben werden. Eine übertriebene Genauigkeit in den Zeitangaben wäre ganz zwecklos; denn jeder, der sich mit Flutbeobachtungen beschäftigt hat, weiß, daß die einzelnen Eintrittszeiten des höchsten Wassers aus den Flutkurven wegen der Wellen, periodischen Hebungen und Senkungen des Wasserspiegels, stehenden Wellen u. s. w. höchstens auf 0·1 bis 0·2 Stunden genau den Registrierblättern entnommen werden können.

Die Verwendung von zwei Apparaten zur gleichzeitigen Ermittlung der Hafenzeiten zweier Stationen im Jahre 1907 war immer möglich, da genügend Zeit zu den nötigen Reisen und zur Etablierung beider Apparate vorhanden war. Die Wartung des einen Apparates wurde einer genügend intelli-

genten Persönlichkeit, meistens einem Piloten oder Leuchtfeuerwächter, nach erfolgter Instruierung und gegen eine entsprechende Entschädigung übertragen, während ich die Beobachtungen in einer zweiten Station ausführte. Damit die Beobachtungen auf diesen Stationen nicht durch ein Versehen des Beobachters mißlingen, wurde im Deckel des Apparates eine kurze Instruktion in der Landessprache angebracht, welche die Funktionen des Beobachters regelte. Sie besteht aus 12 Punkten, welche der Reihe nach ausgeführt werden mußten. Es ergab sich infolgedessen nie ein Anstand. Dem Apparate wurde eine gut regulierte, nach der Ortszeit gerichtete Taschenuhr für die Beobachtungen beigegeben, nach welcher der Beobachter alle Zeitangaben zu machen hatte. Der Apparat mußte dann wieder von mir abgeholt und in einer anderen Station aufgestellt werden. Nach erfolgter Auswahl des Aufstellungsortes erforderte die Aufstellung des Apparates ungeachtet der fremden, ungeübten Beihilfe bloß etwa eine Stunde, das Abmontieren desselben viel weniger. Zum Lobe der dalmatinischen Jugend muß hier hervorgehoben werden, daß eine Störung der Beobachtungen oder Schädigung der Apparate durch Übermut oder Mutwillen nie vorgekommen ist, obwohl dieselben 6 bis 8 Tage, oft an entlegenen Orten, aufgestellt und gänzlich unbewacht waren.

2. Reduktion der Beobachtungen.

Den vom Apparate gelieferten Registrierblättern kann unmittelbar die Eintrittszeit des höchsten Wassers nach der Kulmination des Voll- oder Neumondes entnommen und zur Bestimmung der Hafenzeit verwendet werden. Allein diese Eintrittszeit ist im allgemeinen ungenau, denn die Zeichnung der Flutkurven erscheint oft durch die stark bewegte See sehr gezackt und unregelmäßig, so daß es schwer ist, den höchsten Teil der Kurve verläßlich anzugeben. In dieser Hinsicht wirken auch oft die stehenden Wellen (Seiches) sehr störend. Es gibt kaum einen Ort, an dem sie nicht vorhanden wären. Auch die von der Luftdruckdifferenz herrührende unregelmäßige, oft nicht unbedeutende periodische Hebung und Senkung des Meeresspiegels beeinflußt die Aufzeichnungen, indem z. B. das

Wasser nach Eintritt der Flut noch einige Zeit hindurch ansteigt.

Das gewichtigste Bedenken gegen die Verwendung nur einer Bestimmung der Eintrittszeit der Flut oder Gegenflut ist jedoch der Umstand, daß diese Eintrittszeiten, wie wir später sehen werden, durch die täglichen Ungleichheiten, welche von der Deklination des Mondes herrühren, sehr gestört sind, manchmal um eine Stunde und noch mehr. In diesen Fällen ist erst das Mittel aus den Eintrittszeiten der Flut und Gegenflut verwendbar. Aus allen diesen Gründen ist eine Vervielfachung der Beobachtungen nicht nur wünschenswert, sondern geradezu notwendig; und hiezu liefern die Aufzeichnungen auf den Registrierblättern, wenn sie sich über mehrere Tage erstrecken, ein vorzüglich geeignetes Material.

Der Vereinfachung wegen wollen wir von jetzt an die Eintrittszeit des höchsten Wassers nach der oberen Kulmination des Mondes mit F, jene der Gegenflut mit f, die Eintrittszeit der der Flut F folgenden Ebbe mit E und jene der ihr vorausgehenden Ebbe mit e bezeichnen, so daß die Eintrittszeiten der Gezeiten der Reihe nach mit F, E, f und e bezeichnet werden. Die Flut F nach dem Voll- oder Neumonde wollen wir Hauptflut nennen.

Vereinigen wir bei mehrtägigen Beobachtungen paarweise die zur Hauptflut symmetrisch gelegenen F oder f zu Mitteln, so ergeben sich stets gleiche und gleichwertige Angaben für die Eintrittszeit dieser beiden Fluten.

Desgleichen können auch die Eintrittszeiten der Ebbe, E und e, zur Bestimmung der wahren Eintrittszeit der Hauptflut mit großem Vorteile verwendet werden. Denn bei einer gleichmäßigen Änderung der Deklination des Mondes wird E und e in gleichem, jedoch entgegengesetztem Maße beeinflußt; ebensoviel als sich z. B. e verspätet, verfrüht sich E, so daß das Mittel von e und E, beziehungsweise E und e stets richtige Angaben für die wahre Eintrittszeit der Hauptflut liefert.

Die paarweise Vereinigung je eines zur Hauptflut symmetrisch gelegenen E und e oder umgekehrt, deren Mittel wir der Einfachheit wegen wieder mit E, beziehungsweise e bezeichnen wollen, liefert daher vollkommen verläßliche Angaben.

Auf diese Weise erhalten wir aus den Registrierblättern einer Station mit mehrtägiger Beobachtungsdauer mit Berücksichtigung der Kulminationszeit des Mondes mehrere Angaben für *F*, *f*, *E* und *e*, deren Mittel die gesuchte Hafenzeit ist.

Die Zulässigkeit dieser Methode zur Vervielfachung der Resultate ersieht man aus der schönen Übereinstimmung der Angaben für *F*, *f*, *E* und *e* auf den zahlreichen Beobachtungsstationen mit etwa sechstägigen Beobachtungen, wie sie aus der Tabelle I zu ersehen ist.

Eine Bestätigung der Zulässigkeit dieser Mittelbildung ergibt sich auch aus folgender Untersuchung.

Gruppieren wir auf einer Station mit mehrmonatlicher Beobachtungsdauer sämtliche Eintrittszeiten der Flut nach den entsprechenden Stunden der Mondkulmination, zu welchen sie stattfanden, indem wir alle *F*, welche einer bestimmten Stunde der Mondkulmination (z. B. zwischen $10^h\ 30^m$ und $11^h\ 30^m$ für 11 Uhr etc.) entsprechen, mitteln, so erhalten wir die in der nachstehenden Tabelle verzeichneten, graphisch ausgeglichenen Eintrittszeiten mit ihren Differenzen.

Kulminationszeit des Mondes	Pelagosa		Rogoźnica	
	Eintrittszeit *F*	Differenz	Eintrittszeit *F*	Differenz
6^h a.	$4^h 7$		$5^h 6$	
		+ 0·5		+ 0·2
7	5·2		5·8	
		+ 0·1		0·0
8	5·3		5·8	
		— 0·3		— 0·2
9	5·0		5·6	
		— 0·3		— 0·4
10	4·7		5·2	
		— 0·4		— 0·3
11	4·3		4·9	
		— 0·4		— 0·4
12 Mittag	3·9		4·5	
		— 0·5		— 0·5
1 p.	3·4		4·0	
		— 0·5		— 0·5
2	2·9		3·5	
		— 0·4		— 0·6
3	2·5		2·9	
		— 0·3		— 0·6
4	2·2		2·3	
		— 0·3		— 0·5
5	1·9		1·8	
		0·0		— 0·1

Kulminationszeit des Mondes	Pelagosa		Rogožnica	
	Eintrittszeit F	Differenz	Eintrittszeit F	Differenz
6^h p.	1^h9		1^h9	
7	2·6	+ 0·7	5·4	+ 3·5
8	4·5	+ 1·9	6·0	+ 0·6
9	4·7	+ 0·2	6·0	0·0
10	4·3	− 0·4	5·6	− 0·4
11	4·0	− 0·3	5·2	− 0·4
12 Mittern.	3·7	− 0·3	4·8	− 0·4
1 a.	3·4	− 0·3	4·3	− 0·5
2	3·2	− 0·2	3·9	− 0·4
3	2·9	− 0·3	4·1	+ 0·2
4	2·6	− 0·3	4·6	+ 0·5
5	3·2	+ 0·6	5·0	+ 0·4
6	4·7	+ 1·5	5·6	+ 0·6

Wie wir sehen, sind die Differenzen in der Nähe von 12 Uhr mittags und um Mitternacht, also zur Zeit der Kulmination des Voll- oder Neumondes, durch mehrere Stunden hindurch gleich, es finden daher die Änderungen der Zeit proportional statt. Da nun der Mond täglich um etwa eine Stunde später kulminiert, so bleibt diese Proportionalität mehrere Tage hindurch bestehen und berechtigt uns daher zu der früher besprochenen Mittelbildung. Es ist daher auch statthaft, die Symmetrie nicht allein auf die obere, sondern auch auf die untere Kulmination zu basieren, da in beiden Fällen diese Differenzen sich gleich bleiben.

Aus der Tabelle ersehen wir auch, daß, nachdem die Hafenzeit von Pelagosa 4^h0 und jene von Rogožnica 4^h6 ist, die Eintrittszeiten aller Fluten während eines Monates mit Ausnahme jener ganz unbestimmten Fluten zur Zeit der Quadraturen niemals mehr als etwa 2 Stunden von der Hafenzeit abweichen.

3. Erläuterung der Tabellen.

In der am Schlusse folgenden Tabelle I sind die Beobachtungen von allen Stationen und die Reduktion derselben zusammengestellt.

Die Reihenfolge der mit 1 bis 33 bezeichneten Stationen beginnt in Süddalmatien mit Budua, schreitet längs der dalmatinischen Küste gegen Norden nach Istrien fort, übergeht nach Italien und endet daselbst mit der Station Manfredonia. Es kann daher in dieser Tabelle, besonders mit Benützung der beigegebenen Karte, jede Station leicht aufgefunden werden.

Die Tabelle enthält in der gegebenen Reihenfolge zweierlei Stationen, 25 mit kurzer, meist sechstägiger Beobachtungsdauer, und acht Stationen, auf welchen durch längere Zeit, mehrere Monate oder Jahre hindurch, Beobachtungen ausgeführt worden sind.

Bei den ersten sind die Originalbeobachtungen, nämlich die Ablesungen der Registrierbögen, in zwei Kolumnen wiedergegeben. Die erste Kolumne reicht bis zur Hauptflut, die zweite bis zum Schlusse. Die beobachteten Werte von F, E, f, e sind auf Zehntel der Stunden angegeben und mit Indices versehen, mit deren Hilfe zu erkennen ist, welche Werte in der nächsten Kolumne paarweise gemittelt wurden. Von diesen Mitteln ist die Kulminationszeit des Mondes, die am Kopfe der Tabelle angegeben und mit α bezeichnet ist, bereits in Abzug gebracht. Sie erscheinen in vier Gruppen geordnet und ergeben die Mittel der einzelnen Gruppen die nach den Bestimmungen von F, f, E und e resultierenden Hafenzeiten. Das Mittel H der sich so ergebenden Werte ist schließlich die gesuchte Hafenzeit.

Bei allen Angaben und auch bei den Zwischenrechnungen ist grundsätzlich nur das Zehntel der Stunde berücksichtigt worden, selbst auf die Gefahr hin, daß durch diesen Vorgang hin und wieder Abrundungsfehler im Betrage von 0·1 Stunde entstanden sein mögen.

Die acht Stationen mit längerer Beobachtungsdauer enthalten der Raumersparnis wegen nur die Hafenzeiten nach den

vier Angaben und ihr Mittel *H* als Hafenzeit der Station nebst Angaben über die Flutgröße.

Bei sämtlichen Stationen sind auch kurze Beschreibungen des Aufstellungsortes der Apparate gegeben.

In Tabelle II sind alle Hafenzeiten zusammengestellt und durch anderweitige Angaben noch ergänzt.

4. Genauigkeit der Resultate.

Über die Genauigkeit der erhaltenen Hafenzeiten geben uns die Stationen mit längerer Beobachtungsdauer einigen Aufschluß. Aus den Abweichungen der Einzelresultate von ihrem Mittel ergibt sich der durchschnittliche Fehler einer einzelnen Bestimmung[1] in:

Ragusa	0^h18
Pelagosa	0·06
Rogožnica	0·07
Zara	0·16
Sestrice	0·16
Zengg	0·15
Fiume	0·17,

im Mittel 0^h14.

Dieser durchschnittliche Fehler dürfte zum großen Teile von der Unsicherheit der Zeitangaben herrühren, da er in Stationen, wie Pelagosa und Rogožnica, auf denen den Beobachtern, wie es auch auf den Stationen mit nur sechstägiger

---

[1] Die Station S. Andrea muß aus dieser Betrachtung ausgeschlossen werden wegen der Mangelhaftigkeit der Zeitangaben. Der durchschnittliche Fehler einer Bestimmung beträgt dort etwa 0^h3. Nachdem die zu den Zeitangaben verwendete Taschenuhr stehen geblieben war, haben die Beobachter, die einzigen Bewohner dieser kleinen gebirgigen Insel, lange Zeit hindurch die Zeitangaben nach der in ihrem Hause befindlichen Wanduhr, welche allerdings nach einer Sonnenuhr stets auf wahre Zeit gerichtet wurde, bewerkstelligt. Da jedoch der Weg von ihrem Hause zum Flutmesser, auf welchem ein Bergrücken von etwa 200 *m* Höhe zu überschreiten war, mehr als eine Stunde in Anspruch nahm, so dürfte ihre Ankunft beim Flutmesser keineswegs so präzise erfolgt sein, wie es die Wartung des Apparates erfordert hätte. Nur der Umstand, daß sich die Beobachtungen über ein ganzes Jahr erstrecken, dürfte für die Richtigkeit der gefundenen Hafenzeit sprechen.

Dauer stets der Fall war, verläßliche Uhren zur Verfügung standen, nur 0^h07, demnach nur etwa die Hälfte des allgemeinen Mittels beträgt. Man darf jedoch diese Unsicherheit nicht ganz auf Rechnung der Beobachtungen und Uhren setzen, da die Hafenzeiten im Adriatischen Meere bei der ganz eigentümlichen Fortpflanzung der Flutwelle sehr leicht kleinen Schwankungen im Betrage von 0^h1 bis 0^h2 unterliegen können. Wir sehen dies beispielsweise aus dem nahezu ganz parallelen Verlaufe der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von ihrem Mittel auf den benachbarten, gleichzeitig beobachteten Stationen Zengg und Fiume. Dieselben betragen im:

Juni	1907 in Zengg	-0^h1, in Fiume	0^h0
Juli		$+0\cdot2$	$+0\cdot3$
August		$-0\cdot1$	$+0\cdot2$
September		$-0\cdot2$	$-0\cdot2$
Oktober		$-0\cdot1$	$-0\cdot2$.

Bis auf den Monat August stimmen diese Abweichungen fast vollständig überein.

Während daher die Ergebnisse der Stationen bis auf etwa 0^h06 bis 0^h07 richtig sein mögen, können die Einzelstationen mit sechstägiger Beobachtungsdauer mit Unsicherheiten von $\pm0^h2$ behaftet sein; doch ist dieselbe nur zum Teil auf die Ungenauigkeit der Beobachtungen zu setzen, da die zu beobachtende Größe offenbar selbst kleinen Schwankungen unterliegt, die nicht bestimmbar sind. Bei den meisten Stationen kann demnach das Resultat, die beobachtete Hafenzeit, um 0^h1 bis 0^h2 abgeändert werden, was vollkommen ausreicht, um einige unbedeutende Widersprüche zwischen den Beobachtungsresultaten benachbarter Stationen zu beseitigen.

5. Das Fortschreiten der Flutwelle.

Aus Tabelle II, besser noch aus der Kartenbeilage ist zu ersehen, daß die Hafenzeiten längs der dalmatinischen Küste von Süden gegen Norden zunehmen, daß daher die Flutwelle daselbst gegen Norden bis Grado, jedoch mit ungleichmäßiger Geschwindigkeit fortschreitet.

Auf der italienischen Seite reicht im Süden die nordwärts fortschreitende Bewegung längs Apulien nur bis zur Halbinsel des Monte Gargano, während der ganze übrige Teil der italienischen Küste eine entgegengesetzte, von Norden nach Süden gerichtete Bewegung der Flutwelle aufweist, indem die im Norden bei Grado aus Dalmatien einlangende Flutwelle weiter über Venedig (Chioggia), Porto Corsini, Ancona, S. Benedetto, Ortona bis wieder zum Monte Gargano fortschreitet und sich hier mit einer Phasendifferenz von 12·4 Stunden mit der von Süden kommenden Flutwelle wieder vereinigt.[1]

Entgegen allen bisherigen Annahmen umkreist daher die Flutwelle den nördlichen Teil der Adria etwa von der Verbindungslinie des Monte Gargano mit Ragusa an derart, daß sie fortschreitend die Küsten von Dalmatien, dem Küstenland und Italien in 12·4 Stunden umspült.

Aus der Kartenbeilage ist dieser Kreislauf am besten zu ersehen. In dieser Karte sind, um die einzelnen Hafenzeiten miteinander vergleichbar zu machen, alle Angaben auf den mittleren Meridian, 15 von Greenwich, reduziert und

---

[1] In Ancona konnte der vorgeschrittenen Zeit wegen keine genaue Bestimmung der Hafenzeit ausgeführt werden. Durch eine ausgeführte, wenn auch ganz primitive Messung ist es jedoch möglich geworden, die Hafenzeit näherungsweise zu bestimmen.

Mein Sohn hat am 24. September 1907 abends vor der Abfahrt des Dampfers nach Fiume an einer Stiege die Tiefe des Wasserstandes unter einer bestimmten Stufe, so gut es eben ging, mit einem Meterstabe gemessen, nämlich um

5^h	0^m p	..........36 *cm*
6	0	44
6	45	49
6	54	49
7	55	49

Daraus geht zweifellos hervor, daß die Ebbe *e* am 24. September in Ancona ungefähr um 7 Uhr abends, keinesfalls früher eingetreten ist. Wie die Erfahrung lehrt, sind bei gleichzeitig beobachteten und nicht allzuweit voneinander entfernten Stationen die Differenzen der korrespondierenden Einzelwerte *F*, *E*, *f* und *e* stets nahezu gleich und stimmen mit dem Unterschiede der Hafenzeiten überein. Man sieht dies z. B. an den Stationen Rovigno—Parenzo, Cherso—Veglia etc. und ebenso auch an den drei gleichzeitig beobachteten Stationen Arbe, Novaglia und S. Benedetto. Durch eine immerhin zulässige

die Hafenzeiten überdies in Mondstunden angegeben, da sich der Kreislauf gerade in einer halben Mondumlaufszeit vollzieht und die Vereinigung mit der von Süden kommenden Flutwelle sonach mit einer Phasendifferenz von 12 Mondstunden erfolgt.

Wir ersehen aus der Karte, daß die Verbindungslinien je zweier Stationen, deren Hafenzeit um 6 Mondstunden verschieden ist, sich so ziemlich in einem Punkte, etwa 50 *km* östlich und 20 *km* nördlich von Ancona schneiden, so z. B. 0^h und 6^h (Ancona und Eso), 3^h und 9^h (S. Benedetto und Porer), 4^h4 und 10^h5 (Zuri und Porto Corsini) etc.; diesen Punkt haben wir daher als Drehungspunkt der rotierenden Bewegung anzusehen.

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Flutwelle fortschreitet, ist nicht gleichmäßig. Sie benötigt zu der mehr als 300 *km* langen Strecke von Ragusa bis Sestrice etwa eine Stunde, so daß sie hier eine stündliche Geschwindigkeit von 300 *km* hat, während sie zu der nur 45 *km* langen Strecke zwischen Sestrice und Punte bianche, längs der Isola lunga, etwa 2 Stunden benötigt; ihre stündliche Geschwindigkeit sinkt hier auf nur 25 *km* herab; und zu der etwa 100 *km* langen Strecke zwischen Punte bianche und Porer benötigt sie etwa 2 Stunden, so daß ihre Geschwindigkeit wieder auf etwa 50 *km* ansteigt.

Extrapolation ergibt sich das Eintreten derselben Ebbe *e*, die in Ancona beobachtet wurde, und der Zeitunterschied mit Ancona in

Arbe	am 25. September	3^h0 a,	Arbe—Ancona	8·0 Stunden,
Novaglia	» 25. »	2·7 a,	Novaglia—Ancona	7·7 »
S. Benedetto	» 24. »	10·0 p,	S. Benedetto—Ancona	3·0 »

Mit den Hafenzeiten dieser drei Stationen 8^h2, 8^h4 und 2^h9 ergibt sich daher die Hafenzeit von Ancona abgeleitet von

Arbe	12^h2
Novaglia	12·7
S. Benedetto	11·9,

im Mittel daher 12^h3.

Die bisher mit 10^h3 angenommene Hafenzeit von Ancona ist daher zweifellos unrichtig. In oder bei Ancona tritt demnach der gewiß interessante Fall ein, daß zur Zeit der Syzygien die Eintrittszeit der Flut stets mit der Kulmination des Voll- oder Neumondes zusammenfällt. In der Karte ist diese nur näherungsweise bestimmte Hafenzeit von Ancona durch eine Klammer gekennzeichnet.

Auf der italienischen Seite sind die Geschwindigkeiten ebenfalls sehr verschieden. Sie durchläuft die 300 *km* lange Küste zwischen Grado und Ancona in etwa 2 Stunden mit einer stündlichen Geschwindigkeit von 150 *km*,[1] während sie zu der bloß halb so langen Strecke von Ancona bis S. Benedetto 3 Stunden benötigt, sich daher nur mit einer stündlichen Geschwindigkeit von 50 *km* fortpflanzt. Dann nimmt die Geschwindigkeit wieder sehr rasch zu, indem die gleichfalls 150 *km* lange Strecke von S. Benedetto bis Ortona in etwa 0·4 Stunden durchlaufen wird.

In der Karte wurden die Linien gleicher Hafenzeiten, soweit ihr Verlauf durch die Beobachtungen festgelegt ist, von halben zu halben Mondstunden eingezeichnet. Bei den den ganzen Stunden entsprechenden Linien ist überdies auch die zu vermutende weitere Fortsetzung durch punktierte Linien angedeutet worden; außerdem hat noch die Linie für 3^h75 Hafenzeit der Kontinuität halber Aufnahme gefunden.

Man sieht aus dem Verlaufe der Isorachien, daß man in der Adria hinsichtlich der Gezeiten zwei ganz verschiedene Gebiete zu unterscheiden hat; nämlich einen nördlichen Teil, der von der Flutwelle umkreist wird und einen südlichen, von ihm etwa durch die Verbindungslinie des Monte Gargano mit Ragusa getrennten Teil, der hinsichtlich der Gezeiten mit dem mittelländischen Meere zusammenhängt.

In meiner eingangs erwähnten Arbeit habe ich die Annahme gemacht, daß in diesem südlichen Teile, der im Gegen-

---

[1] Diese große Geschwindigkeit macht es natürlich sehr schwierig, den Zeitunterschied des Eintreffens der Flutwelle in zwei nahe beieinander liegenden Orten zu ermitteln. Ein solcher Versuch ist in der soeben erschienenen Publikation von De Marchi, »Osservazioni mareometriche lungo il litorale e in laguna« (Ricerche lagunari No 8, Venezia 1908) für die Stationen Porto di Lido und Porto di Chioggia durchgeführt. Da diese beiden Stationen nur 25 *km* voneinander entfernt sind, beweist es eine ganz besondere Genauigkeit der Beobachtungen, daß sich tatsächlich ein Unterschied der Hafenzeiten von etwa 13 Minuten, und zwar im richtigen Sinne gezeigt hat, wenigstens soweit es sich um die Beobachtungen der Fluten handelt. Auf Grund der mittleren Geschwindigkeit der Flutwelle zwischen Grado und Ancona würde die Strecke zwischen Porto di Lido und Porto di Chioggia in 10 Minuten durchlaufen, was mit dem erwähnten Beobachtungsdatum in auffallend guter Übereinstimmung steht.

satz zum nördlichen eine ziemlich bedeutende Meerestiefe von etwa 1600 *m* aufweist, eine selbständige Flutwelle erregt wird.

Ähnlich dachte ich mir auch im übrigen Mittelmeer die besonders tiefen Stellen als Erregungszentren von selbständigen Flutwellen,[1] die sich, von dort ausgehend, bis an die Küste fortpflanzen und bei der meist rundlichen Form der einzelnen Becken in den Küstenorten ziemlich zu gleicher Zeit anlangen.

Andrerseits deutet der Umstand, daß sich die Hafenzeiten an gegenüberliegenden Küsten des Mittelmeeres meist gerade um 6 Stunden voneinander unterscheiden, auf gewisse, den »Seiches« analoge Schwingungen, gewissermaßen Schaukelbewegungen, in die die Wassermassen einzelner Teile des Mittelmeeres unter dem Einflusse von Sonne und Mond geraten. Nach den nautischen Tafeln[2] finden wir z. B. an der Nordküste von Afrika, von Tripolis bis Jaffa und Famagusta auf Cypern, alle Hafenzeiten gleich 10 Uhr. Gegenüber, in Griechenland, Sizilien und in dem südlichen Teile der Adria, finden wir alle Hafenzeiten nahezu gleich und um 6 Stunden kleiner, nämlich 4 Uhr. Es deutet dies offenbar darauf, daß dieser Teil des Mittelmeeres eine 12stündige Schwingung um eine ungefähr Ost—West, etwa durch die Insel Kreta verlaufende Knotenlinie[3] ausführt.

Das Auftreten derartiger Schaukelbewegungen ist bei einem geschlossenen Meere so ziemlich die einzige Form, in der sich das Gezeitenphänomen abspielen kann. Denn wenn auch Sonne und Mond bei einem so kleinen Meere wie dem mittelländischen, das nur eine Längenausdehnung von etwa 2 Stunden hat, auf alle Teile nahezu gleichzeitig und gleich stark einwirken, so ist es doch unmöglich, daß alle Teile sich

---

[1] Eine ebenfalls vor ganz kurzer Zeit erschienene Abhandlung von De Marchi, »La marea nel Mediterraneo« (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Classe die scienze fisiche, vol. XVII, 1908), schließt sich im wesentlichen dieser Theorie an.

[2] Tavole e prontuari per i calcoli di navigazione von Vital-Bidschof, 1903.

[3] Eine durch die Insel Kreta gehende Knotenlinie ist, wie ich der Abhandlung De Marchi's entnehme, auch von Grablovitz (Neptunia, vol. XX e XXII) angenommen worden.

unter diesen Einflüssen gleichzeitig heben oder senken, da das Wasserquantum ein gegebenes, unveränderliches ist. Es wird sich daher mit der Hebung des Wasserspiegels in dem einen Teile immer gleichzeitig eine sie kompensierende Senkung in einem anderen Teile vollziehen müssen und auf diese Weise muß es, wenn überhaupt Gezeiten auftreten, zu Schwingungen um bestimmte Knotenlinien kommen.

Wenn sonach auch die Erregung hauptsächlich an den besonders tiefen Stellen des Meeres stattfindet, so dürfte es doch nicht ganz statthaft sein, jedes einzelne Meeresbecken unabhängig von den übrigen zu betrachten, da ja alle Teile durch den unbedingt notwendigen Ausgleich der Wasserquanta in Relation zueinander stehen. Hiedurch wird auch die Hafenzeit der einzelnen Gebiete sehr wesentlich beeinflußt sein.

Im südlichen Teil des Adriatischen Meeres variieren die sämtlichen, leider nicht sehr zahlreichen, an der Küste bestimmten Hafenzeiten nur etwa innerhalb einer Stunde, und ihr Betrag ist etwas kleiner als 4 Uhr. Wir sehen hieraus, daß sich der ganze Wasserspiegel des südlichen Teiles nahezu gleichzeitig hebt und senkt, was mit der Annahme, daß er an einer Schwingung einer Partie des Mittelmeeres teilnimmt, sehr gut im Einklange steht.

Die oben besprochene Tatsache, daß die Flutwelle den nördlichen Teil des Adriatischen Meeres längs seiner Küsten gewissermaßen umkreist, läßt es sehr wahrscheinlich erscheinen, daß es sich auch hier weniger um ein eigentliches Fortschreiten der Flutwelle, als vielmehr um ein analoges Schwingungsphänomen handelt. Allerdings kommt man mit der Annahme einer Schwingung um eine einzige Knotenlinie [1] dabei nicht aus. Wenn man sich aber vorstellt, daß dieser Teil der Adria gleichzeitig zwei Schwingungen mit je einer Knotenlinie ausführt, so gelingt es, die beiden Knotenlinien und die Phasendifferenz der beiden Schwingungen so zu wählen, daß aus ihrer Zusammensetzung fast ganz genau die an der Küste

---

[1] Diese Annahme machte Grablovitz (a. a. O.). Er denkt sich die Verbindungslinie von Zara vecchia und Giulianova als Knotenlinie des Adriatischen Meeres.

beobachteten Hafenzeiten resultieren. Über die Lage der beiden Knotenlinien und die Größe der Phasendifferenz sind dann sogar noch verschiedene Annahmen möglich, da man den beiden Schwingungen eventuell auch noch verschiedene Amplituden erteilen könnte.

Um eine dieser Annahmen hier zu skizzieren, denken wir uns, der Beobachtungsort habe von den beiden Knotenlinien die senkrechten Abstände ρ und ρ'. Da bei dieser Art von Schwingungen die Größe der Verschiebung aus der Ruhelage dem Abstande von der Knotenlinie proportional anzunehmen ist, so haben wir für den Beobachtungsort die Formel

$$\eta = A\rho \sin \frac{2\pi(t+\tau_1)}{T} + A'\rho' \sin \frac{2\pi(t+\tau_2)}{T}.$$

Hierin bedeutet η die zur Zeit t stattfindende Verschiebung der Oberfläche aus der Ruhelage, A, A', τ_1 und τ_2 konstante Größen für alle Beobachtungsstationen und T die Schwingungsdauer von 12·4 Stunden oder 12 Mondstunden.

Unsere spezielle Annahme besteht nun darin, daß wir $A = A'$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 10$ Stunden setzen, ferner annehmen, daß die eine Knotenlinie genau Ost—West verläuft und durch die Station Sestrice hindurchgeht, also in ihrem östlichen Teile der Hafenzeit 5^h entspricht, in ihrem westlichen der Hafenzeit 11^h; die andere Knotenlinie aber von Nord nach Süd, und zwar im Norden ein wenig östlich von Porer, im Süden zwischen S. Benedetto und Ortona hindurchgeht und die Hafenzeiten 9^h und 3^h miteinander verbindet, während wir die Phasendifferenz der beiden Schwingungen mit 2 Stunden annehmen.

Um den Verlauf der einzelnen Isorachien unter dieser Annahme zu berechnen, schreiben wir die obige Formel in der Form

$$\eta = A\left[\rho \sin \frac{2\pi t'}{T} + \rho' \sin \frac{2\pi(t'+\delta)}{T}\right],$$

wo wir

$$t+\tau_1 = t', \quad \tau_2-\tau_1 = \delta$$

gesetzt haben. Das Maximum, beziehungsweise Minimum von η wird zu jener Zeit t' erreicht, für welche der Differentialquotient von η verschwindet, das heißt

$$\rho \cos \frac{2\pi t'}{T} + \rho' \cos \frac{2\pi(t'+\delta)}{T} = 0$$

ist; hieraus findet man

$$\tan \frac{2\pi t'}{T} = \frac{\frac{\rho}{\rho'} + \cos \frac{2\pi\delta}{T}}{\sin \frac{2\pi\delta}{T}},$$

daher

$$\frac{\rho}{\rho'} = \tan \frac{2\pi t'}{T} \sin \frac{2\pi\delta}{T} - \cos \frac{2\pi\delta}{T} .$$

Unter unserer Annahme ist, da $\tau_1 = 0$ ist, t' mit der Hafenzeit, beziehungsweise der um 6 Mondstunden vermehrten identisch; δ ist die Differenz von τ_2 und τ_1, also gleich 10 Mondstunden. Wenn wir die Hafenzeit des Beobachtungsortes in Mondstunden H nennen, so haben wir schließlich die Formel

$$\frac{\rho}{\rho'} = \tan \frac{\pi H}{6} \sin \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \tan \frac{\pi H}{6} - \frac{1}{2} .$$

Der Abstand ρ des Beobachtungsortes von der Ost—West verlaufenden Knotenlinie ist bei südlich gelegenen Orten positiv, bei nördlichen negativ zu nehmen; der Abstand ρ' von der Nord—Süd verlaufenden Knotenlinie ist östlich derselben positiv, westlich negativ zu nehmen.

Die auf Grund dieser Annahme entstehenden Isorachien sind sämtlich gerade Linien, die durch den Schnittpunkt der beiden Knotenlinien (den oben erwähnten Drehungspunkt) hindurchgehen; die den einzelnen Mondstunden entsprechenden Isorachien schließen aber nicht gleiche, sondern sehr verschieden große Winkel ein, und zwar:

3^h	und	4^h	45°	9^h	und	10^h	45°
4	»	5	45	10	»	11	45
5	»	6	$26^1/_2$°	11	»	12	$26^1/_2$°
6	»	7	$18^1/_2$	12	»	1	$18^1/_2$
7	»	8	$18^1/_2$	1	»	2	$18^1/_2$
8	»	9	$26^1/_2$	2	»	3	$26^1/_2$.

Die Verschiedenheit dieser Winkel läßt es dann auch verständlich erscheinen, daß die Hafenzeiten zwischen Sestrice und Porer auf einer relativ kurzen Strecke sehr rasch, nämlich von 5^h bis 9^h, zunehmen, während das Gebiet der Hafenzeiten zwischen 9^h und 11^h im Norden sowie dasjenige zwischen 3^h und 5^h im Süden sehr ausgebreitet ist, da jedes dieser letzteren Gebiete einen Winkelraum von 90° ausfüllt. Hiedurch erscheinen auch die großen Geschwindigkeiten in dem nördlichen, seichten Teile erklärt, die, als Fortpflanzungsgeschwindigkeiten aufgefaßt, mit der Theorie in entschiedenem Widerspruch stünden.

Was die Erregung dieses eigentümlichen Schwingungsphänomens im nördlichen Teile des Adriatischen Meeres betrifft, so dürften die Impulse hiezu zweifellos aus dem südlichen Teile der Adria stammen, der, wie wir gesehen haben, an einer durch Mond und Sonne erregten zwölfstündigen Schwingung einer Partie des Mittelmeeres direkt teilzunehmen scheint. Das Mitschwingen des nördlichen Teiles regelt sich nun durch zweierlei Umstände: Erstens muß die Schwingungsdauer genau 12 Mondstunden betragen; dies ist aber nur bei einer ganz bestimmten Länge des in Schwingung geratenden Teiles möglich, da ja, wie bekannt, die Schwingungsdauer eines derartigen Wasserbeckens der Länge direkt und der Quadratwurzel aus der Tiefe verkehrt proportional ist, bei der gegebenen Tiefe des Meeres also nur ein ganz bestimmter Teil der Adria eine selbständige Schwingung mit dieser Schwingungsdauer ausführen kann. Zweitens ist anzunehmen, daß die Schwingungsvorgänge solche sein werden, die möglichst bei konstantem Wasserquantum, d. h. ohne wesentliches Zu- oder Abströmen von Süden her, erfolgen können. Auch diese Bedingung ist bei dem tatsächlich konstatierten Umlauf der Flutwelle längs der Küsten, beziehungsweise der zu ihrer Beschreibung supponierten doppelten Schwingung erfüllt, da zu jeder einzelnen Stunde die Gegenden hohen und tiefen Wassers zum Drehungspunkt stets symmetrisch verteilt sind, das Gezeitenphänomen in diesem Teile des Adriatischen Meeres sich also bei konstant bleibendem Wasserquantum abspielt.

Überdies mag nicht unerwähnt bleiben, daß auch die Küstenkonfiguration einigermaßen mitzuwirken scheint, vor allem die Halbinsel des Monte Gargano, die die einzige Unterbrechung der sonst ganz ungegliederten italienischen Küste bildet. Sie verursacht es vielleicht, daß der von der Bewegung des südlichen Teiles stammende Impuls an der dalmatinischen Küste stärker einwirkt als an der italienischen, die sich gewissermaßen einer Schattenwirkung dieser Halbinsel erfreut. Dies könnte eventuell die Ursache sein, daß sich nicht jenes einfachere Schwingungsphänomen einstellt, das man zunächst für das wahrscheinlichste halten möchte, nämlich eine Schwingung um eine einzige, in der Mitte quer über das Meer gelegte Knotenlinie. Bei dieser einfachsten Art der Schwingung hätten alle Orte südöstlich dieser Knotenlinie die gleiche Hafenzeit (etwa 4^h), alle nordwestlich derselben gelegenen unter sich wieder die gleiche (etwa 10^h). Das starke Zusammendrängen der Isorachien in der Gegend, wo diese Knotenlinie zu liegen käme, und die große Ausdehnung der südlichen und nördlichen Partien, die tatsächlich 4^h, beziehungsweise 10^h Hafenzeit besitzen, läßt uns erkennen, daß die Abweichung des tatsächlichen Schwingungsvorganges von dieser einfachsten uninodalen Schwingung keine allzu wesentliche ist, so daß der Küstenkonfiguration dieser verändernde Einfluß vielleicht mit gutem Grunde zugemutet werden darf.

6. Die Flutgröße.

In der Kartenbeilage findet man auch für jede Station die Flutgröße in Zentimetern in eckigen Klammern angegeben. Unter Flutgröße verstehen wir die Höhe der Flutwelle zur Zeit der Syzygien, gemessen vom Wellentale bis zum Wellenberge, und entnehmen diese Höhe den Registrierblättern. Wegen der Unsymmetrie der Hauptflut infolge der täglichen Ungleichheit müssen wir auch die zwei sie einschließenden Gegenfluten in Betracht ziehen, indem wir beispielsweise der Hauptflut die größte Höhe, Maximum des ansteigenden (oder fallenden) Wassers, den beiden Gegenfluten jedoch die kleinste Höhe entnehmen, deren Mittel wir dann als kleinste Erhebung,

Minimum, ansehen; das Mittel aus Maximum und Minimum definieren wir als die Flutgröße des betreffenden Ortes. Unter Umständen kann man auch der Hauptflut die kleinste und den beiden Gegenfluten die größte Erhebung entnehmen; das Resultat ist im allgemeinen dasselbe. Gewöhnlich wurde hiebei die Regel befolgt, daß, wenn die Hauptflut höher ist als die Gegenfluten, ihr das Maximum und den Gegenfluten das Minimum entnommen wird, und umgekehrt, ist die Hauptflut die kleinere, so wird ihr das Minimum, der Gegenflut aber das Maximum entnommen. Bei den Stationen mit längerer Beobachtungsdauer sind die so ermittelten Werte der täglichen Ungleichheit (Minimum und Maximum) und deren Mittel (Flutgröße) in Tabelle I angeführt (bei Ragusa am Schlusse dieser Station). Das Mittel der Einzelresultate, die bei einer größeren Zahl von Bestimmungen überdies in der Regel nicht viel voneinander abweichen (da die verschiedenen Einflüsse der Gestirne, welche auf die Flutgröße einwirken, sich bei diesem Vorgange eliminieren), gibt dann sofort die Flutgröße der betreffenden Station.

Um bei den Stationen mit kurzer, nur sechstägiger Dauer erkennen zu können, ob sie in dieser Hinsicht gestört sind, und um sie durch eine Korrektion auf den normalen vergleichbaren Zustand reduzieren zu können, wurden in der Station Ragusa, wo die Beobachtungen am Flutmesser kontinuierlich ausgeführt werden, für alle Tage, an welchen in den Stationen mit kurzer Beobachtungsdauer Beobachtungen ausgeführt wurden, die Flutgrößen ermittelt. Dieselben sind in Tabelle I am Schlusse der Station Ragusa zusammengestellt.

Das Mittel derselben, 31 *cm*, ist, wie bei allen Stationen mit längerer Beobachtungsdauer, von den verschiedenen Einflüssen der Gestirne als befreit anzusehen. Da man annehmen kann, daß die Einflüsse der Gestirne bei der Kleinheit des Adriatischen Meeres an denselben Tagen allerorten gleich sind, so geben die Abweichungen der einzelnen Bestimmungen der Flutgröße in Ragusa von ihrem Mittel einen Maßstab für die an den übrigen Stationen anzubringende Korrektion auf den mittleren oder normalen Zustand; die Abweichungen sind jedoch nicht direkt, sondern proportional der Flutgröße als

Korrektion anzubringen. Unter den Störungen, welche die Flutgröße auf den Stationen mit kurzer Beobachtungsdauer beeinflussen, darf man selbstverständlich nicht äußere Ursachen, wie z. B. Wind, hohen Seegang u. s. w. verstehen; diese haben auf die Flutgröße, wie überhaupt auf die Gezeiten gar keinen Einfluß; denn sie bewirken allenfalls durch Stauungen gewisse Veränderungen der mittleren Höhe der Wasserfläche, keineswegs jedoch Veränderungen der Gezeiten, Flutgrößen etc., die sich auf der jeweiligen Meeresoberfläche ungestört abspielen. Es sind hier daher nur jene Einflüsse gemeint, welche von den Gestirnen herrühren. Da jedoch die Bestimmungen stets zur Zeit der Syzygien ausgeführt wurden, so sind diese Veränderungen nie groß, wie auch die Beobachtungen zeigen.

In Tabelle II sind bei den Stationen mit kurzer Beobachtungsdauer außer den beobachteten Flutgrößen in der letzten Kolumne die reduzierten, vergleichbaren Fluthöhen angegeben, welche, wie man sieht, von den beobachteten Werten nicht viel abweichen. Sie sind in der Karte in eckigen Klammern eingetragen.

Mit Weglassung von vier abnorm großen Werten an der Küste von Istrien ist das Mittel aller Flutgrößen etwa 29 *cm*. Im Süden bei Ragusa sind sie etwas größer, über 30 *cm*; dann kommt ein Gebiet S. Andrea, Spalato, Rogožnica, Zuri mit etwa 25 *cm*, an welches sich das Gebiet der kleinsten Werte mit etwa 20 *cm* bei Zaravecchia anschließt, welches sich längs der Küste gegen Norden bis gegen Novaglia hinzieht, während westlich davon von Punte bianche an wieder größere Werte, etwa 33 *cm*, beginnen, welche nur mehr von den Stationen in Istrien übertroffen werden, an dessen westlicher Küste die Flutgrößen von 34 *cm* bis etwa 90 *cm* ansteigen.

An der italienischen Küste sind die Verhältnisse, soweit sie aus den wenigen Angaben erkannt werden können, ganz die gleichen wie in Dalmatien. Ganz im Süden, in Manfredonia, fand sich die bedeutende Flutgröße von 37 *cm*; südlich von Ancona, in S. Benedetto und Ortona, finden wir wieder die kleinsten Werte, etwa 20 *cm*.

Auch hinsichtlich der Flutgröße in der Adria sind wir sonach zu Ergebnissen gelangt, die mit den bisher üblichen

Annahmen nicht im Einklang stehen. Während man sich nämlich bisher die Flutgröße von Süd nach Nord in stetiger Zunahme dachte, haben unsere Beobachtungen gezeigt, daß sich im nördlichen Teile des Adriatischen Meeres hinsichtlich der Flutgröße drei Gebiete unterscheiden lassen, nämlich ein südliches und ein nördliches Gebiet mit größeren und ein mittleres Gebiet mit auffallend kleinen Fluthöhen.

Wenn nun auch die einzelnen Werte bei der ziemlich vagen Natur des beobachteten Elementes nicht den Anspruch erheben können, als vollkommen exakt zu gelten, so ist doch dieses Gesamtergebnis durch die große Zahl der Stationen als hinreichend fundiert zu betrachten; es befindet sich in guter Übereinstimmung mit den im vorigen Abschnitte besprochenen Schwingungserscheinungen, auf Grund deren der nordwestliche und südöstliche Teil des Meeres jedenfalls viel bedeutendere Elongationen wird aufweisen müssen als die mittlere, in der Nähe der beiden Knotenlinien gelegene Partie.

7. Die tägliche Ungleichheit und die Unterschiede der Eintrittszeiten der Flut und Gegenflut.

Die tägliche Ungleichheit der Fluten hat auch eine Änderung der Eintrittszeiten der Flut und Gegenflut zur Folge. Diese beiden Eintrittszeiten sollten stets um 12·4 Stunden voneinander verschieden sein. Wie wir aus Tabelle I und II ersehen, ist dies jedoch meistens nicht der Fall, so daß aus der Flut mitunter eine andere Hafenzeit resultieren würde als aus der Gegenflut.

Aus dem Auftreten dieser Erscheinung ersieht man die Notwendigkeit, die Beobachtungen über mehrere Tage auszudehnen, um die Eintrittszeiten der Flut und Gegenflut, jede für sich, aus einigen Beobachtungen ermitteln zu können. Daß die Ebben auf solchen Stationen keine analogen Erscheinungen aufweisen, hat in der Art der Mittelbildung seinen Grund, da immer ein E und ein e zu einem Mittel vereinigt wurden.

Der Unterschied der Eintrittszeiten $F-f$ der beiden Fluten ist auf manchen Stationen sehr erheblich, besonders in dem inselreichen Gebiete des Quarnero. Diese Stationen weisen auch eine besonders große tägliche Ungleichheit (Differenz

Maximum—Minimum der beobachteten Flutgrößen, Tabelle II) auf; es liegt daher nahe, die Differenz $F-f$ mit der durch die Ungleichheit bedingten Deformation der Flutkurve in Zusammenhang zu bringen. So naheliegend dies ist, so schwierig ist es aber anzugeben, worin das Auftreten so großer Ungleichheiten, wie sie auf einigen Stationen, namentlich im Quarnero, konstatiert wurden, seinen Grund hat.

Diese Ungleichheit ist in einigen Fällen so groß, daß die eine der beiden täglichen Fluten oft nur angedeutet ist (2 bis 3 *cm* Hebung), manchmal äußert sie sich sogar nur durch ein etwas langsameres Ansteigen des Wassers, so daß durch die Beobachtung nach dem bloßen Anblicke leicht der Schein einer bloß einmaligen Flut in 24 Stunden erweckt wird.

Im ganzen Süden ist, wie wir den Tabellen I und II entnehmen, die tägliche Ungleichheit (Maximum—Minimum) sehr klein, nahezu ihrem normalen Werte entsprechend, daher auch die Differenz $F-f$ nur unbedeutend; so z. B. in Ragusa, auf den Inseln Pelagosa, S. Andrea, in Rogožnica u. s. w. Erst in Zara und Punte bianche beginnen die Unterschiede groß zu werden und in einen deutlichen Zusammenhang mit der täglichen Ungleichheit zu treten; die Differenz $F-f$ beträgt auf Lussin piccolo und Unie etwa 3 Stunden und erreicht in Zengg und Fiume am 8. Juli den größten Wert, 3·6 Stunden.

Nahe beieinander liegende Stationen, welche gleichzeitig beobachtet wurden, weisen gleiche Ungleichheit und gleiche Werte von $F-f$ auf; so z. B. Porer—Rabaz, Arbe—Novaglia, Lussin piccolo—Unie; bei weiter voneinander entfernten Stationen, besonders wenn eine von ihnen sehr südlich liegt, ist das nicht der Fall, z. B. Punte bianche und Zuri.

Die Ungleichheit hängt wesentlich mit der Deklination der Gestirne, welche einen Einfluß auf die Gezeiten haben, zusammen; sie verschwindet im Frühjahr und Herbst, wenn die Sonne und auch der Mond im Äquator stehen, fast gänzlich, wie dies aus den Stationen Zengg und Fiume (8. Oktober) oder aus den an der Westküste von Istrien beobachteten Stationen zu ersehen ist.

Zur Erklärung der großen täglichen Ungleichheit wird das gleichzeitige Vorhandensein ganztägiger Sonnen- und Mond-

flutwellen angenommen, welche die gewöhnlichen, halbtägigen Wellen modifizieren, indem durch die Zusammensetzung beider die Höhen der beiden halbtägigen Wellen ungleich werden und infolgedessen die Eintrittszeiten F und f verschieden resultieren.[1]

Es könnte jedoch auch darauf hingewiesen werden, daß es sich in unserem Falle um Orte handelt, die infolge der Konfiguration der Küste und der vorgelagerten Inseln von der Flutwelle von verschiedenen Seiten erreicht werden, so daß, wenn man auch noch die verschiedenen Geschwindigkeiten der Flutwelle in den Kanälen berücksichtigt, sich Interferenzerscheinungen zeigen können, welche jedenfalls der Vergrößerung der Ungleichheit günstig sind. Hiedurch wäre es auch erklärt, daß im südlichen Teile der Adria und auf den Inseln im offenen Meere daselbst, wie schon früher erwähnt, diese auffallend großen Ungleichheiten nicht vorkommen, so z. B. in Ragusa, auf den Inseln Pelagosa, S. Andrea etc.

Wie sehr die Kanäle, namentlich wenn sie seicht und schmal sind, das Fortschreiten der Flutwelle verzögern, sehen wir sehr deutlich an dem Kanale von Zara. Die Flutwelle benötigt zu der 31 *km* langen Strecke von Zaravecchia bis Zara 2·4 Stunden. Es hat das zur Folge, daß auch von der nördlichen Seite die Flutwelle in diesen Kanal eindringt, so daß bei Zara Interferenzerscheinungen stattfinden, wie dies die Registrierblätter auch aufweisen. Die eine Flutwelle ist oft bedeutend verkürzt, manchmal sogar ganz unterdrückt, so daß die Ungleichheit oft sehr bedeutend wird. Es hat Zara z. B. noch Hochwasser, wenn im Canale di mezzo in Eso dasselbe schon 1·6 Stunden hindurch fällt. Dadurch entstehen Unterschiede im Niveau des Wassers, durch welche die bekannten periodischen Strömungen, z. B. im Stretto di Zdrelac und nördlich der Insel Ugliano, ihre Erklärung finden.

Die Differenz $F-f$ läßt sich folgendermaßen in erster Näherung als Funktion der täglichen Ungleichheit darstellen.

---

[1] Stahlberger, Die Ebbe und Flut in der Reede von Fiume (3. Bericht der Adria-Kommission der Akad. der Wiss.), 1873.

Eine Flutwelle mit täglicher Ungleichheit ist durch die Formel gegeben

$$\eta = a \sin \frac{2\pi t}{T} + b \sin \frac{\pi t}{T}, \quad T = 12 \cdot 4 \text{ Stunden,}$$

wo η die Verschiebung (Hebung und Senkung) der Oberfläche aus der Ruhelage bedeutet; so lange $b < 2a$ ist, treten im Laufe von 24·8 Stunden zwei Maxima und zwei Minima auf; für $b \geqq 2a$ hingegen nur ein Maximum und ein Minimum.

Wir setzen $b < 2a$ voraus und bestimmen die Eintrittszeiten der Maxima und Minima von η; diese müssen der Gleichung

$$2a \cos \frac{2\pi t}{T} + b \cos \frac{\pi t}{T} = 0$$

genügen, die (da der Kosinus des doppelten Winkels sich durch das Quadrat des Kosinus des einfachen Winkels ausdrückt) in $\cos \frac{\pi t}{T}$ quadratisch ist und durch die Wurzeln

$$\cos \frac{\pi t}{T} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 32a^2}}{8a}$$

befriedigt wird, wofür wir näherungsweise die Werte setzen:

$$\cos \frac{\pi t}{T} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{b}{8a}.$$

Die Eintrittszeit selbst erhält man dann aus der Beziehung

$$\frac{\pi t}{T} = \arccos\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{b}{8a}\right),$$

aus der sich durch Reihenentwicklung des arccos und Vernachlässigung der auf das zweite folgenden Glieder die Zeiten ergeben:

$$t_1 = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{8a}, \quad t_2 = \frac{3T}{4} + \frac{T}{\pi} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{8a},$$

$$t_3 = \frac{5T}{4} - \frac{T}{\pi} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{8a}, \quad t_4 = \frac{7T}{4} - \frac{T}{\pi} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{8a}.$$

$F-f$ ist dann (vom Vorzeichen abgesehen) nichts anderes als die Differenz $T-(t_3-t_1)$, für welche sich ergibt:

$$F-f = T-(t_3-t_1) = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{4a}.$$

Werden ferner mit α und β die Maximalbeträge selbst bezeichnet, die η zur Zeit t_1 und t_3 annimmt (d. h. die halben Maximal- und Minimalbeträge, die in Tabelle II verzeichnet sind), so findet man näherungsweise

$$\alpha = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{4a}\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b\sqrt{2}}{8a}\right) =$$
$$= a + b\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b}{8a}\right)$$

$$\beta = a \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{b\sqrt{2}}{4a}\right) + b \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{b\sqrt{2}}{8a}\right) =$$
$$= a + b\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b}{8a}\right),$$

somit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{8a^2 + 4\sqrt{2}ab + b^2}{8a^2 - 4\sqrt{2}ab + b^2}$$

und daraus

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}}{2\sqrt{2}(\alpha - \beta)},$$

somit

$$F-f = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}},$$

wo, wie man leicht einsieht, nur das obere Zeichen in Betracht kommt. Ersetzt man noch $\frac{T}{\pi}$ durch den Wert 4 Stunden, mit dem er fast genau übereinstimmt, so hat man die Endformel:

$$F-f = 4 \cdot \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \text{ Stunden.}$$

Aus den beobachteten Werten α und β kann man mittels dieser Formel den Wert von $F-f$ berechnen. Ist $\alpha = \beta$, also keine Ungleichheit vorhanden, so ist $F-f = 0$; ist $\beta = 0$, also die Ungleichheit so groß, daß das zweite Maximum eben im Verschwinden ist, so ergibt sich als größtmöglicher Wert von $F-f$ der Betrag von 4 Stunden.

Die Übereinstimmung der auf diese Weise aus α und β berechneten Werte von $F-f$ ist in den meisten Fällen eine recht gute; z. B.:

Budua: $\alpha = 18 \cdot 5\, cm$, $\beta = 13 \cdot 5\, cm$, $F-f = 0 \cdot 3$ Stunden (berechnet), 0·4 Stunden (beobachtet).

Eso: $\alpha = 16\, cm$, $\beta = 6 \cdot 5\, cm$, $F-f = 0 \cdot 9$ Stunden (berechnet), 0·8 Stunden (beobachtet).

Zengg (11. Juni 1907): $\alpha = 29\, cm$, $\beta = 2\, cm$, $F-f = 2 \cdot 3$ Stunden (berechnet), 2·7 Stunden (beobachtet).

In einigen Fällen ist die Übereinstimmung weniger gut. In diesen genügt aber meist eine unbedeutende Veränderung des Betrages β der beobachteten kleineren Fluthöhe, die ja bei der naturgemäßen Ungenauigkeit, die diesem Beobachtungselement anhaftet, jedenfalls zulässig ist, um ebenfalls eine relativ gute Übereinstimmung zu erzielen.

8. Zusammenstellung der Resultate.

Zum Schlusse wollen wir die erhaltenen Resultate, welche sich alle auf die Zeit der Syzygien beziehen, in Kürze zusammenstellen.

Wenn auch noch einige Stationen an der italienischen Küste erwünscht wären, so erscheint doch durch die vorliegende Arbeit ein kleines, begrenztes Gebiet des Adriatischen Meeres möglichst gründlich durchforscht, so daß kaum eine wesentliche Erscheinung verborgen geblieben sein dürfte.

1. Das Adriatische Meer zerfällt bezüglich der Gezeiten in zwei verschiedene Teile, einen nördlichen und einen südlichen, welche etwa durch die Verbindungslinie Monte Gargano–Ragusa voneinander getrennt sind.

2. In dem südlichen Teile sind nur sehr wenige Angaben über Hafenzeiten vorhanden; doch scheint es, daß dieser Teil

bezüglich der Gezeiten mit dem Jonischen, beziehungsweise Mittelländischen Meere im Zusammenhang steht. Die Gezeiten haben daselbst den Charakter ziemlich gleichzeitiger Parallelverschiebungen der ganzen Oberfläche; denn die Hafenzeiten der Küstenorte unterscheiden sich kaum mehr als eine Stunde voneinander und sind ungefähr gleich 4^h, doch sind, wie gesagt, zu wenig Stationen vorhanden, um ein abschließendes Urteil fällen zu können.

3. In den nördlichen Teil der Adria tritt die Flutwelle mit der Hafenzeit 4^h längs der dalmatinischen Küste ein und schreitet gegen Nord weiter, umspült Istrien, Venedig, setzt sich an der italienischen Küste in südlicher Richtung fort, passiert Ancona beiläufig mit der Hafenzeit 0^h und erreicht mit der Hafenzeit 4^h wieder die Trennungslinie der beiden Gebiete, um sich mit der aus dem südlichen Teile kommenden Gegenflut zu vereinigen. Die Flutwelle umkreist daher die Küste des nördlichen Teiles des Adriatischen Meeres in 12·4 Stunden.

4. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Flutwelle fortpflanzt, ist verschieden groß. Im Süden und Norden des Untersuchungsgebietes ist sie groß, nämlich 300, beziehungsweise 150 *km* per Stunde. Am kleinsten, 25 *km* in der Stunde, ist sie zwischen Sestrice und Punte bianche. An der italienischen Küste ist die Geschwindigkeit der Flutwelle im Süden und Norden ebenso groß wie an der dalmatinischen Küste, 300 und 150 *km*, während sie in der Mitte zwischen Ancona und S. Benedetto nur 50 *km* beträgt.

5. Diese kreisende Bewegung der Flutwelle kann man als eine Schwingung mit 12·4stündiger Dauer auffassen, welche sich jedoch um zwei Knotenlinien mit einer Phasendifferenz von 2 Stunden vollzieht. Die eine Knotenlinie, welche von Ost nach West verläuft, trifft die dalmatinische Küste an jenen Stellen, wo das langsamste Fortschreiten der Flutwelle konstatiert wurde, wo daher die schnellste Änderung der Hafenzeiten stattfindet, während die andere Knotenlinie darauf senkrecht steht und etwas östlich von der Südspitze von Istrien verläuft.

6. Der Durchschnittspunkt beider Knotenlinien liegt etwa 50 *km* östlich und 20 *km* nördlich von Ancona; an dieser Stelle finden demnach keine Gezeiten statt.

7. Seichte und schmale Kanäle, wie z. B. bei Zara, verzögern das Fortschreiten der Flutwelle, so daß sie von beiden Seiten in den Kanal eindringt. Es entstehen hiedurch gegen andere Gebiete Niveaudifferenzen, welche die periodischen Strömungen zur Folge haben.

8. Die Flutgröße nimmt an beiden Küsten sowohl von Nord als auch von Süd bis ungefähr in die Mitte ab, wo sie beiläufig ihr Minimum mit 19 *cm* erreicht; im Mittel beträgt die Flutgröße 29 *cm*; an der westlichen Küste von Istrien, in Rovigno, Pirano und Grado, erreicht sie die beträchtlichen Werte von 60, 98 und 88 *cm*.

9. Die tägliche Ungleichheit ist im Süden nahezu normal, in der Höhe von Zara und Punte bianche nimmt sie gegen den inselreichen Quarnero zu und wird in einzelnen Stationen so groß, daß die eine der beiden Fluten fast unterdrückt erscheint, so daß es den Anschein gewinnt, als bestände nur eine 24stündige Flut.

10. Die Ursache dieser großen Ungleichheiten in dem untersuchten Gebiete dürften zum großen Teile Interferenzerscheinungen sein, welche von dem Zusammenfließen des Wassers von verschiedenen Seiten der Inseln sowie der ungleichen Geschwindigkeit desselben in den Kanälen herrühren.

11. Die infolge der täglichen Ungleichheit entstehende Verschiedenheit der Eintrittszeiten der beiden Fluten $F-f$ ist gleichfalls im Süden unbedeutend, wächst jedoch im inselreichen Norden, namentlich im Quarnero fast zu ihrem Maximalwert von 4 Stunden an.

12. Es läßt sich diese Differenz $F-f$ ganz befriedigend als Funktion der täglichen Ungleichheit darstellen und aus ihr berechnen.

Tabelle I.

Beobachtungen.

1. Budua.

Vollmond, obere Kulmination am 3. September 1906, $\alpha = 0^h 1$ a.
Aufstellungsort: Im Hafen beim Sanitätsgebäude.

Aug.			Sept.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
31.	F_1	2^h6 a	3.	E_4	9^h7 a	$F_1 F_7$	4^h1	$F = 4^h1$
	E_1	8·7 a		f_4	4·0 p	$F_2 F_6$	3·9	
	f_1	2·5 p		e_4	10·4 p	$F_3 F_5$	4·2	
Sept.	e_1	9·0 p	4.	F_5	4·7 a	F_4	4·0	
1.	F_2	3·0 a		E_5	10·2 a	$f_1 f_6$	3·6	$f = 3^h7$
	E_2	9·0 a		f_5	4·6 p	$f_2 f_5$	3·9	
	f_2	3·4 p		e_5	10·9 p	$f_3 f_4$	3·7	
	e_2	9·9 p	3.	F_6	4·9 a	$E_1 e_6$	3·9	$E = 3^h8$
2.	F_3	3·9 a		E_6	10·7 a	$E_2 e_5$	3·9	
	E_3	9·1 a		f_6	4·9 p	$E_3 e_4$	3·7	
	f_3	3·6 p		e_6	11·2 p	$e_1 E_6$	3·8	$e = 3^h9$
	e_3	10·2 p	6.	F_7	5·7 a	$e_2 E_5$	4·0	
3.	F_4	4·1 a				$e_3 E_4$	3·9	

Hafenzeit $H = 3^h9$

2. Ragusa.

a) Hafenzeit.

	1904		F	f	E	e	$F-f$	H
○	Jänner	3.	4^h4	4^h2	4^h5	4^h4	$+0^h2$	4^h4
●	»	17.	3·9	4·5	3·9	4·5	−0·6	4·2
○	Februar	2.	3·7	3·3	3·5	3·8	+0·4	3·6
●	»	16.	4·0	3·8	4·1	4·1	+0·2	4·0
○	März	2.	4·0	4·1	4·5	4·2	−0·1	4·2
●	»	17.	4·4	3·9	4·0	3·9	+0·5	4·1
○	April	1.	3·9	4·0	4·2	4·0	−0·1	4·0
●	»	15.	4·2	4·1	4·2	4·3	+0·1	4·2
○	»	30.	4·0	3·7	3·7	3·8	+0·3	3·8
●	Mai	15.	3·8	3·6	3·7	3·6	+0·2	3·7
○	»	29.	3·7	4·0	4·0	3·8	−0·3	3·9
●	Juni	13.	4·2	4·1	4·4	3·9	+0·1	4·2
○	»	28.	4·0	3·9	4·1	4·1	+0·1	4·0
●	Juli	13.	4·1	3·9	3·8	4·0	+0·2	4·0
○	»	26.	4·3	4·3	4·3	4·2	0·0	4·3
●	August	11.	4·4	4·1	4·5	4·3	+0·3	4·3
○	»	26.	3·8	3·5	4·1	3·9	+0·3	3·8
●	September	9.	4·1	4·0	3·8	3·9	+0·1	4·0
○	»	25.	4·0	3·9	3·9	4·0	+0·1	4·0
●	Oktober	9.	4·0	4·3	3·9	4·0	−0·3	4·1
○	»	25.	3·8	3·6	3·5	3·5	+0·2	3·6
●	November	7.	4·1	3·9	3·9	3·8	+0·2	3·9
.○	»	23.	3·9	4·7	4·5	4·0	−0·8	4·3
●	Dezember	7.	3·7	3·5	3·7	4·3	+0·2	3·8
○	»	23.	3·7	3·8	4·0	4·0	−0·1	3·9

Mittel $H = 4^h0$

b) Flutgröße in Zentimetern.

				Min.	Max.	Mittel
○	September	3.	1906	29	37	33
●	»	18.		33	36	35
○	Oktober	2.		28	31	30
●	Jänner	14.	1907	19	38	29
○	»	29.		21	31	26
●	Februar	12.		25	41	33
○	»	28.		28	33	31
●	März	13.		28	32	30
○	»	29.		32	35	34
●	April	12.		24	37	31
○	»	28.		28	38	33
●	Mai	12.		22	36	29
○	»	27.		25	43	34
●	Juni	11.		16	33	25
○	»	26.		17	35	26
●	Juli	10.		14	34	25
○	»	24.		23	39	31
●	August	9.		17	36	27
○	»	23.		27	42	35
●	September	7.		27	41	34
○	»	22.		33	40	37
●	Oktober	7.		34	36	35
○	»	22.		30	38	34

Flutgröße 31 *cm*

3. Trstenik.

Vollmond, untere Kulmination am 2. Oktober 1906, $\alpha = 11^h 9$ a.

Aufstellungsort: Im Hafen auf dem viereckigen Aufbau hinter dem Wellenbrecher.

Sept.			Okt.			Mittel —α		Hafenzeit aus:
30.	f_1	$3^h 1$ p	2.	e_3	$10^h 1$ p	$F_1 F_4$	$4^h 0$	$F = 4^h 1$
Okt.	e_1	8·9 p	3.	F_3	4·4 a	$F_2 F_3$	4·2	
1.	F_1	3·3 a		E_3	10·2 a	$f_1 f_5$	3·8	
	E_1	9·0 a		f_4	4·1 p	$f_2 f_4$	3·7	$f = 3^h 8$
	f_2	3·1 p		e_4	10·5 p	f_3	3·8	
	e_2	9·6 p	4.	F_4	4·5 a	$E_1 e_4$	3·9	$E = 4^h 0$
2.	F_2	3·7 a		E_4	10·5 a	$E_2 e_3$	4·0	
	E_2	9·7 a		f_5	4·3 p	$e_1 E_4$	3·8	$e = 3^h 9$
	f_3	3·7 p				$e_2 E_3$	4·0	

Hafenzeit $H = 4^h 0$

4. Pelagosa.

Aufstellungsort: In der kleinen Bucht, genannt »Stara vlaka«, an der Nordwestseite der Insel Pelagosa, in einer Felsspalte.

	1904		Hafenzeit *F*	*f*	*E*	*e*	*F—f*	*H*	Flutgröße in Zentimetern Min.	Max.	Mittel
●	Juni	13.	4^h2	3^h9	4^h0	4^h3	$+0^h3$	4·1	18	40	29
○	»	28.	3·7	4·0	4·1	4·3	—0·3	4·0	11	37	24
●	Juli	13.	4·1	3·9	4·0	4·2	+0·2	4·1	19	44	32
○	»	26.	3·8	4·0	3·9	4·0	—0·2	3·9	15	35	25
●	Aug.	11.	4·0	3·8	4·2	3·9	+0·2	4·0	24	46	35

Mittel $H = 4^h0$ Flutgröße 29 *cm*

5. Vallegrande.

Neumond, obere Kulmination am 18. September 1906, $\alpha = 0\cdot0$ (mittags).
Aufstellungsort: Im Hafen am nördlichen Ende der Riva.

Sept.			Sept.			Mittel —α		Hafenzeit aus:
15.	F_1	2^h6 p	18.	E_4	11·0 p	$F_1\,F_7$	4^h0	
	E_1	9·4 p	19.	f_4	4·9 a	$F_2\,F_6$	4·2	$F = 4^h1$
16.	f_1	3·3 a		e_4	10·5 a	$F_3\,F_5$	4·2	
	e_1	8·8 a		F_5	4·9 p	F_4	4·0	
	F_2	3·0 p		E_5	11·1 p	$f_1\,f_6$	4·4	
	E_2	9·3 p	20.	f_5	5·2 a	$f_2\,f_5$	4·1	$f = 4^h3$
17.	f_2	3·0 a		e_5	11·4 a	$f_3\,f_4$	4·3	
	e_2	8·9 a		F_6	5·3 p	$E_1\,e_6$	4·4	
	F_3	3·4 p		E_6	11·2 p	$E_2\,e_5$	4·4	$E = 4^h4$
	E_3	10·5 p	21.	f_6	5·5 a	$E_3\,e_4$	4·5	
18.	f_3	3·6 a		e_6	11·4 a	$e_1\,E_6$	4·0	
	e_3	9·3 a		F_7	5·3 p	$e_2\,E_5$	4·0	$e = 4^h1$
	F_4	4·0 p				$e_3\,E_4$	4·2	

Hafenzeit $H = 4^h2$

6. S. Andrea.

Aufstellungsort: In einer kleinen felsigen Bucht an der Westseite der Insel.

				Hafenzeit					
				F	f	E	e	F—f	H
●	Oktober	9.	1904	4^h3	5^h0	4^h2	4^h5	-0^h7	4^h5
○	»	25.		4·1	3·6	3·6	4·0	+0·5	3·8
●	November	7.		3·6	4·0	3·6	3·8	—0·4	3·8
○	»	23.		4·8	4·5	4·1	4·3	+0·3	4·4
●	Dezember	7.		3·8	3·7	3·6	4·1	+0·1	3·8
○	»	23.		4·2	4·1	4·3	4·8	+0·1	4·4
●	Jänner	5.	1905	3·9	4·3	3·8	4·5	—0·4	4·1
●	Februar	4.		4·3	4·0	4·3	3·8	+0·3	4·1
○	»	20.		4·3	4·2	4·7	4·0	+0·1	4·3
●	März	5.		4·8	4·0	4·0	4·9	+0·4	4·4
○	»	21.		4·6	4·9	4·7	4·9	—0·3	4·8
●	April	4.		4·9	4·3	4·5	4·6	+0·6	4·6
○	»	20.		4·2	4·4	3·9	4·5	—0·2	4·3
●	Mai	4.		5·2	4·9	5·0	5·4	+0·3	5·1
○	»	19.		5·0	5·0	5·4	5·5	0·0	5·2
●	Juni	3.		5·0	4·9	4·5	5·4	+0·1	5·0
●	Juli	2.		4·3	4·3	4·5	4·5	0·0	4·4
○	»	17.		4·1	3·8	3·7	3·6	+0·3	3·8
●	August	1.		4·2	4·4	4·4	4·1	—0·2	4·3
○	»	15.		4·2	3·8	3·3	3·4	+0·4	3·7
●	»	30.		4·4	4·1	4·7	4·2	+0·3	4·4
○	September	14.		4·2	3·9	4·0	4·0	+0·3	4·0
●	»	29.		4·1	4·2	4·5	4·3	—0·1	4·3
○	Oktober	14.		4·3	3·9	4·4	4·2	+0·4	4·2

Mittel $H = 4^h3$

				Flutgröße in Zentimetern		
				Min.	Max.	Mittel
●	Oktober	9.	1904	17	32	25
○	»	25.		20	28	24
●	November	7.		16	37	27
○	»	23.		15	34	25
●	Dezember	7.		9	38	24
○	»	23.		12	34	23
●	Jänner	5.	1905	12	35	24

Flutgröße 25 *cm*

7. Makarska.

Vollmond, untere Kulmination am 21. Oktober 1907, $\alpha = 0\cdot 0$ (mittags).

Aufstellungsort: Im Hafen unmittelbar neben dem Hafenkapitanatsgebäude.

Okt.			Okt.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
19.	F_1	2^h8 a	21.	e_3	10^h3 p	$F_1 F_6$	4^h3	
	E_1	8·7 a	22.	F_4	4·9 a	$F_2 F_5$	4·0	$F = 4^h2$
	f_1	1·9 p		E_4	11·4 a	$F_3 F_4$	4·3	
	e_1	8·7 p		f_4	5·2 p	$f_1 f_5$	3·2	
20.	F_2	3·1 a		e_4	10·5 p	$f_2 f_4$	4·1	$f = 3^h9$
	E_2	9·4 a	23.	F_5	4·9 a	f_3	4·4	
	f_2	2·9 p		E_5	11·6 a	$E_1 e_5$	3·8	
	e_2	9·2 p		f_5	4·5 p	$E_2 e_4$	4·0	$E = 4^h1$
21.	F_3	3·7 a		e_5	10·8 p	$E_3 e_3$	4·5	
	E_3	10·7 a	24.	F_6	5·7 a	$e_1 E_5$	4·2	$e = 4^h2$
	f_3	4·4 p				$e_2 E_4$	4·3	

Hafenzeit $H = 4^h1$

8. Spalato.

Vollmond, untere Kulmination am 21. Oktober 1907, $\alpha = 0\cdot 0$ (mittags).

Aufstellungsort: Im Hafen auf dem kleinen Molo beim Kapitanatsgebäude.

Okt.			Okt.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
19.	F_1	3^h5 a	21.	e_3	10^h2 p	$F_1 F_6$	4^h4	
	E_1	9·3 a	22.	F_4	4·7 a	$F_2 F_5$	4·5	$F = 4^h5$
	f_1	3·0 p		E_4	11·2 a	$F_3 F_4$	4·5	
	e_1	9·2 p		f_4	4·7 p	$f_1 f_5$	3·9	
20.	F_2	4·0 a		e_4	10·6 p	$f_2 f_4$	3·9	$f = 4^h0$
	E_2	10·4 a	23.	F_5	4·9 a	f_3	4·3	
	f_2	3·0 p		E_5	11·8 a	$E_1 e_5$	4·1	
	e_2	9·7 p		f_5	4·8 p	$E_2 e_4$	4·5	$E = 4^h4$
21.	F_3	4·2 a		e_5	10·9 p	$E_3 e_3$	4·5	
	E_3	10·7 a	24.	F_6	5·3 a	$e_1 E_5$	4·5	$e = 4^h5$
	f_3	4·3 p				$e_2 E_4$	4·5	

Hafenzeit $H = 4^h4$

9. Rogožnica.

Aufstellungsort: Im Orte Rogožnica auf der Riva beim Zollamte.

1906		Hafenzeit F	f	E	e	$F-f$	H	Flutgröße in Zentimetern Min.	Max.	Mittel
● April	23.	4^h9	4^h2	3^h9	4^h9	$+0^h7$	4^h5	14	31	23
○ Mai	9.	3·9	4·6	5·0	4·3	−0·7	4·4	9	43	26
● »	23.	4·3	4·4	4·3	4·5	−0·1	4·4	11	38	25
○ Juni	7.	4·5	4·5	5·0	4·4	0·0	4·6	9	37	23
● »	21.	4·6	4·6	4·6	4·5	0·0	4·6	6	38	22
○ Juli	5.	4·6	4·6	4·6	4·5	0·0	4·6	11	34	23
● »	21.	4·5	4·9	4·6	4·5	−0·4	4·6	9	38	24
○ Aug.	3.	5·3	4·5	4·7	5·0	+0·8	4·9	10	38	24
● »	20.	4·2	5·1	5·0	4·3	−0·9	4·6	18	42	30
○ Sept.	3.	4·7	4·2	4·3	4·8	+0·5	4·5	12	29	21
● »	18.	4·3	4·8	5·1	4·5	−0·5	4·7	16	41	29
○ Okt.	2.	4·7	4·3	4·5	4·8	+0·4	4·6	19	30	25

Mittel $H = 4^h6$ Flutgröße 24 *cm*

10. Zuri.

Neumond, obere Kulmination am 12. Mai 1907, $\alpha = 0^h1$ p.
Aufstellungsort: Im Hafen Muna, auf der Insel Zuri hinter dem Wellenbrecher.

Mai			Mai			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
10.	f_1	2^h8 a	13.	E_3	12^h1 a	$F_1\,F_5$	4^h8	
	e_1	8·8 a		f_4	4·7 a	$F_2\,F_4$	4·7	$F = 4^h8$
	F_1	4·0 p		e_4	9·2 a	F_3	4·9	
	E_1	11·0 p		F_4	5·0 p	$f_1\,f_6$	4·4	
11.	f_2	3·2 a	14.	E_4	12·4 a	$f_2\,f_5$	3·9	$f = 4^h1$
	e_2	9·2 a		f_5	4·8 a	$f_3\,f_4$	4·1	
	F_2	4·5 p		e_5	9·6 a	$E_1\,e_5$	4·2	$E = 4^h3$
	E_2	12·0 p		F_5	5·7 p	$E_2\,e_4$	4·5	
12.	f_3	3·7 a	15.	E_5	1·4 a	$e_1\,E_5$	5·0	
	e_3	9·4 a		f_6	6·1 a	$e_2\,E_4$	4·7	$e = 4^h8$
	F_3	5·0 p				$e_3\,E_3$	4·7	

Hafenzeit $H = 4^h5$

11. Sestrice.

Aufstellungsort: Auf der kleinen Insel mit Leuchtturm beim Porto Tajer, am Landungsplatze.

1906			Hafenzeit						Flutgröße in Zentimetern		
			F	f	E	e	$F-f$	H	Min.	Max.	Mittel
●	Mai	23.	$5^{h}0$	$5^{h}7$	$4^{h}9$	$5^{h}4$	$-0^{h}7$	$5^{h}2$	—	—	—
○	Aug.	4.	6·7	4·7	4·7	4·9	+2·0	5·2	3	40	22
●	»	20.	5·1	5·9	5·3	4·6	—0·8	5·2	10	37	24
○	Sept.	3.	6·2	4·7	5·0	5·3	+1·5	5·3	6	25	16
●	»	18.	4·9	5·5	6·1	4·3	—0·6	5·2	4	38	21
○	Okt.	2.	5·4	4·5	4·6	5·1	+0·9	4·9	12	21	17
●	»	18.	4·4	5·3	5·5	4·5	—0·9	4·9	5	35	20

Mittel $H = 5^{h}1$ Flutgröße 20 *cm*

12. Zara vecchia.

Neumond am 7. Oktober 1907, Mondkulmination $\alpha = 0{\cdot}0$ (mittags).

Aufstellungsort: In dem kleinen Hafen mit Bruchsteinmauern am nördlichen Ende der Stadt, beim Zollamte.

Okt.			Okt.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
6.	f_1	$5^{h}6$ a	7.	E_2	$10^{h}9$ p	$F_1 F_3$	$5^{h}1$	$F = 5^{h}1$
	e_1	11·7 a	8.	f_3	5·7 a	F_2	5·0	
	F_1	4·5 p		e_3	11·6 a	$f_1 f_4$	5·9	$f = 5^{h}8$
	E_1	11·4 p		F_3	5·7 p	$f_2 f_3$	5·6	
7.	f_2	5·5 a		E_3	11·6 p	$E_1 e_3$	5·5	$E = 5^{h}5$
	e_2	10·8 a	9.	f_4	6·1 a	$e_1 E_3$	5·7	$e = 5^{h}3$
	F_2	5·0 p				$e_2 E_2$	4·9	

Hafenzeit $H = 5^{h}4$

13. Eso.

Neumond am 7. Oktober 1907, Mondkulmination $\alpha = 0\cdot 0$ (mittags).

Aufstellungsort: Auf einem Molo aus Bruchsteinen in dem natürlichen Hafen des Ortes Eso grande auf der gleichnamigen Insel.

Okt.			Okt.			Mittel —α		Hafenzeit aus:
5.	F_1	$4^h 2$ p	7.	E_3	$11^h 7$ p	$F_1 F_5$	$5^h 7$	
	E_1	11·0 p	8.	f_3	6·6 a	$F_2 F_4$	5·7	$F = 5^h 7$
6.	f_1	6·6 a		e_3	12·9 p	F_3	5·6	
	e_1	12·1 p		F_4	6·6 p	$f_1 f_4$	6·8	$f = 6^h 5$
	F_2	4·8 p	9.	E_4	0·0 a	$f_2 f_3$	6·2	
	E_2	11·9 p		f_4	6·9 a	$E_1 e_4$	6·3	$E = 6^h 3$
7.	f_2	5·8 a		e_4	1·5 p	$E_2 e_3$	6·4	
	e_2	12·6 p		F_5	7·1 p	$e_1 E_4$	6·1	$e = 6^h 1$
	F_3	5·6 p				$e_2 E_3$	6·2	

Hafenzeit $H = 6^h 2$

14. Zara.

Aufstellungsort: Im Hafen beim Sanitätsgebäude.

1906		Hafenzeit						Flutgröße in Zentimetern		
		F	f	E	e	$F—f$	H	Min.	Max.	Mittel
○ Mai	8.	$8^h 7$	$7^h 5$	$8^h 3$	$7^h 5$	$+1^h 2$	$8^h 0$	2	53	28
● Aug.	20.	7·7	9·0	8·4	7·1	—1·3	8·1	8	44	26
○ Sept.	3.	9·3	6·7	8·1	8·1	+2·6	8·1	8	35	22
○ Okt.	3.	8·3	6·9	7·1	7·9	+1·4	7·6	15	25	20
● »	18.	8·2	7·3	7·9	7·6	+0·9	7·8	7	41	24
● Nov.	16.	9·4	6·8	7·8	7·9	+2·6	8·0	1	43	22

Mittel $H = 7^h 9$ Flutgröße 24 *cm*

15. Punte bianche.

Neumond, obere Kulmination am 12. Mai 1907, $\alpha = 0 \cdot 1$ p.

Aufstellungsort: Nördlich des Leuchtturmes am offenen Meere.

Wegen der besonders großen täglichen Ungleichheit erscheint in den letzten Beobachtungstagen die Gegenflut unterdrückt.

Mai			Mai			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
8.	e_1	9^h5 a	13.	E_5	2^h3 a	$F_1 F_9$	6^h6	
	F_1	6·1 p		f_5	7·9 a	$F_2 F_8$	6·7	
	E_1	11·8 p		e_6	—	$F_3 F_7$	6·4	$F = 6^h5$
9.	f_1	3·9 a		F_6	6·3 p	$F_4 F_6$	6·2	
	e_2	10·1 a	14.	E_6	2·8 a	F_5	6·6	
	F_2	5·8 p		f_6	—	$f_1 f_8$	—	
10.	E_2	12·8 a		e_7	—	$f_2 f_7$	—	$f = 7^h8$
	f_2	5·1 a		F_7	6·9 p	$f_3 f_6$	—	
	e_3	10·2 a	15.	E_7	3·2 a	$f_4 f_5$	7·8	
	F_3	6·0 p		f_7	—	$E_1 e_9$	—	
11.	E_3	1·1 a		e_8	—	$E_2 e_8$	—	
	f_3	6·1 a		F_8	7·7 p	$E_3 e_7$	—	$E = -$
	e_4	10·7 a	16.	E_8	4·4 a	$E_4 e_6$	—	
	F_4	6·3 p		f_8	—	$e_1 E_9$	7·2	
12.	E_4	2·1 a		e_9	—	$e_2 E_8$	7·2	
	f_4	7·8 a		F_9	7·2 p	$e_3 E_7$	6·6	$e = 6^h8$
	e_5	10·1 a	17.	E_9	5·1 a	$e_4 E_6$	6·7	
	F_5	6·7 p				$e_5 E_5$	6·1	

Hafenzeit $H = 7^h0$

16. Premuda.

Vollmond, untere Kulmination am 28. April 1907, $\alpha = 0 \cdot 3$ p.

Aufstellungsort: Im kleinen Hafen Loza, hinter dem Wellenbrecher.

April			April			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
27.	f_1	6^h9 p	29.	e_2	3^h0 a	$F_1 F_2$	9^h1	$F = 9^h1$
28.	e_1	2·1 a		F_2	9·7 a	$f_1 f_3$	7·0	$f = 6^h8$
	F_1	9·1 a		E_2	2·0 p	f_2	6·6	
	E_1	1·5 p		f_3	7·6 p	$E_1 e_2$	8·0	$E = 8^h0$
	f_2	6·9 p				$e_1 E_2$	7·8	$e = 7^h8$

Hafenzeit $H = 7^h9$

17. Novaglia.

Vollmond am 22. September 1907, Mondkulmination $\alpha = 0 \cdot 1$ a.

Aufstellungsort: Im Hafen auf einem viereckigen Aufbau bei der Dogana.

Sept.			Sept.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
19.	f_1	5^h6 p	22.	E_3	2^h8 p	$F_1\,F_5$	9^h5	
20.	e_1	1·0 a		f_4	8·0 p	$F_2\,F_4$	—	$F = 9^h7$
	F_1	9·0 a	23.	e_4	2·3 a	F_3	9·9	
	E_1	1·7 p		F_4	—	$f_1\,f_6$	7·0	
	f_2	6·6 p		E_4	3·1 p	$f_2\,f_5$	7·3	$f = 7^h3$
21.	e_2	1·8 a		f_5	8·1 p	$f_3\,f_4$	7·7	
	F_2	8·6 a	24.	e_5	2·3 a	$E_1\,e_5$	7·9	$E = 8^h0$
	E_2	2·1 p		F_5	10·1 a	$E_2\,e_4$	8·1	
	f_3	7·6 p		E_5	3·8 p	$e_1\,E_5$	8·3	
22.	e_3	2·3 a		f_6	8·6 p	$e_2\,E_4$	8·4	$e = 8^h4$
	F_3	10·0 a				$e_3\,E_3$	8·5	

Hafenzeit $H = 8^h4$

18. Lussin piccolo.

Vollmond, untere Kulmination am 27. Mai 1907, $\alpha = 11 \cdot 9$ a.

Aufstellungsort: Im Hofe des Hafenkapitanatsgebäudes.

Mai			Mai			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
24.	E_1	11^h2 a	28.	e_4	3^h6 a	$F_1\,F_6$	9^h9	
	f_1	6·3 p		F_4	10·8 a	$F_2\,F_5$	10·3	$F = 10^h2$
25.	e_1	1·1 a		E_5	12·7 p	$F_3\,F_4$	10·4	
	F_1	6·9 a		f_5	7·5 p	$f_1\,f_7$	7·3	
	E_2	11·4 a	29.	e_5	3·9 a	$f_2\,f_6$	7·3	$f = 7^h3$
	f_2	6·8 p		F_5	12·3 p	$f_3\,f_5$	7·4	
26.	e_2	2·0 a		E_6	2·2 p	f_4	7·1	
	F_2	8·1 a		f_6	7·5 p	$E_1\,e_7$	8·3	
	E_3	12·0 p	30.	e_6	4·9 a	$E_2\,e_6$	8·3	$E = 8^h2$
	f_3	7·1 p		F_6	12·6 p	$E_3\,e_5$	8·1	
27.	e_3	2·8 a		E_7	3·9 p	$E_4\,e_4$	8·2	
	F_3	9·7 a		f_7	8·1 p	$e_1\,E_7$	8·6	
	E_4	12·6 p	31.	e_7	5·2 a	$e_2\,E_6$	8·2	$e = 8^h2$
	f_4	7·0 p				$e_3\,E_5$	7·9	

Hafenzeit $H = 8^h5$

19. Arbe.

Vollmond am 22. September 1907, Mondkulmination $\alpha = 0^h1$ a.

Aufstellungsort: Im Hafen in der Nähe des Landungsplatzes, auf der abgetragenen alten Mauer.

Sept.			Sept.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
19.	f_1	5^h2 p	22.	E_3	2^h8 p	$F_1\ F_5$	9^h1	
20.	e_1	0·6 a		f_4	7·9 p	$F_2\ F_4$	8·9	$F = 8^h9$
	F_1	8·3 a	23.	e_4	2·3 a	F_3	8·8	
	E_1	1·6 p		F_4	9·5 a	$f_1\ f_6$	7·1	
	f_2	6·2 p		E_4	3·2 p	$f_2\ f_5$	7·0	$f = 7^h3$
21.	e_2	1·7 a		f_5	8·0 p	$f_3\ f_4$	7·7	
	F_2	8·4 a	24.	e_5	2·6 a	$E_1\ e_5$	8·0	$E = 8^h1$
	E_2	2·2 p		F_5	10·0 a	$E_2\ e_4$	8·2	
	f_3	7·6 p		E_5	3·9 p	$e_1 E_5$	8·6	
22.	e_3	2·3 a		f_6	9·1 p	$e_2 E_4$	8·4	$e = 8^h5$
	F_3	8·9 a				$e_3 E_3$	8·5	

Hafenzeit $H = 8^h2$

20. Zengg.

1907			Hafenzeit						Flutgröße in Zentimetern		
			F	f	E	e	$F-f$	H	Min.	Max.	Mittel
●	Juni	11.	6^h9	9^h6	8^h2	7^h7	-2^h7	8^h1	4	58	31
○	»	26.	10·5	7·0	7·8	8·4	+3·5	8·4	8	70	39
●	Juli	10.	7·2	10·2	8·6	7·8	−3·0	8·5	3	64	34
○	»	24.	9·8	7·4	8·0	8·3	+2·4	8·4	11	66	39
●	Aug.	9.	7·0	9·2	8·3	8·2	−2·2	8·2	13	54	34
○	»	23.	8·8	7·4	8·2	8·6	+1·4	8·3	23	49	36
●	Sept.	7.	7·5	8·6	8·4	8·2	−1·1	8·2	14	49	32
○	»	22.	8·7	7·2	8·0	8·3	+1·5	8·1	27	47	37
●	Okt.	7.	8·4	8·5	8·5	8·5	−0·1	8·5	27	45	36
○	»	22.	7·8	8·2	7·9	8·1	−0·4	8·0	19	46	33

Mittel $H = 8^h3$ Flutgröße 35 *cm*

21. Veglia.

Neumond am 7. September 1907, Mondkulmination $\alpha = 11^{h}8$ a.
Aufstellungsort: Im Hafen am kleinen Molo des Hafenkapitanats.

Sept.			Sept.			Mittel —α		Hafenzeit aus:
4.	e_1	$12^{h}8$ p	8.	E_4	$1^{h}6$ a	$F_1\ F_7$	$7^{h}5$	$F = 7^{h}6$
	F_1	5·4 p		f_4	8·7 a	$F_2\ F_6$	7·4	
5.	E_1	1·0 a		e_5	3·0 p	$F_3\ F_5$	8·0	
	f_1	9·9 a		F_5	8·6 p	F_4	7·5	
	e_2	12·9 p	9.	E_5	2·6 a	$f_1\ f_6$	10·0	$f = 9^{h}3$
	F_2	4·9 p		f_5	9·0 a	$f_2\ f_5$	9·1	
6.	E_2	1·4 a		e_6	3·0 p	$f_3\ f_4$	8·9	
	f_2	8·7 a		F_6	9·4 p	$E_1\ e_7$	8·5	$E = 8^{h}4$
	e_3	1·6 p	10.	E_6	3·3 a	$E_2\ e_6$	8·4	
	F_3	6·9 p		f_6	9·7 a	$E_3\ e_5$	8·3	
7.	E_3	1·2 a		e_7	3·6 p	$e_1\ E_7$	8·5	$e = 8^{h}3$
	f_3	8·6 a		F_7	9·2 p	$e_2\ E_6$	8·3	
	e_4	2·1 p	11.	E_7	3·8 a	$e_3\ E_5$	8·3	
	F_4	7·3 p				$e_4\ E_1$	8·1	

Hafenzeit $H = 8^{h}4$

22. Fiume.

Aufstellungsort: Im Bootshafen der Marineakademie.

		Hafenzeit						Flutgröße in Zentimetern		
1907		F	f	E	e	$F—f$	H	Min.	Max.	Mittel
● Juni	11.	$6^{h}9$	$10^{h}1$	$8^{h}3$	$8^{h}3$	$-3^{h}2$	$8^{h}4$	4	61	33
○ »	26.	10·4	7·3	7·9	8·7	+3·1	8·6	8	74	41
● Juli	10.	7·4	11·0	9·3	8·1	−3·6	8·9	4	67	36
○ »	24.	9·9	7·7	8·5	8·7	+2·2	8·7	13	69	41
● Aug.	9.	7·5	9·6	8·5	8·3	−2·1	8·5	15	54	35
○ »	23.	9·6	7·8	8·7	8·9	+1·8	8·8	27	53	40
● Sept.	7.	7·6	8·7	8·6	8·5	−1·1	8·3	15	55	35
○ »	22.	8·9	7·8	8·4	8·4	+1·1	8·4	37	42	40
● Okt.	7.	8·2	8·3	8·2	8·8	−0·1	8·4	32	45	39
○ »	22.	8·2	8·5	8·2	8·3	−0·3	8·3	23	50	37

Mittel $H = 8^{h}5$ Flutgröße 38 *cm*

23. Cherso.

Neumond am 7. September 1907, Mondkulmination $\alpha = 11^h8$ a.
Aufstellungsort: Beim Hafenkapitanatsgebäude.

Sept.			Sept.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
4.	e_1	12^h1 p	8.	E_4	1^h9 a	F_1 F_7	8^h2	
	F_1	6·0 p		f_4	8·7 a	F_2 F_6	7·9	$F = 8^h1$
5.	E_1	1·6 a		e_5	3·2 p	F_3 F_5	8·2	
	f_1	9·1 a		F_5	9·0 p	F_4	8·2	
	e_2	1·2 p	9.	E_5	2·8 a	f_1 f_6	9·7	
	F_2	5·6 p		f_5	9·2 a	f_2 f_5	9·2	$f = 9^h3$
6.	E_2	1·9 a		e_6	3·4 p	f_3 f_4	9·0	
	f_2	8·7 a		F_6	9·8 p	E_1 e_7	8·5	
	e_3	2·9 p	10.	E_6	3·8 a	E_2 e_6	8·9	$E = 8^h7$
	F_3	7·0 p		f_6	9·9 a	E_3 e_5	8·7	
7.	E_3	1·7 a		e_7	3·9 p	e_1 E_7	8·4	
	f_3	8·9 a		F_7	9·9 p	e_2 E_6	8·7	$e = 8^h7$
	e_4	2·7 p	11.	E_7	4·2 a	e_3 E_5	9·1	
	F_4	8·0 p				e_4 E_4	8·5	

Hafenzeit $H = 8^h7$

24. Unie.

Vollmond, untere Kulmination am 27. Mai 1907, $\alpha = 11^h9$ a.
Aufstellungsort: Auf dem Molo beim Orte Unie, auf der Westseite der Insel gleichen Namens.

Mai			Mai			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
24.	E_1	11^h6 a	28.	e_4	3^h7 a	F_1 F_6	10^h2	
	f_1	6·6 p		F_4	10·8 a	F_2 F_5	10·2	$F = 10^h3$
25.	e_1	1·5 a		E_5	1·6 p	F_3 F_4	10·4	
	F_1	7·4 a		f_5	7·8 p	f_1 f_7	7·8	
	E_2	11·9 p	29.	e_5	4·2 a	f_2 f_6	7·8	
	f_2	7·1 p		F_5	11·8 a	f_3 f_5	7·7	$f = 7^h8$
26.	e_2	2·2 a		E_6	2·3 p	f_4	7·8	
	F_2	8·3 a		f_6	8·2 p	E_1 e_7	8·6	
	E_3	12·6 p	30.	e_6	5·1 a	E_2 e_6	8·6	$E = 8^h6$
	f_3	7·4 p		F_6	12·7 p	E_3 e_5	8·5	
27.	e_3	2·8 a		E_7	4·1 p	E_4 e_4	8·5	
	F_3	9·7 a		f_7	8·8 p	e_1 E_7	8·9	
	E_4	1·0 p	31.	e_7	5·4 a	e_2 E_6	8·4	$e = 8^h5$
	f_4	7·7 p				e_3 E_5	8·3	

Hafenzeit $H = 8^h8$

25. Rabaz.

Vollmond am 22. August 1907, Mondkulmination $\alpha = 11^h6$ p.
Aufstellungsort: Am Ende des Hafens, an der Straße nach Rabaz.

Aug.			Aug.			Mittel	$-\alpha$	Hafenzeit aus:
19.	E_1	11^h2 a	23.	E_5	2^h7 p	F_1 F_7	9^h4	
	f_1	—		f_5	8·0 p	F_2 F_6	—	$F = 9^h7$
20.	e_1	11·9 p	24.	e_5	3·0 a	F_3 F_5	—	
	F_1	7·3 a		F_5	9·8 a	F_4	9·9	
	E_2	—		E_6	3·2 p	f_1 f_8	—	
	f_2	—		f_6	8·9 p	f_2 f_7	—	
21.	e_2	—	25.	e_6	3·4 a	f_3 f_6	8·2	$f = 8^h1$
	F_2	—		F_6	—	f_4 f_5	7·9	
	E_3	12·5 p		E_7	—	E_1 e_8	8·1	
	f_3	6·7 p		f_7	—	E_2 e_7	—	
22.	e_3	—	26.	e_7	—	E_3 e_6	8·4	$E = 8^h5$
	F_3	—		F_7	11·0 a	E_4 e_5	9·0	
	E_4	2·1 p		E_8	4·4 p	e_1 E_8	8·6	
	f_4	7·0 p		f_8	9·3 p	e_2 E_7	—	
23.	e_4	2·2 a	27.	e_8	4·2 a	e_3 E_6	—	$e = 8^h3$
	F_4	9·5 a				e_4 E_5	7·9	

Hafenzeit $H = 8^h7$

26. Porer.

Vollmond am 22. August 1907, Mondkulmination $\alpha = 11^h6$ p.
Kleine Felseninsel mit Leuchtturm. — Aufstellungsort: Beim Landungsplatz in einer Felsspalte am Meeresstrande.

Aug.			Aug.			Mittel	$-\alpha$	Hafenzeit aus:
20.	E_1	0^h7 p	23.	E_4	3^h1 p	F_1 F_5	9^h9	
	f_1	6·5 p		f_4	8·5 p	F_2 F_4	10·2	$F = 10^h0$
21.	e_1	1·4 a	24.	e_4	3·3 a	F_3	10·0	
	F_1	8·4 a		F_4	9·9 a	f_1 f_6	8·7	
	E_2	1·5 p		E_5	3·5 p	f_2 f_5	8·4	$f = 8^h5$
	f_2	6·8 p		f_5	9·2 p	f_3 f_4	8·3	
22.	e_2	3·0 a	25.	e_5	4·2 a	E_1 e_6	9·7	
	F_2	9·7 a		F_5	10·6 a	E_2 e_5	9·3	$E = 9^h3$
	E_3	1·4 p		E_6	4·6 p	E_3 e_4	8·8	
	f_3	7·3 p		f_6	10·0 p	e_1 E_6	9·4	
23.	e_3	2·7 a	26.	e_6	5·9 a	e_2 E_5	9·7	$e = 9^h5$
	F_3	9·6 a				e_3 E_4	9·3	

Hafenzeit $H = 9^h3$

27. Rovigno.

Vollmond, untere Kulmination am 29. März 1907, $\alpha = 11^h9$ a.
Aufstellungsort: Im Hofe des Hafenkapitanatsgebäudes.

März			März			Mittel —α		Hafenzeit aus:
26.	F_1	7^h1 a	30.	e_4	3^h1 a	$F_1\ F_8$	9^h7	
	E_1	1·4 p		F_5	8·8 a	$F_2\ F_7$	9·1	$F = 9^h3$
	f_1	8·0 p		E_5	3·1 p	$F_3\ F_6$	9·2	
27.	e_1	1·8 a		f_5	9·6 p	$F_4\ F_5$	—	
	F_2	7·1 a	31.	e_5	4·0 a	$f_1\ f_7$	9·3	
	E_2	1·5 p		F_6	9·9 a	$f_2\ f_6$	9·3	
	f_2	8·3 p		E_6	3·6 p	$f_3\ f_5$	9·4	$f = 9^h4$
28.	e_2	2·3 a	April	f_6	10·1 p	f_4	9·6	
	F_3	8·3 a	1.	e_6	5·0 a	$E_1\ e_7$	9·5	
	E_3	2·4 p		F_7	10·9 a	$E_2\ e_6$	9·4	$E = 9^h3$
	f_3	8·9 p		E_7	4·0 p	$E_3\ e_5$	9·3	
29.	e_3	2·9 a		f_7	10·4 p	$E_4\ e_4$	9·1	
	F_4	—	2.	e_7	5·4 a	$e_1\ E_7$	9·0	
	E_4	2·9 p		F_8	12·0 p	$e_2\ E_6$	9·1	$e = 9^h1$
	f_4	9·5 p				$e_3\ E_5$	9·1	

Hafenzeit $H = 9^h3$

28. Parenzo.

Vollmond, untere Kulmination am 29. März 1907, $\alpha = 11^h9$ a.
Aufstellungsort: Im Hafen auf der Riva beim Zollhause.

März			März			Mittel —α		Hafenzeit aus
26.	E_1	1^h5 p	30.	e_4	3^h3 a	$F_1\ F_6$	—	
	f_1	8·0 p		F_4	9·0 a	$F_2\ F_5$	9^h2	$F = 9^h2$
27.	e_1	2·1 a		E_5	3·4 p	$F_3\ F_4$	9·1	
	F_1	7·6 a		f_5	9·6 p	$f_1\ f_7$	—	
	E_2	1·5 p	31.	e_5	4·1 a	$f_2\ f_6$	9·3	
	f_2	8·2 p		F_5	9·8 a	$f_3\ f_5$	9·4	$f = 9^h4$
28.	e_2	2·5 a		E_6	3·5 p	f_4	9·5	
	F_2	8·4 a	April	f_6	10·1 p	$E_1\ e_7$	9·6	
	E_3	2·7 p	1.	e_6	4·9 a	$E_2\ e_6$	9·3	$E = 9^h4$
	f_3	8·9 p		F_6	—	$E_3\ e_5$	9·5	
29.	e_3	3·1 a		E_7	4·4 p	$E_4\ e_4$	9·2	
	F_3	8·9 a		f_7	—	$e_1\ E_7$	9·4	
	E_4	2·9 p	2.	e_7	5·4 a	$e_2\ E_6$	9·1	$e = 9^h3$
	f_4	9·4 p				$e_3\ E_5$	9·4	

Hafenzeit $H = 9^h3$

29. Pirano.

Neumond, obere Kulmination am 12. April 1907, $\alpha = 11^h9$ a.
Aufstellungsort: An der Meeresküste beim Hafenkapitanat, zwischen großen Steinen.

April			April			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
9.	F_1	6^h9 p	13.	E_4	3^h7 a	$F_1\ F_7$	8^h7	
10.	E_1	3·7 a		f_4	10·0 a	$F_2\ F_6$	9·8	$F = 9^h2$
	f_1	8·6 a		e_4	3·4 p	$F_3\ F_5$	9·2	
	e_1	2·7 p		F_5	9·3 p	F_4	9·2	
	F_2	9·4 p	14.	E_5	4·1 a	$f_1\ f_6$	9·7	
11.	E_2	4·4 a		f_5	10·1 a	$f_2\ f_5$	9·3	$f = 9^h6$
	f_2	8·3 a		e_5	3·8 p	$f_3\ f_4$	9·7	
	e_2	1·9 p		F_6	9·9 p	$E_1\ e_6$	10·2	
	F_3	8·8 p	15.	E_6	4·1 a	$E_2\ e_5$	10·2	$E = 10^h0$
12.	E_3	3·6 a		f_6	10·6 a	$E_3\ e_4$	9·6	
	f_3	9·2 a		e_6	4·5 p	$e_1\ E_6$	9·5	
	e_3	2·5 p		F_7	10·3 p	$e_2\ E_5$	9·1	$e = 9^h3$
	F_4	9·1 p				$e_3\ E_4$	9·2	

Hafenzeit $H = 9^h5$

30. Grado.

Neumond, obere Kulmination am 12. April 1907, $\alpha = 11^h9$ a.
Aufstellungsort: Nahe am Ende des langen und schmalen Hafens beim Kapitanatsgebäude.

April			April			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
9.	e_1	1^h4 p	13.	E_1	4^h2 a	$F_1\ F_7$	9^h8	
	F_1	8·7 p		f_4	10·8 a	$F_2\ F_6$	9·9	$F = 9^h8$
10.	E_1	3·0 a		e_5	3·8 p	$F_3\ F_5$	9·7	
	f_1	8·2 a		F_5	9·9 p	F_4	9·9	
	e_2	1·8 p	14.	E_5	4·5 a	$f_1\ f_6$	9·8	
	F_2	9·0 p		f_5	11·0 a	$f_2\ f_5$	10·1	$f = 10^h1$
11.	E_2	3·5 a		e_6	4·4 p	$f_3\ f_4$	10·5	
	f_2	9·0 a		F_6	10·5 p	$E_1\ e_7$	10·1	
	e_3	2·2 p	15.	E_6	4·5 a	$E_2\ e_6$	10·1	$E = 10^h0$
	F_3	9·2 p		f_6	11·2 a	$E_3\ e_5$	9·9	
12.	E_3	3·8 a		e_7	4·9 p	$e_1\ E_7$	9·4	
	f_3	10·0 a		F_7	10·7 p	$e_2\ E_6$	9·3	
	e_4	2·9 p	16.	E_7	5·1 a	$e_3\ E_5$	9·5	$e = 9^h5$
	F_4	9·8 p				$e_4\ E_4$	9·7	

Hafenzeit $H = 9^h9$

31. San Benedetto del Tronto (Italien).

Vollmond am 22. September 1907, Mondkulmination $\alpha = 0^{h}1$ a.
Aufstellungsort: Im Seebadeetablissement.

Sept.			Sept.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
20.	F_1	$2^{h}4$ a	22.	E_3	$8^{h}5$ a	F_1 F_5	$3^{h}1$	
	E_1	7·2 a		f_3	3·0 p	F_2 F_4	3·0	$F = 3^{h}1$
	f_1	2·1 p		e_3	9·7 p	F_3	—	
	e_1	9·2 p	23.	F_4	3·5 a	f_1 f_4	2·6	$f = 2^{h}7$
21.	F_2	2·7 a		E_4	8·9 a	f_2 f_3	2·7	
	E_2	8·1 a		f_4	3·2 p	E_1 e_4	2·4	$E = 2^{h}6$
	f_2	2·6 p		e_4	9·8 p	E_2 e_3	2·8	
	e_2	9·7 p	24.	F_5	3·9 a	e_1 E_4	3·0	$e = 3^{h}0$
22.	F_3	—				e_2 E_3	3·0	

Hafenzeit $H = 2^{h}9$

32. Ortona a mare (Italien).

Neumond, untere Kulmination am 8. September 1907, $\alpha = 0^{h}1$ a.
Aufstellungsort: Im Seebadeetablissement außerhalb des Hafens.

Sept.			Sept.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
6.	f_1	$2^{h}5$ a	8.	e_3	$8^{h}9$ a	F_1 F_4	$3^{h}2$	$F = 3^{h}0$
	e_1	7·6 a		F_3	3·2 p	F_2 F_3	2·8	
	F_1	2·7 p		E_3	9·7 p	f_1 f_5	3·4	
	E_1	10·0 p	9.	f_4	4·0 a	f_2 f_4	3·6	$f = 3^{h}6$
7.	f_2	3·3 a		e_4	9·9 a	f_3	3·7	
	e_2	8·4 a		F_4	3·9 p	E_1 e_4	3·9	$E = 3^{h}5$
	F_2	2·5 p		E_4	10·1 p	E_2 e_3	3·0	
	E_2	9·3 p	10.	f_5	4·4 a	e_1 E_4	2·8	$e = 2^{h}9$
8.	f_3	3·8 a				e_2 E_3	3·0	

Hafenzeit $H = 3^{h}3$

33. **Manfredonia** (Italien).

Vollmond, untere Kulmination am 23. August 1907, $\alpha = 0^h$ l. p.
Aufstellungsort: Im Seebadeetablissement im Hafen.

Aug.			Aug.			Mittel $-\alpha$		Hafenzeit aus:
21.	f_1	2^h4 p	23.	e_3	10·7 p	$F_1\ F_4$	—	$F = 3^h7$
	e_1	9·0 p	24.	F_3	3·8 a	$F_2\ F_3$	3^h7	
22.	F_1	—		E_3	10·0 a	$f_1\ f_5$	3·8	$f = 3^h9$
	E_1	9·6 a		f_4	4·3 p	$f_2\ f_4$	4·0	
	f_2	3·8 p		e_4	10·9 p	f_3	3·8	
	e_2	9·5 p	25.	F_4	—	$E_1\ e_4$	4·2	$E = 4^h0$
23.	F_2	3·7 a		E_4	11·0 a	$E_2\ e_3$	3·9	
	E_2	9·2 a		f_5	5·3 p	$e_1\ E_4$	4·0	$e = 3^h8$
	f_3	3·9 p				$e_2\ E_3$	3·7	

Hafenzeit $H = 3^h9$

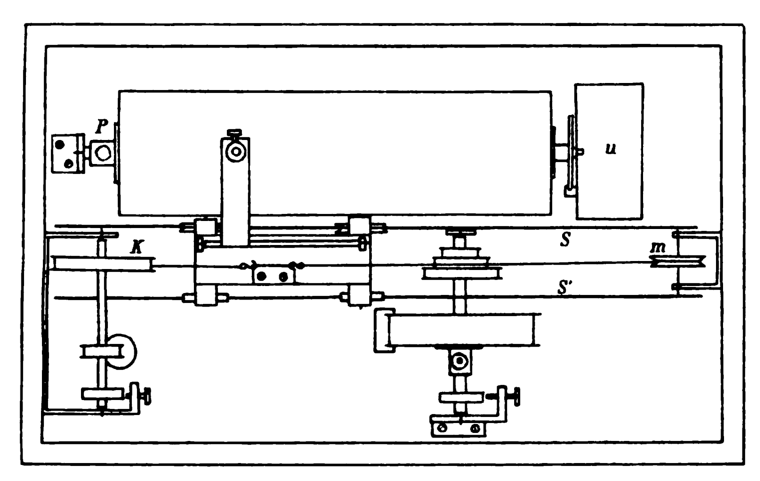
Tabelle II.

Resultate der Beobachtungen.

Station	Hafenzeit						Flutgröße (in Zentimetern)			
	Hafenzeit	Hafenzeit aus				$F-f$	beobachtete Flutgröße			Reduzierte Flutgröße
		F	f	E	e		Min.	Max.	Mittel	
1. Budua, 3. September 1906, ○	3^h9	4^h1	3^h7	3^h8	3^h9	$+0^h4$	27	37	32	30
2. Ragusa[1]	4·0	—	—	—	—	—	—	—	31	31
3. Trstenik, 2. Oktober 1906, ○	4·0	4·1	3·8	4·0	3·9	+ 0·3	29	39	34	35
4. Pelagosa, 1904[1]	4·0	—	—	—	—	—	—	—	29	29
5. Vallegrande, 18. September 1906, ●	4·2	4·1	4·3	4·4	4·1	— 0·2	19	44	32	28
6. S. Andrea, 1904[1]	4·3	—	—	—	—	—	—	—	25	25
7. Makarska, 21. Oktober 1907, ○	4·1	4·2	3·9	4·1	4·2	+ 0·3	29	36	32	29
8. Spalato, 21. Oktober 1907, ○	4·4	4·5	4·0	4·4	4·5	+ 0·5	23	33	28	25
9. Rogožnica, 1906[1]	4·6	—	—	—	—	—	—	—	24	24
10. Zuri, 12. Mai 1907, ●	4·5	4·8	4·1	4·3	4·8	+ 0·7	8	34	21	23
11. Sestrice, 1906[1]	5·1	—	—	—	—	—	—	—	20	20
12. Zara vecchia, 7. Oktober 1907, ●	5·4	5·1	5·8	5·5	5·3	— 0·7	15	28	22	19
13. Eso, 7. Oktober 1907, ●	6·2	5·7	6·5	6·3	6·1	— 0·8	13	32	23	20
14. Zara, 1906[1]	7·9	—	—	—	—	—	—	—	24	24
15. Punte bianche, 12. Mai 1907, ●	7·0	6·5	7·8	—	6·8	— 1·3	2	61	32	34

16. Premuda, 28. April 1907, ○........	7·9	9·1	6·8	8·0	7·8	+ 2·3	20	57	39	36
17. Novaglia, 22. September 1907, ○...	8·4	9·7	7·3	8·0	8·4	+ 2·4	21	35	28	23
18. Lussin piccolo, 27. Mai 1907, ○....	8·5	10·2	7·3	8·2	8·2	+ 2·9	8	62	35	32
19. Arbe, 22. September 1907, ○	8·2	8·9	7·3	8·1	8·5	+ 1·6	25	44	35	29
20. Zengg, 1907[1]	8·3	—	—	—	—	—	—	—	35	35
21. Veglia, 7. September 1907, ●......	8·4	7·6	9·3	8·4	8·3	— 1·7	12	53	33	30
22. Fiume, 1907[1]...................	8·5	—	—	—	—	—	—	—	38	38
23. Cherso, 7. September 1907, ●	8·7	8·1	9·3	8·7	8·7	— 1·2	15	54	35	32
24. Unie, 27. Mai 1907, ○............	8·8	10·3	7·8	8·6	8·5	+ 2·5	9	68	39	34
25. Rabaz, 22. August 1907, ○........	8·7	9·7	8·1	8·5	8·3	+ 1·6	26	67	47	42
26. Porer, 22. August 1907, ○.........	9·3	10·0	8·5	9·3	9·5	+ 1·5	27	50	39	34
27. Rovigno, 29. März 1907, ○........	9·3	9·3	9·4	9·3	9·1	— 0·1	59	73	66	60
28. Parenzo, 29. März 1907, ○........	9·3	9·2	9·4	9·4	9·3	— 0·2	37	49	43	39
29. Pirano, 12. April 1907, ●	9·5	9·2	9·6	10·0	9·3'	— 0·4	69	127	98	98
30. Grado, 12. April 1907, ●	9·9	9·8	10·1	10·0	9·5	— 0·3	58	118	88	88
31. S. Benedetto, 22. September 1907, ○.	2·9	3·1	2·7	2·6	3·0	+ 0·4	14	32	23	19
32. Ortona, 8. September 1907, ●	3·3	3·0	3·6	3·5	2·9	— 0·6	13	31	22	20
33. Manfredonia, 23. August 1907, ○ ...	3·9	3·7	3·9	4·0	3·8	— 0·2	38	46	42	37

[1] Station längerer Dauer; siehe Tabelle der Beobachtungen.



K
u
m
P
S S'

0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50cm

Photolithographie u. Druck des k. u. k. Militärgeographischen Institutes

R. v. Sterneck:



Isorachien

oder

Linien gleicher Hafenzeit.

Mertens F., Die kubischen Abel'schen Gleichungen des Bereichs ($\sqrt{-31}$).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 3—7.

Abel'sche Gleichungen, Die kubischen — des Bereichs ($\sqrt{-31}$).
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 3—7.

Exner F. M., Über eigentümliche Temperaturschwankungen von eintägiger Periode im Wolfgangsee.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 9—26.

Temperaturschwankungen, Über eigentümliche — von eintägiger Periode im Wolfgangsee.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 9—26.

Gmeiner J. A., Kriterien der Divergenz und Konvergenz von alternierenden unendlichen Kettenbrüchen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 27—51.

Kriterien der Divergenz und Konvergenz von alternierenden unendlichen Kettenbrüchen.
Gmeiner J. A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 27—51.

Kettenbrüche, alternierende unendliche, Kriterien der Divergenz und Konvergenz derselben.
Gmeiner J. A. Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 27—51.

Kohn G., Über einige Eigenschaften der allgemeinen Fläche dritter Ordnung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 53—73.

Flächen dritter Ordnung, einige Eigenschaften der allgemeinen —.
Kohn G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 53—73.

Korrespondenzen auf kubischen Plankurven, ihre Verwertung für die Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Kohn G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 53—73.

Schmidt W., Über die Reflexion der Sonnenstrahlung an Wasserflächen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75—89

Reflexion der Sonnenstrahlung an Wasserflächen.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75—89.

Sonnenstrahlung, Reflexion der — an Wasserflächen.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75—89.

Wasserflächen, Reflexion der Sonnenstrahlung an solchen.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75—89.

Schmidt W., Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 91—102.

Schwingungen, stehende, in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 91—102.

Flüssigkeiten, Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier - -.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 91—102.

Pick G., Zur hypergeometrischen Differentialgleichung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt. Bd. 117 (1908), p. 103—109.

Korrespondenzen auf kubischen Plankurven, ihre Verwertung für die Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Kohn G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 53—73.

Schmidt W., Über die Reflexion der Sonnenstrahlung an Wasserflächen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75—89.

Reflexion der Sonnenstrahlung an Wasserflächen.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75—89.

Sonnenstrahlung, Reflexion der — an Wasserflächen.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75 – 89.

Wasserflächen, Reflexion der Sonnenstrahlung an solchen.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 75—89.

Schmidt W., Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 91—102.

Schwingungen, stehende, in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 91—102.

Flüssigkeiten, Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 91—102.

Pick G., Zur hypergeometrischen Differentialgleichung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt. Bd. 117 (1908), p. 103—109.

Hypergeometrische Differentialgleichung.
Pick G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 103—109.

Differentialgleichung, Zur hypergeometrischen —.
Pick G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 103—109.

Lecher E., Bestimmung spezifischer Wärmen von Leitern bei verschiedenen Temperaturen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141.

Spezifische Wärme von Leitern bei hohen Temperaturen.
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141.

Eisen, Bestimmung der spezifischen Wärme bei hohen Temperaturen.
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141.

Nickel, Bestimmung der spezifischen Wärme bei hohen Temperaturen.
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141.

Hauser F., XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Eine Methode zur Aufzeichnung phonographischer Wellen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 143—150.

Phonographische Wellen, Eine Methode zur Aufzeichnung derselben. XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 143—150.

Hypergeometrische Differentialgleichung.
Pick G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 103—109.

Differentialgleichung, Zur hypergeometrischen — —.
Pick G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 103—109.

Lecher E., Bestimmung spezifischer Wärmen von Leitern bei verschiedenen Temperaturen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141.

Spezifische Wärme von Leitern bei hohen Temperaturen.
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141.

Eisen, Bestimmung der spezifischen Wärme bei hohen Temperaturen
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141.

Nickel, Bestimmung der spezifischen Wärme bei hohen Temperaturen
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 111—141

Hauser F., XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Eine Methode zur Aufzeichnung phonographischer Wellen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 143—150.

Phonographische Wellen, Eine Methode zur Aufzeichnung derselben. XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 143—150.

Phonogramm-Archivs-Kommission. XIV. Bericht. Eine Methode zur Aufzeichnung phonographischer Wellen.
Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 143—150.

Sprachlaute, Eine Methode zur Aufzeichnung der Phonogramme derselben. XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 143—150.

Sterneck R., v., Das Fortschreiten der Flutwelle im Adriatischen Meere.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 151—203.

Flutwelle, Das Fortschreiten der — im Adriatischen Meere.
Sterneck R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 151—203.

Adriatisches Meer, Das Fortschreiten der Flutwelle in demselben.
Sterneck R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt , Bd. 117 (1908), p. 151—203.

Gezeiten des adriatischen Meeres. Das Fortschreiten der Flutwelle im adriatischen Meere.
Sterneck R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 151—203.

Phonogramm-Archivs-Kommission. XIV. Bericht. Eine Methode zur Aufzeichnung phonographischer Wellen.
Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa Abt., Bd. 117 (1908), p. 143–150.

Sprachlaute, Eine Methode zur Aufzeichnung der Phonogramme derselben. XIV. Bericht der Phonogramm-Archivs-Kommission der kaiser. Akademie der Wissenschaften in Wien
Hauser F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 143–150.

Sterneck R., v., Das Fortschreiten der Flutwelle im Adriatischen Meere.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 151–208.

Flutwelle, Das Fortschreiten der — im Adriatischen Meere
Sterneck R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 151–208.

Adriatisches Meer, Das Fortschreiten der Flutwelle [illegible]
Sterneck R., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117, (1908), p. 151–208.

Gezeiten [illegible]
[illegible]
Sterneck R., v., Sitz. [illegible] Bd. 117 [illegible]
(1908), p. 151–208.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. II. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Zur Thermodynamik bewegter Systeme

(Fortsetzung)

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

7. Berechnung der Größe *H*.

Um die Funktion H durch die Variabeln U_0, v, β auszudrücken, setzen wir in (13) für p seinen Wert aus (6) ein und erhalten

$$(1-\beta^2)\frac{\partial H}{\partial \beta}+\beta H+\beta v\left(p_0\frac{\partial H}{\partial U_0}-\frac{\partial H}{\partial v}\right)=0. \qquad (15)$$

Diese partielle Differentialgleichung nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn wir an Stelle von β, v, U_0 die Größen β, v, S_0 als independente Variable wählen. Und zwar soll S_0 wieder der Wert der Entropie sein, wenn das System adiabatisch zur Ruhe gebracht wird; es ist natürlich $S = S_0$. Wir denken uns also U_0 durch Entropie und Volumen ausgedrückt; sei etwa

$$U_0 = F(S_0, v).$$

Dann ist:

$$\frac{\partial}{\partial v}-p_0\frac{\partial}{\partial U_0}=\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{S_0},$$

da sich nach (7) U_0 bei einer adiabatischen Volumsänderung um $-p_0 dv$ ändert. Führen wir ferner statt β die Variable:

$$\varkappa=\sqrt{1-\beta^2}$$

---

[1] Vergl. diese Sitzungsberichte, CXVI, p. 1391 (1907).

ein, so wird aus (15):

$$-\beta\varkappa\frac{\partial H}{\partial\varkappa}+\beta H-\beta v\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_{S_0}=0,$$

oder, wenn β von Null verschieden ist:

$$\varkappa\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left(\frac{H}{\varkappa}\right)+v\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{S_0}\left(\frac{H}{\varkappa}\right)=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $H/\varkappa$ eine Funktion von $v/\varkappa$ sein muß, welche natürlich außerdem von S_0 abhängen wird. Ferner muß H für $\beta=0$, $\varkappa=1$ mit U_0 identisch sein. Diesen Forderungen genügen wir, wenn wir

$$\frac{H}{\varkappa}=F\left(S_0,\frac{v}{\varkappa}\right)$$

setzen. $F\left(S_0,\frac{v}{\varkappa}\right)$ ist offenbar der Betrag der Energie des ruhenden Systems, wenn dasselbe adiabatisch von v auf $v/\varkappa$ expandiert wird; bezeichnen wir diesen Wert der Energie mit U_0', so wird:

$$H=\sqrt{1-\beta^2}\,.\,U_0'.$$

Nehmen wir nun der Lorentz'schen Hypothese entsprechend an, daß mit der Änderung der Geschwindigkeit eine Änderung des Volumens proportional $\sqrt{1-\beta^2}$ Hand in Hand geht, so ist U_0' die Energie des ruhenden Körpers; wir lassen dann den Akzent weg und setzen also:

$$H=\sqrt{1-\beta^2}\,.\,U_0. \tag{16}$$

8. Zusammenfassung der Resultate.

Mit Hilfe der Gleichungen (2) und (10) lassen sich jetzt Bewegungsgröße und Gesamtenergie (U) durch die Zustandsvariabeln des ruhenden Systems ausdrücken. (Wir haben hier zu beachten, daß die Gleichungen (1), (3), (4) und (5) jetzt nicht angewendet werden dürfen; dieselben gelten nur für Geschwindigkeitsänderungen bei konstantem Volumen.)

Wir erhalten:

$$U = H + \beta\phi = \sqrt{1-\beta^2}\, U_0 + \beta^2 (U + pv),$$

woraus sich unter Berücksichtigung der ersten Gleichung (14) ergibt:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (U_0 + \beta^2 p_0 v_0). \qquad (17)$$

Endlich ist die Bewegungsgröße nach (10):

$$\mathfrak{G} = \frac{\beta}{c}(pv + U) = \frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} (U_0 + p_0 v_0). \qquad (18)$$

Fassen wir alles zusammen, so gelangen wir zu dem Resultat:

Wird ein Körper, dessen Zustand in der Ruhe durch die Variabeln v_0, U_0, p_0, T_0, S_0 gegeben ist, adiabatisch auf die Geschwindigkeit βc gebracht, so nehmen die Zustandsvariabeln die Werte:

$$v = v_0 \sqrt{1-\beta^2} \qquad (14)$$

$$p = p_0$$

$$T = T_0 \sqrt{1-\beta^2} \qquad (14)$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (U_0 + \beta^2 p_0 v_0) \qquad (17)$$

$$H = \sqrt{1-\beta^2} \,.\, U_0 \qquad (16)$$

$$S = S_0$$

$$\mathfrak{G} = \frac{\beta}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (U_0 + p_0 v_0) \qquad (18)$$

an. Diese Gleichungen sind mit den Resultaten der Arbeit des Herrn Planck[1] in Übereinstimmung. Außer den Sätzen der Thermodynamik hat Herr Planck das Relativitätsprinzip benützt, während in unserer Darstellung die Aufstellung der Gleichung (10) für die Bewegungsgröße wesentlich ist.

---

[1] Berliner Berichte, 1907, p. 542.

9. Anwendung auf die Hohlraumstrahlung.

Wir legen unseren Berechnungen den relativen Strahlengang zu Grunde. Betrachten wir die Strahlung, deren (relative) Richtung mit der Bewegungsrichtung Winkel zwischen ψ und $\psi + d\psi$ einschließt; dieselbe trägt in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer zur Bewegungsrichtung senkrechten (mitbewegten) Ebene die Energiemenge:

$$2\pi J \sin\psi \cos\psi \, d\psi .$$

Wir nennen J die Intensität der totalen (relativen) Strahlung. Fällt diese Strahlung auf eine absorbierende Fläche, so leistet sie die Druckarbeit:[1]

$$q \cdot \frac{2\pi J \sin\psi \cos\psi \, d\psi}{c} \cdot \cos\varphi = 2\pi J \sin\psi \cos\psi \, d\psi . \beta \cos\varphi ,$$

wo φ der Winkel zwischen der absoluten Strahlungsrichtung und der Bewegungsrichtung ist. Die Differenz:

$$2\pi J \sin\psi \cos\psi \, d\psi (1 - \beta \cos\varphi) = 2\pi i \sin\psi \cos\psi \, d\psi$$

nennen wir die wahre (relative) Strahlung. Die wahre Strahlungsintensität

$$i = J(1 - \beta \cos\varphi) \tag{19}$$

ist für den Wärmetransport zwischen Körpern gleicher Geschwindigkeit maßgebend.[2]

Wir stellen uns auf den Standpunkt der Lorentz'schen Kontraktionshypothese und führen den Winkel ψ' durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi' = \varkappa \operatorname{tg}\psi \tag{20}$$
$$\varkappa^2 = 1 - \beta^2$$

---

[1] M. Abraham, Boltzmann-Festschrift, p. 90, 1904. Vergl. etwa F. Hasenöhrl, Jahrb. d. Radioaktivität, 2, p. 281 (1905).

[2] Diese Terminologie deckt sich mit der in einer früheren Arbeit (Ann. d. Phys., 15 [1904]) verwendeten. Dort steht an Stelle von J und i, i und i_0. Vergl. auch Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik, 2, p. 283 (1905).

ein. Es ist dann ψ' der Winkel, den ein mitbewegter Beobachter an einem Transporteur, dessen Dimensionen in der Bewegungsrichtung im Verhältnis $1 : \varkappa$ verkürzt sind, an Stelle von ψ abliest. Setzen wir

$$i \sin\psi \cos\psi\, d\psi = i' \sin\psi' \cos\psi' d\psi',$$

so ist i' die wahre Strahlungsintensität, die der mitbewegte Beobachter wahrnimmt, dessen Maßstäbe die erwähnte Verkürzung erfahren haben.

Die Größe i' muß konstant, d. h. vom Winkel ψ' unabhängig sein, d. h. die wahre Strahlung ist im verkürzten System nach allen Richtungen gleichmäßig verteilt; sie befolgt das Lambert'sche cos-Gesetz. Dann strahlen sich zwei beliebig orientierte, gleichbewegte Flächenelemente gleich viel Wärme zu. Ein in den Hohlraum gebrachter Spiegel ändert die Verteilung der Strahlung nicht, da für den relativen Strahlengang im verkürzten System die gewöhnlichen Reflexionsgesetze gelten. (Es wurde dies in allgemeinster Weise von H. A. Lorentz gezeigt[1] und läßt sich auch in diesem Falle direkt beweisen.)

Aus (20) folgt leicht:

$$\sin\psi' \cos\psi' d\psi' = \sin\psi \cos\psi\, d\psi \frac{\varkappa^2}{(1-\beta^2 \sin^2\psi)^2},$$

also ist:

$$i = i' \frac{\varkappa^2}{(1-\beta^2 \sin^2\psi)^2} = i' \frac{(1-\beta^2 \cos^2\psi')^2}{\varkappa^2}.^{2} \qquad (21)$$

---

[1] H. A. Lorentz, Versl. kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, 7, p. 507 (1899) und 12, p. 886 (1904). — Vergl. auch M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II, p. 282 (1905).

[2] Aus dieser Gleichung läßt sich leicht die absolute Strahlungsintensität berechnen. Dieselbe ist gleich:

$$J_{abs} = i\left(\frac{c}{c'}\right)^4$$

(vergl. F. Hasenöhrl, Ann. d. Phys., 16, p. 589 [1905]), wo

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{1+\beta^2-2\beta\cos\varphi}$$

ist und φ wieder die Richtung der absoluten Strahlen angibt. Es ist also

Der Energieinhalt des Hohlraumes ist:

$$U = 2\pi v \int_0^\pi \frac{J \sin\psi\, d\psi}{c'},$$

wo c' die Relativgeschwindigkeit bedeutet:

$$c' = c(-\beta \cos\psi + \sqrt{1-\beta^2 \sin^2\psi}).$$

Setzen wir in obigem Integral entsprechend (19):

$$J = i + J\beta \cos\varphi,$$

so wird:

$$U = 2\pi v \int_0^\pi \frac{i \sin\psi\, d\psi}{c'} + 2\pi v \beta \int_0^\pi \frac{J \cos\varphi \sin\psi\, d\psi}{c'}.$$

Der zweite Summand ist gleich:

$$q \cdot \frac{2\pi v}{c^2} \int_0^\pi \frac{J}{c'} \cdot c \cos\varphi . \sin\psi\, d\psi = q\mathfrak{G},$$

wie man am leichtesten durch Vergleich mit der vorletzten Gleichung p. 11 meiner ersten Mitteilung erkennt. Entsprechend (2) ist daher:

$$H = 2\pi v \int_0^\pi \frac{i \sin\psi\, d\psi}{c'}.$$

Die Größe H ist also mit der Energie der wahren Strahlung identisch, was ja zu erwarten war. Führen wir mittels (20) und (21) i' und ψ' ein, so wird

---

$$J_{\text{abs}} = i' \frac{\varkappa^2}{(1-\beta^2 \sin^2\psi)^2 \left(\frac{c'}{c}\right)^4} = i' \frac{\varkappa^2}{(1-\beta\cos\varphi)^4},$$

da $c'\sqrt{1-\beta^2 \sin^2\psi} = c(1-\beta\cos\varphi)$ ist (vergl. F. Hasenöhrl, Ann. d. Phys., 15, p. 347, Gl. 7 [1904]). Daß die absolute Strahlungsintensität sich mit der Richtung proportional $(1-\beta\cos\varphi)^4$ ändert, hat bereits Herr v. Mosengeil auf anderem Wege bewiesen (Ann. d. Phys., 22, p. 875, Gl. 11 [1907]).

$$H = \frac{2\varkappa v i'}{c\varkappa^2}\int_0^\pi \sin\psi' d\psi'(1+\beta\cos\psi')$$

$$= \frac{4\pi v}{\varkappa^2}\cdot\frac{i'}{c}.$$

Nun ist aber nach (16):

$$H = \sqrt{1-\beta^2}.U_0 = \varkappa\cdot\frac{4\pi v_0}{c}i_0,$$

wo i_0 die Strahlungsintensität im ruhenden Hohlraume bedeutet. Es muß also

$$\varkappa v_0 i_0 = \frac{1}{\varkappa^2} v i'$$

sein; oder, da $v = \varkappa v_0$:

$$i' = \varkappa^2 i_0.$$

Es stimmt dies mit den allgemein gültigen Sätzen der Theorie von H. A. Lorentz überein.[1]

Setzen wir nach dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetze

$$i_0 = \sigma T_0^4,$$

so wird (vergl. (14)):

$$i' = \varkappa^2\sigma T_0^4 = \frac{\sigma}{\varkappa^2}T^4.$$

Die Konstante des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes ist also durch $\varkappa^2$ zu dividieren.

Die Energiedichte der wahren Strahlung ist:

$$\frac{H}{v} = \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{i'}{\varkappa^2} = \frac{4\pi}{c}i_0;$$

sie hat also denselben Wert wie im ruhenden Hohlraume.

Die gesamte Energie ergibt sich aus (17); sie hat den Wert:

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)U_0 = \frac{4\pi v_0 i_0}{c}\cdot\frac{1+\frac{1}{3}\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

[1] Vergl. etwa M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II, p. 282 (1905).

Ich habe in früheren, bereits mehrfach zitierten Arbeiten Energieinhalt und scheinbare Masse eines bewegten Hohlraumes zu berechnen versucht. Ich ging dabei von der Annahme einer (nach allen Richtungen) isotropen Verteilung der wahren Strahlung aus. Ein sich dabei ergebender scheinbarer Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatze konnte durch zwei verschiedene Hypothesen gelöst werden. Entweder durch die Annahme einer Änderung des Emissionsvermögens des schwarzen Körpers oder durch die Hypothese einer Änderung der Dimensionen der Materie infolge der Bewegung. Ich habe mich auf das Studium der letzteren Hypothese beschränkt, jedoch ausdrücklich auch die Möglichkeit der ersteren Annahme hervorgehoben.[1] Die Isotropie der Verteilung der wahren Strahlung nahm ich an, damit die gegenseitige Zustrahlung zweier Elemente einander gleich sei. Stellt man sich, wie ich es tat, auf den Standpunkt der Lorentz'schen Kontraktionshypothese, so muß diese Annahme natürlich so modifiziert werden, daß die Isotropie der wahren Strahlung auf das verkürzte System Bezug hat. Ich habe diese Modifikation angedeutet,[2] mich jedoch darauf beschränkt, zu erwähnen, daß das von der Geschwindigkeit unabhängige Glied der scheinbaren Masse dadurch nicht berührt wird. Es geschah dies aus dem Grunde, daß mir damals kein Weg zur Berechnung des Emissionsvermögens des schwarzen Körpers als Funktion der Geschwindigkeit bekannt war, ich mich also auf das erste Glied der betreffenden Entwicklungen beschränken mußte. Diese Lücke ist seither durch die Arbeit des Herrn v. Mosengeil ausgefüllt worden. Dadurch und durch den glücklichen Gedanken desselben Autors, eine Änderung der Temperatur mit der Geschwindigkeit anzunehmen, ist es möglich geworden, die Vorgänge im bewegten Hohlraum eindeutig festzustellen. Ich habe dies im § 9 der vorliegenden Arbeit, vom Begriffe der wahren Strahlung ausgehend, getan; man kommt dann auch so zu denselben Resultaten wie Herr v. Mosengeil.

---

[1] Wenn also Herr v. Mosengeil am Schlusse seiner Arbeit sagt, ich hätte die Dimensionsänderung für nötig gehalten, so beruht dies auf einem Mißverständnis.

[2] Ann. d. Phys. (4), 15, p. 350 (1904).

Die absprechende Kritik meiner früheren Arbeit durch Herrn v. Mosengeil ist demnach nicht berechtigt. Ich habe die Gelegenheit benützt, dies hier ausführlicher zu besprechen, da meine erste Erwiderung[1] bei einer neuen Herausgabe der Arbeit des Herrn v. Mosengeil unberücksichtigt geblieben ist.

Jedenfalls ist auch in meinen früheren Arbeiten zuerst der Begriff einer von der inneren Strahlung und damit von der Temperatur abhängigen Masse aufgestellt und das von der Geschwindigkeit unabhängige Glied derselben für den Hohlraum berechnet worden. Es ist mir demnach unverständlich, warum Herr Planck, der diese Dinge in der Einleitung zu seiner letzten Publikation[2] über diesen Gegenstand ausführlich erörtert, dabei meine Arbeiten mit keinem Worte erwähnt.

---

[1] Ann. d. Phys., 22, p. 791 (1907).

[2] Berl. Ber., 1907, p. 542.

Die Häufigkeitszahlen der Bewölkung

von

Albert v. Obermayer,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1908.)

Die gebräuchliche Art, die Bewölkung nach Zehnteln des bedeckten Himmelsgewölbes zu schätzen, führt zwar zu ziemlich übereinstimmenden Mittelwerten für benachbarte Orte, gibt aber, sofern die Häufigkeitszahlen der einzelnen Bewölkungsgrade, etwa im Laufe eines Jahres, ins Auge gefaßt werden, zu manchen Bedenken über die Richtigkeit der Schätzungen Anlaß. Die Häufigkeitszahlen der Bewölkung folgen der Gauß'schen Fehlerverteilungsfunktion nicht. Die den Bewölkungen 0, 1 und 10 entsprechenden Häufigkeitszahlen erlangen die größten Werte, die der mittleren Bewölkungszahlen dagegen bleiben stets klein.

Wenn für verschiedene Stationen die Verteilungstafeln der Häufigkeitszahlen gebildet werden, so zeigen sich ganz auffallende Verschiedenheiten. In manchen Stationen sind einzelne der Bewölkungsgrade 1 bis 9 besonders häufig, andere recht selten aufgezeichnet worden. Es spricht sich dies in einer graphischen Darstellung der Verteilungstafel, in welcher zu den Bewölkungsgraden als Abszissen die Häufigkeitszahlen als Ordinaten aufgetragen werden, darin aus, daß die gebrochene Verbindungslinie der Ordinatenenden besonders auffällige Zacken zeigt. Es mag ja mitunter vorkommen, daß die Häufigkeit eines Bewölkungsgrades zwischen 0 und 10 in einem Jahre öfter vorkommt, es scheint aber doch ganz unwahrscheinlich, daß z. B., wie in den Beobachtungen des Jahres 1905

auf dem St. Gotthard, die Bewölkung 4 im Jahre 31mal, jene 5 100mal, jene 6 14mal und jene 7 102mal auftritt. Es findet sicherlich ein kontinuierlicher Übergang einer Häufigkeit in die andere statt, wie dies ja tatsächlich bei vielen anderen Stationen zutrifft.

Die Berechnung der Häufigkeitszahlen der Bewölkungsgrade und die Aufstellung einer Verteilungstafel läßt hiernach einen angenäherten Schluß auf die Richtigkeit der Schätzungen zu, weist grobe Fehler in denselben sofort aus und bietet das Mittel, dem Beobachter entsprechende Weisungen zu geben. Allerdings ist in letzterer Hinsicht eine gewisse Vorsicht einzuhalten.

Ich habe für mehrere Beobachtungsstationen die in Rede stehenden Verteilungstafeln gebildet und dabei die Häufigkeitszahlen derjenigen Stationen, von welchen mehr als drei Beobachtungen im Tage vorliegen, auf 3.365 = 1095 im Jahre umgerechnet.

Sonnblick

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1888......	72	112	90	66	43	52	29	34	63	56	481
1889......	70	84	72	53	33	50	12	52	66	36	567
1890......	97	103	75	60	45	57	10	40	82	20	506
1891......	118	117	74	61	59	21	15	30	55	39	506
1892......	138	118	69	50	43	36	23	41	58	23	499
1893......	99	128	70	62	38	36	32	34	74	43	479
1894......	115	89	75	47	74	25	81	21	55	16	497
1895......	10	36	65	19	96	16	107	13	53	2	678
1896......	17	26	33	49	67	27	78	5	62	7	727
1897......	127	48	53	34	60	24	68	11	98	11	561
1898......	144	82	64	41	41	28	38	25	58	29	545
1899......	154	93	47	39	37	47	26	46	45	75	486
1900......	122	112	72	44	33	32	51	68	56	35	468
1901	170	106	75	33	22	32	33	64	43	31	486
1902......	152	97	81	37	38	28	48	33	60	28	493
1903......	176	95	98	45	21	18	36	35	65	33	473
1904......	120	106	103	39	23	50	47	36	87	37	450
1905......	181	66	76	28	29	35	32	27	57	26	540
1906......	187	59	51	42	46	19	23	19	36	43	570

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Obir											
1901......	294	13	—	79	2	94	59	—	75	3	476
1902......	362	4	4	80	3	75	40	1	65	—	461
1903......	363	2	3	78	1	91	38	6	55	—	458
1904......	292	4	13	90	4	122	52	2	77	—	442
Mittel	328	6	5	82	2	95	47	2	68	1	459
St. Gotthard											
1905......	206	23	32	31	100	14	102	28	59	29	471
Säntis											
1905......	48	120	49	75	41	32	54	85	42	115	434
Pic du Midi de Bigorre											
1898......	234	69	138	69	51	42	48	51	57	15	332
1903......	163	45	182	69	37	53	42	51	58	11	384
Pic di Midi, Februar 1894—1903											
	261	57	135	41	35	37	43	43	63	20	360
Bagnère di Bigorre, 1903											
1903......	220	62	59	51	52	50	34	34	57	88	388
Puy de Dôme, Station du sommet											
1903......	126	62	48	61	45	22	31	33	29	48	590
Puy de Dôme, Station de la pleine											
1903......	165	50	52	62	48	70	58	52	59	84	365
Wien, Hohe Warte											
1903......	212	51	48	51	39	62	38	45	57	107	385
1904......	180	53	53	52	26	56	19	52	35	117	455
Kremsmünster											
1903......	231	49	37	45	25	19	45	35	49	25	535
1904......	166	58	51	33	29	26	38	52	59	32	554

Bremen

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1900......	138	96	48	38	29	33	41	46	69	169	388
1901......	152	104	60	50	37	34	42	42	81	127	366

Ben Nevis

1903......	342	92	52	49	44	33	47	56	64	96	220

Für den Sonnblick wurden die Häufigkeitszahlen der Bewölkung für die 19 Jahre 1888 bis 1906 gerechnet. Die so gewonnenen Verteilungstafeln lassen insbesondere den Einfluß eines Beobachterwechsels sehr deutlich erkennen. Statt einer allmählichen Abnahme der Häufigkeitszahlen von der Bewölkung 0 gegen jene 5 und eine darauf folgende Zunahme bis zur Bewölkung 10 ändern sich die Zahlen der Verteilungstafeln der Jahre 1894, 1895, 1896 und 1897 sprungweise. Im Jahre 1894 beobachtete noch Peter Lechner auf dem Sonnblick vom 1. Jänner bis zum 1. Juli, dann trat Adam Waggerl den Beobachtungsdienst an und damit stellen sich bereits Unregelmäßigkeiten ein. In den Jahren 1895 und 1896, während welchen Waggerl der Beobachtungsdienst oblag, sind diese Unregelmäßigkeiten besonders auffallend. Im Jahre 1897 nehmen dieselben wieder ab, denn vom 1. Juli dieses Jahres beobachtete Johann Moser. In der graphischen Darstellung beginnt die Verteilungskurve des Jahres 1894 Zacken zu zeigen, in jener der Jahre 1895 und 1896 sind diese Zacken besonders auffällig und deren Größe nimmt 1897 wieder ab.

Die Bewölkung 9 ist mit Ausnahme 1899 — Beobachter Hasenknopf — und 1906 — Beobachter Josef Külbel — seltener aufgezeichnet als jene 8. Die Bewölkungen 1 und 10 lassen beträchtliche Unterschiede in der Beurteilung erkennen. Nach Waggerl wäre in den Jahren 1895 und 1896 der Himmel über dem Sonnblick nur höchst selten rein gewesen, eine Angabe, welche den in den 17 übrigen Beobachtungsjahren gemachten Aufzeichnungen direkt zuwiderläuft.

Auf dem Obir wurde die Bewölkung mit großer Gleichförmigkeit geschätzt, aber die Bewölkungsgrade 1, 2, 4, 7 und 9 sind auffallend selten, jene 9 ist in drei Jahren gar nicht

aufgezeichnet. St. Gotthard und Säntis zeigen einen recht unregelmäßigen Verlauf der Häufigkeitskurve.

Auf dem Pic du Midi de Bigorre ist die Bewölkung 2 besonders häufig, jene 9 ebenso selten wie etwa auf dem Sonnblick aufgezeichnet. Dortselbst wird achtmal im Tage der Bewölkungsgrad eingetragen. Die für die Jahre 1898 und 1903 berechneten Häufigkeitszahlen, dann jene für die Monate Februar der Jahre 1894 bis 1903 sind auf 1095 im Jahre umgerechnet.

Die beiden Stationen Puy de Dôme, Station du sommet, und Puy de Dôme, Station de la pleine, zeigen einen ziemlich regelmäßigen Verlauf der Häufigkeitszahlen, ohne jene Seltenheit der Bewölkung 9, welche in den Häufigkeitszahlen der vorhergehenden Stationen hervortritt. Von diesen Stationen liegen je sechs Beobachtungen im Tage vor, so daß auch hier eine Umrechnung vorgenommen werden mußte.

Die Beobachtungsstationen Bremen, Bagnère de Bigorre, Kremsmünster und Wien zeigen einen regelmäßigen Verlauf der Häufigkeitszahlen.

Sehr gute Beobachtungen über Bewölkung liegen vom Ben Nevis vor. Dortselbst wurde stündlich beobachtet. In den mitgeteilten Zahlen sind unter 10 nur diejenigen Beobachtungen aufgenommen, bei welchen die Ansicht des Himmelsgewölbes frei war. Unter den 8760 Aufzeichnungen eines Jahres findet sich 5722mal Nebel, so daß die Häufigkeitszahlen aus 3038 Beobachtungen abgeleitet und dann auf 1095 im Jahre umgerechnet werden mußten.

Aus den Häufigkeitszahlen der anderen Hochgipfel, als Sonnblick, Obir, Pic du Midi, Puy de Dôme ist die Nebelbedeckung des Gipfels nicht ausgeschieden; es kommt recht selten vor, daß eine Bewölkung 10 bei freier Ansicht des Himmelsgewölbes aufgezeichnet wurde, so z. B. für Sonnblick:

	1892	1901	1902	1903	1904
Bewölkung 10	499	486	493	473	450
Bewölkung 10 ohne Nebel ...	34	29	22	24	22

In Bremen tritt dieser Fall schon häufiger ein. So war in den Jahren 1900 und 1901 die Bewölkung 10 im allgemeinen 388- und 366mal aufgezeichnet, darunter ohne Nebel 75- und 60mal; aber auch bei anderen Bewölkungsgraden ist hier Nebel angemerkt.

Die Unsicherheit der üblichen Schätzung der Bewölkung ist sicherlich mehrfach bemerkt worden. Es hat diese Erkenntnis z. B. L. Bresson[1] veranlaßt, einen durch Linien in zehn gleiche Flächenstücke geteilten Konvexspiegel bei Richard in Paris konstruieren zu lassen, welcher das Himmelsgewölbe abbildet und durch Schätzung der Himmelsbedeckung in jedem Zehntel des Bildes nach Zehnteln ein wesentlich genaueres Ergebnis liefert als ohne jedes Hilfsmittel.

Zur Vermeidung der Überschätzung der Bewölkung in der Nähe des Horizontes hat E. Leyst[2] auf Grund vielfacher Beobachtungen vorgeschlagen, daß die Schätzung der Himmelsbedeckung auf eine zentrale Zone von 60 bis 90° beschränkt werden solle.

Zu der richtigen Beurteilung einer Verteilungstafel von Häufigkeitszahlen ist es wünschenswert, die Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ zu ermitteln, welche diese Zahlen mit den Bewölkungsgraden verbindet. In den von Karl Pierson[3] veröffentlichten theoretischen Untersuchungen über die mathematische Theorie der Evolution finden sich Anhaltspunkte hiezu. Für jene Fälle, in welchen die Mittelwerte klein sind gegen die beiderseitigen Endwerte, gibt Pearson eine Verteilungsfunktion an, welche eine unsymmetrische, beiderseits begrenzte Kurve von folgender Gleichung darstellt:

$$y = y_0\left(1-\frac{x}{a_1}\right)^{-\nu a_1}\cdot\left(1+\frac{x}{a_2}\right)^{-\nu a_2}, \qquad (1)$$

---

[1] Sur un néphomètre pour la mesure de la nébulosité. Annuaire de la Soc. Mét. de France, 1906, p. 241.

[2] Met. Zeitschrift, 1908, p. 46. Bulletin de la Société impériale de Moscou, Année 1906, Nouvelle Série, tome XX, p. 217—269.

[3] Contribution to the Mathematical Theory of Evolution. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 185, A 1, 1894; vol. 186, A, 1895.

in welcher y_0 die Mittelordinate, a_1, a_2 und ν Konstante bedeuten. Pearson bemerkt zu dieser Kurve, daß die verschwindenden Mittelwerte nicht nur bei meteorologischen Erscheinungen, sondern auch bei anderen Fällen auftreten, welche der statistischen Behandlung unterzogen werden, so z. B. »bei Kompetitivprüfungen, von welchen die Mittelmäßigen oft klug genug sind zurückzutreten«. Diese Kurve, in deren Gleichung die Exponenten auch positiv sein können, ist in der Variationsstatistik als Type I bekannt. Wird $a_1 = a_2$ genommen, dann entsteht eine symmetrische Kurve von der Gleichung:

$$y = y_0\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-\nu}, \tag{2}$$

Type II, welche für $\frac{x}{a} = \pm 1$ Asymptoten besitzt.

Inwiefern sich die nach dieser Gleichung gerechneten Häufigkeitszahlen der Beobachtung anschließen, ist an der Verteilungstafel des Ben Nevis gezeigt. Dabei sind die Häufigkeitszahlen nicht auf die Zahl 1095 im Jahre umgerechnet. Die hiefür berechnete Verteilungsfunktion ist

$$y = 119 \cdot 58 \left[\frac{(5 \cdot 0578)^2}{(5 \cdot 0578)^2 - x^2}\right]^{0 \cdot 73584}$$

und damit wurde gefunden:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
beob.	949	255	145	138	122	92	131	154	178	265	609
ber.......	1937	246	165	136	123	120	123	136	165	246	1934
beob.-ber.	-1088	+9	-20	+2	-1	-28	+8	-18	+13	+19	-1328

Die Summe der beobachteten Werte 1 bis 9 ist 1480, jene der gerechneten 1460, die Differenz beob.—ber. = 20.

Die Anwendung der Gleichungen (1) und (2) auf andere meteorologische Erscheinungen, als absolute Dampfspannung und Niederschlagshöhe für 89 Jahre in Greenwich[1] haben bei gleicher seitlicher Ausdehnung zu Formen von Kurven geführt, deren Ordinaten weitaus größer waren, als der Beobachtung

[1] Meteorol. Zeitschrift, 1905, p. 30.

entsprach. Für eine Verteilungstafel, welche aus den Ergebnissen eines Versuches mit einem Galton'schen Apparat[1] zur Darstellung der Gauß'schen Fehlerverteilungskurve abgeleitet war, ergaben die Methoden der Variationsstatistik eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung. In diesem Apparat fällt ein Strom von Körnern aus der Öffnung eines Trichters auf mehrere horizontale Reihen von Stiften, die senkrecht aus einer Platte herausragen, an eine Glasplatte anstoßen und so angeordnet sind, daß die Stifte der nächst unteren Reihe genau unter die Mitte des Abstandes je zweier oberhalb befindlicher Stifte zu stehen kommen. Die durch die Stifte verschieden abgelenkten Körner werden, nachdem sie die Stiftenreihen durchfallen haben, in nebeneinander befindlichen, einseitig mit Glas bedeckten Zellen aufgefangen. Die Herstellung eines solchen Apparates mit recht einfachen Mitteln unterliegt keiner Schwierigkeit. Karl Pierson hat auch einen derartigen Apparat angegeben, welchen er als »14 power binomial machine«[2] bezeichnete. Statt Stiften dienen hier die Kanten kleiner Klötzchen, die auf verschiebbaren Stäben befestigt sind, zur Teilung des auftreffenden Körnerstromes in ganz bestimmten Verhältnissen. Es sollen durch diesen Apparat verschiedene unsymmetrische Kurven erlangt werden.

Ein seinerzeit unternommener Vorversuch, einen Apparat nach diesem Prinzip zu bauen, hat zu keinem brauchbaren Ergebnisse geführt und nur erkennen lassen, daß derselbe außerordentlich genau gearbeitet sein müßte, sollen alle die Körnerströme, welche die durch die Klötzchen gebildeten Kanäle durchlaufen, immer wieder im gleichen Verhältnisse geteilt werden. Leider wurde es mir damals nicht möglich, einen anderen, einfacheren Apparat ähnlich dem Galton'schen, aber mit unsymmetrischer Stiftenstellung, anfertigen zu lassen, der allerdings nur eine Gattung schiefer statistischer Kurven gegeben hatte, dafür aber wahrscheinlich leicht herzustellen

---

[1] Mitteilungen des Technisch-administrativen Militärkomitees, 1899, p. 159; Leitfaden für den Unterricht in der Physik an der k. u. k. Technischen Militärakademie, p. 542.

[2] Philosophical Transactions, Vol. 186 A, Plate VII.

gewesen wäre und Gelegenheit zur Anwendung der Methoden der Variationsstatistik geboten hätte.

Die Abweichungen, welche die Pierson'sche Kurve (2) in den beiden Endwerten von der vorliegenden Verteilungstafel ergaben, ließen es erwünscht erscheinen, zu versuchen, nach der Theorie der Kollektivgegenstände Kurven zu gewinnen, welche sich den Beobachtungen anschließen. Hiedurch wird aber nicht die Verteilungsfunktion $\mathfrak{V}(x)$ selbst ermittelt, sondern eine Summenfunktion:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{X}) = \int_{-\infty}^{\mathfrak{X}} \mathfrak{V}(x)\,dx,$$

d. i. die relative Häufigkeit aller Fälle unter der Größe $\mathfrak{X}$. Diese Summenfunktion $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ wird nach jener Theorie durch eine unendliche Reihe dargestellt, welche nach der Gauß'schen Fehlerfunktion und ihren Ableitungen fortschreitet. Diese Theorie ist von Dr. Heinrich Bruns[1] entwickelt und auch durch Gottfried Lipps[2] dargelegt worden. In besonders klarer und übersichtlicher Weise findet sich die Reihe für jene Summenfunktion in einer Abhandlung von E. Czuber:[3] »Die Altersverteilung der Gestorbenen« abgeleitet und zur unmittelbaren Anwendung bearbeitet. Auf die Verteilungstafel der Häufigkeitszahlen der Bewölkung für den Ben Nevis angewendet, ergibt sich hiernach die Reihe:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{X})-1 = $$
$$= \Phi(V) - 0\cdot04066\frac{\Phi(V)_3}{2^2} - 0\cdot3890\frac{\Phi(V)_4}{2^3} +$$
$$+ 0\cdot02870\frac{\Phi(V)_5}{2^4} + 0\cdot09126\frac{\Phi(V)_6}{2^5}.$$

Dabei sind $V = h(\mathfrak{X}-A)$, $h = 1/\varepsilon_2\sqrt{2} = 0\cdot1729$.

$A = 4\cdot4997$ ist die Abszisse des Mittelpunktes der in gleichen Abständen auf einer Geraden angeordneten Größen

---

1 H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Kollektivmaßlehre (Teubner).

2 Die Theorie der Kollektivgegenstände, von G. F. Lipps (Engelmann).

3 Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten, Neue Folge, 3. Bd., 1. Heft.

der Verteilungstafel und $\varepsilon_2 = 4 \cdot 091$ fällt seiner Berechnung nach mit dem Fehler der mittleren Quadrate zusammen, führt aber in den statistischen Untersuchungen die Bezeichnung Variabilitätskoeffizient oder Streuungskoeffizient.

Die den verschiedenen Argumenten entsprechenden Werte der Funktion Φ und deren Ableitungen bis $\Phi(V)_6 : 2^5$ können Tabellen entnommen werden, welche der Wahrscheinlichkeitslehre von Bruns angeschlossen sind.

Die Differenzen $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_{i+1}) - \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_i)$ ergeben die berechneten Werte der Verteilungstafel. Es wird hienach gefunden für $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ beob.	949	1204	1349	1487	1609	1701	1832	1986	2164	2429	3038
$\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ ber...	718	1052	1328	1504	1578	1600	1643	1764	1986	2275	2558
Diff.	+231	+152	+21	−17	+31	+101	+189	+222	+178	+154	+480

Für die Häufigkeitszahlen selbst aber ergibt sich:

beob.	949	255	145	138	122	92	131	154	178	265	609
ber.......	718	334	276	176	74	22	43	121	222	289	283
Diff.	+231	−79	−131	−38	+48	+70	+88	+33	−44	−24	+326

Die Übereinstimmung kann nicht als befriedigend bezeichnet werden. Es sind wahrscheinlich noch zu wenig Glieder der Reihe der Berechnung zu Grunde gelegt.

Da die unter (2) angegebene Kurve die Verteilungstafel der Bewölkung bis auf die Endwerte gut darstellt, so habe ich versucht, den Beobachtungen eine Kurve von der Form (2) mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate anzupassen, zu welchem Zwecke sie durch Logarithmieren auf die Form:

$$\eta = \eta_0 - \nu\zeta$$

gebracht wurde, wobei

$$\zeta = \log\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

ist.

Da aber die beobachteten Verteilungstafeln zu den Mittelwerten meist nicht symmetrisch sind, habe ich versucht, den

Koordinatenanfangspunkt nicht in den Punkt 5 der Abszissenachse zu verlegen, sondern dagegen nach Bedarf entweder gegen 4 oder gegen 6 zu verschieben. Die $\frac{x}{a}$ sind stets so gewählt, daß dieselben für die Punkte 0 und 10 Werte, die kleiner als $\pm$ 1 sind, ergeben.

Die Verteilungstafel des Ben Nevis wurde zuerst nach einer Kurve gerechnet, deren Scheitel in den Punkt 5 der Abszissenachse fällt. Es wurde so erhalten:

$$\eta = 2{\cdot}0591 - 1{\cdot}092\,\zeta, \quad y = 114{\cdot}6\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1{\cdot}092}. \quad \text{(II)}$$

Sodann wurde der Koordinatenanfangspunkt um $^1/_{23}$ gegen 6 verschoben und damit die Gleichung

$$\eta = 2{\cdot}0624 - 1{\cdot}230\,\zeta, \quad y = 115{\cdot}4\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1{\cdot}230} \quad \text{(III)}$$

erhalten. Endlich wurde die Kurve (II) um 0·0156 nach der negativen Seite verschoben, wonach sie mit (II′) bezeichnet werden soll.

Es ergibt sich auf die Weise:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
beob.	949	255	145	138	122	92	131	154	178	268	609	3038
II $\frac{x}{a}$	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{8}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{10}{11}$	
II ber.	776	261	169	134	119	115	119	134	169	261	776	3031
Diff.	+173	−6	−24	+4	+3	−23	+12	+20	+9	+4	+167	+7
III $\frac{x}{a}$	$-\frac{21}{23}$	$-\frac{17}{23}$	$-\frac{13}{23}$	$-\frac{9}{23}$	$-\frac{5}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{7}{23}$	$\frac{11}{23}$	$\frac{15}{23}$	$\frac{19}{23}$	
III ber.	1051	305	185	142	123	116	118	130	159	228	473	3030
Diff.	−102	−50	−40	−6	−1	−24	+13	+24	+19	+37	+136	+8
II′ ber.	949	276	173	136	119	115	118	132	164	248	657	3087
Diff.	0	−21	−28	+2	+3	−28	−13	+22	+14	+17	−48	−49

Das sind Werte, welche sich den Beobachtungen ziemlich gut anschließen, aber durchwegs erkennen lassen, daß die

beobachtete Kurve im positiven Teile der Abszissenachse unter der gerechneten bleibt.

Für die Verteilungstafel der Häufigkeit der Bewölkung für Bremen in den zwei Jahren 1900 und 1901 ohne Ausscheidung der Nebeltage bei der Bewölkung 10 ergibt sich die Kurve

$$\eta = 1\cdot 8857 - 1\cdot 326\,\zeta, \quad y = 76\cdot 86\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1\cdot 326}.$$

Für die Verteilungstafel von Bagnère de Bigorre wurde gefunden:

$$\eta = 1\cdot 5846 - 1\cdot 2904\,\zeta, \quad y = 38\cdot 42\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1\cdot 2904}.$$

Es ist hiernach für Bremen:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
$\frac{x}{a}$	$-\frac{19}{23}$	$-\frac{15}{23}$	$-\frac{11}{23}$	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{3}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{9}{23}$	$\frac{13}{23}$	$\frac{17}{23}$	$\frac{21}{23}$	
beob. . .	390	200	108	88	66	67	83	88	150	296	754	2190
ber.	352	160	108	87	79	77	82	96	128	219	829	2217
Diff. . . .	−62	−40	±0	+1	−13	−10	+1	−8	+22	+79	−75	−27

Für Bagnère de Bigorre mit denselben Werten von x/a:

beob.	220	62	59	51	52	50	34	34	57	88	388	1095
ber.	169	79	54	44	39	39	41	48	63	107	389	1072
Diff.	+51	−17	+5	+7	+13	+11	−7	−14	−6	−19	−1	+23

Als Beispiel einer Verteilungstafel mit Bewölkungswerten, die sich sprungweise ändern, ist jene gewählt worden, welche aus Mittelwerten der Beobachtungen 1901 bis 1904 auf dem Obir gebildet wurde. Der Koordinatenanfangspunkt ist hier in den Punkt 5 verlegt und die Teilpunkte schreiten nach je $^2/_{11}$ fort. Die Gleichung der so ermittelten Kurve ist:

$$\eta = 0\cdot 9685 - 1\cdot 453\,\zeta, \quad y = 9\cdot 300\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1\cdot 453}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
$\frac{x}{a}$	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{8}{11}$	$-\frac{6}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$-\frac{2}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{10}{11}$	
beob.	328	6	5	82	2	95	47	2	68	1	459	1095
ber.	139	29	16	11	10	9	10	11	16	29	139	419
Diff.	+189	−23	−11	+72	−8	+86	+37	−9	+52	−28	+320	

Die berechnete Kurve geht fast bis zur Abszissenachse herunter. Aber auch die Berechnung nach den variationsstatistischen Methoden Type II ergibt eine so tief herabreichende Kurve.

Während sich also bei guten Bewölkungsbeobachtungen mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, unter allerlei Annahmen über die Größe *a* der Formel (2) und entsprechende Wahl des Koordinatenanfangspunktes Kurven berechnen lassen, welche die Verteilungstafel gut wiedergeben, ist dies bei Beobachtungen, die mit merklichen Schätzungsfehlern behaftet sind, nicht der Fall.

Für Stationen, in welchen die Bewölkung recht gleichmäßig und gut geschätzt wird, ließe sich aus dem Mittel mehrerer Jahre eine die Beobachtungen gut wiedergebende Kurve ableiten und an dieser könnte ermessen werden, inwiefern spätere Beobachtungen vom Mittel abweichen, also z. B. inwiefern in einem oder dem anderen Jahre ein oder der andere Bewölkungsgrad häufiger vorgekommen ist, als seinem Mittelwerte entspricht.

Über die axonometrischen Verkürzungsverhältnisse

von

Dr. A. Denizot.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 5. März 1908.)

Im Anschluß an den Pohlke'schen Fundamentalsatz der Axonometrie ist für die Anwendungen die Aufgabe wichtig, aus dem in der Ebene gegebenen Bilde der Achsen die Verkürzungsverhältnisse zu bestimmen.

Bilden die von einem Punkt O_a ausgehenden Strecken $O_a X_a$, $O_a Y_a$, $O_a Z_a$ einer Ebene Π_a die Parallelprojektion dreier gleich langer, zueinander rechtwinkeliger Strecken OX, OY, OZ des Raumes, deren Länge gleich q ist, so sind die Verkürzungs- beziehungsweise Verlängerungsverhältnisse die Quotienten: $\lambda = \frac{O_a X_a}{q}$, $\mu = \frac{O_a Y_a}{q}$, $\nu = \frac{O_a Z_a}{q}$. Sind die drei Strecken in der Ebene Π_a der Richtung und Länge nach gegeben, so kommt es darauf an, aus diesem Achsenbilde die Länge q zu ermitteln.

Mit diesem Problem haben sich Beck,[1] Pelz,[2] Schur[3] u. a.[4] beschäftigt. Die gegebenen Lösungen beruhen auf der

---

[1] A. Beck, Crelle, *106*, 121, 1890.

[2] S. Pelz, Diese Sitzungsber., *76*, 123, 1877; Ber. d. Böhm. Ges. d. Wiss. Nr. VII, 1, 12, 1895.

[3] F. Schur, Crelle, *117*, 24, 1897.

[4] Vergl. F. Schilling, Zeitschr. f. Math. u. Phys., *48*, 487, 1903; Rohn u. Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Dritte Auflage 1906, III, p. 177, Art. 214.

Auffindung der kleinen Achse der Umrißellipse, als welche sich die um O als Mittelpunkt mit dem Radius q beschriebene Kugel auf die Ebene Π_a projiziert.

Im folgenden wird eine neue, auf einem anderen Prinzip beruhende, rein konstruktive Lösung dieses Problems gegeben.[1] Vermittelnd wird dabei das Spurendreieck benutzt, welches auf einer zu dem Projektionsstrahl senkrechten Ebene durch das räumliche Koordinatensystem $OXYZ$ ausgeschnitten wird. Hiedurch ist die durchgeführte Lösung in einer engen Beziehung mit der orthogonalen Axonometrie. Man erhält gleichzeitig die Verkürzungsverhältnisse der schiefen und der zu demselben Projektionsstrahl gehörenden orthogonalen Parallelprojektion.

§ 1.

Der Lösung des behandelten Problems liegen folgende Erwägungen zu Grunde:

I. Bezeichnen A, B, C (Fig. 1) die Durchschnittspunkte der gegebenen axonometrischen Achsen O_aX_a, O_aY_a, O_aZ_a mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $X_aY_aZ_a$, so sind die Verhältnisse

$$\nu_1 = \frac{AO_a}{AX_a}, \nu_2 = \frac{BO_a}{BY_a}, \nu_3 = \frac{CO_a}{CZ_a} \tag{1}$$

proportional den Richtungskosinussen des Projektionsstrahles, bezogen auf das räumliche Koordinatensystem $OXYZ$.

Zum Beweise denke man sich auf den Achsen des räumlichen Koordinatensystems die drei gleichen Strecken

$$OX = OY = OZ = q$$

abgetragen, deren schiefe Parallelprojektion auf die Bildebene Π_a die gegebenen Strecken O_aX_a, O_aY_a, O_aZ_a sein sollen. In dem Dreieck XYZ werde dann der Punkt O' mit dem Punkte O_a des

---

[1] In rechnerischer Weise habe ich dieses Problem in einem anderen Zusammenhang bereits behandelt (Vergl. Prace matematyczno-fizyczne, Warszawa XVIII, 61, 1907).

gegebenen axonometrischen Bildes $O_a X_a Y_a Z_a$ in perspektiv-affine Beziehung gebracht. Dieses kann man dadurch erreichen, daß man den Punkt O' z. B. als Schnittpunkt der beiden Geraden $B'Y$ und $C'Z$ darstellt, wobei die Punkte B' und C' auf den Seiten XZ und XY des Dreiecks XYZ durch die Verhältnisse

$$\frac{B'Z}{B'X} = \frac{BZ_a}{BX_a} \quad \text{und} \quad \frac{C'X}{C'Y} = \frac{CX_a}{CY_a}$$

entsprechend bestimmt sind. Alsdann gibt die Gerade OO' die Richtung des Projektionsstrahles an. Vom Punkte O' fälle man auf die Koordinatenebene XOY die Senkrechte $O'D' = z'$;

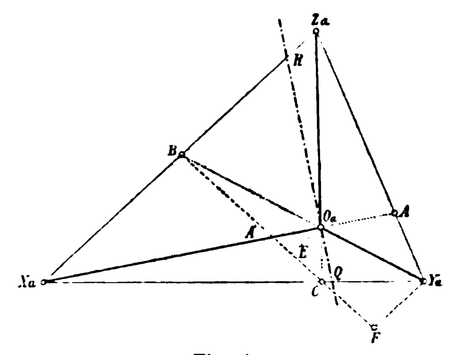


Fig. 1.

dann folgt aus dem Dreieck $C'OZ$ sowie aus der perspektiv-affinen Beziehung der Gebilde $O'XYZ$ und $O_a X_a Y_a Z_a$:

$$\frac{z'}{q} = \frac{O'D'}{ZO} = \frac{C'O'}{C'Z} = \frac{CO_a}{CZ_a} = \nu_3.$$

Allgemein erhält man für die Koordinaten x', y', z' des Punktes O' die Werte:

$$x' = q\nu_1,\ y' = q\nu_2,\ z' = q\nu_3. \tag{2}$$

Sind $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ die Winkel der Geraden OO', d. i. des Projektionsstrahles mit den Koordinatenachsen OX, OY, OZ, so ist

$$\cos \sigma_i = \frac{\nu_i}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}}. \tag{3}$$

Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung.

II. Sind E und F die Schnittpunkte der durch O_a und Y_a gezogenen Parallelen zu der Geraden $X_a Z_a$ mit BC, außerdem A' der Schnittpunkt von AX_a mit BC, so ist

$$\frac{1}{\nu_1} = \frac{AX_a}{AO_a} = \frac{A'X_a}{A'O_a} = \frac{X_a B}{O_a E},$$

$$\frac{1}{\nu_2} = \frac{BY_a}{BO_a} \qquad = \frac{Y_a F}{O_a E},$$

$$\frac{1}{\nu_3} = \frac{CZ_a}{CO_a} \qquad = \frac{Z_a B}{O_a E}.$$

Die Strecken $X_a B = n_1$, $Y_a F = n_2$, $Z_a B = n_3$ sind demnach proportional den reziproken Werten (1), durch welche die Richtung des Projektionsstrahles gegeben ist. Daher:

Verbindet man die Schnittpunkte (B und C) zweier Achsen ($O_a Y_a$ und $O_a Z_a$) mit den gegenüberliegenden Seiten ($X_a Z_a$ und $X_a Y_a$) des Achsendreiecks ($X_a Y_a Z_a$) und zieht zu einer dieser Seiten ($X_a Z_a$) durch den gegenüberliegenden Eckpunkt (Y_a) des Achsendreiecks eine Parallele bis zum Schnittpunkt (F) mit jener Verbindungslinie, so werden auf den beiden parallelen Geraden durch die Eckpunkte (X_a, Y_a, Z_a) sowie die betreffenden Schnittpunkte (B und F) drei Strecken abgeteilt, die den reziproken, die Richtung des Projektionsstrahles bestimmenden Werten proportional sind.

III. Denkt man sich auf den drei Achsen des räumlichen Koordinatensystems $OXYZ$ vom Anfangspunkt O aus die Strecken $ON_1 = n_1$, $ON_2 = n_2$, $ON_3 = n_3$ abgetragen, so ist die durch die Punkte N_1, N_2, N_3 gelegte Ebene Π_0 senkrecht zu dem Projektionsstrahl; denn durch die Ausdrücke (3) ist die Richtung der Normalen der Ebene Π_0 gegeben. Daher:

Das Dreieck $N_1 N_2 N_3$, dessen Seiten

$$N_{kl} = \sqrt{n_k^2 + n_l^2}$$

sind, stellt das Spurendreieck einer zu dem Projektionsstrahl senkrechten Ebene Π_0 dar; die ortho-

gonale Projektion O_0 des Koordinatenanfangs O auf diese Ebene ist der Schnittpunkt der drei Höhen des Spurendreiecks.

§ 2.

Nach diesen Prinzipien zeichne man aus den gegebenen axonometrischen Achsen $O_a X_a$, $O_a Y_a$, $O_a Z_a$ das Spurendreieck $N_1 N_2 N_3$ sowie den Punkt O_0 (Fig. 2). Zu diesem Zwecke bringe man die Achsen $O_a Y_a$ und $O_a Z_a$ (vergl. Fig. 1) mit den Seiten $X_a Z_a$ und $X_a Y_a$ des Dreiecks $X_a Y_a Z_a$ zum Schnitt in den Punkten B und C und ziehe durch Y_a zu $X_a Z_a$ eine Parallele bis zum Schnitt F mit der Geraden BC. Aus $X_a B = n_1$, $Y_a F = n_2$, $Z_a B = n_3$ (oder deren Vielfachen) zeichne man das Spurendreieck $N_1 N_2 N_3$ mit den Seiten $N_k N_l = \sqrt{n_k^2 + n}$. Der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks ergibt den Punkt O_0.

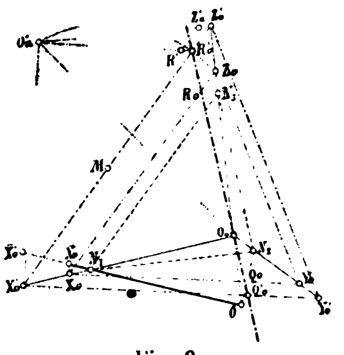


Fig. 2.

Auf $O_0 N_i$ finde man drei Punkte X_0', Y_0', Z_0', so daß das Bild $O_0 X_0' Y_0' Z_0'$ die orthogonale Projektion eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Achsenkreuzes ist. Hierzu wird auf der in die Ebene Π_0 des Dreiecks $N_1 N_2 N_3$ umgelegten Geraden $\overline{O}N_i$ eine beliebige Einheit q' (in der Figur $\overline{O}\overline{X}_0 = q'$) abgetragen, woraus dann die entsprechenden orthogonalen Projektionen $(\overline{X}_0' X_0' \perp N_1 N_2)$ gefunden werden.

Die perspektiv-affinen Gebilde $O_a X_a Y_a Z_a$ und $O_0 X_0' Y_0' Z_0$ haben eine Affinitätsachse gemein, und zwar ist es praktisch, dieselbe durch den Punkt O_a, beziehungsweise O_0 zu legen. Zur Auffindung der Affinitätsachse wird z. B. an $X_0' Z_0'$ das Dreieck $O_a' X_0' Z_0' \backsim$ Dreieck $O_a X_a Z_a$ angetragen und über $O_0 O_a'$ als Sehne ein Kreis mit dem Mittelpunkt M auf $X_0' Z_0'$ gezeichnet; durch einen seiner Schnittpunkte (R_0') mit der Geraden $X_0' Z_0'$ (wobei $\sphericalangle O_a' R_0' X_0' > \sphericalangle O_0 R_0' X_0'$) sowie durch O_0 geht dann die Affinitätsachse. Der in dem

Achsenbild $O_a X_a Y_a Z_a$ auf $X_a Z_a$ entsprechende Punkt R hängt mit R_0' durch die Beziehung $\frac{R X_a}{R Z_a} = \frac{R_0' X_0'}{R_0' Z_0'}$ zusammen. Sollen nun in der Ebene Π_0 auf den Achsenrichtungen $O_0 N_i$ drei Punkte X_0, Y_0, Z_0 derart gefunden werden, daß das Gebilde $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ die orthogonale Projektion sowohl des räumlichen Gebildes $OXYZ$ sowie des gegebenen $O_a X_a Y_a Z_a$ ist, so muß das von den Seiten der Gebilde $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ und $O_a X_a Y_a Z_a$ ausgeschnittene Stück $Q_0 R_0$, beziehungsweise QR der Affinitätsachse in beiden Gebilden gleich und außerdem das Dreieck $X_0 Y_0 Z_0$ mit dem Dreieck $X_0' Y_0' Z_0'$ ähnlich und ähnlich liegend sein, wobei O_0 als Ähnlichkeitspunkt gilt.

Bei der Konstruktion ist es am einfachsten, auf $O_a' Z_0'$ die Länge $O_a' Z_a' = O_a Z_a$ abzutragen und den Schnittpunkt R' der Parallelen zu $X_0' Z_0'$ mit der Geraden $O_a' R_0'$ aufzusuchen; alsdann ergibt sich R_0, indem $O_0 R_0 = O_a' R'$ gemacht wird.

Findet man auf $\overline{O} \overline{X}_0'$ noch den Punkt $\overline{X}_0 (X_0 \overline{X}_0 \perp N_1 N_2)$, so ist $\overline{O} \overline{X}_0 = q$, gleich der Länge der Achsen $OX = OY = OZ$. Zu bemerken ist noch, daß für die Konstruktion der Einheit q einige hier erwähnte Punkte und Gerade entbehrlich sind.

Zur Auffindung einzelner Koordinatenstrecken kann man die rechtwinkeligen Dreiecke $O_0 X_0 X_a$, $O_0 Y_0 Y_a$, $O_0 Z_0 Z_a$ benutzen. Z. B. findet man aus der wahren Länge OX_1 in Π_0 zunächst $O_0 X_{01}$ und dann in dem rechtwinkeligen Dreieck $O_0 X_0 X_a$ (Kathete $O_0 X_0$, Hypotenuse $O_0 X_a = O_a X_a$) die entsprechende Länge $O_a X_{a1}$. Auch kann man sich zweckmäßig des bekannten Strahlen- oder Sinusmaßstabes bedienen.

Die hier angegebene Konstruktion der zu dem gegebenen Achsenbilde $O_a X_a Y_a Z_a$ gehörenden Länge q liefert gleichzeitig die Verkürzungsverhältnisse der schiefen und der derselben Strahlenrichtung entsprechenden orthogonalen Parallelprojektion. Auf diese Weise ist es möglich, Bilder herzustellen, welche der schiefen und orthogonalen Axonometrie entsprechen und das Charakteristische haben, daß sie zu einem und demselben Strahlenbündel gehören.

Die Zusammenstellung solcher Bilder ermöglicht erst eine eigentliche Vergleichung der durch beide Arten entstehenden Abbildungen eines Gegenstandes.

Absorption der Sonnenstrahlung in Wasser

von

Wilh. Schmidt.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1908.)

Den klassischen Untersuchungen S. P. Langley's verdanken wir eine genaue Kenntnis der Energieverteilung im Spektrum der Sonnenstrahlung, wie sie zu uns auf den Erdboden gelangt. Man findet darin alle die Absorptionsbanden, welche beim Durchgang durch die Luft entstanden sind. Die in ihnen absorbierte Energie wird eine Ursache sein, welche von Einfluß ist auf die meteorologischen Verhältnisse, allerdings nicht die einzige. Wegen der verhältnismäßig geringen Absorption, die überdies gerade in den untersten Schichten der Atmosphäre am schwächsten ist, gelangt stets noch ein bedeutender Betrag an die Erdoberfläche und unterliegt hier der Absorption durch die Materialien der Oberfläche. Von hier aus wird sich dann erst der Einfluß der Erwärmung auf die untersten Luftschichten durch Konvektion ausbreiten.

An der Oberfläche selbst wird nun ein Teil direkt reflektiert, ein anderer wird in die Körper zu geringerer oder größerer Tiefe eindringen und hier absorbiert werden. Eine Kenntnis des letzteren Betrages wird insbesondere von demjenigen Stoff erwünscht sein, welcher den größten Teil der Oberfläche der Erde bedeckt, nämlich vom Wasser.

Eine ausführliche quantitative Untersuchung des Absorptionsspektrums des Wassers ist von E. Aschkinass[1] mit Hilfe des Bolometers vorgenommen worden. Seine Messungen erstreckten sich tief ins ultrarote Gebiet hinein, wo sich sehr

[1] Wied. Ann., *55*, 401 (1895).

starke Absorptionen fanden. Da eine große Anzahl von Punkten bestimmt wurde, hat man in seinen Resultaten einen sehr guten Behelf, die uns hier interessierende Größe zu bestimmen. Eine frühere Untersuchung von Hüfner und Albrecht[1] hatte auch schon eine Reihe von Werten für den Extinktionskoeffizienten gegeben, wenn auch, da die Messung photometrisch erfolgte, bloß für den Bereich des sichtbaren Spektrums. Die von ihnen erhaltenen Zahlen liegen durchwegs höher als die von Aschkinass, was dieser mit geringer Trübung des von jenen verwendeten Wassers erklärt. Hier wurden deshalb bloß des letzteren Messungen verwendet.

Für ganz exakte Resultate müßte man folgenden Vorgang einschlagen. Im Punkte, welcher der Wellenlänge λ entspricht, habe die eindringende Sonnenstrahlung die Intensität J_λ^0, so zwar, daß die auf den Wellenlängenbezirk von λ bis $\lambda + d\lambda$ entfallende Energie $J_\lambda^0 \, d\lambda$ wird. Nach Durchlaufen eines Weges von der Länge x wird ein Teil dieser Intensität absorbiert sein, und zwar ist, wenn man mit α_λ den Absorptionskoeffizienten für die Wellenlänge λ bezeichnet, bloß mehr der Betrag

$$J_\lambda = J_\lambda^0 d\lambda \, . \, e^{-\alpha_\lambda x}$$

übrig geblieben. Um nun die Gesamtenergie der Sonnenstrahlung zu erhalten, welche bis zur Tiefe x hinabdringt, hat man über das ganze Spektrum zu integrieren, erhält also:

$$J = \int J_\lambda^0 \, . \, e^{-\alpha_\lambda x} d\lambda.$$

Nun müßte man für rechnerische Zwecke dieses Integral angenähert mit Hilfe graphischer Methoden bestimmen, wenn es nicht vorzieht, was ja für beiläufige Rechnungen ohneweiters erlaubt ist, einfach die Teilung entsprechend weit zu treiben, so daß an Stelle des Integrals eine einfache Summe tritt:

$$J = \Sigma J_n^0 e^{-\alpha_n x} (\lambda_{n+1} - \lambda_n),$$

wo J_n^0 die Anfangsintensität für den Spektralbezirk von λ_n bis λ_{n+1} bedeutet (λ_n und λ_{n+1} sind dann die Punkte, wo die Teilung vorgenommen wurde), α_n den entsprechenden Absorptionskoeffizienten.

---

[1] Wied. Ann., *42*, 1 (1891).

Man hat also das Spektrum in eine größere Anzahl Teile zu teilen, bestimmt für jeden solchen Teil (z. B. auf graphischem Wege) aus den Langley'schen Messungen die mittlere Energie für das Sonnenspektrum, wie es durchschnittlich auf die Erdoberfläche gelangt. Aus den Beobachtungen von Aschkinass rechnet man hierauf auf gleiche Weise den mittleren Absorptionskoeffizienten. Aus diesen beiden Werten ergibt sich für jedes Intervall die absorbierte Energie für einen Weg durch 0·01, 0·1 . . . *mm* Wasser und man findet daraus durch einfache Addition die entsprechenden Werte für das ganze Spektrum.

Um zunächst eine ganz rohe Übersicht über die Absorptionsverhältnisse der einzelnen Partien des Spektrums zu geben, sind in der folgenden Tabelle für bestimmte Intervalle der Wellenlängen (erste Spalte) die mittleren absorbierten Beträge angegeben, wie sie beim Durchgange durch eine 0·01, 0·1, 1 . . . *mm* dicke Schicht erhalten werden, immer in Tausendsteln der eindringenden Strahlung. Es mag bemerkt werden, daß die später folgenden Rechnungen mit viel weiter gehender Teilung durchgeführt wurden.

Tabelle I.

Absorbierte Mengen in Tausendsteln der einfallenden Strahlung.

Intervalle der Wellenlänge in μ	Schichtdicke des Wassers							
	0·01 *mm*	0·1 *mm*	1 *mm*	1 *cm*	1 *dm*	1 *m*	10 *m*	100 *m*
0·2—0·6	0	0	0	0·3	2·5	25	225	901
0·6—0·9	0	0·1	2·1	19	17	68	977	1000
0·9—1·2	0·4	4·2	42	337	959	1000	1000	1000
1·2—1·5	13	115	489	897	1000	1000	1000	1000
1·5—1·8	21	190	859	1000	1000	1000	1000	1000
1·8—2·1	77	545	999	1000	1000	1000	1000	1000
2·1—2·4	36	306	963	1000	1000	1000	1000	1000
2·4—2·7	117	772	1000	1000	1000	1000	1000	1000
2·7—3·0	827	999·5	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Die kürzesten Wellenlängen erfahren also eine verhältnismäßig geringe Absorption, die stets desto stärker wird, je mehr

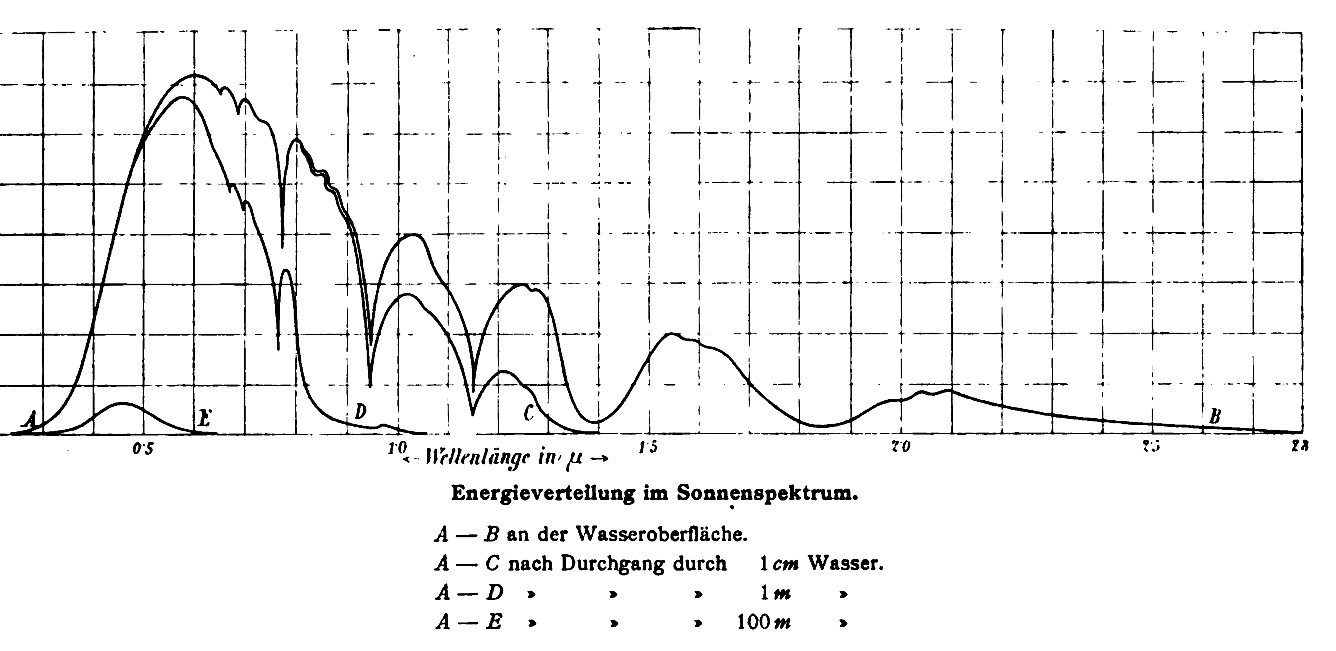
man zu größeren Wellenlängen fortschreitet. Allerdings finden sich auch hier schon Zonen geringerer und stärkerer Absorption deutlich ausgesprochen, wo doch die meisten Absorptionsbanden durch die weite Teilung schon unterdrückt sind. Bemerkenswert ist die starke Absorption im ultraroten Spektrum ($\lambda > 0 \cdot 8\,\mu$), welche dem Auge nicht wahrnehmbar ist, aber doch wegen der ziemlich bedeutenden Energie des ultraroten Sonnenspektrums von großem praktischen Einfluß ist.

Tabelle II bringt nun die Beträge, welche von den einzelnen Strahlengattungen des Sonnenlichtes, wie es wirklich auf die Erdoberfläche gelangt, absorbiert werden. Es mußte eben für die praktische Auswertung ein Sonnenspektrum zu Grunde gelegt werden, das schon die dem Wasserdampf und der Kohlensäure zuzuschreibende Auslöschung bestimmter Partien besonders im Ultrarot zeigt, da gerade für diese auch die Absorption des Wassers am bedeutendsten ist. Die Energieverteilung im Sonnenspektrum ist zwar ziemlich starken Schwankungen unterworfen, so daß man sich mit der Annahme einer mittleren begnügen muß. Die hier gewählte ergibt sich beiläufig aus der letzten, mit ∞ überschriebenen Spalte, etwas genauer aus der Fig. (*A*—*B*).

Tabelle II.

Absorbierte Mengen der einfallenden Sonnenstrahlung.

Wellenlänge in μ	Schichtdicke des Wassers								
	0·01 *mm*	0·1 *mm*	1 *mm*	1 *cm*	1 *dm*	1 *m*	10 *m*	100 *m*	∞
0·2—0·6	0·00	0·00	0·0	0·1	0·8	7·5	65·0	223·1	237·0
0·6—0·9	0·00	0·04	0·7	6·3	54·8	230·1	350·2	359·7	359·7
0·9—1·2	0·08	0·67	6·8	56·0	170·6	178·8	178·8	178·8	178·8
1·2—1·5	0·54	4·78	23·3	69·5	86·6	86·6	86·6	86·6	86·6
1·5—1·8	1·82	16·28	53·0	80·0	80·0	80·0	80·0	80·0	80·0
1·8—2·1	2·00	14·05	25·0	25·0	25·0	25·0	25·0	25·0	25·0
2·1—2·4	0·84	6·42	24·2	25·3	25·3	25·3	25·3	25·3	25·3
2·4—2·7	0·94	5·24	7·2	7·2	7·2	7·2	7·2	7·2	7·2
2·7—3·0	0·19	0·40	0·4	0·4	0·4	0·4	0·4	0·4	0·4
Summe ...	6·41	47·88	140·6	269·8	450·7	640·9	818·5	986·1	1000·0



Energieverteilung im Sonnenspektrum.

A — B	an der Wasseroberfläche.	
A — C	nach Durchgang durch	1 *cm* Wasser.
A — D	» » »	1 *m* »
A — E	» » »	100 *m* »

Die Zahlen bedeuten hier Tausendstel der gesamten in der eindringenden Sonnenstrahlung vorhandenen Energie. Gab schon Tabelle I eine ganz allgemeine Übersicht über die Absorptionsverhältnisse, so sieht man aus dieser Zusammenstellung, wie bei ganz geringen Schichtdicken der größte Betrag der absorbierten Energie dem Bezirk $\lambda = 1{\cdot}8$ bis $\lambda = 2{\cdot}1\ \mu$ entstammt. Nimmt die Schichtdicke zu, so rückt auch das

Maximum der absorbierten Energie immer mehr gegen das Energiemaximum des ursprünglichen Spektrums (letzte Spalte) heran. Bei Schichtdicken unter 0·01 *mm* kann man ohne beträchtlichen Fehler linearen Anstieg annehmen.

Deutlich sieht man hier aber den Einfluß der selektiven Absorption auf den Gesamtbetrag der beim Gange der Strahlen durch das Wasser verschluckten Energie, wie ihn die unterste Zeile gibt. So verbleibt in der allerobersten, nur $^1/_{100}$ *mm* dicken Schicht schon mehr als $^1/_2$ ‰, in einer zehnmal so dicken beinahe 5‰. Von hier ab geht die Zunahme der absorbierten Menge nicht so rasch, da eben gerade der ultrarote Teil des Spektrums schon zum größten Teile ausgelöscht ist. Nun macht sich die Absorption schon im sichtbaren Teile etwas fühlbar und rückt das Maximum im übriggebliebenen Spektrum mehr gegen das Blau hin. Die Energieverteilung in diesem Spektrum, welches nach dem Durchgange durch verschieden dicke Schichten resultiert, gibt die folgende Tabelle.

Tabelle III.

Energieverteilung im Sonnenspektrum nach Durchgang der Strahlen durch verschieden dicke Wasserschichten.

Wellenlänge in μ	Schichtdicke des Wassers								
	0	0·01 *mm*	0·1 *mm*	1 *mm*	1 *cm*	1 *dm*	1 *m*	10 *m*	100 *m*
0·2—0·6	237·0	237·0	237·0	237·0	236·9	236·2	229·5	172·0	13·9
0·6—0·9	359·7	359·7	359·7	359·0	353·4	304·9	128·6	9·5	—
0·9—1·2	178·8	178·7	178·1	172·0	122·8	8·2	—	—	—
1·2—1·5	86·6	86·1	81·8	63·3	17·1	—	—	—	—
1·5—1·8	80·0	78·2	63·7	27·0	—	—	—	—	—
1·8—2·1	25·0	23·0	10·9	—	—	—	—	—	—
2·1—2·4	25·3	24·5	18·9	1·1	—	—	—	—	—
2·4—2·7	7·2	6·3	2·0	—	—	—	—	—	—
2·7—3·0	0·4	0·2	—	—	—	—	—	—	—
Summe....	1000·0	993·7	952·1	859·4	730·2	549·3	358·1	181·5	13·9

Bei einer Schichtdicke von 1 *cm* ist also das Spektrum für $\lambda > 1 \cdot 5\,\mu$ schon vollständig ausgelöscht, bei 1 *m* Dicke reicht es bloß bis $\lambda = 0 \cdot 9\,\mu$ und nach einer vom Strahle durchlaufenen Strecke von 100 *m* ist nur mehr ein ganz kleiner Bezirk übrig geblieben, auch dieser schon sehr geschwächt in seiner Intensität. Für einige Schichtdicken gibt die Figur die Energieverteilung im Spektrum.

Die so gewonnenen Daten sollen nun zu einer beiläufigen Schätzung der Verwendung der in Wasserflächen eindringenden Strahlenenergie Anhaltspunkte geben.

Die Frage nach der Gesamtabsorption beim Durchlaufen verschiedener Schichten ist durch die Zahlen der Tabelle II bereits beantwortet. Man bemerkt aber schon bei diesen den unverhältnismäßig großen Anteil, der auf die dünnsten Schichten entfällt, während die dickeren stark benachteiligt werden. Zur genaueren Feststellung dieses Verhältnisses wird es sich empfehlen zu rechnen, wie viel Energie in einer bestimmten Schicht absorbiert wird, oder anders, welche Temperaturerhöhung in verschiedenen Tiefen durch die Sonnenstrahlung allein (einen bestimmten Wert für diese angenommen) hervorgerufen würde, abgesehen von Wärmeleitung oder Verlust durch Konvektionsströme, an der Oberfläche auch von dem durch Verdunstung bewirkten.

J sei die Intensität des Sonnenlichtes nach Durchgang durch eine Schicht von der Dicke x. Der Einfachheit halber sei senkrechter Einfall angenommen. In der Schicht zwischen den Tiefen x und $x+dx$ betrage der Intensitätsverlust dJ. Drückt man die Intensität durch die Energie aus, welche (nach den gewohnten Maßen) in einer Minute durch 1 cm^2 einer auf die Strahlen senkrecht stehenden Fläche geht, gerechnet in *g*-Kalorien, so kann die minutliche Temperaturerhöhung, welche in der Schicht von der Dicke dx hervorgerufen wird, geschrieben werden:

$$\tau = -\frac{dJ}{dx} = \int J^0_\lambda a_\lambda e^{-a_\lambda x} d\lambda$$

oder mit einigen Vernachlässigungen:

$$\tau = \Sigma J_n a_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n),$$

wo J_n die nach dem Wege x im n^{ten} Teilbezirk des Spektrums vorhandene Energie darstellt.

Diese Werte wurden auf ganz analoge Weise wie die in den Tabellen stehenden ausgerechnet. Man erhält

in einer Tiefe von	eine minutliche Temperaturerhöhung um
0·00 *mm*	6·68°
0·1 *mm*	3·69°
1 *mm*	0·71°
1 *cm*	0·071°
1 *dm*	0·0071°
1 *m*	0·0008°
10 *m*	0·00008°
100 *m*	0·000003°

unter den oben angeführten Voraussetzungen.

Es zeigt sich also, daß die alleroberste Schicht für sich allein, sofern nur die absorbierte Wärme in ihr verbleibt, in der Minute einen Temperaturzuwachs von beinahe 6·7° erfährt, also 89 Minuten braucht, um zu verdampfen. Faßt man die oberste Schicht bis zu 0·1 *mm* zusammen, so wird die für deren Verdampfung benötigte Zeit 161 Minuten, also bedeutend länger, nicht deshalb, weil die Schicht dicker wird, sondern nur, weil die Absorption hier nicht mehr so bedeutend ist. Für größere Tiefen nimmt die durch Strahlungsabsorption herbeigeführte Temperaturerhöhung sehr kleine Werte an in Übereinstimmung mit der geringen Intensität des dorthin gelangenden Lichtes, scheint sich übrigens bis etwas über 50 *m* durch eine Formel angenähert wiedergeben zu lassen von der Gestalt:

$$\tau = \frac{0 \cdot 075}{x + 0 \cdot 011},$$

wenn x hier wieder die Tiefe des betrachteten Punktes in Zentimeter darstellt. Eine solche Formel kann dazu verleiten, die schließliche Wärmeverteilung zu rechnen, welche sich einstellt, falls bei kontinuierlicher Bestrahlung die zugeführte Wärme

bloß durch Leitung an die benachbarten Schichten weitergegeben werden kann. Es ergibt sich so ein Ausdruck:

$$u = A.\{(x+B)[\log(x+B)-1]-C\},$$

wo u die Temperaturverteilung darstellt, A, B und C aus den gegebenen Vorbedingungen bestimmbare Konstanten sind. Allerdings tritt der Endzustand erst nach so lange dauernder Bestrahlung ein, daß die nach dieser Formel erhaltenen Werte viel zu hohe sind, mit denen verglichen, die in einem wirklich eintretenden Falle sich einstellen können. Doch vermag die Formel ein angenähertes Bild der relativen Wärmeverteilung zu geben, wie sie in jedem Augenblick beiläufig angenommen werden darf.

Die Berechnung gilt aber nur für senkrechten Einfall der Strahlung. Steht die Sonne tief, so wird der Weg der Strahlen, bis sie in eine bestimmte Tiefe kommen, länger; doch ist auch die Mächtigkeit der zu erwärmenden Schichten geringer. Der letztere Vorteil wird jedoch genau ausgeglichen dadurch, daß nun auch die horizontale Fläche, die von einem Strahlenbündel mit dem Querschnitt 1 cm^2 bestrahlt wird, sich vergrößert hat. Um also ein Bild der Verteilung der Temperaturerhöhung für diesen Fall zu erhalten, hat man die Zahlen der vorhergehenden Seite Tiefen zuzuschreiben, welche aus den dort angegebenen durch Multiplikation mit $\cos \alpha$ erhalten werden, wenn α den Brechungswinkel der Strahlen darstellt, d. h. den Winkel zwischen ihrer Richtung im Wasser und dem Lote auf die Wasseroberfläche. Bei einer Sonnenhöhe z. B. von etwa 48° wird der Faktor $= 0 \cdot 866$, die Temperaturerhöhung um $3 \cdot 7°$ in der Minute wird sich also in der Tiefe von $0 \cdot 09$ *mm* einstellen u. s. f. Bemerkt muß hier werden, daß sich dieser Faktor selbst bei geringen Sonnenhöhen nicht mehr stark verkleinert, weil auch bei streifender Inzidenz der Sonnenstrahlen der Gang der gebrochenen Strahlen nicht allzusehr von der Senkrechten abweicht. Man muß aber eine andere Korrektur anbringen, die erstens die geringere Intensität der Strahlung berücksichtigt, dann aber auch der Schwächung bei der Brechung Rechnung trägt, die sowohl durch Reflexion eines Teiles wie auch durch Verbreiterung des Strahlenbündelquerschnittes entsteht.

Was die Anwendung der bis jetzt erhaltenen Resultate auf den konkreten Fall des Wärmehaushaltes eines Sees anlangt, so ergibt sich zunächst eine ganz bedeutend stärkere Erwärmung der obersten Schichten, als die der tieferen es ist. Die Sonnenenergie wird so also viel eher der Verwendung für Verdunstung des Wassers an der Oberfläche zugeführt, während man einen täglichen durch sie bewirkten Temperaturgang von etwa 0·1° C. bis zu einer Tiefe von beiläufig 7 *m* erwarten darf, mittlere Verhältnisse vorausgesetzt. In Gegenden, wo die Sonne höher steht, kann sich diese Temperaturschwankung in etwas größere Tiefen erstrecken, in höheren Breiten hingegen ist sie auf die der Oberfläche näherliegenden Schichten beschränkt. Allerdings sind die Unterschiede nicht so bedeutend, wegen der schon oben erwähnten Wirkung des größeren Brechungsexponenten des Wassers.

Die starke Absorption des Wassers für die ultrarote Strahlung, verbunden mit ziemlicher Durchlässigkeit für die sichtbare, wird aber eine Wirkung hervorbringen, welche den Erscheinungen in der Erdatmosphäre (verursacht durch die starke Absorption durch Wasserdampf und Kohlensäure) ganz analog ist, ja diese noch an Deutlichkeit bei weitem übertreffen wird. Es kann tagsüber die Strahlung der Sonne und die keineswegs dagegen zu vernachlässigende des Himmels bis in ziemliche Tiefen — wenn auch nur schwach — erwärmend wirken. Nachts aber haben diese Schichten, weil das Energiemaximum im Spektrum bei so geringer Temperatur weit im Ultrarot liegt keine Möglichkeit, die aufgespeicherte Wärme durch Strahlung zu verlieren. Es wird also jeden Tag eine geringe Menge Wärme zugeführt, die, da die Wärmeleitung kaum in Betracht kommt, erst dann verloren gehen kann, wenn durch allzustarke Abkühlung der Oberflächenschicht, die ja allein gegen den Nachthimmel ausstrahlt, nebenbei auch durch Verdunstung ihre Wärme verliert, das labile Gleichgewicht erreicht wird und eine Umlagerung der verschieden dichten Massen eintritt. In den Fällen, wo bei Temperaturen unter 4° umgekehrtes Temperaturgefälle in den obersten Schichten sich eingestellt hat, mag sich das erwähnte Verhalten am deutlichsten zeigen, ebenso dort, wo in der Tiefe das spezifische Gewicht durch

höheren Salzgehalt ein größeres ist und daher Wärmeverlust bloß durch Leitung eintreten kann.

Es ist nebenbei auch wahrscheinlich, daß man alle diese Zahlen ebensogut für Eis verwenden kann, von dem wohl kaum anzunehmen ist, daß sich seine Absorptionsverhältnisse von denen des Wassers wesentlich unterscheiden. Da aber die spezifische Wärme des Eises etwa 0·5 beträgt, wird man bei der Berechnung der Temperaturerhöhungen durch Absorption der Sonnenstrahlung die für Wasser geltenden Zahlen mit 2 zu multiplizieren haben, ebenso als expliziten Ausdruck erhalten:

$$\tau = \frac{0 \cdot 15}{x + 0 \cdot 011}.$$

Bemerkt mag noch werden, daß Licht von einer schmalen Zone bei $\lambda = 0 \cdot 5375$ noch bedeutend tiefer hinabgelangen wird, doch wurde die außerordentlich geringe Absorption an dieser Stelle in den Rechnungen nicht berücksichtigt, weil deren Einfluß auf das Endresultat kein allzugroßer sein konnte, nebenbei aber gerade bei den Strahlen des sichtbaren Spektrums im konkreten Falle andere Ursachen eine Schwächung der Intensität bewirken. Eine solche ist insbesondere die diffuse Zerstreuung des Lichtes durch das Wasser allein, welche hauptsächlich die Partien um das Blau betrifft; dann werden auch im Wasser suspendierte feine Partikelchen aller Art dieselbe Wirkung hervorbringen. Es wird also die Auslöschung jeder merkbaren Lichtwirkung früher erfolgen, als die Rechnung ergibt.

Die erhaltenen Resultate zu überprüfen gibt es leider zu wenig direkte Beobachtungen des täglichen Temperaturganges in verschiedenen Tiefen der Seen. Die einzigen, welche hier zu brauchen wären, sind die von F. M. Exner,[1] welcher im Jahre 1899 Messungen mit dem Bolometer im Wolfgangsee vorgenommen hatte. Aus den Messungen an einigen schönen Tagen erhielt er Werte für den täglichen Temperaturgang, die hier parallel mit den aus der Rechnung folgenden angeführt werden. Der letzteren wurde dabei die Annahme zu Grunde

---

[1] Diese Sitzungsberichte, *109*, IIa, 905 (1900).

gelegt, es falle auf eine horizontale, knapp unter der Wasseroberfläche liegende Fläche von 1 *cm*² eine Wärmemenge von 600 Kalorien im Tage, eine Annahme, die den damaligen Verhältnissen am ehesten entsprechen dürfte.

Tiefe	Täglicher Temperaturgang (Celsiusgrade) (Differenz der mittleren Extreme)	
	Beobachtung	Rechnung
24 *cm*	0·88°	1·87°
87	0·53	0·54
149	0·35	0·30
274	0·24	0·17
524	0·24	0·09

Überraschend ist hier die gute Übereinstimmung mit der Beobachtung für Tiefen von 87, 149 und 274 *cm*. In einer Tiefe von 24 *cm* macht sich schon der Einfluß der Mischung der Wasserschichten mit der obersten, durch Verdunstung abgekühlten fühlbar, während die Angaben des tiefsten Thermometers, wie schon Exner bemerkt, durch verschiedene Einflüsse gefälscht sein dürften. Damit ist auch erwiesen, daß für diese Schichten, wie ja das geringe Temperaturgefälle schon wahrscheinlich macht, die Wirkung der Wärmeleitung für den Zeitraum von einem Tage vernachlässigt werden kann.

Der hier durch Messung festgelegte Temperaturausfall für die obersten Schichten gestattet auch einen Schluß auf die der Verdunstung zugeführte Wärme. Eine beiläufige Ausmessung der in der Schicht bis 87 *cm* Tiefe aufgespeicherten Wärmesummen ergibt bei einer der Rechnung entsprechenden Temperaturverteilung 372 Kalorien pro Quadratzentimeter, während die Beobachtungen bloß 209 Kalorien lieferten. Die Differenz von 163 Kalorien pro Quadratzentimeter wurde vornehmlich zur Verdunstung von Wasser verwendet, konnte also bei einer Verdampfungswärme von 600 *g* kal/*cm*² im Tage eine Schicht von 0·27 *cm* Dicke verdampfen. Die parallel mit den erwähnten Beobachtungen angestellten Messungen der Verdunstung am

Wolfgangsee ergaben für einen heiteren Zehnstundentag im Mittel auch tatsächlich einen Wert von 0·32 *cm*. Der Wert muß naturgemäß etwas höher sein als der aus der Rechnung folgende, da hier der erwärmende Einfluß der über dem Seespiegel liegenden Luft, welche im Durchschnitt um 2·0° höhere Temperatur hatte als das Wasser, vernachlässigt wurde; doch abgesehen davon ergibt sich auch hier eine überraschend gute Übereinstimmung.

Es wird auch leicht erklärlich, daß die Verdunstung nur solange eine beträchtliche Stärke besitzen kann (unter normalen Verhältnissen), als die wärmende Strahlung dauert, nach deren Aufhören aber bald auf eine verschwindende Größe absinkt, wie es auch die Beobachtungen zeigten.

Von einiger Bedeutung mag das Resultat sein, daß beinahe ein Viertel der Strahlungsenergie gleich wieder an die Luft abgetreten wird, und zwar als latente Wärme in einer Form, die nicht in dem Maße Verlusten durch Strahlung etc. ausgesetzt ist, sondern sozusagen ihrer Verwendung im Bedarfsfalle harrt, bis durch Abkühlung Kondensation eintritt. Von den übrigen drei Vierteln der zugeführten Energie wird ein Teil zur Deckung der Verluste durch die nur an der Oberfläche stattfindende Ausstrahlung während der Nacht verwendet, ein anderer hingegen dient zur Erwärmung des ganzen Seewassers, wird sich von Tag zu Tag addieren, solange das günstige Wetter dauert und seine Verwendung beim Eintritt kühlerer Tage finden.

Ist jedoch die Tiefe des Wassers nicht zu bedeutend, so kommen noch namhafte Beträge auf den Seegrund; bei 10 *m* Tiefe z. B. unter den früheren Verhältnissen 0·18 Kalorien pro Quadratzentimeter in der Minute, d. i. etwa 108 Kalorien im Tage. In diesem Falle könnte also vom Grunde aus eine Schicht vom 1 *m* um 1° erwärmt werden. Auch diese Wärme kann sich zum Teil aufspeichern deshalb, weil auch hier die nächtliche Ausstrahlung nicht eintreten kann. Allerdings nimmt mit wachsender Tiefe dieser Anteil rasch ab, so zwar, daß bei 100 *m* die minutliche Wärmezufuhr 0·014, die eines mittleren Tages 8·4 Kalorien beträgt. Hier wird sie sich also höchstens bei

einer Reihe schöner Tage bemerkbar machen. Daß hingegen an seichten Stellen sehr bald größere Temperaturerhöhung sich einstellt, ersieht man daraus, daß bei 1 *m* Tiefe die auf den Grund gelangende Strahlung die ganze darüberstehende Wassersäule um 2° erwärmen kann. Eine allfällige Erhöhung der Wassertemperatur in der Nähe des Grundes wird also nicht immer auf lokale Störungen oder als scheinbare auf falsche Angaben der Meßinstrumente zurückzuführen sein.[1]

Es ist selbstverständiich, daß sich alle die besprochenen Einflüsse auch beim Meere wiederfinden müssen, doch sind sie hier kaum klar zu beobachten. Stärkere Winde, Beunruhigung durch Wellen erzeugen eine fortwährende Mischung der obersten Schichten, die noch durch das Herabsinken der durch Verdunstung salzreicher gewordenen, wenn auch wärmeren Wassermassen verstärkt wird. Es wird sich also hier die tägliche Erwärmung in größere Tiefen erstrecken. Ein an dieser Stelle verwertbares Material wäre jenes, welches die »Pola«-Expedition in den Jahren 1890 bis 1893 mitbrachte. Die im folgenden angeführten Zahlen sind einer Bearbeitung jener Ergebnisse entnommen, welche von C. G. Knott[2] durchgeführt wurde.

Tiefe	Täglicher Temperaturgang	
	Beobachtung (Differenz von Abend- und Morgenbeobachtung)	Rechnung
0 *m*	0°48 ± 0·06	—
2	0·37 ± 0·07	0°24
5	0·29 ± 0·06	0·10
10	0·22 ± 0·09	0·05
20	0·09 ± 0·12	0·02

Für größere Tiefen übersteigt der wahrscheinliche Fehler das Mittel schon bedeutend.

[1] Vergl. hiezu O. v. Aufseß, Petermann's Mitteilungen, 1905, p. 258.

[2] Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Bd. 25, p. 173.

Man sieht hier, wie für Tiefen von 2, 5, 10 *m* die beobachteten Werte über den berechneten liegen, auch wenn man die wahrscheinlichen Fehler berücksichtigt. Erst bei einer Tiefe von gegen 20 *m* scheint sich wieder Übereinstimmung beider Reihen einzustellen. Bis zu einer Tiefe von etwa 2 *m* hingegen sind wieder die berechneten Werte bedeutend höher als die beobachteten. Werden dieselben Annahmen gemacht wie früher für den Wolfgangsee, so ist der Wärmegehalt der Schicht bis zu 2 *m* für den theoretischen Fall in dem auf 1 cm^2 der Oberfläche aufstehenden Prisma um zirka 340 Kalorien größer als nach den Messungen der »Pola«, während die letzteren wieder jenen gegenüber für die Schicht zwischen 2 und 20 *m* einen Überschuß von weniger als 260 Kalorien aufweisen. Die Differenz beider, die ziemlich viel über 80 Kalorien betragen mag, ist wieder als die zur Verdunstung verwendete Wärme anzusprechen. Bei dieser Gelegenheit mag auch bemerkt werden, daß gerade dieser letztere Anteil in allen Berechnungen der solaren Einstrahlung, welche sich auf derartige Temperaturmessungen stützen, niemals zur Geltung kommt, daß also alle die erhaltenen Energiemengen zu niedrig ausfallen müssen.

Es mag hier der Platz sein, auch noch darauf hinzuweisen, daß die Messungen der «Pola« eine verschwindend kleine Tagesamplitude der Temperatur in größeren Tiefen nachgewiesen haben, womit auch eine außerordentlich starke Schwächung der Energiestrahlung bestätigt ist. Wenn demnach in diesen Tiefen Organismen auf strahlende Energie angewiesen sind, können sie diese bloß mehr in der Form blauer oder ultravioletter Strahlung erhalten, welche allein weiter vordringt, und auch diese wird nur mehr minimale Intensität aufweisen.

Kurz zusammengefaßt, ergibt sich also etwa folgendes bezüglich des Wärmehaushaltes in Seen und im Meere:

Die Sonnenstrahlung (und die diffuse des Himmels) wird in den obersten Schichten besonders stark absorbiert; es sind hauptsächlich die Strahlen des ultraroten Spektrums, die davon betroffen werden.

Eine merkbare Temperaturwirkung innerhalb eines Tages wird man nur bis zur Tiefe von etwa 20*m* zu erwarten haben, doch dürfte sich die Lichtwirkung, wenn auch außerordentlich geschwächt, bis über 100*m* hinab erstrecken.

Für die Erwärmung des Wassers kommt in kürzeren Zeiträumen Leitung kaum in Betracht.

Von der einfallenden Sonnenstrahlung findet beinahe ein Viertel sogleich Verwendung zur Verdunstung, wird also als latente Wärme aufgespeichert.

Die Resultate der Rechnung werden voll durch Beobachtungen bestätigt.

Ein Fall könnte noch interessieren, nämlich die Absorption in den Wassertröpfchen, welche die Wolken bilden. Es ist klar, daß man nicht von vornherein auf ein Tröpfchen dieselben Werte anwenden darf, die für eine gleich dicke Schicht Wassers gelten: es geht ja schon beim ersten Auffallen der Strahlen ein bedeutender Teil verloren, die eindringenden haben im Tropfen verschieden lange Wege zurückzulegen, werden also verschieden starke Absorptionen erleiden; beim Auffallen auf die rückseitige Begrenzungsfläche des Tropfens wird wieder ein Teil austreten, ein anderer reflektiert und seinen Weg wieder durch den Tropfen nehmen u. s. f. Um verläßliche Werte zu erhalten, muß man sich der Mühe unterziehen, die auffallenden Strahlen in Zonen einzuteilen und für jede solche Zone die Rechnung gesondert durchzuführen.

Man erhält so Werte, welche sich ziemlich genau in eine Formel fügen

$$E = \frac{1 \cdot 66}{x + 0 \cdot 255} \cdot \frac{J_0}{1000},$$

wo E die pro Längeneinheit absorbierte Energie, x den Tropfendurchmesser und J_0 die in den Tropfen eindringende Strahlungsenergie (pro cm^2) darstellt. Verwendet man diese Beziehung, um die Zeit zu rechnen, welche die Sonne braucht, um Tropfen von vorgegebenem Radius vollständig zur Verdunstung zu

bringen, so erhält man das Resultat, daß Sonnenstrahlung durch Absorption im Tropfen allein diesen nie vollständig aufzehren kann, wohl aber immer kleiner machen. Dieses Ergebnis erklärt sich daraus, daß wohl die Absorption im Verhältnis zur Tropfengröße für kleine Werte der letzteren zunimmt, aber doch nur angenähert linear, während wegen der Verkleinerung des Tropfenquerschnittes auch die Energie der einfallenden Strahlen geschwächt wird.

Wenn also bei Sonnenaufgang ein Verschwinden des Nebels beobachtet wird, so hat man dies, wenn nicht dynamische Erwärmung dabei mitspielt, nur zum geringeren Teile der Absorption in den Tropfen selbst zuzuschreiben. Der größere Teil ist auf Rechnung des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes zu setzen, der auch ein bedeutendes Absorptionsvermögen zeigt, sich rasch erwärmt und so auch die Auflösung des Nebels beschleunigt.

Ebenso wird man auch zunächst an den Wasserdampf denken müssen, wenn es sich um die Vergrößerung kleiner schwebender Wasser- oder Eisteilchen infolge der nächtlichen Ausstrahlung handelt. Es ist natürlich das Emissionsvermögen der letzteren groß entsprechend ihrem Absorptionsvermögen, doch macht sich hier die umgekehrte Wirkung geltend, daß nämlich die kleinen Teilchen wegen ihres geringen Querschnittes und der geringen Dicke viel weniger ausstrahlen können.

In einer Weise können sich aber solche aus allerkleinsten Wassertröpfchen bestehende Wolken bemerkbar machen: ziehen sie vor der Sonne vorüber, so kann ein ganz bedeutender Teil der Strahlungsenergie absorbiert werden, ohne daß irgend eine merkbare Schwächung im sichtbaren Teil des Spektrums stattfindet. Gerade in größeren Höhen hat überdies die ultrarote Strahlung größere Intensität, so daß die von diesen »unsichtbaren Wolken« aufgenommene Energie durchaus nicht zu vernachlässigen ist.

Über die graphische Bestimmung der Intensität und Quantität der solaren Bestrahlung

von

Eduard Doležal,

o. ö. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Mit 5 Textfiguren und 3 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Februar 1908.)

Licht- und Wärmestrahlen sind ihrer physikalischen Natur nach identisch, denn sowohl das Licht als die Wärme werden durch Ätherwellen hervorgerufen; der Unterschied ist in dem menschlichen Empfinden begründet, ist daher rein subjektiver Art. Sinkt eben die Länge der Ätherwellen unter eine bestimmte Minimalgrenze herab, so werden sie nicht mehr als Licht wahrgenommen, sondern nur als Wärme empfunden.

Diese physikalische Tatsache setzt uns in den Stand, einfach nur von Strahlung der Sonne zu sprechen.

Die Intensität und Quantität der Sonnenstrahlung, welche einem Punkte der Erdoberfläche zufolge seiner geographischen Breite zukommt, ist für das solare oder mathematische Klima maßgebend und da dieses noch heute die Grundlage für die klimatologische Forschung und damit für die Darstellung der effektiven Verteilung der Licht- und Wärmestrahlung der Sonne auf der Erde bildet und so eine erste Approximation an das physische Klima darstellt, so erscheint wohl der Versuch einer graphischen Bestimmung dieser Faktoren gerechtfertigt.

Mit der rechnerischen Bestimmung der Intensität und Quantität der Sonnenbestrahlung der Erde, welche als ein rein mathematisches Problem aufgefaßt wurde, haben sich, in chronologischer Folge genannt, die Forscher Halley, Lambert, Poisson, Meech, Wiener, Angot, Zenker, Hargreaves und in neuester Zeit Hopfner beschäftigt.

Wiener hat auch eine graphische Darstellung der Stärke der täglichen Insolation gegeben, jedoch nur für spezielle Fälle und Zöllner hat in der »Meteorologischen Zeitschrift 1906« eine Mitteilung unter dem Titel: »Graphische Darstellung der täglichen Bestrahlung der Erde durch die Sonne in verschiedenen Monaten und Breiten« gemacht.

In der folgenden Abhandlung soll ein Verfahren mitgeteilt werden, das die »Graphische Bestimmung der Intensität und Quantität der solaren Bestrahlung« zum Gegenstande hat.

I. Graphische Bestimmung der Intensität.

1. Das bekannte physikalische Gesetz, wonach die Intensität J der Beleuchtung und Erwärmung, beziehungsweise Bestrahlung von dem Einfallswinkel α der Sonnenstrahlen abhängt, kommt durch die Formel:

$$J = J_0 \cos \alpha \qquad 1)$$

zum Ausdrucke; J_0 ist die Normalintensität, α der Einfallswinkel.

Da nun der Einfallswinkel α der Zenithdistanz $z = 90° - h$ der Sonne entspricht, so drückt sich die Intensität auch in der Form aus:

$$J = J_0 \cos z = J_0 \sin h. \qquad 2)$$

Dadurch ist es möglich, die Intensität der Sonnenbestrahlung eines Ortes der Erde als eine Funktion der Polhöhe φ darzustellen; denn aus dem Fundamentaldreiecke Zenith — Pol — Sonne, in welchem die geographische Breite φ des Ortes, die Deklination δ und Zenithdistanz z der Sonne oder Sonnenhöhe h und der Stundenwinkel t auftreten, folgt:

$$\cos z = \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t, \qquad 3)$$

so daß die Intensitätsgleichung auch geschrieben werden kann:

$$J = J_0 (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t) = J_0 \cos z = J_0 \sin h. \quad 4)$$

Der Quotient:

$$\frac{J}{J_0} = i_\varphi = \cos z = \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \quad 5)$$

stellt nach Wiener die relative Intensität i_φ der Sonnenbestrahlung für einen Ort unter der Breite φ dar.

Die Deklination der Sonne δ kann für den vorliegenden Zweck während eines Tages als konstant angenommen werden, die geographische Breite φ für einen und denselben Ort ist es auch, somit kann man

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi \sin\delta &= n \\ \cos\varphi \cos\delta &= m \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

setzen, wobei m und n konstante Größen sind. Da nach Gleichung 5) $\cos z$ und $\cos t$ voneinander abhängige Variable sind, für welche wir

$$\left.\begin{aligned} \cos t &= x \\ \sin h = \cos z &= y \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

einführen, so kann die Gleichung 5) geschrieben werden:

$$y = mx + n \qquad 8)$$

Dies ist die analytische Gleichung einer Geraden in rechtwinkligen Koordinaten, aber nicht im rechtwinkligen Cartesianischen Koordinatensysteme, sondern in einem solchen Koordinatensysteme, in welchem die Abmessungen auf den Achsen durch Längen von trigonometrischen Funktionen ausgedrückt erscheinen; es sind auf den Koordinatenachsen Kosinusteilungen angebracht, die mit dem Stundenwinkel t, beziehungsweise mit der Zeit auf der x-Achse und der Sonnenhöhe h, respektive Zenithdistanz z auf der y-Achse beschrieben sind. Der Raum, in welchem alle Punkte graphisch bestimmt werden können, beschränkt sich auf einen Koordinatenquadranten mit der Seitenlänge von zwei Einheiten (Fig. 1).

Bedenkt man, daß die tägliche Änderung der Sonnendeklination so gering ist, daß sie bei der graphischen Darstellung in einem gewissen Maßstabe nicht zum Ausdrucke kommt, daher unter allen Umständen vernachlässigt werden kann, und wird ferner ein und derselbe Ort mit konstanter geographischer Breite φ vorausgesetzt, so gibt die durch die Gleichung 1) repräsentierte Gerade ein anschauliches Bild der

Stärke der Insolation oder relativen Intensität der Sonnenbestrahlung für den betreffenden Ort. Die Intensitäten kommen durch Strecken zum Ausdrucke, die unmittelbar aus dem Graphikon entnommen werden können.

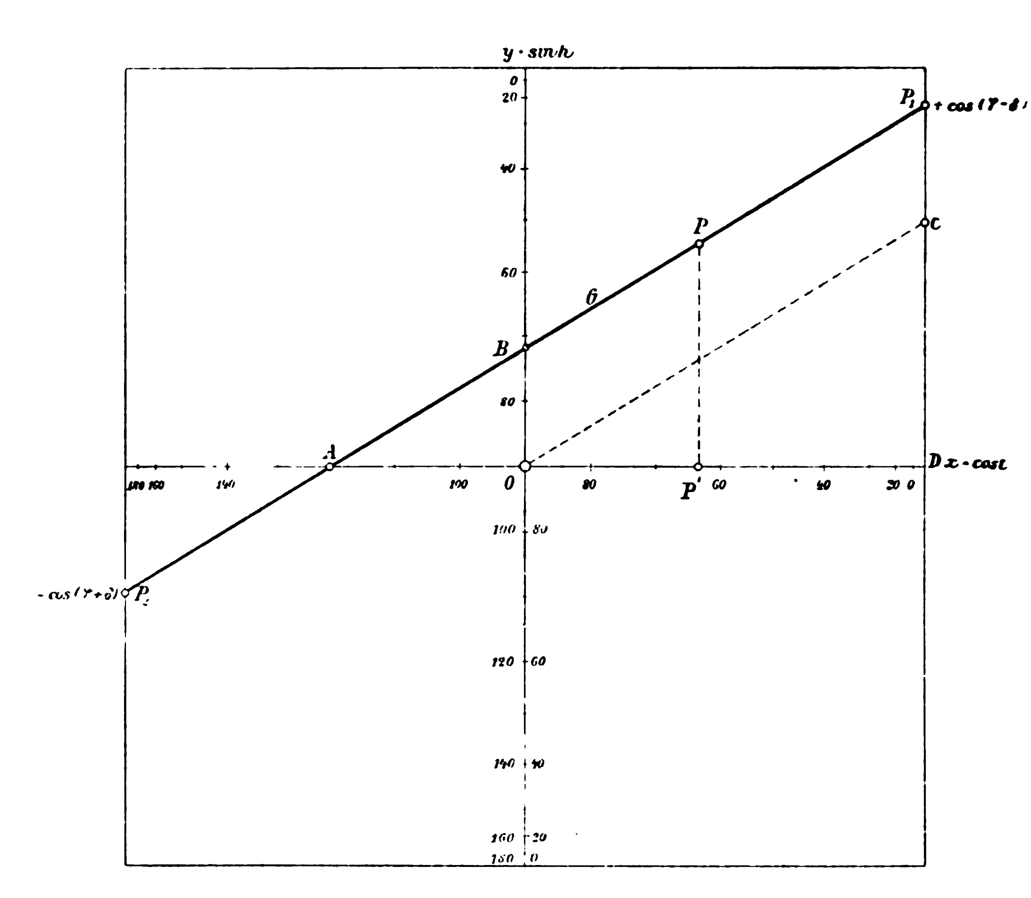


Fig. 1.

Eine solche Gerade kann füglich als Intensitäts- oder Insolationsgerade oder Gerade der relativen Strahlungsintensität bezeichnet werden.

Die Lage der Geraden G im Koordinatensysteme läßt sich einfach bestimmen (Fig. 1).

Für $x = +1$, d. i. $\cos t = 1$ oder $t = 0$, was dann eintritt, wenn die Sonne im Meridiane, beziehungsweise wenn sie sich in der oberen Kulmination befindet, wird

$$y = m + n = \cos\varphi \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &= \cos(\varphi - \delta) \\ &= \cos(\delta - \varphi) \end{aligned}\right\}, \qquad 8')$$

eine Größe, welche aufgetragen den Punkt P_1 der Geraden G gibt.

Aus der Doppelgleichung 8') wird rechter Hand der obere oder der untere Wert genommen, wenn das Gestirn südlich oder nördlich vom Zenith kulminierte.

Setzt man die Abszisse

$$x = -1, \text{ d. i. } \cos t = 1 \text{ oder } t = 180^\circ,$$

so wird der zugehörige Ordinatenwert:

$$\begin{aligned} y = -m + n &= -\cos\varphi \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta \\ &= -\cos(\varphi + \delta), \end{aligned} \qquad 9)$$

welcher, auf der im Abstande -1 von der y-Achse gezogenen Grenzordinate aufgetragen, den Punkt P_2 als den zweiten Endpunkt der Intensitätsgeraden liefert.

Durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ist die Lage der Intensitätsgeraden im Koordinatensysteme unzweideutig festgelegt.

Von Interesse sind noch die Schnittpunkte A und B der Geraden mit den Koordinatenachsen.

Wird $x = 0$ gesetzt, d. h. ist $\cos t = 0$ oder $t = 90^\circ$, respektive 270°, so wird $y = n$, d. h. die Intensitätsgerade schneidet auf der Koordinatenachse das Stück ab:

$$\overline{OB} = y = n = \sin h = \sin\varphi \sin\delta. \qquad 10)$$

Diese Ordinate entspricht dem Schnittpunkte B der Geraden mit der y-Achse.

Setzt man:

$$y = 0, \text{ d. h. } x = -\frac{n}{m} = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi,$$

so wird der Abschnitt der Geraden auf der x-Achse:

$$\overline{OA} = x = \cos t = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta. \qquad 11)$$

Ein beliebiger Punkt P dieser Intensitätsgeraden hat die Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned}\overline{OP'} &= x = \cos t\\ \overline{P'P} &= y = \sin h = \cos z\end{aligned}\right\}, \qquad 12)$$

wodurch sich für einen beliebigen Zeitpunkt des Tages, dem der Stundenwinkel t zukommt, die relative Strahlungsintensität als Ordinate y, also eine Strecke, bestimmen läßt.

Durch die Parallele $\overline{OC}$ zu G wird auf der rechtsseitigen Grenzordinate ein Abschnitt erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\overline{CP_1} &= \overline{OB} = \sin\varphi \sin\delta\\ \overline{DC} &= \overline{DP_1} - \overline{CP_1} = \cos(\varphi-\delta) - \sin\varphi\sin\delta = \cos\varphi\cos\delta\end{aligned}\right\}. \qquad 13)$$

Dadurch ist auch die Möglichkeit gegeben, die Intensitätsgerade einfach zu finden. Es wird $\sin\varphi \sin\delta$ von O aus auf der Ordinatenachse in entsprechender Richtung aufgetragen und der Punkt B erhalten, durch welchen die Intensitätsgerade G geht; hierauf wird $\cos\varphi \cos\delta$ auf der rechten Grenzordinate vermerkt und der Punkt C notiert; verbindet man C mit O und zieht durch B eine Parallele zu $\overline{OC}$, so ergibt sich die Intensitätsgerade G.

2. Relative Strahlungsintensität am Äquator und am Pole. Der allgemeine Ausdruck für die relative Strahlungsintensität unter der geographischen Breite φ:

$$i_\varphi = \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \qquad 14)$$

gibt für

$$\varphi = O$$

$$i_0 = \sin h_0 = \cos\delta \cos t, \qquad 15)$$

die relative Strahlungsintensität am Äquator.

Für den Pol, wo $\varphi = 90°$ gilt, wird erhalten:

$$i_{90} = \sin h_{90} = \sin\delta \qquad 16)$$

als relative Strahlungsintensität des Erdpoles.

Mit Beziehung auf die beiden Gleichungen 15) und 16) für i_0 und i_{90} können für i_φ auf Grund der Gleichung 14) die Relationen aufgestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} \sin h_\varphi &= \sin h_{90} \sin \varphi + \sin h_0 \cos \varphi \\ \cos z_\varphi &= \cos z_{90} \sin \varphi + \cos z_0 \cos \varphi \\ i_\varphi &= i_{90} \sin \varphi + i_0 \cos \varphi \end{aligned}\right\}, \qquad 17)$$

welche die Beziehung der relativen Strahlungsintensitäten am Pole und am Äquator mit jenen an einem Erdorte von der geographischen Breite φ ausdrücken.

Die Gleichung 15), welche auch

$$G_0 \ldots \qquad y_0 = \cos \delta . x \qquad 18)$$

geschrieben werden kann, stellt eine Gerade dar, welche durch den Koordinatenanfangspunkt geht, und zwar mit dem Neigungspunkt ϕ, der bestimmt wird aus:

$$\operatorname{tg} \phi = \cos \delta. \qquad 19)$$

Durch die Gleichung 18) wird die Intensitätsgerade für Punkte des Erdäquators dargestellt.

Für den Pol stellt die Gleichung

$$G_{90} \ldots \qquad y_{90} = \sin \delta \qquad 20)$$

die Intensitätsgerade vor, welche im Abstande $\sin \delta$ parallel zur x-Achse verläuft.

Im Frühlings- und Herbstäquinoktium, wenn $\delta = 0$ wird, erhält man für die Intensitätsgeraden:

$$\left.\begin{aligned} G_0 \ldots \qquad y_0 &= 1 . x \\ G_{90} \ldots \qquad y_{90} &= 0 \\ G_\varphi \ldots \qquad y_\varphi &= \cos \varphi . x \end{aligned}\right\}. \qquad 21)$$

Im Sommersolstitium, wenn δ sein Maximum erreicht, wird:

$$\left.\begin{aligned} G_0 \ldots \qquad y_0 &= \cos \delta_{max} . x \\ G_{90} \ldots \qquad y_{90} &= \sin \delta_{max} \\ G_\varphi \ldots \qquad y_\varphi &= \sin \delta_{max} \sin \varphi + \cos \delta_{max} \cos \varphi . x \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

und im Wintersolstitium, wo die Deklination negativ ihren Größtwert besitzt, hat man:

$$\left.\begin{aligned} G_0 \ldots \quad & y_0 = \cos(-\delta_{max}).x \\ G_{90} \ldots \quad & y_{90} = \sin(-\delta_{max}) \\ G_\varphi \ldots \quad & y_\varphi = \sin(-\delta_{max}) \sin\varphi + \cos(-\delta_{max}) \cos\varphi . x \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

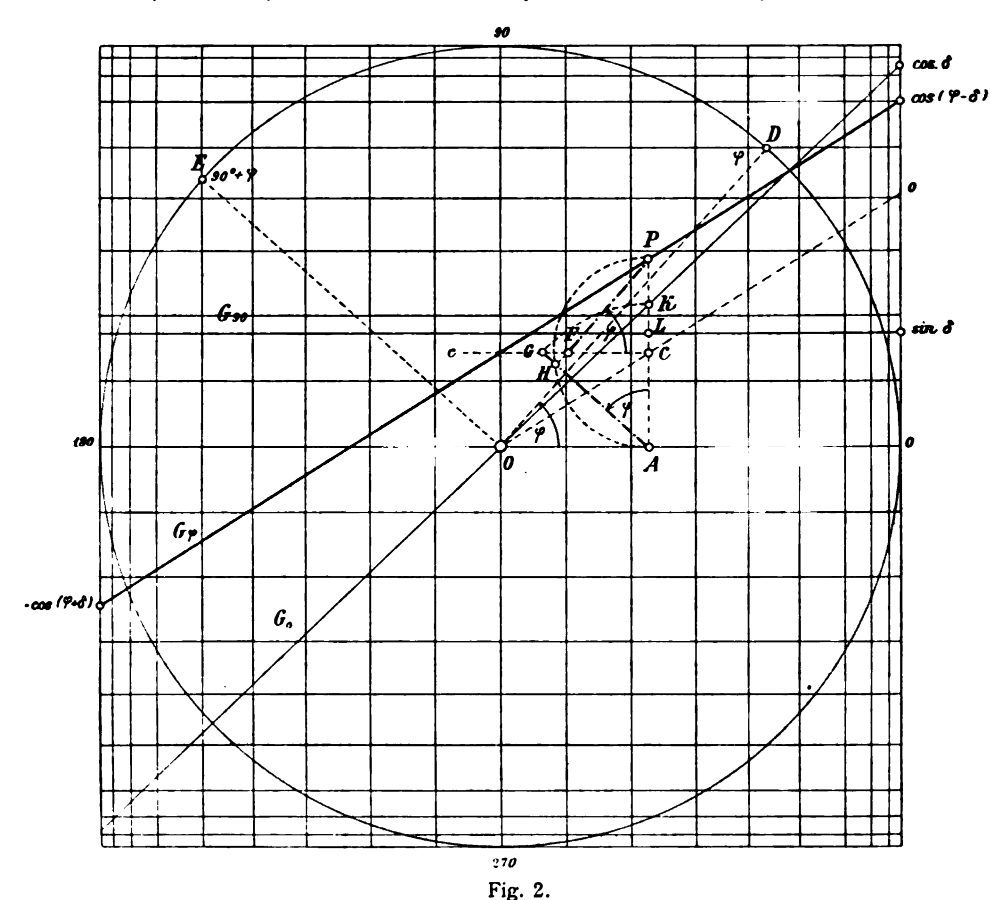


Fig. 2.

Eine nicht uninteressante graphische Darstellung der Relation 17) ergibt sich nach folgender Überlegung.

Zieht man in Fig. 2 zu einem beliebigen Punkte P der Intensitätsgeraden G_φ die Ordinate, so ist diese:

$$\overline{AP} = \sin h_\varphi = \cos z_\varphi = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t; \quad 23)$$

der Abschnitt $\overline{Oc}$ auf der y-Achse ist nach dem Vorhergehenden:

$$\overline{Oc} = \sin \varphi \sin \delta$$

und ferner

$$\left.\begin{aligned} \overline{AC} &= \sin\varphi \sin\delta = \sin h_{90} \sin\varphi = \cos z_{90} \sin\varphi \\ &= i_{90} \sin\varphi \\ \overline{PC} &= \cos\varphi \cos\delta \cos t = \sin h_0 \cos\varphi = \cos z_0 \cos\varphi \\ &= i_0 \cos\varphi \end{aligned}\right\} . \qquad 24)$$

Sucht man auf dem Stundenkreise, dem mit der Einheit im Koordinatenanfangspunkte beschriebenen Kreise, die Punkte D und E, die der geographischen Breite φ, beziehungsweise $\varphi + 90°$ entsprechen, verbindet sie mit O und zieht durch P und A Parallele zu diesen Geraden, so ergeben sich im Schnitte mit der Geraden $\overline{Cc}$, die durch C parallel zur Abszissenachse gezogen wurde, die Punkte F und G.

Aus der Figur ergibt sich:

$$\overline{AP} = \overline{AC} + \overline{CP} = \overline{AG} \cos\varphi + \overline{PF} \sin\varphi \qquad 25)$$

und nach den Gleichungen 23) und 24) bestehen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AP} = \cos h_\varphi &= \sin h_0 \cos\varphi + \sin h_{90} \sin\varphi \\ \cos z_\varphi &= \cos z_0 \cos\varphi + \cos z_{90} \sin\varphi \\ i_\varphi &= i_0 \cos\varphi + i_{90} \sin\varphi \end{aligned}\right\}, \qquad 26)$$

somit müssen nach dem Satze der »Gleichen Koeffizienten« in den Gleichungen 25) und 26)

$$\left.\begin{aligned} \overline{AG} &= \sin h_0 = \cos z_0 = i_0 \\ \overline{PF} &= \sin h_{90} = \cos z_{90} = i_{90} \end{aligned}\right\}. \qquad 27)$$

Die in Gleichung 26) dargestellte Relation kann auch, wie folgt, erhärtet werden.

Im Graphikon Fig. 2 sind die Intensitätsgeraden

$$\left.\begin{aligned} G_\varphi \ldots \quad i_\varphi &= \sin h_\varphi = \cos z_\varphi = \cos\varphi \cos\delta . x + \sin\varphi \sin\delta \\ G_0 \ldots \quad i_0 &= \sin h_0 = \cos z_0 = \cos\delta \cos t \\ G_{90} \ldots \quad i_{90} &= \sin h_{90} = \cos z_{90} = \sin\delta \end{aligned}\right\} \qquad 28)$$

dargestellt. Zieht man zur Zeit t die Ordinate, so werden die beiden Geraden G_0 und G_{90} in K und L geschnitten und es muß in Fig. 2 sein:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AP} &= \sin h_\varphi = \cos z_\varphi = \overline{AP} \\ \overline{AK} &= \sin h_0 = \cos z_0 = \overline{AG} \\ \overline{AL} &= \sin h_{90} = \cos z_{90} = \overline{PF} \end{aligned}\right\}, \qquad 29)$$

was unmittelbar einleuchtet.

3. Extreme der relativen solaren Strahlungsintensität. Diese können unmittelbar aus der Fig. 1 abgelesen werden.

Das Maximum findet statt für

$$\cos t = +1, \text{ also } t = 0° \text{ und ist } \overline{DP_1} = \cos(\varphi - \delta). \qquad 30)$$

Derselbe Wert ergibt sich, wenn man

$$y = \cos\varphi \cos\delta \cos t + \sin\varphi \sin\delta$$

nach t differenziert. Setzt man:

$$\frac{\partial y}{dt} = -\cos\varphi \cos\delta \sin t = 0, \qquad 31)$$

so ergibt sich

$$\sin t = 0, \text{ also } \cos t = +1,$$

somit

$$i_{max} = \cos\varphi \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta = \cos(\varphi - \delta). \qquad 32)$$

Da nun der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\cos\varphi \cos\delta \cos t = -\cos\varphi \cos\delta$$

negativ ist, so muß für den Wert $t=0$ ein Maximum bestehen.

Nach einer analogen Untersuchung findet man, daß das Minimum eintritt, wenn $\cos t = -1$, also

$$i_{min} = -\cos\varphi \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta = -\cos(\varphi + \delta) \qquad 33)$$

wird, was nur für hohe polare Breiten, für welche

$$\varphi + \delta > \frac{\pi}{2}$$

wird, in Betracht kommt.

Es dürfte von Interesse sein zu untersuchen, unter welcher geographischen Breite φ die Strahlungsintensität extreme Werte besitzt.

Differenziert man die Gleichung:

$$i_\varphi = i_0 \cos\varphi + i_{90} \sin\varphi \qquad 34)$$

nach φ, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial i_\varphi}{\partial\varphi} &= -i_0 \sin\varphi + i_{90} \cos\varphi \\ \frac{\partial^2 i_\varphi}{\partial\varphi^2} &= -i_0 \cos\varphi - i_{90} \sin\varphi = -i_\varphi \end{aligned}\right\} . \qquad 35)$$

Für ein Extrem wird bekanntlich:

$$\frac{\partial i_\varphi}{\partial\varphi} = -i_0 \sin\varphi + i_{90} \cos\varphi = 0; \qquad 36)$$

Daraus ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{i_{90}}{i_0} . \qquad 37)$$

Da nun $\frac{\partial^2 i_\varphi}{\partial\varphi^2} < 0$ ist, so erhält man für die durch die Gleichung 37) bestimmte Breite ein Maximum der Strahlungsintensität.

Für diesen Fall hat man zufolge der Gleichung 37):

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{i_{90}}{\sqrt{i_0^2 + i_{90}^2}} \\ \cos\varphi &= \frac{i_0}{\sqrt{i_0^2 + i_{90}^2}} \end{aligned}\right\} , \qquad 38)$$

welche Werte, in die Gleichung 34) substituiert, geben:

$$i_\varphi^2 = i_0^2 + i_{90}^2 . \qquad 39)$$

4. Intensitätsgeraden der Sonne zu Wien für das Jahr 1907. Die geographische Breite für Wien (neue Sternwarte) ist:

$$\varphi = 48^\circ\, 13'\, 55'' \doteq 48^\circ\, 14'.$$

Die Deklinationen der Sonne sind für die vier charakteristischen Zeiten:

1. für das	Frühlingsäquinoktium	$\delta =$	$0^\circ\ 00'\ 00''$		
2. »	» Sommersolstitium	$=$	$+22\ \ 27\ \ 01$	$\doteq$	$+22^\circ\ 27'$
3. »	» Herbstäquinoktium ...	$=$	$0\ \ 00\ \ 00$		und
4. »	» Wintersolstitium	$=$	$-23\ \ 26\ \ 58$	$\doteq$	$-23\ \ 27.$

Die Konstruktionselemente für die Intensitätsgeraden sind die Längen der Grenzordinaten, welche durch folgende Winkel, beziehungsweise Längen bestimmt sind, und zwar: $\varphi - \delta$ und $\varphi + \delta$, respektive $\cos(\varphi - \delta)$ und $-\cos(\varphi + \delta)$.

Wir erhalten:

	$\varphi - \delta$	$\varphi + \delta$
für das Frühlingsäquinoktium	$48^\circ\ 14'$	$48^\circ\ 14'$
» » Sommersolstitium	25 47	70 41
» » Herbstäquinoktium	48 14	48 14
» » Wintersolstitium	71 41	24 27.

Die Fig. 3 zeigt die Intensitätsgeraden für Wien (neue Sternwarte) zur Zeit der Äquinoktien und Solstitien.

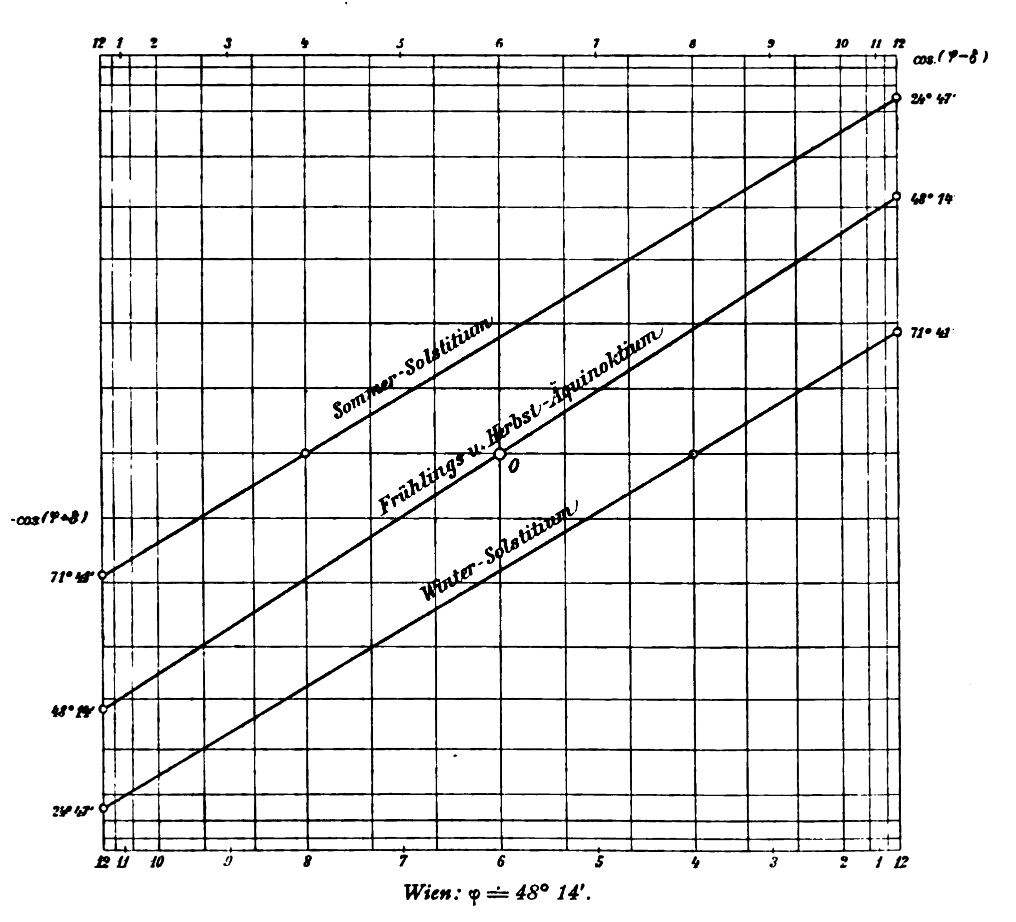
Anmerkung. Die Intensitätsgerade gibt uns nicht nur einen genauen Aufschluß über die Intensitätsverhältnisse der solaren Bestrahlung im Verlaufe eines Tages, sie gestattet auch, da sie eine graphische Darstellung der Sonnenbahn repräsentiert, Daten über die tägliche Bewegung der Sonne abzuleiten (Fig. 4).

Wird das Graphikon in der in Fig. 4 ersichtlichen Weise ausgestattet, mit Winkeln und zugeordneten Zeitangaben versehen, so können wir an der Bahngeraden der Sonne G für einen beliebigen Zeitpunkt des Tages t, für welchen die Bahngerade eben Gültigkeit hat, die Sonnenhöhe h, respektive die Zenithdistanz z ablesen, z. B. für den Punkt P. Die Geraden $\overline{AP_1}$, $\overline{AP_2}$ entsprechen dem halben Tag-, respektive Nachtbogen der Sonne.

Wir können somit unmittelbar Daten für besondere Erscheinungen der täglichen Bewegung der Gestirne gewinnen.

Hat man z. B. die Zeit des Sonnen-Auf- oder Unterganges zu bestimmen, so ist hiebei $h = 0$ oder $z = 90°$ zu setzen, wodurch

$$y = \cos 90° = 0$$



Intensitätsgerade für die Äquinoktial- und Solstitialzeiten.

Fig. 3.

für ein bestimmtes $t_0 = ?$ wird, also:

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0 = 0. \qquad 40)$$

Die Zeit t_0 aus dieser Gleichung ist:

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \qquad 41)$$

Graphisch wird dieser Wert unmittelbar im Schnitte der Intensitätsgeraden mit der Abszissenachse A erhalten; hiebei ist $y = 0$, somit

$$x = -\frac{n}{m} = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \qquad 42)$$

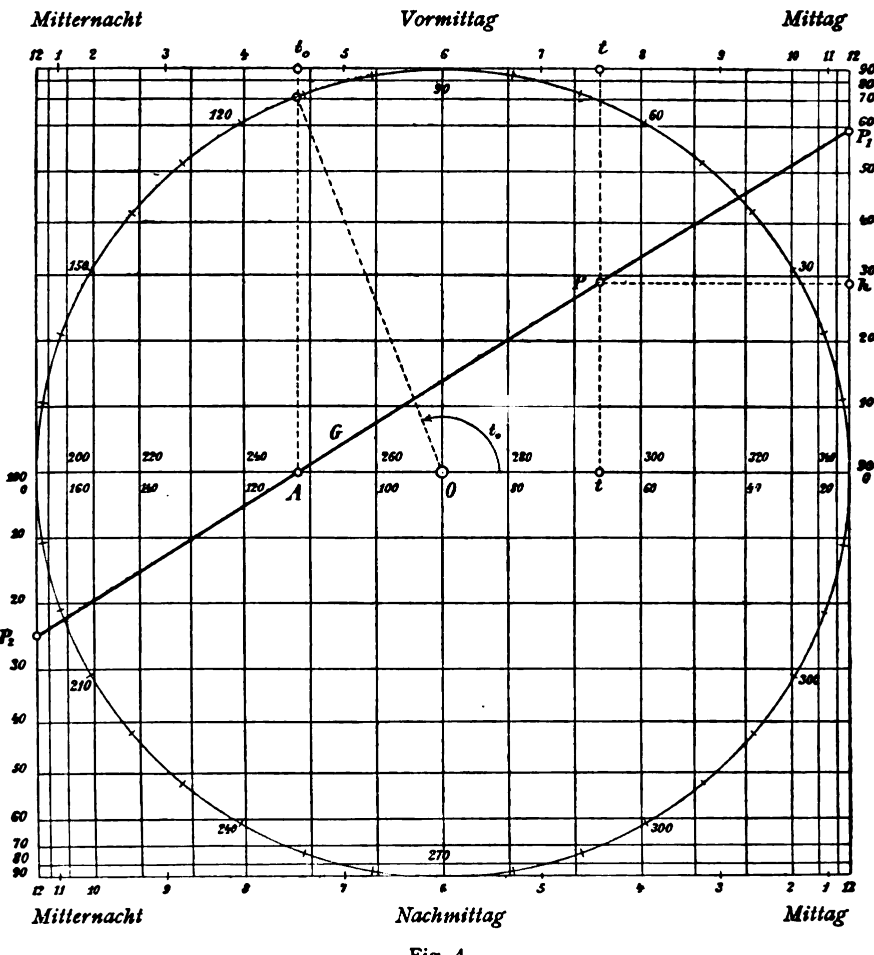


Fig. 4.

Die wahre Zeit des Auf- und Unterganges der Sonne wird erhalten, wenn man bei dem Schnittpunkte der Sonnenbahngeraden mit der Abszissenachse die Zahl abliest; wird diese Lesung um die Zeitgleichung korrigiert, so erhält man

die bürgerliche Zeit des Sonnenaufganges oder -unterganges.

Wir behalten uns vor, in einer selbständigen Abhandlung die Bedeutung des beschriebenen Graphikons nach entsprechender Ausgestaltung zur äußerst bequemen Auflösung verschiedener Aufgaben der »Sphärischen Astronomie«: Zeit-, Positionsbestimmungen usw. zu behandeln.

II. Graphische Bestimmung der Quantität der Sonnenbestrahlung.

1. Bezeichnen wir die unendlich kleine Strahlenquantität von Wärme oder Licht, welche in der unendlich kleinen Zeit dt der Flächeneinheit eines Punktes der Erdoberfläche unter der geographischen Breite φ zukommt, mit dQ_φ und stellt r die Entfernung der Strahlenquelle, der Sonne, z ihre Zenithdistanz und h ihre Höhe dar, so besteht die Beziehung:

$$dQ_\varphi = \frac{K}{r^2} \cos z\, dt = \frac{K}{r^2} \sin h\, dt \qquad 43)$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung 3):

$$dQ_\varphi = \frac{K}{r^2} (\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t) dt. \qquad 44)$$

Handelt es sich um die Quantität der Sonnenbestrahlung eines Punktes der Erdoberfläche innerhalb eines Tages, so hat die Integration der vorstehenden Gleichung zwischen bestimmten Grenzen der Zeit, und zwar vom Sonnenaufgange bis zum Untergange derselben zu erfolgen. Da die Stundenwinkel t_1 vom Sonnenaufgange bis zur Meridianpassage und von da zum Sonnenuntergange wohl als gleich angenommen werden können, so wollen wir die Strahlenmenge nur für den halben Tag rechnen, indem wir die Integrationsgrenzen 0 und t_1 einführen.

Die Strahlenmenge $\frac{Q_\varphi}{2}$ für den halben Tag ergibt sich aus:

$$\frac{Q_\varphi}{2} = \frac{K}{r^2} \int_0^{+t_1} (\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t)\, dt \qquad 45)$$

oder

$$\frac{Q_\varphi}{2} = \frac{K}{r^2} \sin\varphi \sin\delta \int_0^{+t_1} dt + \frac{K}{r^2} \cos\varphi \cos\delta \int_0^{+t_1} \cos t \, dt$$

$$= \frac{K}{r^2} \left[\sin\varphi \sin\delta \, . \, t + \cos\varphi \cos\delta \sin t\right]_0^{+t_1}$$

$$= \frac{K}{r^2} \left[\sin\varphi \sin\delta \, . \, t_1 + \cos\varphi \cos\delta \sin t_1\right] \qquad 46)$$

oder die tägliche solare Bestrahlungsmenge:

$$Q_\varphi = 2\frac{K}{r^2} q_\varphi = 2\frac{K}{r^2} (\sin\varphi \sin\delta \, . \, t_1 + \cos\varphi \cos\delta \sin t_1)$$

und hieraus:

$$q_\varphi = \frac{Q_\varphi}{2\frac{K}{r^2}} = \sin\varphi \sin\delta \, . \, t_1 + \cos\varphi \cos\delta \sin t_1 \qquad 47)$$

In dem Ausdruck Q_φ für die tägliche Strahlungsmenge handelt es sich vorerst um die graphische Darstellung, respektive Bestimmung des Ausdruckes für die relative Strahlungsquantität:

$$q_\varphi = \sin\varphi \sin\delta \, . \, t_1 + \cos\varphi \cos\delta \sin t_1. \qquad 48)$$

Erste Methode. Wiener und ebenso in der letzten Zeit Zöllner haben die Quantität der Bestrahlung als eine Strahlensumme, Fläche, erhalten, begrenzt von der Abszissenachse und einer Kurve, für welche zufolge der Relation 44):

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= \cos z = \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \end{aligned}\right\} \qquad 49)$$

gesetzt wird.

Das Flächendifferential lautet dann:

$$dF = y\,dx = (\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t)\,dt \qquad 50)$$

und das Integral, innerhalb der Grenzen 0 und t_1 genommen, gibt:

$$F = \sin\varphi \sin\delta \, . \, t_1 + \cos\varphi \cos\delta \sin t_1 = q_\varphi, \qquad 51)$$

wobei natürlich die Fläche noch mit dem Faktor $2\frac{K}{r^2}$ multipliziert werden muß, um

$$Q_\varphi = 2\frac{K}{r^2} q_\varphi = 2\frac{K}{r^2} F \qquad 52)$$

die tägliche Strahlungsmenge zu erhalten.

Die Fläche F wird mit dem Planimeter, also auf mechanischem Wege erhalten.

Diese Bestimmung der Strahlungsquantität läßt an Einfachheit wohl nichts zu wünschen übrig.

Uns handelte es sich darum, eine graphische Bestimmung der Quantität der Bestrahlung zu bieten unter Zugrundelegung der Intensitätsgeraden. Dies kann in doppelter Weise geschehen.

Zweite Methode. Dieses Verfahren zeigt eine unverkennbare Analogie mit der Wiener'schen Bestimmungsart.

Denken wir uns einen geraden Kreiszylinder (Fig. 5), dessen Basiskreis vom Radius $r = 1$ in der xz-Ebene liege; die normal zur xz-Ebene laufende Achse falle mit der y-Achse zusammen.

Die Intensitätsgerade $G = \overline{P_1P_2}$ liegt mit ihren Grenzpunkten P_1, P_2 auf den Konturgeraden des Zylinders.

Legt man durch die Intensitätsgerade eine Ebene, so daß ihre Trasse auf der xz-Ebene parallel zur z-Achse selbst verläuft, so ergibt sich als Schnitt mit dem Zylinder die Kurve zweiter Ordnung K. Dieselbe Kurve wird auch erhalten, wenn zu jedem Punkte P der Intensitätsgeraden die korrespondierenden Punkte A_1 und A_2 auf der Mantelfläche des Zylinders mit Hilfe der Vertikalebene $PA_2a_2\,P'a_1A_1$ bestimmt werden.

Die Gleichung des Zylinders ist:

$$x^2 + z^2 = 1, \qquad 53)$$

jene der Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad 54)$$

wobei nach Fig. 1

$$\left.\begin{aligned} a &= \overline{OA} = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta \\ b &= \overline{OB} = \sin\varphi \sin\delta \end{aligned}\right\}$$

bedeuten.

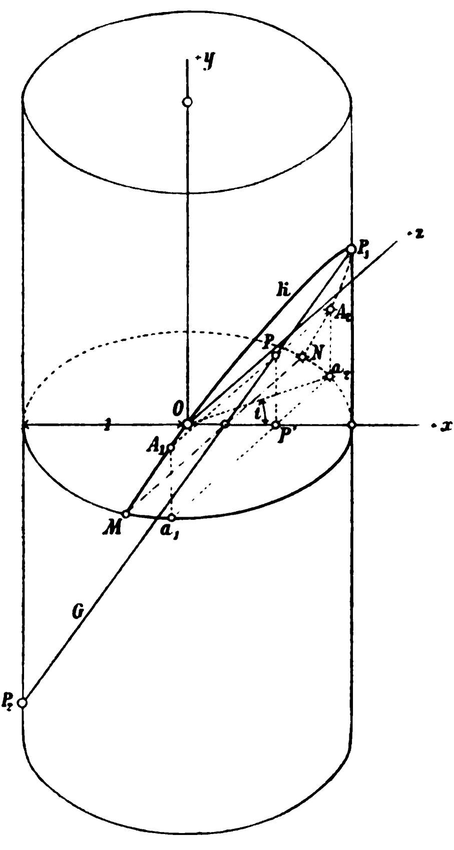


Fig. 5.

Führt man

$$x = \frac{a}{b}(b-y)$$

in die Gleichung 53) für den Zylinder ein, so folgt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 (b-y)^2 + z^2 = 1 \qquad 55)$$

als Gleichung der Projektion der Schnittkurve auf die yz-Ebene.

In dem rechtwinkligen Dreieck $OP'a_2$ ist:

$$\overline{OP'} = \cos t, \quad \overline{Oa_2} = 1,$$

somit

$$\overline{P'a_2} = z = \sin t,$$

es kann somit die Gleichung 55) auch geschrieben werden:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 (b-y)^2 + \sin^2 t = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 (b-y)^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t,$$

beziehungsweise

$$y = b \pm \frac{b}{a} \cos t. \qquad 56)$$

Das Flächendifferential ist, da nur der über dem Horizonte liegende Teil der Sonnenbahn gilt:

$$dF = y\,dt = b\,dt + \frac{b}{a} \cos t\,dt \qquad 57)$$

und gibt, integriert:

$$\left.\begin{aligned} F &= b \int_0^{t_1} dt + \frac{b}{a} \int_0^{t_1} \cos t\,dt \\ &= b t_1 + \frac{b}{a} \sin t_1 \\ F &= \sin \varphi \sin \delta . t_1 + \cos \varphi \cos \delta \sin t_1 \end{aligned}\right\}. \qquad 58)$$

oder auch:

Wir sehen, daß die Fläche jenes Teiles der Mantelfläche, die zwischen der Schnittkurve K und dem Einheitskreise liegt, gleich ist der gesuchten Größe q_φ; es versinnlicht somit diese Fläche im gewissen Sinne die tägliche Strahlungsquantität.

Dritte Methode. Wir gehen von der Intensitätsgeraden aus und benützen den aus dem Koordinatenanfangspunkte gezogenen Einheitskreis; dieser ist in Grade geteilt und entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne beschrieben, wobei die Winkel dem Stundenwinkel t entsprechen (Taf. I, Fig. 6).

Denkt man sich durch den Punkt P der Intensitätsgeraden eine Ordinate gelegt, so schneidet sie die Abszissenachse im Punkte A und den Einheits- oder Stundenkreis im Punkte B; der Winkel AOB entspricht dem Stundenwinkel t.

Es ist nun:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OA} &= \cos t = x \\ \overline{AB} &= \sin t \\ \overline{AP} &= y = \cos z = \sin h \\ \widehat{CB} &= t \end{aligned}\right\}. \qquad 59)$$

Zieht man zu B den Radius, verlängert ihn über die Peripherie des Stundenkreises hinaus und trägt man vom Punkte B nach dem Kreismittelpunkte und von B über die Peripherie hinaus die Länge

$$\overline{AP} = \cos z = \sin h = y \qquad 60)$$

auf, so ergeben sich die Punkte p_1 und P_1. Bestimmt man in analoger Weise für andere Punkte der Intensitätsgeraden, welche anderen Stundenwinkeln oder Zeiten t zukommen, die zugehörigen Punkte p_2 und P_2, p_3 und $P_3 \ldots$, so geben diese, miteinander verbunden, zwei Kurven K und k, die sich in den Punkte M schneiden; auf der Abszissenachse ergeben sich die Punkte p_n und P_n.

In derselben Weise können die zusammengehörigen zwei Kurven ermittelt werden, die der Sonne entsprechen, wenn sie unter dem Horizonte sich befindet; diese beiden Kurven schneiden sich gleichfalls in dem Punkte N des Stundenkreises und auf der Abszissenachse geben sie die Punkte p_m und P_m.

Die Polargleichungen der beiden Kurven lauten mit Berücksichtigung der Gleichung 8):

$$\left.\begin{aligned} r &= 1-y = 1-\sin h = 1-(mx+n) \\ R &= 1+y = 1+\sin h = 1+(mx+n) \end{aligned}\right\}. \qquad 61)$$

Die Fläche, welche nun von den Kurvenstücken $P_n, P_1, P_2 \ldots M \ldots p_2, p_1, p_n$ und dem Stücke der Abszissenachse $\overline{p_n P_n}$ begrenzt ist, läßt sich einfach bestimmen und steht in Beziehung mit der täglichen Strahlenmenge.

Das Flächendifferential für die erwähnte Fläche in Polarkoordinaten wird erhalten, wenn die Flächendifferentiale der beiden Kurven:

$$\left.\begin{aligned} df_1 &= \frac{1}{2} r^2 dt \\ df_2 &= \frac{1}{2} R^2 dt \end{aligned}\right\} \tag{61)}$$

voneinander subtrahiert werden, also berechnet wird:

$$dF = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)dt \tag{62)}$$

oder die Fläche selbst ermittelt wird, wenn das Integral innerhalb der Grenzen 0 bis t_1 genommen wird:

$$dF = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}(R^2 - r^2)dt. \tag{63)}$$

Führt man:

$$\begin{aligned} R &= 1+y \quad \text{oder} \quad R^2 = (1+y)^2 \\ r &= 1-y \quad \text{»} \quad r^2 = (1-y)^2 \end{aligned}$$

in die Gleichung 62) ein, so folgt:

$$dF = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}[(1+y)^2 - (1-y)^2]dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} 4y\,dt = 2\int_0^{t_1} y\,dt.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{t_1} y\,dt = \int_0^{t_1}(\sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos t)dt = \frac{q_\varphi}{2}$$

nichts anderes als die Strahlenmenge in einem halben Tage, somit wird

$$F = q_\varphi, \tag{64)}$$

d. h. die Fläche stellt die während eines halben Tages einem Punkte der Erdoberfläche zukommende Strahlenmenge graphisch dar, wobei selbstverständlich noch mit dem Faktor $2\frac{K}{r^2}$ multipliziert werden muß, um Q_φ selbst zu erhalten.

In Fig. 6 auf Taf. I ist die relative Strahlungsquantität, gültig für einen halben Tag, durch die Fläche dargestellt, welche von der

kräftig ausgezogenen Kurve $p_n, p_1 p_2 p_3 \ldots M \ldots P_3 P_2 P_1 P_n$ und dem Stücke $\overline{P_n p_n}$ der Abszissenachse begrenzt ist; die auf die halbe Nacht entfallende Strahlenmenge ist die von den Kurven $P_m N$ und $N p_m$ sowie dem Abszissenstücke $\overline{p_m P_m}$ begrenzte Fläche. Diese Flächen können bequem und mit hinlänglicher Schärfe mit einem Planimeter bestimmt werden.

Anmerkung. Das in vorstehender Entwicklung benützte Verfahren der graphischen Integration läßt sich erweitern, worauf auf anderer Stelle eingegangen wird.

2. Relative Strahlungsquantität am Äquator und am Pole. Wir haben für die relativen Strahlungsquantitäten für den Äquator und Pol

$$\left.\begin{aligned} i_0 &= \cos\delta \cos t \\ i_{90} &= \sin\delta \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

ermittelt, daher ergeben sich die täglichen Strahlungsintensitäten

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= 2\frac{K}{r^3}\cos\delta \int \cos t\, dt \\ Q_{90} &= 2\frac{K}{r^2}\sin\delta \int dt \end{aligned}\right\}, \tag{66}$$

respektive

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= 2\cos\delta \int \cos t\, dt \\ q_{90} &= 2\sin\delta \int dt \end{aligned}\right\}. \tag{67}$$

Die Integration innerhalb der Grenzen 0 und t_1 gibt die Hälften der täglichen Strahlungsquantitäten, somit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q_0}{2} &= \frac{K}{r^2}\cos\delta \int_0^{t_1} \cos t\, dt = \frac{K}{r^3}\cos\delta \sin t_1 \\ \frac{Q_{90}}{2} &= \frac{K}{r^2}\sin\delta \int_0^{t_1} dt \qquad = \frac{K}{r^3}\sin\delta \,.\, t_1 \end{aligned}\right\}, \tag{68}$$

beziehungsweise

$$\left.\begin{aligned} \frac{q_0}{2} &= \cos\delta \int_0^{t_1} \cos t\, dt = \cos\delta \sin t_1 \\ \frac{q_{90}}{2} &= \sin\delta \int_0^{t_1} dt \qquad = \sin\delta \,.\, t_1 \end{aligned}\right\}. \tag{69}$$

Da aus Gleichung 47), welche für einen Ort mit der geographischen Breite φ Gültigkeit hat,

$$\frac{Q_\varphi}{2} = \frac{K}{r^2} \cos\delta \sin t_1 \cos\varphi + \frac{K}{r^2} \sin\delta . t_1 \sin\varphi \qquad 70)$$

nach Einführung von $\varphi = 0$ und $\varphi = 90°$ die in den vorstehenden Doppelgleichungen 68) und 69) abgeleiteten täglichen Strahlungsquantitäten am Äquator und am Pole resultieren, kann man die Gleichung 70) auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} Q_\varphi &= Q_0 \cos\varphi + Q_{90} \sin\varphi \\ q_\varphi &= q_0 \cos\varphi + q_{90} \sin\varphi \end{aligned}\right\}, \qquad 71)$$

eine Relation, welche zur Gleichung 17) ein Korollar bietet.

Die relativen Strahlungsintensitäten am Äquator und am .Pole für einen halben Tag, d. i.

$$\left.\begin{aligned} \frac{q_0}{2} &= \cos\delta \sin t_1 \\ \frac{q_{90}}{2} &= \sin\delta . t_1 \end{aligned}\right\} \qquad 72)$$

können nach Heranziehung der Intensitätsgeraden G_0 und G_{90} graphisch dargestellt werden.

Es werden zu einem jeden Punkte der Geraden G_0 und G_{90} genau so, wie es bei der Intensitätsgeraden G_φ geschah (Taf. I, Fig. 6), je zwei Kurvenpunkte bestimmt, die in ihrer Gesamtheit zwei Kurven geben; der durch diese Kurven begrenzte Flächeninhalt entspricht den Strahlungsquantitäten $\frac{q_0}{2}$ und $\frac{q_{90}}{2}$.

In Fig. 7 auf Taf. II sind die Kurven gezeichnet und man kann mit einem Planimeter auf mechanischem Wege in bekannter Weise sehr einfach die Flächen bestimmen, welche $\frac{q_0}{2}$ und $\frac{q_{90}}{2}$ geben.

Besonderes Interesse bietet die Fig. 8 auf Taf. III, welche die Intensitätsgerade der Sonne für die Äquinoktien und Solstitien enthält, und zwar für Wien; neben dieser Geraden sind auch die gleichzeitig geltenden Intensitätsgeraden am Äquator und am Pole ersichtlich. Für die drei Intensitätsgeraden G_φ, G_0 und G_{90} sind die zugehörigen Kurven der Strahlungsquantitäten

Q_φ, Q_0 und Q_{90} konstruiert und der bequemen Übersicht wegen in gleicher Stärke mit den Intensitätsgeraden ausgezogen.

Die Strahlungsquantitäten stellen sich in der Figur sehr übersichtlich dar und können mit dem Planimeter bequem bestimmt werden; die erhaltenen Flächenwerte, in die Gleichung 71) eingeführt, werden die Richtigkeit dieser Relation bekräftigen.

3. Extreme der Strahlungsquantität. Legen wir uns die Frage vor, für welche geographische Breite Extreme in den Strahlungsintensitäten sich ergeben, so hat man die Gleichung

$$Q_\varphi = Q_0 \cos\varphi + Q_{90} \sin\varphi \qquad 73)$$

nach φ zu differenzieren; es wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi} &= - Q_0 \sin\varphi \pm Q_{90} \cos\varphi \\ \frac{\partial^2 Q_\varphi}{\partial\varphi^2} &= - Q_0 \cos\varphi \mp Q_{90} \sin\varphi = - Q_\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad 74)$$

Da nun für ein Extrem

$$\frac{\partial Q_\varphi}{\partial\varphi} = -Q_0 \sin\varphi \pm Q_{90} \cos\varphi = 0 \qquad 75)$$

sein muß, was für

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q_{90}}{Q_0} \qquad 76)$$

eintritt, und hiefür der zweite Differentialquotient negativ ist, so resultiert für diese Breite φ ein Maximum der Strahlungsintensität.

Berücksichtigt man, daß

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{Q_{90}}{\sqrt{Q_0^2 + Q_{90}^2}} \\ \cos\varphi &= \frac{Q_0}{\sqrt{Q_0^2 + Q_{90}^2}} \end{aligned}\right\} \qquad 77)$$

ist, so ergibt sich nach Einführung dieses Wertes in die Gleichung 73) die bemerkenswerte Relation:

$$Q_\varphi^2 = Q_0^2 + Q_{90}^2, \qquad 78)$$

ein Korollar zur Relation 39).

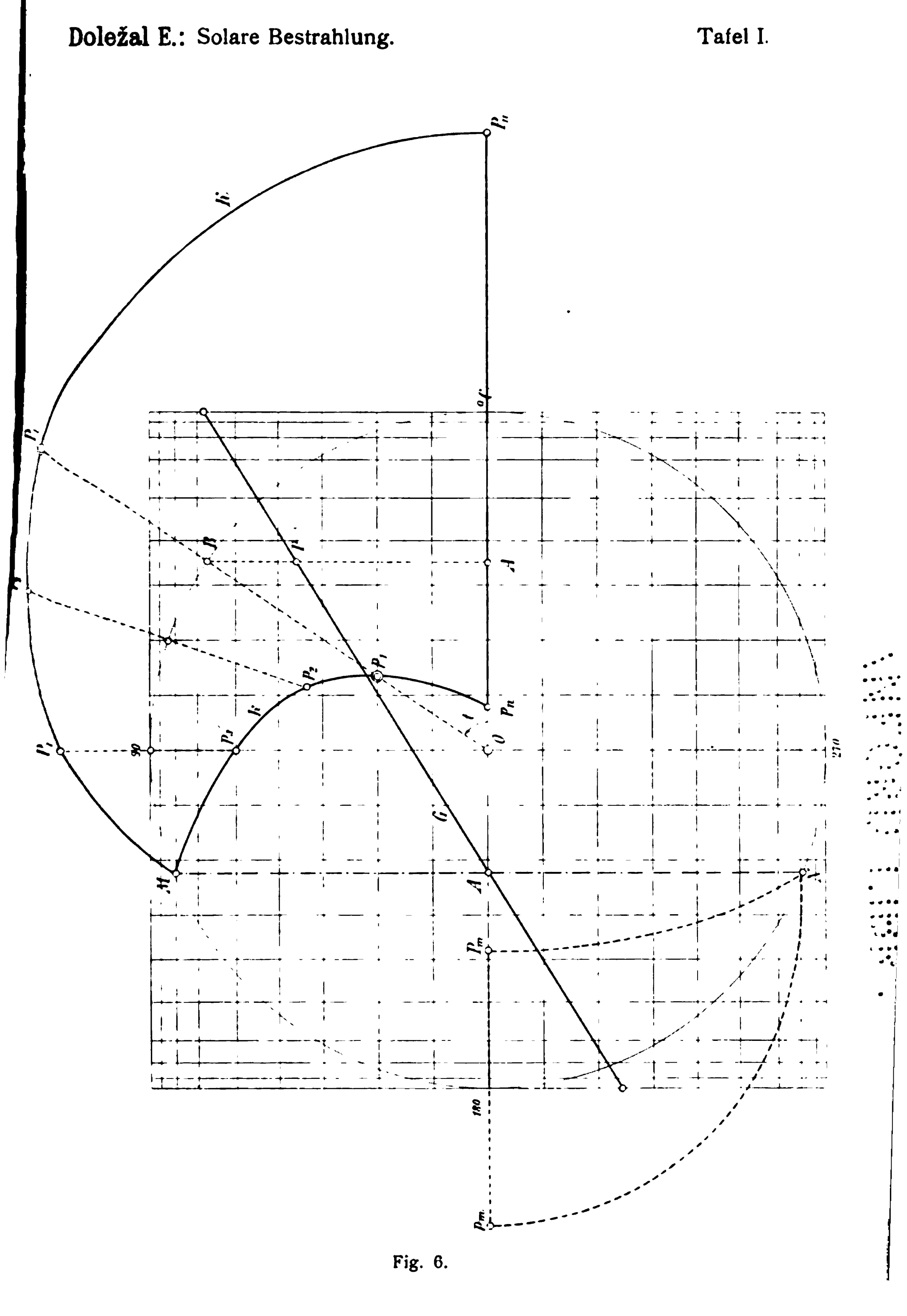


Fig. 6.

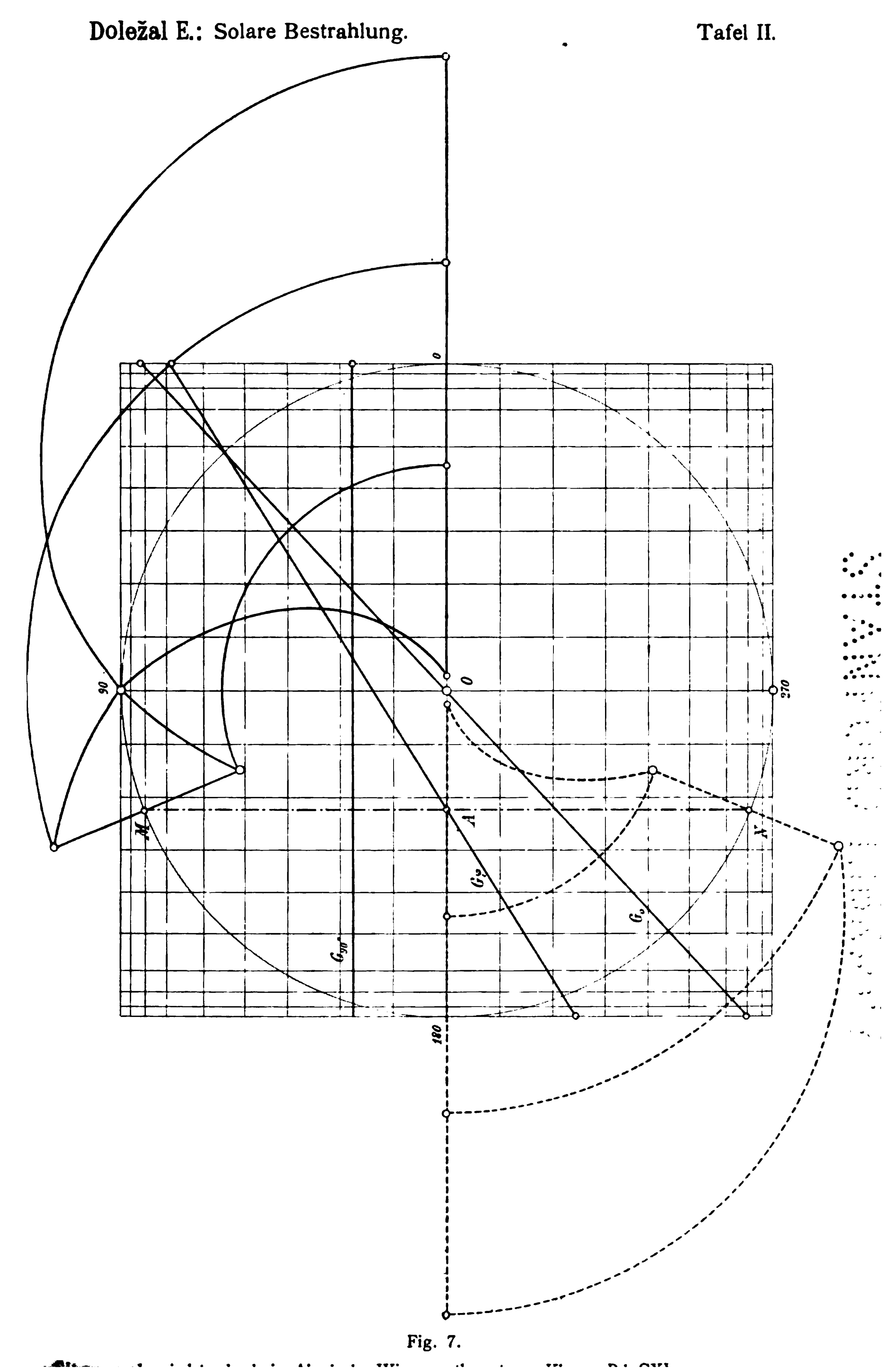
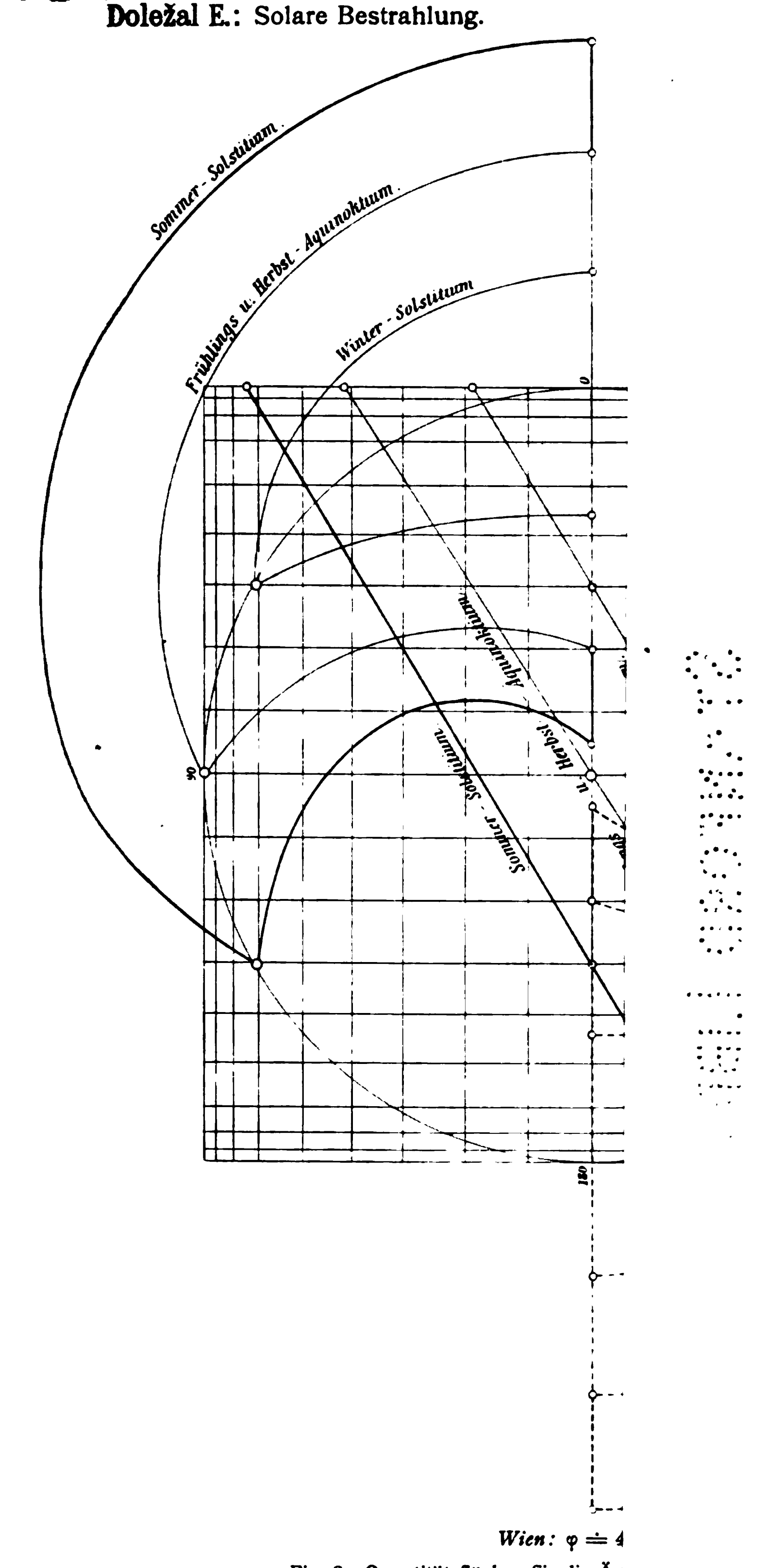


Fig. 7.



Wien: φ ≐ 4

Fig. 8. Quantitätsflächen für die Äq



Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip

von

Philipp Frank (Wien).

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. März 1908.)

Wenn ein System von n Freiheitsgraden, denen n unabhängige Koordinaten $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ entsprechen mögen, um seine stabile Ruhelage kleine Schwingungen ausführt, so gibt es unter diesen bekanntlich im allgemeinen n Normalschwingungen, d. h. solche Schwingungen, die durch Gleichungen von der Form

$$\varphi_k(t) = a_k \sin(\nu t + \delta) \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

gegeben sind. Jede andere Schwingung läßt sich linear aus den Normalschwingungen zusammensetzen. Das Aufsuchen der Amplituden und Perioden der Normalschwingungen führt auf ein System von n linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten, dessen Determinante ein Polynom n^{ten} Grades in ν^2 ist, das wir mit $d(\nu^2)$ bezeichnen. Den Lösungen der Gleichung $d(\nu^2) = 0$, deren es im allgemeinen n gibt, entsprechen die n Perioden, mit denen Normalschwingungen ausgeführt werden können. Zu jeder Periode gehört im allgemeinen Falle eine bestimmte Schwingung, wenn aber $d(\nu^2) = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt, eine ganze Schar.[1]

Wenn wir ein System von unendlich vielen Freiheitsgraden haben, z. B. einen biegsamen Faden, so sagt das Rayleigh'sche

---

[1] Siehe die Enzykl. d. math. Wiss., IV, 26, § 1, H. Lamb.

Prinzip,[1] daß sich die Normalschwingungen durch Grenzübergang aus denen eines Systems von endlich vielen Freiheitsgraden bestimmen lassen. Das wichtigste Resultat, das sich aus diesem Prinzip ergibt, geht dahin, daß es bei einem System von unendlich vielen Freiheitsgraden unendlich viele verschiedene Normalschwingungen gibt. Bei Rayleigh selbst hat das Prinzip lediglich heuristischen Wert. Nun hat aber Hilbert exakt bewiesen,[2] daß die Lösungen von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, wie sie in der Theorie der kleinen Schwingungen auftreten, beim Grenzübergange für $n = \infty$ in die Lösungen von Fredholm'schen Integralgleichungen übergehen, deren Kern in bestimmter Weise mit den Koeffizienten des Gleichungssystems zusammenhängt.

Wir wollen nun diese Theorie von Hilbert auf die kleinen Schwingungen eines vollkommen biegsamen Fadens anwenden und, um einen ganz konkreten Fall vor Augen zu haben, hauptsächlich die Schwingungen betrachten, die ein vertikal herabhängender inhomogener schwerer Faden unter dem Einflusse der Schwerkraft ausführt.

Es läßt sich natürlich für das Problem auch die Differentialgleichung aufstellen. Zu jeder solchen Differentialgleichung läßt sich nun nach Hilbert[3] eine gewisse symmetrische Funktion zweier Variabeln (die Green'sche Funktion) konstruieren. Wenn man diese als Kern einer homogenen Integralgleichung betrachtet, erhält man die Normalschwingungen aus den Eigenfunktionen und die Perioden aus den Eigenwerten desselben.

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, daß sich die Integralgleichungen für die Normalschwingungen von Fäden direkt durch Grenzübergang aus den linearen Gleichungen für ein System von n Freiheitsgraden gewinnen lassen, wobei sich unter anderem die Existenz von unendlich vielen verschiedenen Normalschwingungen von selbst ergibt, wobei wir aber das Rayleigh'sche Prinzip durch die strenge Methode Hilbert's ersetzen.

---

[1] Rayleigh, Theorie des Schalles.

[2] Göttinger Nachrichten, 1904, 1. Mitteilung, § 1 bis 3.

[3] L. c., 2. Mitteilung, § 7.

Diese direkte Aufstellung der Integralgleichung hat vor der Methode, die von der Differentialgleichung ausgeht, vor allem den Vorteil, daß die Green'sche Funktion, die bei dieser durch einen Kunstgriff erscheint, bei uns sich von selbst aus der Natur des physikalischen Problems ergibt. Ferner brauchen wir weniger Voraussetzungen über die Dichtenverteilung auf dem Faden zu machen und der Grund für die Definitheit der Green'schen Funktion als Kern ergibt sich in äußerst anschaulicher Weise.

I.

Es sei uns also folgendes Problem vorgelegt: Ein Faden hänge in der Richtung der positiven y-Achse herab, die wir vertikal nach abwärts ziehen, der Aufhängepunkt O des Fadens sei der Koordinatenursprung. Die x-Achse ziehen wir senkrecht zur y-Achse in der Ebene, in der wir den Faden schwingen lassen wollen. Die Länge des Fadens wählen wir zur Längeneinheit. Die Dichte desselben sei als eine zwischen $s = 0$ und $s = 1$ definierte Funktion $\rho(s)$ der Bogenlänge s gegeben. Im Aufhängepunkte sei $s = 0$.

Von der Funktion $\rho(s)$ setzen wir nur voraus, daß sie zwischen 0 und 1 integrabel ist.

Wenn wir uns nach einem System von n Freiheitsgraden umsehen, aus dem wir unseren Faden durch Grenzübergang hervorgehen lassen können, so ist folgendes das einfachste:

Wir denken uns ein mathematisches Pendel von der Länge $a = \frac{1}{n}$, d. h. eine massenlose Stange, an deren Ende die ausdehnungslose Masse m_1 angebracht ist, im Punkte O aufgehängt; an der ersten Stange hängt durch ein Scharnier verbunden, das die Drehung in der xy-Ebene gestattet, ein zweites mathematisches Pendel von derselben Länge, aber mit der Masse m_2 am Ende u. s. w. Im ganzen hätten wir n solche Pendel von gleicher Länge und den Massen $m_1, m_2 \ldots m_n$. Die Länge des ganzen kombinierten Pendels ist $na = 1$. Je größer wir n wählen, um so ähnlicher wird offenbar unser System einem biegsamen inhomogenen Faden werden. Wir müssen nur die

Größen $m_1 \ldots m_n$ so wählen, daß beim Grenzübergange die durch $\rho(s)$ gegebene Dichtenverteilung herauskommt. Das ist der Fall, wenn wir die Massen durch folgende Gleichungen bestimmen:

$$m_p = \tau\left(\frac{p}{n}\right) - \tau\left(\frac{p-1}{n}\right) \qquad p = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

$$\tau(x) = \int_0^x \rho(x)\, dx. \tag{2}$$

Das so beschriebene System hat offenbar n Freiheitsgrade.

Wir wollen nun zunächst die durch eine äußere periodische Kraft erzwungenen Schwingungen dieses Systems bestimmen. Um für den später vorzunehmenden Grenzübergang geeignete Ausdrücke zu erhalten, wählen wir als Koordinaten die Winkel, welche die einzelnen Pendelstangen mit der y-Achse einschließen, und zwar für ϑ_k den Winkel der k^{ten} Stange.

Die rechtwinkligen Koordinaten der Masse m_k seien x_k und y_k. Dann bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin \vartheta_1 & \quad x_k - x_{k-1} &= a \sin \vartheta_k \\ y_2 &= a \cos \vartheta_1 & \quad y_k - y_{k-1} &= a \cos \vartheta_k \end{aligned} \qquad k = 2, 3, \ldots n.$$

Die kinetische Energie T beträgt, wenn wir $\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}$ u. s. w. setzen:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_k\, m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2).$$

Nun ist aber:

$$x_k = a \sum_1^k {}_i \sin \vartheta_i \qquad \dot{x}_k = a \sum_1^k {}_i \cos \vartheta_i \dot{\vartheta}_i$$

$$y_k = a \sum_1^k {}_i \cos \vartheta_i \qquad \dot{y}_k = -a \sum_1^k {}_i \sin \vartheta_i \dot{\vartheta}_i$$

oder, wenn wir nur Größen erster Ordnung berücksichtigen:

$$\dot{x}_k = a \sum_1^k {}_i \dot{\vartheta}_i \qquad \dot{y}_k = 0.$$

Dann wird T eine quadratische Form der $\dot{\vartheta}_k$ mit konstanten Koeffizienten, wie es die Theorie der kleinen Schwingungen verlangt.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_k\, m_k a^2 \left(\sum_{1}^{k}{}_i\, \dot{\vartheta}_i\right)^2$$

oder bei Umordnung der Glieder

$$T = \sum_i \sum_k a_{ik} \dot{\vartheta}_i \dot{\vartheta}_k,$$

wo

$$a_{ik} \begin{cases} = \dfrac{1}{2} a^2 \sum_{k}^{n}{}_h\, m_h & \text{für } k > i \\ = \dfrac{1}{2} a^2 \sum_{i}^{n}{}_h\, m_h & \text{für } k < i \\ = \dfrac{1}{2} a^2 \sum_{i}^{n}{}_h\, m_h & \text{für } k = i \end{cases} \qquad 3)$$

Wir gehen an die Bestimmung der potentiellen Energie V, wobei wir die additive Konstante so bestimmen, daß für die stabile Gleichgewichtslage $V = 0$ wird. Es ist dV gleich der negativen Arbeit, die von der Schwerkraft bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Massen geleistet wird. Dabei kommen nur die Komponenten der Verschiebungen in der y-Richtung in Betracht, die wir mit $dy_1, dy_2 \ldots dy_n$ bezeichnen. Die Konstante der Erdbeschleunigung sei g. Dann ist:

$$-dV = g \sum_{1}^{n}{}_h\, m_h\, dy_h$$

Nun ist

$$dy_h = -a \sum_{1}^{h}{}_i\, \vartheta_i\, d\vartheta_i$$

$$-dV = -ag \sum_{1}^{n}{}_h\, m_h \sum_{1}^{h}{}_i\, \vartheta_i\, d\vartheta_i.$$

Also wird bei entsprechender Wahl der Integrationskonstante:

$$V = \frac{ag}{2} \sum_{1}^{n} i \left(\sum_{i}^{n} m_h \vartheta_i^2 \right). \tag{4}$$

Wir wollen auch noch die Arbeit äußerer, als Funktion der Zeit gegebener Kräfte betrachten, die an den einzelnen Massenpunkten angreifen mögen. Bei einer Verschiebung $d\vartheta_k$ dieser Massen sei diese Arbeit

$$dA = \sum_{1}^{n} {}_k P_k d\vartheta_k, \tag{5}$$

wo die P_k gegebene Funktionen der Zeit sind.

Wir wollen nun eine weitere Koordinatentransformation so vornehmen, daß V geradezu eine Summe von Quadraten wird. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$\psi_i = \vartheta_i \sqrt{\frac{ag}{2} \sum_{i}^{n} {}_h m_h} \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{6}$$

Dann wird

$$V = \sum_{1}^{n} {}_i \psi_i^2. \tag{4a}$$

Auch in Formel 3) für T führen wir die Variablen ψ_i ein und erhalten:

$$T = a \sum_{p} \sum_{q} K_{pq} \dot{\psi}_p \dot{\psi}_q,$$

wo

$$K_{pq} = \begin{cases} \dfrac{1}{g} \sqrt{\dfrac{\sum_{p}^{n} {}_i m_i}{\sum_{q}^{n} {}_i m_i}} & \text{für } p > q \\[2ex] \dfrac{1}{g} \sqrt{\dfrac{\sum_{q}^{n} {}_i m_i}{\sum_{p}^{n} {}_i m_i}} & \text{für } p < q \end{cases} \tag{3a}$$

Analog wird aus Gleichung 5):

$$dA = \sum_{1}^{n} {}_k F_k \, d\psi_k. \qquad 5a)$$

Die Schwingungen werden bestimmt durch die n Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_k} + \frac{\partial V}{\partial \psi_k} = 2F_k \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Wenn wir hierin für T und V ihre Werte aus $3a$) und $4a$) einsetzen, erhalten wir:

$$F_k = \psi_k + a \sum_{1}^{n} {}_i K_{ki} \ddot{\psi}_i \qquad k = 1, 2, \ldots n. \qquad 7)$$

Wir wollen die äußeren Kräfte als harmonische Funktionen der Zeit annehmen, also:

$$F_k(t) = f_k e^{i\nu t} \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

setzen, wo die f_k gegebene Konstanten sind und $i = \sqrt{-1}$.

Da wir nur die harmonischen Lösungen des Gleichungssystems suchen, können wir die gesuchten Funktionen in der Form ansetzen:

$$\psi_k(t) = \varphi_k e^{i\nu t} \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Dann wird aus dem Gleichungssystem 7), wenn wir noch $a\nu^2 = \frac{\nu^2}{n} = l$ setzen:

$$f_k = \varphi_k - l \sum_{1}^{n} {}_i K_{ki} \varphi_i \qquad k = 1, 2, \ldots n \qquad 8)$$

und die Gleichungen für die freien harmonischen Schwingungen schreiben sich

$$\varphi_k - l \sum_{1}^{n} {}_i K_{ki} \varphi_i = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots n. \qquad 8a)$$

II.

Die beiden Gleichungssysteme 8) und 8*a*) haben genau dieselbe Form wie die Gleichungssysteme 1), beziehungsweise 6) in Hilbert's erster Mitteilung. Bei Hilbert sind die Koeffizienten K_{pq} nichts anderes als n^2 Werte einer symmetrischen Funktion zweier Veränderlichen $K(s, t)$, und zwar ist:

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right).$$

Das ist auch bei unseren Gleichungen 8) der Fall, wie wir sofort erkennen, wenn wir in die durch Gleichung 3*a*) gegebenen Werte der Koeffizienten für die m_k ihre durch Gleichung 1) und 2) bestimmten Werte einsetzen. Dann wird:

$$K_{pq} = \begin{cases} \dfrac{1}{g}\sqrt{\dfrac{\tau(1)-\tau\left(\frac{p-1}{n}\right)}{\tau(1)-\tau\left(\frac{q-1}{n}\right)}} & \text{für } p > q \\[2ex] \dfrac{1}{g}\sqrt{\dfrac{\tau(1)-\tau\left(\frac{q-1}{n}\right)}{\tau(1)-\tau\left(\frac{p-1}{n}\right)}} & \text{für } p < q \end{cases} \qquad 3b)$$

Setzen wir nun

$$K(s, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{g}\sqrt{\dfrac{\tau(1)-\tau(s)}{\tau(1)-\tau(t)}} & \text{für } s > t \\[2ex] \dfrac{1}{g}\sqrt{\dfrac{\tau(1)-\tau(t)}{\tau(1)-\tau(s)}} & \text{für } s < t \end{cases} \qquad 9)$$

so stellen sich die Koeffizienten der Gleichungen 8) als n^2 spezielle Werte dieser symmetrischen Funktion dar, und zwar erhalten wir durch Vergleichen von Gleichung 3*b*) und 9)

$$K_{pq} = K\left(\frac{p-1}{n}, \frac{q-1}{n}\right). \qquad 9a)$$

Daß bei uns $\frac{p-1}{n}$ statt des $\frac{p}{n}$ bei Hilbert steht, ist für den Grenzübergang $n = \infty$ offenbar unwesentlich.

Hilbert zeigt nun in § 2 seiner ersten Mitteilung, daß die Lösungen des Gleichungssystems 8), wenn seine Koeffizienten durch 9) und 9a) bestimmt sind, beim Grenzübergange für $n = \infty$ übergehe in die Lösungen der Integralgleichung:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad 10)$$

wo $\lambda = \nu^2$ gesetzt ist, und $f(s)$ eine stetige Funktion, der sich das Wertesystem $f_1 \ldots f_n$ für $n = \infty$ nähert,

$$f_k = f\left(\frac{k}{n}\right) \quad k = 1, 2 \ldots n. \qquad 11)$$

Die freien Normalschwingungen des Fadens erhalten wir, wenn wir $f(s) = 0$ setzen. Sie genügen der Integralgleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t)\,\varphi(t)\,dt. \qquad 10a)$$

Eine solche Integralgleichung ist bekanntlich nur für spezielle Werte von λ (die Eigenwerte) lösbar. Ihre Lösungen (die Eigenfunktionen) geben uns die Gestalten des Fadens, die er annehmen muß, damit jeder Punkt desselben einfache Sinusschwingungen ausführt.

Nun ist der durch Gleichung 9) gegebene Kern der Integralgleichung 10a) ein definiter Kern, weil die quadratische Form, aus deren Koeffizienten wir ihn bildeten, als kinetische Energie eine definite Form war. Jeder definite Kern besitzt aber unendlich viele Eigenwerte und alle sind positiv.[1]

Seien diese Eigenwerte

$$\lambda_k = \nu_k^2 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Da die λ_k alle positiv sind, sind die ν_k alle reell und Ausdrücke von der Form $e^{i\nu_k t}$ stellen wirklich periodische Funktionen dar. Die Schwingungsdauer der Normalschwingungen des Fadens, die wir mit T_k bezeichnen, ist gegeben durch

$$\frac{4\pi^2}{T_k^2} = \lambda_k \qquad k = 1, 2, 3 \ldots$$

---

[1] Hilbert, l. c., 1. Mitteilung, § 5.

Eine Normalschwingung des Fadens selbst ist gegeben durch den reellen oder imaginären Bestandteil des Ausdruckes:

$$\varphi_k(s) e^{i \frac{2\pi}{T_k} t},$$

wenn $\varphi_k(s)$ die zum Eigenwerte λ_k gehörende Eigenfunktion von 10a) ist, s die Bogenlänge und t die Zeit bedeutet. Wenn wir zum reellen übergehen, können wir die Gleichungen der Normalschwingungen in der Form schreiben:

$$\psi_k(s, t) = \varphi_k(s) \sin\left(\frac{2\pi}{T_k} t + \delta_k\right) \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad 12)$$

Es gibt wegen der unendlichen Anzahl der Eigenwerte offenbar unendlich viele verschiedene Normalschwingungen. Es können im allgemeinen zu einem T_k auch mehrere $\varphi_k(s)$ gehören, aber immer nur eine endliche Anzahl. Dann ist natürlich auch jede Linearkombination dieser Normalschwingungen eine Normalschwingung mit derselben Schwingungsdauer.

Wollen wir in den Gleichungen 12) von den analytisch einfachsten Koordinaten ψ zu den physikalisch anschaulichsten und naheliegendsten übergehen, so sind diese offenbar die horizontalen Elongationen der Teilchen aus der stabilen Ruhelage, die wir mit $x(s, t)$ bezeichnen. Wenn wir die Transformationen, durch die wir die x und y in die ϑ und diese in die ψ transformiert haben, jetzt zurückverfolgen und den Grenzübergang $n = \infty$ ausführen, finden wir:

$$x(s, t) = \int_0^s \frac{\psi(s, t)\, ds}{\sqrt{\frac{g}{2}[\tau(1) - \tau(s)]}},$$

wo $\tau(s)$ die durch Gleichung 2) definierte Funktion ist. Dann erhalten wir aus Gleichung 12) für die k^{te} Eigenschwingung:

$$x_k(s, t) = \sqrt{\frac{2}{g}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_k} t + \delta_k\right) \int_0^s \frac{\varphi_k(s)\, ds}{\sqrt{\tau(1) - \tau(s)}}. \qquad 12a)$$

Im folgenden wollen wir aber der einfacheren Schreibweise halber wieder alles in den Koordinaten ψ schreiben.

Die Normalschwingungen sind nicht bei beliebigen Anfangsbedingungen möglich, vielmehr sind die Anfangsformen des Fadens, aus denen Normalschwingungen entstehen, eben durch die Funktionen $\varphi_k(s)$ gegeben. Wohl aber lassen sich die bei willkürlichen Anfangsbedingungen eintretenden Eigenschwingungen in gewisser Weise linear aus den Normalschwingungen zusammensetzen:

Wir wollen annehmen, zur Zeit $t = 0$ sei die Gestalt des Fadens durch

$$\psi(s, 0) = \chi(s)$$

gegeben, wo $\chi(s)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, die außerdem nur noch eine mögliche Gestalt des Fadens in der Umgebung der stabilen Ruhelage darstellen muß, im übrigen aber willkürlich ist.

Jede solche Funktion läßt sich nach Hilbert[1] in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe der Form:

$$\chi(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_k c_k \varphi_k(s),$$

wo

$$c_k = \int_0^1 \chi(t)\, \varphi_k(t)\, dt$$

ist, entwickeln.

Die unserer Anfangsbedingung entsprechende Schwingung ist dann offenbar durch die Reihe

$$\psi(s, t) = \sum_{1}^{\infty}{}_k c_k \varphi_k(s) \cos \frac{2\pi}{T_k} t \qquad 13)$$

gegeben, die der Anfangsbedingung $\psi(s, 0) = \chi(s)$ und der Integralgleichung $10a$) genügt.

Wir betrachten noch den Fall erzwungener Schwingungen, der durch Gleichung 10) bestimmt ist, wo die jetzt kontinuierlich über den Faden verbreitete äußere Kraft

[1] L. c., 2. Mitteilung, § 7, Satz 15.

$$f(s)\sin\left(\frac{2\pi}{T}+\delta\right)$$

beträgt und

$$\lambda=\frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Wenn wir voraussetzen, daß λ kein Eigenwert des Kernes $K(s,t)$ ist $(\lambda \neq \lambda_k)$, so hat die Gleichung 10) bekanntlich immer eine und nur eine Lösung. Oder physikalisch gesprochen: Wenn eine kontinuierliche, zeitlich periodische Kraft auf den Faden wirkt, deren Periode nicht gleich der Periode einer Normalschwingung des Fadens ist, so kann die Kraft immer eine und nur eine bestimmte kleine harmonische Schwingung hervorbringen, deren Periode gleich der Periode der Kraft ist. Um diese erzwungene Schwingung auszudrücken, benützen wir die Lösung der inhomogenen Gleichung 10), die E. Schmidt[1] angibt. Sie lautet:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{1}^{\infty}{}_k\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}\int_0^1 f(t)\,\varphi_k(t)\,dt.$$

Unsere erzwungene Schwingung wird also gegeben sein durch:

$$\psi(s,t)=f(s)\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t+\delta\right)+\sum_{1}^{\infty}{}_k\, r_k\,\varphi_k(s)\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t+\delta\right), \qquad 14)$$

wo

$$r_k=\frac{T_k}{T^2-T_k^2}\int_0^1 f(t)\,\varphi_k(t)\,dt. \qquad 14a)$$

Die Amplitude dieser Schwingung ist also eine Superposition aus der Amplitude der äußeren Kraft und den Amplituden der Normalschwingungen, wobei aber jede der letzteren mit einem Faktor r_k multipliziert ist, den wir den Resonanzfaktor der betreffenden Normalschwingung nennen. Aus dem angegebenen Werte der r_k ersehen wir, daß jede Normalschwingung um so stärker zur Geltung kommt, je näher ihre

[1] Math. Ann., Bd. 63, § 10, Gleichung 13.

Periode der Periode der äußeren Kraft kommt. Die Formel von E. Schmidt bringt diese Analogie mit den Schwingungen von Systemen von endlichem Freiheitsgrade äußerst durchsichtig zur Geltung.

Ist die Periode der äußeren Kraft gleich der Periode einer Normalschwingung ($\lambda = \lambda_k$), so wird im allgemeinen (bei willkürlichem $f(s)$) die Gleichung 10) keine Lösung haben, d. h. es gibt dann keine kleinen harmonischen Schwingungen des Fadens von der Periode der äußeren Kraft.

Wenn aber $f(s)$ gewissen Bedingungen genügt, so hat auch für $\lambda = \lambda_k$ die Gleichung 10) Lösungen, und zwar in unendlicher Zahl.

Die Bedingungen lauten, wenn wir mit $\varphi_k^{(1)}(s), \varphi_k^{(2)}(s), \ldots \varphi_k^{(m)}(s)$ die zum Eigenwerte λ_k gehörenden Eigenfunktionen bezeichnen:

$$\int_0^1 f(s)\, \varphi_k^{(i)}(s)\, ds = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m,$$

d. h. falls die äußere Kraft gewissen Integralbedingungen genügte, die anschaulich etwa besagen, daß die Kraft durch ihre Verteilung über den Faden die Wirkung der gefährlichen Eigenschwingungen kompensieren muß, können auch erzwungene kleine Schwingungen existieren, deren Periode gleich der einer durch die Kraftverteilung unschädlich gemachten Normalschwingung ist.

III.

Das Resultat, daß die Normalschwingungen des Fadens durch die Integralgleichung 10a) gegeben sind, läßt sich noch auf einem anderen Wege beweisen, der ebenfalls nicht von der Differentialgleichung ausgeht und bei dem sich ebenfalls die Green'sche Funktion $K(s, t)$ unmittelbar durch Grenzübergang ergibt. Weil auf diesem Wege sich interessante Zusammenhänge mit dem sogenannten Gauß'schen Variationsproblem ergeben, sei auch dieser Weg noch mitgeteilt.

Wir gehen aus vom Hamilton'schen Prinzip, das besagt:

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (V - T)\, dt = 0. \qquad 15)$$

Für V und T setzen wir die Ausdrücke ein, die wir aus Gleichung $3a$) und $4a$) beim Grenzübergange für $n = \infty$ erhalten, nämlich:

$$T = \int_0^1 \int_0^1 K(s, \sigma) \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \frac{\partial \psi(\sigma, t)}{\partial t} ds\, d\sigma \tag{16}$$

$$V = \int_0^1 [\psi(s, t)]^2 ds. \tag{17}$$

Da dieses Variationsproblem nicht von der Art der gewöhnlich behandelten ist, dürfen wir nicht schematisch vorgehen, sondern müssen auf die Bedeutung der ersten Variation zurückgehen. Wir führen in dem Integral W an Stelle der Funktionen $\psi(s, t)$ und $\psi(\sigma, t)$ die Ausdrücke $\psi(s, t) + \varepsilon\eta(s, t)$, $\psi(\sigma, t) + \varepsilon\eta(\sigma, t)$ ein, wo ε eine Konstante ist und $\eta(s, t)$ eine gewissen Stetigkeitsbedingungen und den Randbedingungen

$$\eta(s, t_0) = \eta(s, t_1) = 0$$

genügende, im übrigen aber willkürliche Funktion. Dadurch verwandelt sich W in eine Funktion von ε, die wir $D(\varepsilon)$ nennen, und

$$\delta W = \left(\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0} = D'(0).$$

Es ist nun, wenn wir Gleichung 16) und 17) in 15) einführen:

$$D'(0) = 2\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\int_0^1 \psi(s, t)\, \eta(s, t)\, ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^1 \int_0^1 K(s, \sigma) \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \frac{\partial \eta(\sigma, t)}{\partial t} ds\, d\sigma\right].$$

Setzen wir wie früher

$$\psi(s, t) = \varphi(s) e^{i\nu t},$$

so wird

$$D'(0) = 2\int_{t_0}^{t_1} dt\, e^{i\nu t} \left[\int_0^1 \varphi(s)\, \eta(s, t)\, ds - \right.$$
$$\left. - i\nu \int_0^1 \int_0^1 K(s, \sigma)\, \varphi(s) \frac{\partial \eta(\sigma, t)}{\partial t} ds\, d\sigma\right]$$

und durch partielle Integration des zweiten Teiles rechts nach t erhalten wir nach Berücksichtigung der Randbedingung für $\eta(s, t)$:

$$D'(0) = 2\int_{t_0}^{t_1} e^{i\nu t}\,dt\int_0^1 \left[\varphi(\sigma) - \nu^2\int_0^1 K(s,\sigma)\,\varphi(s)\,ds\right]\eta(\sigma, t)\,d\sigma,$$

woraus wegen der Willkürliohkeit von η und Gleichung 15) folgt:

$$\varphi(\sigma) - \nu^2\int_0^1 K(s,\sigma)\,\varphi(s)\,ds = 0,$$

was mit Gleichung 10a) identisch ist.

Setzen wir in Gleichung 16) und 17) für $\psi(s, t)$ seinen Wert $\varphi(s)e^{i\nu t}$ ein, so erhalten wir:

$$T = -\nu^2 e^{2i\nu t} J_1(\varphi),$$

wo

$$J_1(\varphi) = \int_0^1\int_0^1 K(s,\sigma)\,\varphi(s)\,\varphi(\sigma)\,ds\,d\sigma, \qquad 16a)$$

$$V = e^{2i\nu t} J_2(\varphi),$$

wo

$$J_2(\varphi) = \int_0^1 \varphi(s)^2\,ds. \qquad 17a)$$

Während der Fadenschwingung findet auch eine Oszillation von T und V statt, deren Frequenz doppelt so groß ist. Wir wollen $J_1(\varphi)$ und $J_2(\varphi)$ kurz als die Amplitude der kinetischen, beziehungsweise potentiellen Energie bezeichnen. Man kann nun die Normalschwingungen durch Maximaleigenschaften der Amplituden der Energieschwingung charakterisieren. Hilbert hat gezeigt,[1] daß unter allen Funktionen, die dem Integral J_2 denselben Wert erteilen, die dem kleinsten Eigenwerte des Kernes $K(s,\sigma)$ entsprechende Eigenfunktion dem Integral J_1 den größten Wert erteilt. Oder physikalisch gesprochen: Unter allen denkbaren harmonischen Schwingungen des Fadens, denen dieselbe Amplitude der potentiellen

[1] L. c., 1. Mitteilung, § 5, Satz 9.

Energie entspricht, ist die langsamste Normalschwingung diejenige, die der Amplitude der kinetischen Energie den größten Wert erteilt.

Das hier vorliegende Variationsproblem mit Nebenbedingungen ist dasjenige, das Hilbert als Gauß'sches Variationsproblem bezeichnet. In unserem Falle ist es nichts anderes als das Hamilton'sche Prinzip, das ja hier die erste notwendige Bedingung für das Eintreten des genannten Maximums ausdrückt.

IV.

Wir wollen noch speziell den Fall betrachten, wo der Faden homogen ist, also $\rho(s) = 1$. Hier kann man das ganze Problem analytisch durchführen, was wir vor allem benützen wollen, um zu zeigen, wie die durch Konstruktion aus der Differentialgleichung gewonnene Green'sche Funktion mit der durch unseren direkten Grenzübergang gewonnenen übereinstimmt.

Die Differentialgleichung des schwingenden homogenen Fadens lautet, wenn wir als Koordinate wieder die horizontale Elongation einführen:[1]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial s}\left[(1-s)\frac{\partial x}{\partial s}\right] = 0,$$

woraus durch Einsetzen von

$$x(s,t) = u(s)e^{i\nu t}$$

die gewöhnliche Differentialgleichung folgt:

$$g\frac{d}{ds}\left[(1-s)\frac{du}{ds}\right] + \nu^2 u = 0. \qquad 18)$$

Wenn wir jetzt unsere früher verwendete Koordinate $\varphi(s)$ durch die Gleichung

$$\varphi(s) = \frac{du}{ds}\sqrt{1-s}$$

in die einmal nach s differenzierte Gleichung 18) einführen, erhalten wir:

$$\frac{d^2}{ds^2}(\sqrt{1-s}\,\varphi) + \frac{\nu^2\varphi}{g\sqrt{1-s}} = 0. \qquad 19)$$

[1] Die Differentialgleichung findet sich zuerst bei Daniel Bernoulli (Comm. Acad. Petropol. 1732), eine moderne Behandlung bei Wirtinger, Math. Ann. Bd. 48, p. 373.

Wir brauchen eine solche Lösung von 19), daß sie uns durch Vermittlung von

$$u(s) = \int_0^s \frac{\varphi(s)\, ds}{\sqrt{1-s}}$$

auch eine Lösung von Gleichung 18) liefert. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß das aus der betreffenden Lösung von 19) berechnete $u(s)$ die Gleichung 18) an einer Stelle des Intervalls 0, 1 befriedigt. Wir wählen dazu den Punkt $s = 0$. Das ergibt für $\varphi(s)$ die Bedingung

$$\left\{\frac{d}{ds}[\varphi(s)\sqrt{1-s}]\right\}_{s=0} = 0$$

oder kürzer geschrieben:

$$\varphi'(0) - \frac{1}{2}\varphi(0) = 0. \qquad 20)$$

Wir haben also eine stetige und stetig differenzierbare Lösung von 19) zu suchen, die an der Stelle $s = 0$ die Bedingung 20) erfüllt und für $s = 1$ endlich bleibt.

Das ist eine Aufgabe von der Art, wie sie Hilbert[1] auf homogene Integralgleichungen zurückgeführt hat, deren Kern eine Green'sche Funktion ist, die folgendermaßen zu konstruieren ist: Unter der Green'schen Funktion der Differentialgleichung 19) verstehen wir eine Lösung von

$$\frac{d^2}{ds^2}(\varphi\sqrt{1-s}) = 0,$$

die zwischen 0 und 1 stetig ist, die angegebenen Randbedingungen erfüllt und deren Differentialquotient an der Stelle $s = \sigma$ einen Sprung vom Betrage $-\frac{1}{g(1-\sigma)}$ macht. Die durch diese Vorschriften eindeutig bestimmte Funktion lautet:

---

[1] L. c., 2. Mitteilung, § 7. Unsere Randbedingungen entsprechen Hilbert's Randbedingungen III und V (p. 216).

$$K(s,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{g}\sqrt{\dfrac{1-s}{1-\sigma}} & \text{für } s>\sigma \\ \dfrac{1}{g}\sqrt{\dfrac{1-\sigma}{1-s}} & \text{für } s<\sigma \end{cases} \tag{21}$$

Genau dasselbe erhalten wir aber, wenn wir in unserer Gleichung 9) unter Berücksichtigung von Gleichung 2) $\rho(s)=1$ setzen.

Um schließlich die Eigenfunktionen durch bekannte Funktionen auszudrücken, setzen wir in Gleichung 19)

$$\sqrt{1-s}\,\varphi(s) = v(s)$$

und erhalten:

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{\nu^2}{g}\,\frac{v}{1-s} = 0$$

und, wenn wir noch $1-s = s'$ setzen,

$$\frac{d^2v}{ds'^2} + \frac{\nu^2}{gs'}v = 0. \tag{22}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung läßt sich, wie Lommel[1] gezeigt hat, durch Bessel'sche Funktionen ausdrücken. Es lautet:[2]

$$v = \sqrt{s'}\left[c_1 J^{(1)}\left(2\nu\sqrt{\frac{s'}{g}}\right) + c_2 Y^{(1)}\left(2\nu\sqrt{\frac{s'}{g}}\right)\right],$$

wo $J^{(1)}$ und $Y^{(1)}$ die Bessel'schen Funktionen erster, respektive zweiter Art mit dem Index 1 sind und c_1 und c_2 willkürliche Konstanten. Die Randbedingung für die Stelle $s=1$, d. h. $s'=0$, ergibt sofort $c_2=0$, c_1 bleibt willkürlich und die Randbedingung 20) kann nur für bestimmte Werte von ν erfüllt werden. Die Bestimmungsgleichung lautet, wenn wir die Ableitung von $J^{(1)}$ mit $DJ^{(1)}$ bezeichnen:

$$-\frac{\nu}{\sqrt{g}}DJ^{(1)}\left(\frac{2\nu}{\sqrt{g}}\right) - \frac{1}{2}J^{(1)}\left(\frac{2\nu}{\sqrt{g}}\right) = 0.$$

---

[1] Studien über Bessel'sche Funktionen, § 27.

[2] Siehe Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 47.

Nun besteht aber für Bessel'sche Funktionen d ie eichung:[1]

$$J^0(x) = \frac{1}{x} J^{(1)}(x) + DJ^{(1)}(x).$$

Mit Benützung dieser Beziehung können wir die Bestimmungsgleichung für ν in der kürzeren Form schreiben:

$$J^{(0)}\left(\frac{2\nu}{\sqrt{g}}\right) = 0.$$

Seien die Wurzeln dieser transzendenten Gleichung $\nu_1, \nu_2 \ldots$ und $\nu_k^2 = \lambda_k$, so sind die Eigenfunktionen des Kernes 21)

$$\varphi_k(s) = J^{(1)}\left(2\sqrt{\frac{\lambda_k(1-s)}{g}}\right) \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad 23)$$

V.

In ganz ähnlicher Weise wie die Schwingungen eines Fadens unter dem Einflusse der Schwerkraft lassen sich andere Schwingungsprobleme behandeln; wir wollen nur kurz die Aufstellung der Integralgleichung für das so viel behandelte Problem der Saitenschwingung besprechen.

Wir wählen die Ruhelage der Saite zur x-Achse, ihre Endpunkte mögen sich in $x = 0$ und $x = 1$ befinden. Wir ersetzen die Saite durch n äquidistante Massenpunkte mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$, die wieder durch Gleichung 1) und 2) gegeben sind. Wir betrachten nur ebene Transversalschwingungen und η_k sei die Elongation der Masse m_k. Die Massen seien durch vollkommen elastische Stangen verbunden. Die potentielle Energie lautet dann:[2]

$$V = \frac{1}{2} Sn \sum_{1}^{n} {}_k (\eta_k - \eta_{k-1})^2, \qquad 24)$$

wo S eine die Spannung repräsentierende Konstante ist.

---

[1] Siehe Weber-Riemann, Partielle Differentialgleichungen, Bd. I, § 69, Gleichung 9.

[2] Siehe etwa Helmholtz, Vorles. über d. math. Prinz. d. Akustik, § 35, Gleichung 146, *b*).

Die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_k m_k \left(\frac{d\eta_k}{dt}\right)^2. \tag{25)}$$

Wir führen nun die Winkel $\vartheta_1, \ldots \vartheta_n$, welche die Verbindungslinien der Massen mit der x-Achse einschließen, als Koordinaten ein und erhalten, wenn wir höhere Potenzen als die zweiten vernachlässigen:

$$V = \frac{1}{2n}\sum_1^n {}_k \vartheta_k^2 \tag{24a)}$$

$$T = \sum_p \sum_q a_{pq} \dot{\vartheta}_p \dot{\vartheta}_q,$$

wo

$$a_{pq} = \left| \frac{1}{2n^2}\sum_p^n {}_k m_k \qquad p > q \right. \tag{25a)}$$
$$= \left| \frac{1}{2n^2}\sum_q^n {}_k m_k \qquad p < q \right.$$

Gehen wir hier ähnlich wie früher zur Grenze für $n = \infty$ über, so erhalten wir für die Normalschwingungen die Gleichung

$$\varphi(s) = \nu^2 \int_0^1 K(s, \sigma)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma.$$

Dabei hat der Kern wegen 25a) den Wert:

$$K(s, \sigma) = \begin{cases} \tau(1) - \tau(s) & \text{für } s > \sigma \\ \tau(1) - \tau(\sigma) & \text{für } s < \sigma \end{cases} \tag{26)}$$

Für die homogene Seite haben wir

$$\rho(s) = 1,$$

also

$$K(s, \sigma) = \begin{cases} 1 - s & \text{für } s > \sigma \\ 1 - \sigma & \text{für } s < \sigma \end{cases}$$

Das ist aber der bekannte Kern, dessen Eigenfunktionen die trigonometrischen Funktionen sind.

Stehende Lichtwellen und Beugungsgitter

von

Dr. E. Lohr.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. März 1908.)

Prof. G. Jaumann gibt in seinen populär gehaltenen Vorlesungen über Elektrizität und Licht[1] eine außerordentlich elegante Methode zur Darstellung der Erscheinungen, welche durch ein Beugungsgitter hervorgerufen werden. Diese Methode, welche von demselben seither auch in seinen akademischen Vorlesungen benützt wurde, beruht im wesentlichen auf der Bemerkung, daß man in einer durch das Interferenzfeld sich kreuzender Strahlenbündel gelegten Ebene durch entsprechende Wahl der Verhältnisse, leicht dieselben Grenzbedingungen herstellen kann, wie sie in der Ebene eines von parallelem Licht bestrahlten Gitters vorhanden sind. Es mangelte aber bisher an einer vollständigen Durchführung dieses Grundgedankens; ich möchte im folgenden eine solche geben. Es wird sich dabei zeigen, daß die bisher vorhandenen prinzipiellen Schwierigkeiten, wie die Erklärung des ungebeugt durch das Gitter dringenden Lichtes und die Nichtübereinstimmung der Phasen, sich vollständig beheben.

Die Methode ist in einfacher Weise nur durchführbar, wenn die Lichterregung als skalare Größe aufgefaßt wird, sie steht also auf dem Boden der Huygens-Fresnel'schen Interferenz-Theorie und gibt wie diese eine gute Annäherung nur für nicht allzugroße Beugungswinkel. Eine ganz strenge

---

[1] G. Jaumann, »Leichtfaßliche Vorlesungen über Elektrizität und Licht«, 1902, p. 343.

Behandlung des Gitterproblems aber gibt es, wie bekannt, noch nicht; unsere Methode ist daher den vorhandenen Methoden, was Strenge anbetrifft, ebenbürtig.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Interferenzfeldes zweier Parallelstrahlenbündel, welche wir uns zunächst unbegrenzt denken. Die Pfeile geben die Strahlrichtung an; der Winkel, den die beiden Strahlen miteinander einschließen, sei 2β; die Lichterregung in beiden Strahlen soll gleiche

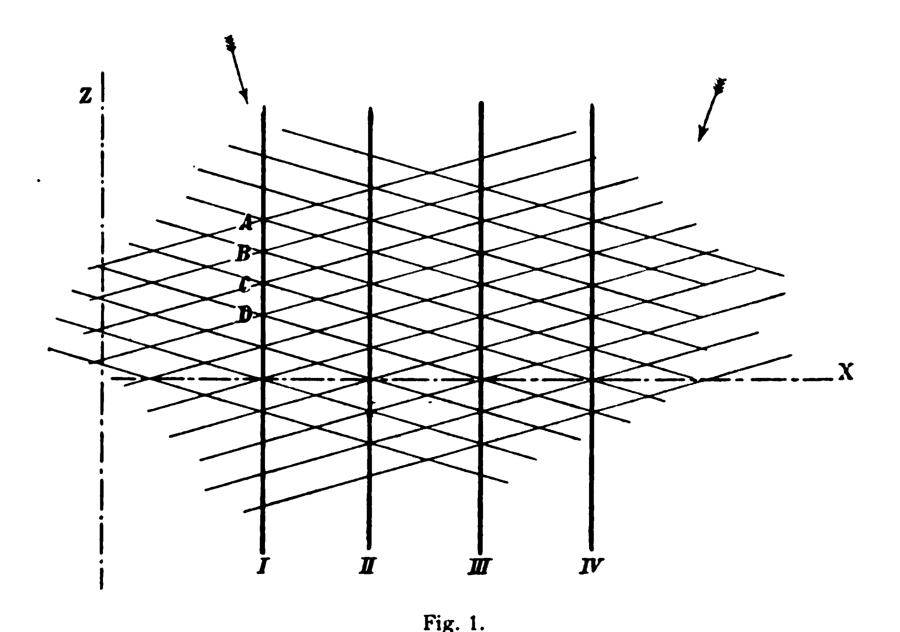


Fig. 1.

Amplitude besitzen. Die Phasen der durch gerade Linien angedeuteten Wellenebenen unterscheiden sich um halbe Wellenlängen. Man sieht leicht ein, daß sich bei der skizzierten Anordnung stehende Wellen ausbilden müssen; in den durch stark ausgezogene Gerade angedeuteten, senkrecht zur Zeichenebene stehenden parallelen Ebenen müssen entweder Bäuche oder Knoten der stehenden Wellen liegen, wir wollen annehmen, daß das erstere der Fall ist. Bezeichnen wir mit λ die Wellenlänge, mit T die Periode, mit A die Amplitude der Einzelwelle; bedeutet ferner Δ die Phasendifferenz der inter-

ferierenden Lichterregungen und s die resultierende Erregung der stehenden Welle, so besteht in der x-Richtung die Beziehung:

$$s = 2\,A \cos \pi \frac{\Delta}{\lambda} \cdot \sin 2\,\pi \frac{t}{T}.$$

Ein Blick auf Figur 1 gibt uns Aufschluß über die auftretenden Phasendifferenzen, setzen wir diese in obige Formel ein, so erhalten wir in der x-Richtung folgende Verteilung der resultierenden Amplituden:

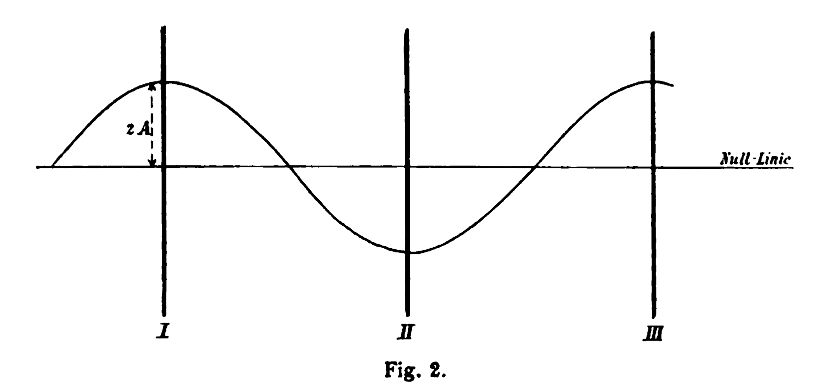


Fig. 2.

Man sieht sofort ein, daß man eine derartige Intensitätsverteilung auch mittels einer in die x, y-Ebene gebrachten Gitterfläche herstellen kann, welche so präpariert wurde, daß ihre Lichtdurchlässigkeit in der x-Richtung eine entsprechende Sinusfunktion ist. Hier liegt aber eine Schwierigkeit: Ein von senkrecht einfallenden, ebenen Lichtwellen beleuchtetes Gitter besitzt in seiner ganzen Ebene die gleiche Phase des Lichtzustandes, während in Figur 2 die Phase rechts und links von den Wellenknoten um $\frac{\lambda}{2}$ differiert.

Die Schwierigkeit ist sofort behoben, wenn es uns gelingt, die ganze Sinuskurve über die Nullinie zu heben. Um das zu erreichen, müssen wir jedenfalls dem vorhandenen Interferenzfeld noch ein kohärentes Strahlenbündel superponieren, dies kann aber nur das Strahlenbündel des ungebeugt hindurchgehenden Lichtes sein, welches ja in der Gitterebene überall gleiche Phase besitzt.

In der Tat leistet es auch das Gewünschte, wenn es in dieser Ebene von gleicher Phase mit der einen oder der anderen Hälfte der stehenden Lichtwellen ist und eine Amplitude größer oder gleich $2A$ hat. Ist die Amplitude größer als $2A$, so haben wir ein Gitter, welches nirgends ganz lichtundurchlässig ist; Fig. 3 gibt die Verhältnisse für den Fall, daß die Amplitude des ungebeugten Lichtes genau gleich $2A$ und seine Phase gleich jener der positiven Hälfte der in Fig. 2 skizzierten stehenden Schwingung ist.

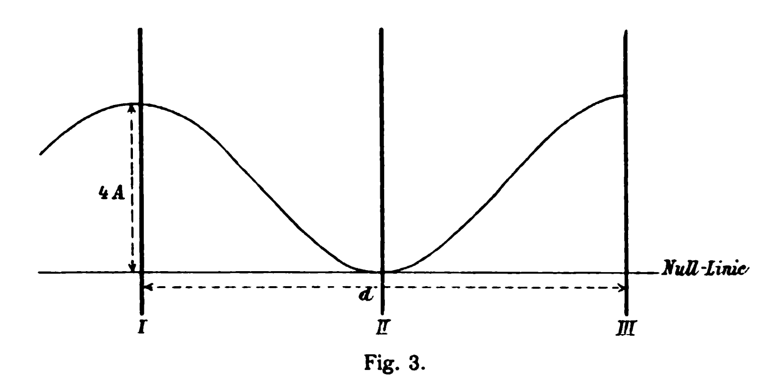


Fig. 3.

Das Resultat ist natürlich wieder eine stehende Schwingung, welche aber jetzt in der ganzen Ebene gleichphasig verläuft.

Damit ist gezeigt, daß sich die Grenzbedingungen, welche in der Gitterebene eines von ebenen Lichtwellen senkrecht beleuchteten S i n u s g i t t e r s vorhanden sind, stets durch drei interferierende Parallelstrahlenbündel befriedigen lassen. Eines derselben bleibt in der Einfallsrichtung, die beiden anderen sind gegen jenes unter gleichen Winkeln geneigt. Bezeichnen wir den Abstand zweier Lichtmaxima, also den Abstand der Ebenen I und III, die sogenannte Gitterkonstante mit d, den Beugungswinkel mit β, so erhalten wir, wie aus Fig. 4 ersichtlich, unmittelbar die Beziehung:

$$\lambda = d \sin \beta.$$

Der Übergang vom idealen Sinusgitter zu praktisch konstruierbaren Gittern vollzieht sich in einfacher Weise mittels

der Fourier'schen Zerlegung; dieser Teil der Methode war im wesentlichen auch bisher schon fertig.

Denken wir uns unbegrenzt viele Interferenzfelder von der Art des in Fig. 1 angedeuteten dadurch hergestellt, daß der Winkel 2β variiert wird. Soll eine Superposition solcher Interferenzfelder für unsere Aufgabe brauchbar sein, so werden wir jedenfalls die Bedingung stellen müssen, daß sich die

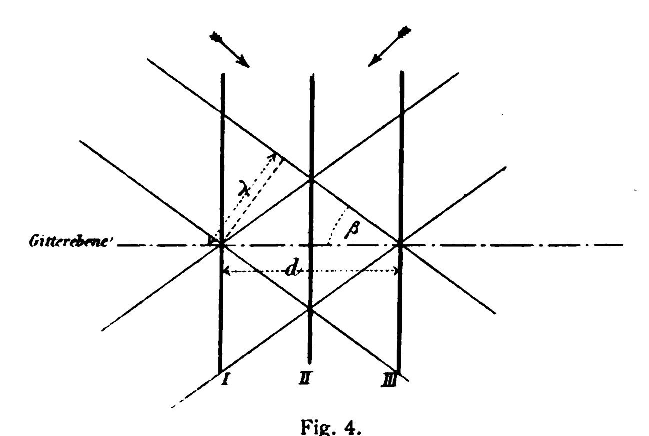


Fig. 4.

neuen Perioden in die schon vorhandene Grundperiode der stehenden Schwingung harmonisch einfügen. Diese Bedingung

$$2\lambda = d \sin \beta_2;\ 3\lambda = d \sin \beta_3;\ \ldots n\lambda = d \sin \beta_n$$

ist bei entsprechender Orientierung für die Winkel erfüllt, gleichzeitig muß die Amplitude des ungebeugten Lichtes mindestens so groß sein, daß hierdurch die ganze, aus der Interferenz aller gebeugten Strahlen resultierende stehende Schwingung über die Nullinie gehoben wird.

Wir erzeugen durch Superposition der $2n+1$ ersten, für uns in Frage kommenden Strahlenbündel stehende Schwingungen und fragen nach den resultierenden Amplituden. Es sei $x = 0$ für die Ebene I und $x = 1$ für die Ebene II, dann erhalten wir für ein dazwischen liegendes x die Amplitude $f(x)$ aus der Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(\pi x - \delta_1) + a_2 \cos(\pi . 2x - \delta_2) + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos(\pi . nx - \delta_n).$$

Man sieht leicht ein, daß $a_0 = 2A_0$; $a_1 = 2A_1$; ... $a_n = 2A_n$ sein muß, wenn wir mit A_0 die Amplitude des ungebeugten Lichtes, mit A_K die des gebeugten Lichtes K-ter Ordnung bezeichnen; für symmetrisch konstruierte Gitter ist $\delta_1 = \delta_2 = = \ldots \delta_n = 0$.

Umgekehrt können wir jede praktisch vorgegebene Periodizität der Lichtdurchlässigkeit durch eine im allgemeinen nicht abbrechende Fourier'sche Reihe darstellen, wobei gleichzeitig die Amplituden der einzelnen gebeugten Strahlen vollkommen bestimmt werden.

Es sei beispielsweise die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich A und $f(x) = Ae^{-ax}$ für $o \leqq x \leqq 1$; hingegen $f(x) = Ae^{ax}$ für $-1 \leqq x \leqq o$; a soll eine positive Konstante bedeuten.

Ein solches Gitter würde allerdings nirgends ganz lichtundurchlässig sein, doch sinkt schon für $a = 10$ die Amplitude an der dunkelsten Stelle auf etwa $\frac{1}{20000}$ ihres Maximalwertes. Es berechnet sich in diesem Falle:

$$A_0 = A \frac{1}{a} (1 - e^{-a})$$

$$A_1 = A \frac{a}{a^2 + \pi^2} (1 + e^{-a})$$

$$A_2 = A \frac{a}{a^2 + 4\pi^2} (1 - e^{-a})$$

. . . .

$$A_n = A \frac{a}{a^2 + n^2\pi^2} (1 \pm e^{-a})$$

Ich will nicht näher auf die Diskussion dieses Beispieles eingehen, welches ich nur angeführt habe, um die Brauchbarkeit der Methode zu demonstrieren. Es muß hier aber auf eine nicht geringe praktische Schwierigkeit, beziehungsweise Begrenzung der Anwendbarkeit derselben hingewiesen werden.

Um die Grenzbedingungen für ein beliebig vorgegebenes Gitter zu befriedigen, brauchen wir streng genommen unendlich viele Strahlenbündelpaare; zur Verfügung haben wir aber

stets nur eine endliche Anzahl. Diese Anzahl berechnet sich aus der Bedingung:

$$n \leqq \frac{d}{\lambda}.$$

Es wird von dem Werte $\frac{d}{\lambda}$ und von der Konvergenz der Fourier'schen Reihe abhängen, ob wir mit den uns zur Verfügung stehenden Strahlenbündelpaaren die gegebenen Grenzbedingungen mit hinreichender Annäherung erfüllen können oder nicht.

Wählen wir z. B. ein Gitter, für welches $d = 0 \cdot 001$ *mm* ist, und beleuchten wir mit Licht von der Wellenlänge $0 \cdot 0005$ *mm*, so wird $n = 2$ und wir haben keine Hoffnung, allgemeine Grenzbedingungen durch Superposition von Strahlenbündelpaaren auch nur angenähert zu erfüllen. Beschränken wir uns lediglich auf die Hilfsmittel der hier vorgetragenen Methode, so können wir in einem derartigen Falle überhaupt nichts aussagen.

Wir müssen als Erfahrungstatsache hinzunehmen, daß auch in solchen Fällen die nach obiger Bedingungsgleichung mögliche Anzahl von Parallelstrahlenbündeln wirklich zustande kommt.

Beachten wir nun den Umstand, daß diese Strahlenbündel jenen und nur jenen harmonischen Periodizitäten der Lichtdurchlässigkeit zugeordnet werden können, deren Periode größer oder gleich der Wellenlänge der verwendeten Lichtart ist, daß hingegen den Periodizitäten kleinerer Periode keine Strahlenbündel, sondern nur zerstreutes Licht entsprechen kann, so erscheint die Annahme gerechtfertigt, daß für die vorhandenen gebeugten Strahlen die früher abgeleiteten Beziehungen auch in solchen Fällen brauchbar bleiben.

Dieser nicht streng bewiesene, aber sehr wahrscheinlich gemachte Schluß besagt also: Wir können die Richtung der gebeugten Strahlen aus der Gleichung $n\lambda = d \sin \beta_n$, die Amplituden derselben wenigstens genähert aus der Fourier'schen Zerlegung berechnen, ohne Rücksicht darauf, ob allen Gliedern der Fourier'schen Reihe, welche merkliche Amplituden besitzen, Strahlenbündel entsprechen oder nicht.

Vernachlässigt wird dabei der Einfluß des zerstreuten Lichtes auf die Intensitätsverhältnisse.

Alle bisherigen Überlegungen bezogen sich nur auf senkrecht einfallendes Licht, die Methode läßt sich aber in einfacher Weise auch für schief auf das Gitter fallendes Licht erweitern.

Das Feld der stehenden Lichtwellen erzeugen wir wieder genau so wie früher; das unterscheidende Merkmal der beiden Fälle liegt lediglich darin, daß das senkrecht einfallende Licht in der Gitterebene überall gleiche Phase besitzt, während die Phase des schief einfallenden Lichtes sich in derselben kontinuierlich ändert.

Betrachten wir den Lichtzustand im Interferenzfeld ohne einfallendes Licht, wie er in Fig. 1 angedeutet ist, etwas näher, so erkennen wir sofort, daß die Phase der stehenden Schwingung in der z-Richtung kontinuierlich variiert, derart, daß zwischen A und B, B und C etc. eine Phasendifferenz von je einer halben Wellenlänge besteht.

Bezeichnen wir die Abstände $AB = BC = \ldots = \frac{1}{2} h$ und den Winkel, welchen die Strahlen mit den Ebenen I, II etc. einschließen, wieder mit β, so besteht die Beziehung:

$$\lambda = h \cos \beta.$$

Denken wir uns nun durch das Interferenzfeld eine Ebene E gelegt, welche zwar auf der x, z-Ebene senkrecht steht, aber mit der x-Richtung einen Winkel γ einschließt.

Man erkennt sofort, daß längs der Schnittlinie der Ebene E mit der x,z-Ebene die Phase der stehenden Schwingung sich kontinuierlich ändern wird; nur in den Schnittpunkten mit den Ebenen I, II, III etc. wird wieder ein Phasensprung um $\frac{\lambda}{2}$ auftreten.

Die Phasensprünge, welche das einfallende Licht in der Gitterebene natürlich nicht zeigen wird, müssen und können durch Superposition des ungebeugten Lichtbündels in derselben Weise behoben werden, wie dies bei senkrechter Inzidenz der Fall war. Notwendig ist nur, daß das ungebeugte Licht oder, was auf dasselbe hinauskommt, das einfallende Licht in der

ganzen Ebene E genau gleiche oder entgegengesetzte Phase habe wie die stehende Schwingung.

Die Bedingung hiefür ist, wie man unmittelbar sieht:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma} = \frac{\lambda}{h}.$$

Die Pfeile geben die Strahlrichtung, ε bedeutet den Einfallswinkel. Behalten wir für die Gitterkonstante, daher für den

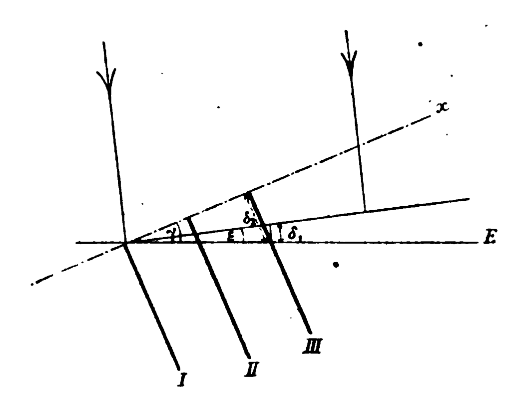


Fig. 5.

Abstand des Schnittpunktes der Ebene E mit I vom Schnittpunkte derselben Ebene mit III die Bezeichnung d bei und nennen den Abstand der analogen Schnittpunkte der Ebene x, y d', so bekommen wir die schon früher abgeleitete Beziehung:

$$d' . \sin \beta = \lambda.$$

Nennen wir noch Ablenkungswinkel α jenen Winkel, welchen die gebeugten Strahlen mit den einfallenden einschließen, so bemerken wir:

$$\alpha = \beta \pm (\varepsilon - \gamma).$$

Aus den abgeleiteten Gleichungen folgt

$$d . \cos \gamma . \sin \beta = \lambda; \quad \sin \gamma . \cos \beta = \sin \varepsilon,$$

also

$$d [\sin (\beta \pm \gamma) \mp \sin \varepsilon] = \lambda$$

und, da $\beta + \gamma = \alpha + \varepsilon$, $\beta - \gamma = \alpha - \varepsilon$ ist, erhalten wir für die beiden gebeugten Strahlen eines Sinusgitters die Beziehung

$$\underline{d[\sin(\alpha \pm \varepsilon] \mp \sin\varepsilon] = \lambda.}$$

Den Übergang vom Sinusgitter zum allgemeinen Gitter vollzieht man genau so wie bei senkrechter Inzidenz und erhält

$$\underline{d[\sin(\alpha_n \pm \varepsilon) \mp \sin\varepsilon] = n\lambda.}$$

Was die Amplituden der einzelnen gebeugten Strahlen betrifft, so sind sie, wie aus der Art ihrer Berechnung hervorgeht, vollkommen bestimmt, sobald $f(x)$, daher die Struktur des Gitters gegeben ist. Von den Dimensionen des Gitters, von der Wellenlänge und der Einfallsrichtung der Strahlen sind sie unabhängig.

Die interferierenden Strahlenbündel wurden bisher immer als unbegrenzt vorausgesetzt, praktisch werden die Begrenzungen der Strahlenbündel durch die Dimensionen des verwendeten Gitters gegeben sein.

Dem Quadrate des Bündelquerschnittes aber ist bei gegebener Amplitude die Intensität des Lichtfleckes proportional, welcher durch Vereinigung der Strahlen eines Bündels, etwa in der Brennebene einer Linse, entsteht. Die y-Dimension aller bei ein und demselben Gitter auftretenden Strahlenbündel ist gleich der Länge der Gitterstriche; hingegen ist von Wichtigkeit die zur y-Richtung senkrechte Ausdehnung derselben; diese möge für das $\varkappa^{\text{te}}$ Bündel $q_\varkappa$ heißen. Bezeichnen wir noch die der Strichanzahl proportionale Länge des Gitters mit D, so erhalten wir für senkrechten Einfall:

$$q_0 = D;\ q_1 = D\cos\beta_1;\ q_2 = D\cos\beta_2;\ \ldots$$

Für schiefen Einfall:

$$q_0 = D\cos\varepsilon;\ q_1 = D\cos(\alpha_1 \pm \varepsilon);\ q_2 = D\cos(\alpha_2 \pm \varepsilon);\ldots$$

Wir erhalten also die Intensität des $\varkappa^{\text{ten}}$ Beugungsstreifens $J_\varkappa$ aus der Gleichung

$$J_\varkappa = M.A_\varkappa^2.q_\varkappa^2,$$

wobei M ein Proportionalitätsfaktor ist.

Man erhält gleichzeitig in einfacher Weise den Satz, daß die Intensität der Beugungsstreifen proportional mit dem Quadrat der Strichzahl des Gitters wächst.

Wir sind bei unseren Schlußbetrachtungen von unbegrenzten zu scharf begrenzten Strahlen übergegangen, obwohl es solche streng genommen nicht gibt. Die Methode vernachlässigt durch diese vereinfachende Annahme von vornherein alle jene minutiösen Lichtvorgänge, welche sich neben den einzelnen Strahlenbündeln abspielen; es ist daher auch klar, daß sie Fragen, wie die nach dem Auflösungsvermögen eines Gitters, innerhalb dieses Rahmens nicht zu beantworten vermag.

Man erkennt gleichzeitig, daß, sobald die Voraussetzung scharf begrenzter Strahlen ganz unzulässig wird, die Anwendbarkeit der Methode aufhört; darin liegt auch der eigentliche Grund, warum sie gerade die Gitterphänomene, daher die Erscheinungen, welche bei vielen Spalten auftreten, einfach darzustellen vermag.

Über den elektrischen Widerstand von Legierungen

von

phil. cand. **E. L. Lederer.**

Aus dem physikalischen Institut der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. April 1908.)

Die wohlbekannten Untersuchungen Mathiessen's[1] haben gezeigt, daß der Widerstand der Legierungen aus gewissen Metallen — nämlich solchen, die Mischkrystalle bilden — größer ist, als der aus der bekannten Mischregel gefundene:

$$\frac{1}{w} = \frac{\frac{v_1}{w_1} + \frac{v_2}{w_2}}{v_1 + v_2} \tag{1}$$

wobei w_1, w_2 die spezifischen Widerstände der beiden Metalle, w der der Legierung und v_1 v_2 die Volumina der Komponenten sind. L. Lorenz,[2] dann Ostwald,[3] Lord Rayleigh[4] und Liebenow[5] haben darüber folgende Theorie aufgestellt: Eine Legierung könne man als eine lange Reihe sehr kleiner Thermoelemente ansehen; wenn also ein Strom durch sie geschickt wird, tritt an den Grenzflächen der verschiedenen Metalle der

---

[1] Matthiessen, Pogg. Ann., *116*, 369 (1862); *122*, 19 (1864).

[2] L. Lorenz, Wied. Ann., *13*, 422 (1881).

[3] Ostwald, Leipz. Berichte, *94* (1892); auch Zeitschr. für phys. Chemie, *11*, 520 (1893).

[4] Lord Rayleigh, Nature, *54*, 154 (1896).

[5] Enzyklopädie der Elektrochemie, Bd. 10; auch Zeitschr. für Elektrochemie, *4*, 201 (1897).

Peltiereffekt auf; die Temperaturunterschiede, die auf diese Weise hervorgerufen werden, nehmen zu, bis die Wärmeleitung durch das Metall den Peltiereffekt an den Grenzstellen ausgleicht. Durch diese thermoelektrische Erscheinung würde eine elektromotorische Gegenkraft hervorgerufen, die sich experimentell als erhöhter Widerstand der Legierung zeigt.

Wenn nun diese Theorie richtig wäre, so müßte in dem Momente des Stromschlusses der Widerstand wegen des erst nach und nach zutage tretenden Peltiereffekts anfangs geringer erscheinen und allmählich anwachsen. Arbeitet man daher mit sehr schnellen Schwingungen, so ist der Strom immer nur sehr kurze Zeit geschlossen, es müßte also der Widerstand geringer erscheinen als bei Gleichstrom. Das ist aber nach Messungen von F. Harms[1] und neuerlich von Willows[2] nicht der Fall. Ebenso weist Guertler[3] die Rayleigh-Liebenow'schen Formeln als unannehmbar zurück.

Rayleigh[4] berechnet den vorgetäuschten Widerstand R auf Grund der Hypothese, daß dieser durch thermoelektrische Kräfte hervorgerufen würde, pro Längeneinheit in der Nähe von 0° zu

$$R = 273 \frac{E^2}{\frac{k}{v} + \frac{k'}{v'}}, \qquad (2)$$

wobei E die thermoelektromotorische Kraft eines Elementes der betreffenden beiden Metalle für die Temperaturdifferenz von 1°, k und k' die Wärmeleitfähigkeit in Ergs, v und v' die Volumina der Metalle sind, die in der Volumeinheit der Legierung enthalten sind. Die Anzahl der Thermoelemente pro Längeneinheit erscheint deshalb nicht in dem obigen Ausdruck, weil zwar die Anzahl der Elemente bei der fortwährend verkleinerten Einteilung erhöht wird, jedoch ihre Wirkung wegen der durch die größere Nähe der Grenzflächen erleichterten Wärmeleitung nicht vermehrt wird.

---

[1] F. Harms, Ann. der Phys., *5*, 592 (1901).

[2] Willows, Phil. Mag., XII, 604 (1906), und Phys. Zeitschr., *8*, 173 (1907).

[3] W. Guertler, Zeitschr. für Elektrochemie, *13*, 441 (1907).

[4] Die Formel Liebenow's unterscheidet sich nicht wesentlich von der Rayleigh's.

Rayleigh berechnet so die Widerstandserhöhung einer Cu-Fe-Legierung aus gleichen Teilen zu 1·5%, ich fand bei Benützung der Formel (2) für Konstantan (60% Cu, 40% Ni) eine solche von zirka 4·5%, was gewiß die tatsächliche enorme Erhöhung von nahezu 2500% nicht erklären kann, eine Bemerkung, die auch Guertler l. c. macht.

Auf Anregung des Herrn Prof. Dr. E. Lecher versuchte ich nun auf folgende relativ sehr einfache Weise die Unhaltbarkeit dieser Theorie darzutun.[1]

Würde der Widerstand durch den Peltiereffekt, respektive durch die dadurch erzeugte Temperaturdifferenz und eine thermoelektrische Gegenkraft vorgetäuscht, so müßte bei der Joule'schen Wärme, da ja hier die Erwärmungen und Abkühlungen des Peltiereffektes sich gegenseitig aufheben, die Widerstandsänderung ohne Einfluß sein. Es müßte also der Widerstand für den stromdurchflossenen Leiter gemessen durch die Wheatstonebrücke und der Widerstand gemessen durch die Joule'sche Wärme verschieden sein. Derartige direkte Messungen an Legierungen sind aber meines Wissens noch nicht gemacht worden. Ich konnte nun, wie aus den beigefügten Tabellen ersichtlich ist, bei den vier verwendeten Legierungen Manganin, Nickelin, Neusilber und Konstantan keinen derartigen Unterschied bemerken, wenigstens keinen, der sich nicht durch Versuchsfehler erklären ließe, da die Fehlergrenze der Methode sich kaum unter $^1/_2$% beim einzelnen Versuch herabdrücken lassen dürfte. Die Versuchsanordnung war ursprünglich die folgende (Fig. 1):

Durch den Stromschlüssel S konnte entweder der Strom der Akkumulatorenbatterie E durch das Amperemeter A und die zu untersuchende Legierung x im Kalorimeter C oder aber der Strom des Elementes e durch den zu messenden Draht der Legierung, einen Normalwiderstand von 10 Ω, das Galvanometer G und Wheatstonebrücke BB' geschickt werden. Die Stromstärke konnte durch den Vorschaltwiderstand W auf

[1] Eine ähnliche Anordnung, nur umgekehrt, zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents verwendete Dieterici, Wied. Ann., *33*, 417 (1888); er bediente sich jedoch statt des Wasserkalorimeters eines Bunsen'schen Eiskalorimeters.

etwa $^1/_4$% genau reguliert werden. Im Kalorimeter, das ungefähr 1 *l* Wasser enthielt, wurde durch ein Beckmannthermometer, welches 2 Tausendstelgrade noch gut schätzen ließ, der Temperaturanstieg beim Stromdurchgange gemessen und die nötigen Korrekturen nach der Regnault-Pfaundler'schen Korrektionsformel[1] angebracht. An Stelle des gewöhnlichen Drahtes BB' der Wheatstone'schen Brücke wurde ein Präzisionswiderstandskasten (Gesamtwiderstand 10.000 Ω) benützt, welcher im Verein mit dem sehr empfindlichen Galvanometer G eine große Genauigkeit der Widerstandsmessung zuließ. Von dieser Versuchsanordnung, welche bei den zuerst behandelten Legierungen Konstantan und Manganin recht gute Resultate lieferte, mußte

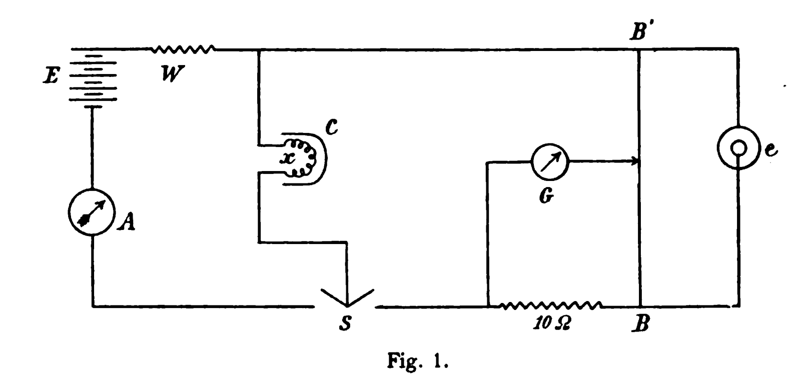


Fig. 1.

aber bei den beiden anderen Legierungen Nickelin und Neusilber deshalb abgegangen werden, weil es sich herausstellte, daß die Widerstandsspiralen gegen das umgebende Wasser des Kalorimeters trotz sorgfältigen Rührens eine nicht unerhebliche Temperaturdifferenz (zirka 10 bis 15°) aufwiesen, was bei dem relativ hohen Temperaturkoeffizienten der beiden letztgenannten Legierungen einen Fehler von etwa $^1/_2$% bei der Widerstandsbestimmung hervorrufen würde. Es wurde daher direkt mit dem Strome der Akkumulatoren auch der Widerstand gemessen, wie das folgende Schema zeigt.

---

[1] Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik, herausgeg. von Pfaundler, Bd. III, p. 174 bis 179 (1907).

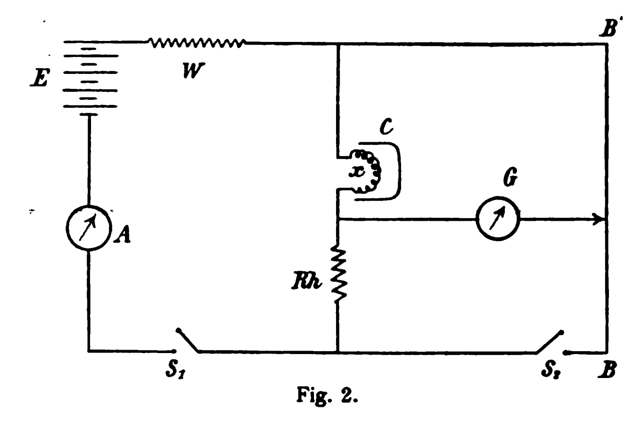


Fig. 2.

Als Vergleichswiderstand *Rh* wurde hier wegen der großen Stromstärke nicht das Normalohm benützt, sondern ein gewöhnlicher Rheostat aus dickem Konstantandraht, dessen Widerstand vorher gegen das Normalohms mit einem schwachen Strom genau bestimmt wurde. Auf diese Weise war es möglich, die Widerstandsmessung durch Schließen von S_2 gleichzeitig mit der Messung des Temperaturanstieges im Kalorimeter vorzunehmen.

Die so erhaltenen Werte zeigen die folgenden Tabellen. Dabei findet sich in der ersten Spalte der Widerstand der betreffenden Spiralen im Kalorimeter, die eine Länge von beziehungsweise 140, 180, 150 und 130 *cm* und einen Durchmesser von 0·3 *mm* hatten. Der Widerstand blieb, wie man sieht, nicht konstant, sondern vergrößerte sich fast nach jedem Versuch, was offenbar auf die Erwärmung und auf Oxydation zurückzuführen ist. Ich versuchte zwar, die verwendeten Drähte »künstlich zu altern« (man erkennt dies an der sprungweisen Änderung des Widerstandes), jedoch ohne Erfolg. In der zweiten Spalte ist die Stromstärke in Ampere angegeben, in der dritten die Zeit des Stromdurchganges, in der vierten die aus dem korrigierten Temperaturanstieg und dem Wasserwert berechnete Anzahl der Grammkalorien, in der nächsten die Zahl derselben, die sich aus der Formel $0 \cdot 240\, i^2 w t$ berechnet; in der letzten endlich der Unterschied der beiden vorangehenden Zahlen in Prozenten, positiv gerechnet im Sinne einer Erhöhung des Widerstandes nach der Rayleigh-Liebenow'schen Theorie. Wie

man sieht, bleiben die Unterschiede im Mittel (—0·03, +0·40, +0·04, respektive —0·20 %) durchwegs innerhalb der Fehlergrenzen.

I. Manganin.

Widerstand	Strom	Zeit	Gramm-kalorien	0·240 i^2wt	Prozent
7·733	2·50	180·9	2075	2098	+1·10
7·733	2·50	180·9	2100	2098	—0·10
7·743	2·50	301·5	3522	3502	—0·60
7·743	2·50	301·5	3510	3502	—0·21
7·744	2·50	301·5	3492	3503	+0·31
7·744	2·50	301·5	3479	3503	+0·67
8·065	2·50	301·5	3634	3647	+0·37
8·075	2·50	301·5	3679	3652	—0·74
8·200	2·50	301·5	3718	3708	—0·27
8·216	2·50	301·5	3745	3716	—0·78
8·232	2·50	301·5	3719	3723	+0·11
8·248	2·50	301·5	3719	3730	+0·30
8·264	2·50	301·5	3746	3737	—0·24
8·280	2·50	301·5	3733	3745	+0·35
8·296	2·50	301·5	3741	3752	+0·30
8·429	2·00	422·5	3437	3419	—0·53
8·445	2·00	573·0	4654	4645	—0·20

Abweichung im Mittel: —0·03 %.

II. Neusilber.

Widerstand	Strom	Zeit	Gramm-kalorien	0·240 i^2wt	Prozent
6·827	2·50	301·5	3078	3089	+0·35
6·833	2·50	180·9	1857	1854	—0·15
6·867	2·50	301·5	3102	3106	+0·13
6·940	2·50	180·9	1886	1884	—0·10
6·941	2·50	301·5	3111	3139	+0·90
6·943	2·00	452·3	2994	3015	+0·69
6·948	2·00	301·5	2017	2011	—0·30
6·949	2·00	301·5	2002	2011	+0·49
6·951	2·00	603·0	4046	4024	—0·54
6·952	2·00	603·0	3989	4024	+0·88
6·953	2·00	603·0	4010	4025	+0·36
6·953	2·00	603·0	3988	4025	+0·90
6·954	2·00	603·0	3997	4025	+0·71
6·933	2·00	301·5	1989	2007	+0·88
6·933	2·00	301·5	1991	2007	+0·97
6·983	2·00	301·5	2025	2021	—0·17

Abweichung im Mittel: +0·40%.

III. Nickelin.

Widerstand	Strom	Zeit	Gramm-kalorien	0·240 i^2wt	Prozent
6·533	2·50	301·5	2943	2954	+0·38
6·533	2·50	241·5	2360	2367	+0·30
6·533	2·50	301·5	2945	2954	+0·30
6·535	2·51	301·5	3005	2979	—0·87
6·536	2·50	301·5	2934	2955	+0·70
6·536	2·50	301·5	2937	2955	+0·61
6·537	2·50	301·5	2943	2956	+0·44
6·538	2·50	301·5	2951	2957	+0·20
6·538	2·50	301·5	2980	2957	—0·80
6·538	2·50	301·5	2958	2957	—0·03
6·563	2·50	301·5	2992	2968	—0·80

Abweichung im Mittel: +0·04%.

IV. Konstantan.

Widerstand	Strom	Zeit	Gramm-kalorien	$0 \cdot 240\, i^2 w t$	Prozent
7·396	2·50	180·9	2021	2007	—0·69
7·404	2·50	180·9	2000	2009	+0·45
7·412	2·50	180·9	2007	2011	+0·21
7·421	2·50	180·9	2011	2014	+0·14
7·429	2·50	180·9	2018	2016	—0·13
7·435	2·50	180·9	2029	2017	—0·57
7·441	2·50	180·9	2029	2019	—0·48
7·451	2·50	180·9	2033	2022	—0·58

Abweichung im Mittel: —0·20%.

Da also auch für Legierungen der Widerstand gegen einen durchfließenden Strom gemessen mit der Wheatstonebrücke und der Widerstand gemessen durch die Joule'sche Wärme gleich sind, müssen alle Theorien, wonach der große Widerstand von Legierungen durch thermoelektrische Kräfte vorgetäuscht würde, als unrichtig bezeichnet werden.

Hasenöhrl F., Zur Thermodynamik bewegter Systeme. (Fortsetzung.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 207—215.

Thermodynamik, bewegter Systeme.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 207—215.

Bewegte Systeme, zur Thermodynamik derselben.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 207—215.

Obermayer A., v., Die Häufigkeitszahlen der Bewölkung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 217—229.

Bewölkung, die Häufigkeitszahlen derselben.
Obermayer A., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 217—229.

Häufigkeitszahlen der Bewölkung.
Obermayer A., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 217—229.

Denizot A., Über die axonometrischen Verkürzungsverhältnisse.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 231—236.

Verkürzungsverhältnisse, axonometrische.
Denizot A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 231—236.

Axonometrische Verkürzungsverhältnisse.
Denizot A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 231—236.

Hasenöhrl F. [illegible]
Sitz. [illegible]

Thermodynamik [illegible]
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad. [illegible]
(190[illegible]), p. [illegible]

Bewegte Systeme, zur Thermodynamik derselben.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a Abt., Bd. 11[illegible]
(1908), p. 207—216.

Obermayer A., v., Die Häufigkeitszahlen der Bewölkung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a Abt., Bd. 11[illegible] (1908), p. 217—[illegible]

Bewölkung, die Häufigkeitszahlen derselben.
Obermayer A., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a Abt., Bd. 11[illegible]
(1908), p. 217—229.

Häufigkeitszahlen der Bewölkung.
Obermayer A., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a Abt., Bd. 11[illegible]
(1908), p. 217—229.

Denizot A., [illegible]
Sitz. Ber. der Wiener [illegible]

Verkürzungsverhältnisse [illegible]
[illegible]

Axonometrie [illegible]
[illegible]

Schmidt W., Absorption der Sonnenstrahlung in Wasser.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 237—253.

Sonnenstrahlung, ihre Absorption in Wasser.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 237—253.

Wasser, Absorption der Sonnenstrahlung in diesem.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 237—253.

Doležal E., Über die graphische Bestimmung der Intensität und Quantität der solaren Bestrahlung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p 255—278.

Solare Bestrahlung, Über die graphische Bestimmung der Intensität und Quantität derselben.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 255—278.

Intensität der solaren Bestrahlung, Über die graphische Bestimmung derselben.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 255—278.

Quantität der solaren Bestrahlung, Über die graphische Bestimmung derselben.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 255—278.

Frank Ph., Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 279—298.

Schmidt W., Absorption der Sonnenstrahlung in Wasser.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 237—253.

Sonnenstrahlung, ihre Absorption in Wasser.
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 237—253.

Wasser, Absorption der Sonnenstrahlung in diesem
Schmidt W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 237—253.

Doležal E., Über die graphische Bestimmung der Intensität und Quantität der solaren Bestrahlung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 255—278.

Solare Bestrahlung, Über die graphische Bestimmung der Intensität und Quantität derselben.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 255—278.

Intensität der solaren Bestrahlung, Über die graphische Bestimmung derselben.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 255—278.

Quantität der solaren Bestrahlung, Über die graphische Bestimmung derselben.
Doležal E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 255—278.

Frank Ph., Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd 117 (1908), p. 279--298.

Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Frank Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 279—298.

Schwingungen, Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Frank Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 279—298.

Rayleigh'sches Prinzip, Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Frank Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 279—298.

Lohr E., Stehende Lichtwellen und Beugungsgitter.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 299—309.

Stehende Lichtwellen und Beugungsgitter.
Lohr E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 299—309.

Beugungsgitter und stehende Lichtwellen.
Lohr E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 299—309.

Lederer E. L., Über den elektrischen Widerstand von Legierungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 311—318.

Widerstand, Über den elektrischen — von Legierungen.
Lederer E. L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 311—318.

Legierungen, Über den elektrischen Widerstand derselben.
Lederer E. L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 311—318.

Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Frank Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 279—298.

Schwingungen, Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Frank Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 279—298.

Rayleigh'sches Prinzip, Die Integralgleichungen in der Theorie der kleinen Schwingungen von Fäden und das Rayleigh'sche Prinzip.
Frank Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 279—298.

Lohr E., Stehende Lichtwellen und Beugungsgitter.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 299—309.

Stehende Lichtwellen und Beugungsgitter.
Lohr E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 299—309.

Beugungsgitter und stehende Lichtwellen.
Lohr E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 299—309.

Lederer E. L., Über den elektrischen Widerstand von Legierungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 311—318.

Widerstand, Über den elektrischen von Legierungen.
Lederer E. L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 311—318.

Legierungen, Über den elektrischen Widerstand derselben.
Lederer E. L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 311—318.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. III. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen

(II. Teil)

von

A. Grau und F. Russ.

(Mit Subvention aus der Erbschaft Treitl.)

Aus dem Technologischen Gewerbemuseum in Wien.

(Mit 1 Tafel, 1 Doppeltafel und 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

Einleitung.

In unserer ersten Mitteilung über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen[1] hatten wir die Aufklärung einiger im Laufe der Untersuchung entstandener Fragen und ergänzende Messungen bei bereits gewonnenen Beziehungen in Aussicht gestellt. Demnach waren zu ermitteln:

1. Die Abhängigkeit der Bogenspannung von der Strömungsgeschwindigkeit bei konstantem Gasdruck.

2. Die Abhängigkeit der Bogenspannung vom Gasdruck.

3. Die Abhängigkeit der Größe $C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$ von der Bogenlänge.

4. Der Nachweis der Gültigkeit des Gesetzes der chemischen Massenwirkung bei der Stickoxydbildung im elektrischen Flammenbogen;

5. Das Stickoxydgleichgewicht in einem 7 *cm* langen Bogen.

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. II a, p. 1571 bis 1657 (1906).

6. Das Ausbringen an Salpetersäure bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten.

Versuchsanordnung.

Das Bestreben, alle in Betracht kommenden Größen einer tunlichst genauen Messung zugänglich zu machen, veranlaßte uns, die Versuchsanordnung, welche prinzipiell der in unserer früheren Mitteilung beschriebenen[1] glich, möglichst einwandfrei zu gestalten. Während bei den früheren Versuchen die Gasabführung durch ein seitlich eingeführtes, in die Bogenmitte reichendes, gekühltes Kapillarrohr erfolgte, wurde bei den folgenden Versuchen, nur der leichteren Handhabung wegen, die obere Elektrode als Gasabführungsrohr ausgebildet. Es wurden Kautschukverbindungen durchaus vermieden und alle Glasteile, falls nicht verschmolzen, durch Schliffe verbunden. Im übrigen ergibt sich unsere gegen früher verbesserte Anordnung aus der schematischen Skizze Fig. 1 und der nachfolgenden Beschreibung.

Wir bedienten uns bei allen Versuchen der Strömungsmethode.

Als Absorptionsflüssigkeit für die nitrosen Gase diente konzentrierte Schwefelsäure.

Die Luft, beziehungsweise das der Verbrennung zugeführte Gasgemisch nahm seinen Weg zunächst durch ein System von Waschflaschen, um die groben Verunreinigungen der Luft zu beseitigen, passierte sodann eine Gasuhr, ferner zwei mit konzentrierter Schwefelsäure gefüllte Waschflaschen, ein mit Phosphorpentoxyd gefülltes Rohr und gelangte getrocknet in den feststehenden Flammenbogen, der in einem mit fließendem Wasser gekühlten Quarzohr zwischen einem etwa 3 *mm* starken Platindraht als untere und einer wassergekühlten Platinkapillare als obere Elektrode brannte. Das Gas strich längs der unteren Elektrode, dieselbe kühlend, in die vollkommen ruhig brennende Flamme ein und trat durch die Kapillare, die so angeordnet und dimensioniert war, daß nur die innere Zone eingesaugt wurde, aus. Das jenseits des Flammenbogens befindliche System von Flaschen diente für die Zwecke der chemischen Analyse, der bekanntlich eine Umwandlung des im Flammenbogen gebildeten Stickoxyds in das Peroxyd vorangehen muß. Hiezu dienten die beiden Mischgefäße *A* und *B* von 10, respektive 3 *l* Inhalt. Auf Grund früherer Erfahrungen erschien es notwendig, den Mischraum so groß zu dimensionieren, da sonst die Umwandlung des Stickoxyds in das Peroxyd bei

[1] L. c., 1608.

den verhältnismäßig großen Strömungsgeschwindigkeiten keine vollständige gewesen wäre. Bei Flasche *B* war überdies eine Anordnung getroffen, welche die Entnahme von Gasproben jederzeit gestattete.

Für die Absorption des Stickstoffperoxyds diente ein System von fünf mit konzentrierter Schwefelsäure gefüllten Spiralwaschflaschen. Die zwei ersten Flaschen[1] hatten einen Fassungsraum von je 1 *l* und wurden mit je 400 cm^3 konzentrierter Schwefelsäure beschickt; die drei letzten Waschflaschen hatten einen Fassungsraum von je einem halben Liter und wurden mit je 200 cm^3 Schwefelsäure gefüllt. An dieses System war noch ein 1 *l* fassender Kolben angeschaltet,[1] welcher zur Beurteilung der Farbe der abziehenden Gase herangezogen wurde. Dieselben mußten bei vollständiger Absorption des Peroxyds farblos abgehen, was auch immer zutraf.

Mit dem Mischraum in Verbindung stand ein zweites, aus drei Waschflaschen[2] bestehendes System II, durch welches die Gase immer dann strichen, wenn sie nicht der Analyse unterworfen wurden. Zwei Hähne regelten den Ablauf der Gase durch das eine oder andere System. Vor jedem quantitativen Versuch wurde der Bogen gezündet, Strömungsgeschwindigkeit und Druck eingestellt. Sodann wurde der Bogen abgestellt und insolange Luft durchgeleitet, bis in den Mischflaschen kein NO_2 erkennbar war; dann wurden die Hähne so gestellt, daß sämtliches Gas durch das System I streichen mußte und der Bogen abermals gezündet. Nach Abstellung des Versuches wurde durch das System noch insolange Luft durchgeleitet, bis die Mischflaschen wieder vollkommen entfärbt waren.

Die Bestimmung des Stickoxyds erfolgte, indem aliquote Teile der nitrosen Säure mit Hilfe des Lunge'schen Nitrometers zersetzt wurden. Hiebei zeigte sich, daß in der letzten Absorptionsflasche bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit kein, bei großer nur geringe Mengen Stickoxyd (rund 1 % des Gesamtstickoxydes[3]) ermittelt werden konnten, so daß die Absorption der nitrosen Gase eine praktisch vollkommene war. Außerdem wurde in vielen Fällen der Gehalt an Nitrit in der nitrosen Säure durch Permanganat bestimmt. Es ergab sich, daß das molekulare Verhältnis von Nitrosylschwefelsäure zu Salpetersäure von 1 nicht allzusehr abwich. Bei Anwendung sauerstoffreicherer Gasgemische als Luft wurden manchmal Störungen beobachtet, indem weitaus weniger Stickoxyd gefunden wurde, als zu erwarten war.[4] In

---

[1] In die Zeichnung Fig. 1 nicht aufgenommen.

[2] In Fig. 1 sind nur zwei Flaschen eingezeichnet.

[3] Vergl. den folgenden Versuch 55 auf p. 337.

[4] Vergl. hiezu A. Mandl und F. Russ, Z. f. angew. Ch. XXI, 486 (1908).

allen diesen Fällen war aber gleichzeitig das molekulare Verhältnis von Salpetersäure zu Nitrosylschwefelsäure von 1 sehr abweichend. Wir haben solche Versuche, deren Abweichung uns noch nicht aufgeklärt zu sein scheint, in diese Mitteilung nicht aufgenommen.

Druckmessungen wurden bei der Gasuhr, vor und hinter dem Flammenbogen mit Hilfe der Manometer M_1, M_2 und M_3 vorgenommen.

Die Versuchsdauer wurde so bemessen, daß Gasmengen von 20 bis über 70 *l* den Bogen passieren mußten. Dadurch wurden so große Stickoxydmengen in der Schwefelsäure zurückgehalten, daß die analytisch möglichen Fehler auf ein Minimum herabgedrückt wurden.

Die Strömungsgeschwindigkeit wurde innerhalb sehr weiter Grenzen, und zwar von 22 bis 167 *l* pro Stunde variiert.

Der hochgespannte Wechselstrom von 50 Perioden wurde dem bereits in unserer ersten Mitteilung beschriebenen Hochspannungstransformator entnommen.

Der Strom wurde an einem Hitzdraht-Milliamperemeter, die Spannung an einem elektrostatischen Voltmeter der Firma Hartmann & Braun gemessen, während die Ermittlung der Energie mit einem Spiegelwattmeter älterer Konstruktion durchgeführt wurde.

A. Elektrische Messungen.

Die in den folgenden Tabellen niedergelegten elektrischen Größen sind stets die Mittelwerte mehrfacher Ablesungen. Zu den Wattmeterangaben muß erwähnt werden, daß sich am Wattmeter mitunter elektrostatische Entladungen bemerkbar machten, welche die Ablenkungen beeinflußten. Da die Größe C aus drei gemessenen Werten, von denen jeder gewissen Schwankungen unterliegt, berechnet wurde, so darf auf den numerischen Wert von C kein besonderer Wert gelegt werden, umsomehr als derselbe von dem in unserer früheren Mitteilung bestimmten Wert von 0·6 nicht unwesentlich abweicht. Die Größe C wurde nur aufgenommen, um einen Anhaltspunkt zu gewinnen, ob sie unter gleichen Versuchsbedingungen geändert wird, wenn Stromstärke, Druck oder Gasgeschwindigkeit variieren.

I. Abhängigkeit der Bogenspannung von der Strömungsgeschwindigkeit bei konstantem Druck.[1]

Es ergaben sich bei möglichster Konstanthaltung des Druckes bei verschiedenen Geschwindigkeiten die nachstehenden Resultate.

1.) 3 *cm*-Bogen.

Tabelle 1.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde (0°, 760 *mm* Hg)	Druck in Millimeter Hg (0° C.)	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·060	1820	109·2	92·25			0·84
0·070	1680	116·6	97·5			0·84
0·080	1600	128·0	105·0	27·2	741	0·82
0·090	1500	135·0	112·5			0·83
0·101	1425	143·92	120·0			0·83
0·110	1375	151·25	125·25			0·83
0·060	1920	115·2	93·75			0·81
0·070	1800	126 0	101·25			0·80
0·080	1690	135·2	109·5	58·8	745	0·81
0·090	1625	146·25	117·5			0·80
0·100	1540	154·00	124·5			0·81
0·110	1480	162·80	131·25			0·81
0·060	2100	126·0	103·5			0·82
0·070	1920	134·4	112·5			0·84
0·080	1820	145·6	121·5	98·4	745	0·83
0·090	1725	155·25	128·25			0 83
0·100	1650	165·00	137·25			0·83
0·110	1575	173·25	142·5			0·82

[1] Vergl. I. Mitteilung, l. c., p. 1604.

2.) 5 *cm*-Bogen.

Tabelle 2.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde (0°, 760 *mm* Hg)	Druck in Millimeter Hg (0° C.)	$\zeta = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·060	2700	162·0	122·25			0·75
0·070	2500	175·0	132·75			0·76
0·080	2300	184·0	140·25			0·76
0·090	2175	195·75	148·5	**27·0**	756	0·76
0·100	2050	205·0	156·0			0·76
0·110	1950	214·5	164·25			0·77
0·060	2910	174·6	129·0			0·74
0·070	2710	189·7	139·5			0·74
0·080	2480	198·4	149·25			0·75
0·0905	2325	210·36	158·25	**61·5**	758	0·75
0·100	2210	221·00	166·5			0·75
0·111	2100	233·10	173·25			0·74
0·060	3100	188·0	138·75			0·74
0·070	2850	199·5	151·5			0·76
0·080	2680	214·4	159·0			0·74
0·091	2460	223·86	166·5	**111·2**	756	0·74
0·100	2325	232·5	174·0			0·75
0·112	2210	247·52	183·75			0·74

3.) 7 *cm*-Bogen.

Tabelle 3.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde (0°, 760 *mm* Hg)	Druck in Millimeter Hg (0° C.)	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·070	3580	250·6	191·25			0·76
0·080	3350	268·0	202·5			0·76
0·090	3130	281·7	215·25	46·7	762	0·76
0·100	2950	295·0	223·5			0·76
0·1105	2775	306·64	237·0			0·77
0·070	3700	259·0	195·5			0·76
0·080	3450	276·0	208·5			0·76
0·090	3225	290·25	217·5	70·8	762	0·75
0·100	3050	305·00	228·75			0·75
0·110	2850	315·5	240·0			0·76
0·070	3850	269·5	199·0			0·74
0·080	3600	288·0	210·0			0·73
0·090	3360	302·4	221·25	101·3	761	0·73
0·100	3180	318·0	228·75			0·72
0·111	3020	335·22	247·5			0·74

Die Ergebnisse vorstehender Messungen sind in Fig. 2 graphisch dargestellt, indem die Stromstärken als Abszissen, die Spannungen als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen wurden.

Ermittelt man aus Fig. 2 für konstante Stromstärken die den verschiedenen Geschwindigkeiten und Bogenlängen zugehörigen Spannungen, trägt dieselben als Ordinaten und die Strömungsgeschwindigkeit als Abszissen ein, so erhält man das Bild der Fig. 3, aus welchem sich ein linearer Zusammenhang zwischen Bogenspannung und Strömungsgeschwindigkeit für konstante Stromstärken ergibt.

Nimmt man weiters aus den Schaulinien der Fig. 3 die den Geschwindigkeiten von 50 und 100 *l* zugehörigen Spannungswerte für z. B. drei konstante Stromwerte (0·07, 0·09, 0·11 Ampere), so erhält man bei den verschiedenen Bogenlängen für diese Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit folgende Beträge:

Tabelle 4.

Bogen-länge	Stromstärke in Ampere	Spannung in Volt bei 30 *l* pro Stunde	Spannung in Volt bei 110 *l* pro Stunde	Spannungs-differenz für 100 *l* Geschwindigkeits-unterschied
3 *cm*	0·07	1700	1980	350
	0·09	1510	1770	325
	0·11	1385	1610	281
5 *cm*	0·07	2520	2870	437·5
	0·09	2185	2510	406
	0·11	1960	2235	343·7
7 *cm*	0·07	3500	3880	475
	0·09	3080	3425	431
	0·11	2715	3050	419

Ermittelt man hieraus die auf 1 *cm* der Bogenlänge entfallende Spannungserhöhung, wenn die Geschwindigkeit um 100 *l* pro Stunde ansteigt, so ergibt sich

beim 3 *cm*-Bogen { 117 Volt bei 0·07 Ampere
108·3 » » 0·09 »
93·3 » » 0·11 »

beim 5 *cm*-Bogen { 87·5 » » 0·07 »
81·2 » » 0·09 »
68·7 » » 0·11 »

beim 7 *cm*-Bogen { 68·0 » » 0·07 »
61·6 » » 0·09 »
59·8 » » 0·11 »

Es geht aus diesen Zahlen hervor, daß die durch eine Erhöhung der Gasgeschwindigkeit hervorgerufene Spannungszunahme pro Einheit der Bogenlänge um so größer wird, je kürzer der Bogen ist.

II. Abhängigkeit der Bogenspannung vom Druck.

1.) 3 *cm*-Bogen.

Tabelle 5.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde (0°, 760 *mm* Hg)	Druck in Millimeter Hg (0° C.)	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·060	1920	115·2	93·75	58·3	745	0·81
0·070	1800	126·0	101·25			0·80
0·080	1690	135·2	109·50			0·81
0·090	1625	146·25	117·40			0·80
0·100	1540	154·00	124·50			0·81
0·110	1480	162·80	131·25			0·81
0·060	1865	111·9	wurden nicht bestimmt	58·3	810	nicht bestimmt
0·070	1730	121·1				
0·080	1640	131·2				
0·090	1575	141·75				
0·100	1515	151·5				
0·110	1440	158·5				

2.) 5 *cm*-Bogen.

Tabelle 6.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde (0°, 760 *mm* Hg)	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·060	2920	175·2				
0·070	2725	190·75				
0·080	2500	200·00				
0·090	2340	210·60	nicht bestimmt	55·7	**700**	nicht bestimmt
0·100	2210	221·00				
0·110	2100	233·10				
0·060	2910	174·6	129·0			0·74
0·070	2710	189·7	139·5			0·74
0·080	2480	198·4	149·25			0·75
0·0905	2325	210·41	158·25	61·5	**758**	0·75
0·100	2210	221·00	166·5			0·75
0·111	2100	233·10	173·25			0·74
0·060	2910	174·6				
0·070	2700	189·0				
0·080	2480	198·4				
0·090	2320	208·8	nicht bestimmt	63·0	**795**	nicht bestimmt
0·100	2200	220·0				
0·1095	2100	229·95				

Es zeigt sich bei dieser wie bei der vorangegangenen Versuchsreihe, daß die in diesem Bereich vorgenommenen Druckänderungen von 95, respektive 65 *mm* Hg die Spannungswerte kaum beeinflussen.

Infolgedessen wurden Messungen am 7 *cm*-Bogen unterlassen.

Um über die Größe $C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$ einen Aufschluß zu gewinnen, kann die Wattmetermessung allein benützt werden.

Die im Bogen aufgewendete Energie ist durch den Ausdruck $EJ \cos \varphi$ bestimmt, wobei E die Bogenspannung, J die Stromstärke und φ die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom bedeuten.

Nun wissen wir aus früheren Versuchen,[1] daß bei konstant gehaltener Stromstärke die Beziehung zwischen Bogenspannung und Bogenlänge durch eine Gerade dargestellt wird, wenn die Spannung als Ordinate, die Bogenlänge als Abszisse in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen werden.

Trägt man nun bei konstanter Stromstärke die Bogenlängen als Abszissen und die gemessenen Watt als Ordinaten ein und ergibt sich als Verbindungslinie der erhaltenen Werte eine Gerade, so kann hieraus gefolgert werden, daß $\cos \varphi$, das ist in unserem Falle $C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$, für die verschiedenen Bogenlängen konstant ist.

Es wurden für den 3, 5 und 7 *cm* langen Bogen für die drei Stromstärken 0·07, 0·09, 0·11 Ampere die Wattangaben für konstante Gasgeschwindigkeit ermittelt, und zwar 58·3 *l* pro Stunde.

Die Werte sind in der nachstehenden kleinen Tabelle angeführt.

Tabelle 7.

3 *cm*-Bogen		5 *cm*-Bogen		7 *cm*-Bogen	
Stromstärke in Ampere	Watt	Stromstärke in Ampere	Watt	Stromstärke in Ampere	Watt
0·07	101·25	0·07	138·8	0·07	194·4
0·09	117·4	0·09	156·6	0·09	218·8
0·11	131·25	0·11	170·9	0·11	240·4

Benützt man diese Zahlenwerte zu der vorerwähnten Konstruktion, so erhält man schwach nach aufwärts gekrümmte

[1] I. Mitteilung, p. 1587.

Linien. Da aber die Abweichungen dieser Kurven von geraden Linien nur sehr gering sind, so ist wohl die Annahme gerechtfertigt, die Größe *C* für die verschiedenen Bogenlängen als konstant anzusehen.

B. Chemische Messungen.

I. Die Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes.[1]

Wir hatten bereits früher[2] versucht, die Gleichgewichtskonstante der Luftverbrennung $k = \frac{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}{(NO)}$ durch Änderung der Gaszusammensetzung der Ausgangsmischung einerseits und durch Zerfall des Stickoxyds andrerseits zu bestimmen. Es hat sich hiebei die befremdende Tatsache ergeben, daß mit steigendem Gehalt der Ausgangsmischung an Sauerstoff die durch Absaugen aus der innersten Zone ermittelten Stickoxydkonzentrationen dem Massenwirkungsgesetz anscheinend nicht gehorchen. Wir waren bemüht, die Ursache der Unstimmigkeit zu ermitteln und fanden dieselbe in einer Erhöhung der Spannung, respektive der Watt bei zunehmendem Gehalt der Ausgangsmischung, woraus sich ohneweiters ergab, daß das Massenwirkungsgesetz auf die von uns bei gleichen Stromstärken ermittelten Stickoxydkonzentrationen nicht anwendbar ist, da diese Konzentrationen offenbar verschiedenen Temperaturen entsprechen.

Demnach durfte die Prüfung des Massenwirkungsgesetzes nur derart erfolgen, daß die Stickoxydkonzentrationen in Bogen gleichen Wattverbrauchs, die wenigstens annähernd gleichen Temperaturen entsprechen dürften, ermittelt werden, keinesfalls

---

1 Durch eine in der Zeitschrift für Elektrochemie, 1907, p. 297, erschienene Mitteilung von M. Le Blanc (Auszug aus der Dissertation von Nüranen) über denselben Gegenstand sahen wir uns veranlaßt, die in diesem Kapitel mitgeteilten Ergebnisse bereits in der genannten Zeitschrift, 1907, p. 573, zu veröffentlichen. Le Blanc und Nüranen finden ebenfalls das Gesetz der Massenwirkung bei der Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen bestätigt.

2 L. c., p. 1608.

aber derart, daß Bogen gleicher Stromstärke verglichen werden. Von diesem Gesichtspunkt aus wurden die nachstehenden Versuche an einem 5 *cm* langen feststehenden Flammenbogen durchgeführt.

Als Ausgangsmischungen gelangten einerseits Luft, andrerseits etwa hälftige Gemische von Sauerstoff und Stickstoff zur Verwendung. Letztere wurden in einem 300 *l* fassenden Glockengasometer aufbewahrt. So wünschenswert es auch erschien, das

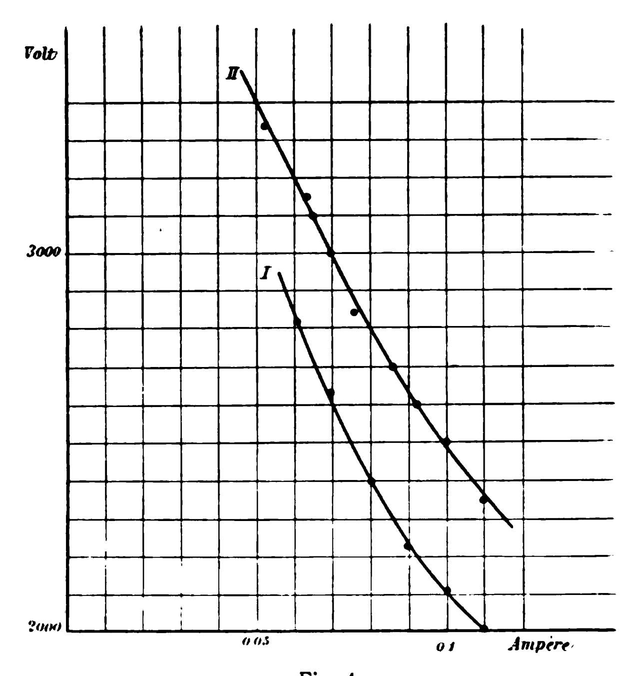


Fig. 4.

Gleichgewicht von der entgegengesetzten Seite, also vom Stickoxyd, beziehungsweise Peroxyd aus zu bestimmen, so mußte technischer Schwierigkeiten wegen auf eine solche Versuchsreihe leider verzichtet werden.

Der Mehrverbrauch an Energie, welcher ein in einer sauerstoffreicheren Mischung als Luft brennender Flammenbogen gegenüber einem bei gleicher Stromstärke in Luft brennenden aufweist, machte eine Aufnahme der Stromspannungskurve in beiden Gasmischungen erforderlich. Die erhaltenen Werte sind

in den Tabellen 8 und 9 niedergelegt und in Fig. 4 graphisch dargestellt.

Tabelle 8 (Fig. 4, Kurve I).

Luft. Bogenlänge: 5 *cm*. Strömungsgeschwindigkeit: 55·5 *l* (0° C., 760 *mm* Hg) pro Stunde.

Druck vor dem Ofen (0° C.): 700 *mm* Hg.

Strom in Ampere	Spannung in Volt
0·060	2820
0·070	2620
0·080	2400
0·090	2240
0·100	2110
0·110	2000

Tabelle 9 (Fig. 4, Kurve II).

50·5% O_2; 49·5% N_2; Bogenlänge: 5 *cm*.

Strömungsgeschwindigkeit: 50·7 *l* (0° C., 760 *mm* Hg) pro Stunde.

Druck vor dem Ofen (0° C.): 690 *mm* Hg.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Strom in Ampere	Spannung in Volt
0·0525	3350	0·086	2700
0·063	3150	0·092	2600
0·070	3000	0·1005	2500
0·076	2850	0·111	2350

Das Ergebnis dieser Messungen ist, daß bei gleicher Stromstärke und bei auch sonst nahezu gleichen Bedingungen der in dem hälftigen Gemisch brennende Flammenbogen innerhalb der untersuchten Stromgrenzen einen um etwa 350 Volt, d. i. 12·4 bis 17·5% höheren Spannungsverbrauch aufweist als die Luft.[1]

Ferner wurde durch direkte Wattmessungen gefunden, daß das Verhältnis $\frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}} = \cos\varphi$ (Phasenverschiebung) in beiden Mischungen verschieden ist, und zwar ergab sich $\cos\varphi$ bei Luft zu zirka 0·79, bei dem untersuchten Gemisch zu zirka 0·82. Dies und die wesentliche Divergenz der Spannungswerte zeigen, daß ein in einem hälftigen Stickstoff-Sauerstoffgemisch brennender Flammenbogen einen weitaus höheren Wattverbrauch aufweist als ein bei gleicher Stromstärke in Luft brennender Bogen.

Besondere Versuche ergaben, daß bei gleicher Bogenlänge und Stromstärke der Energieverbrauch in Stickstoff am geringsten ist, mit steigendem Sauerstoffgehalt der Gasmischung wächst und bei reinem Sauerstoff sein Maximum erreicht.[2]

Die Arbeitsweise[3] soll z. B. an Versuch 55 (vergl. Tabelle 10) näher erläutert werden. Zu bestimmten Zeiten wurde die Strömungsgeschwindigkeit an der Gasuhr unter Berücksichtigung der Temperatur und des Barometerstandes gemessen, ferner Strom, Spannung und Watt. Druckablesungen wurden an den Manometern M_1, M_2 und M_3 vorgenommen und die Temperatur im Mischraum abgelesen.

Nachfolgend die Beobachtungsdaten:

---

1 Die Differenz von 4·8 *l* in der Strömungsgeschwindigkeit zwischen beiden Versuchsreihen beeinflußt, wie diesbezügliche Versuche ergaben, die Spannungsdifferenz nur unwesentlich. Bei einer Geschwindigkeit von 55·5 *l* würden die Spannungswerte — da dieselben mit wachsender Geschwindigkeit ansteigen — wenig höher liegen. Die Druckdifferenz von 10 *mm* ist auf die Spannungswerte praktisch ohne Einfluß.

2 Vergl. hiezu die nachfolgenden Mitteilungen III und IV.

3 Vergl. p. 322 und 323 dieser Mitteilung.

Tabelle 10.

Versuch Nr. 55. Ausgangsmischung Luft.

Zeit in Minuten nach Versuchsbeginn	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Strom in Ampere	Spannung in Volt	Watt	Manometer			Temperatur in Grad Celsius	
					M_1	M_2	M_3	in der Gasuhr	im Mischraum
0	—	0·1	—	—	—	—	—	—	—
5	46·5	0·101	2420	176·12	0	—14	—44	16·5	—
8	—	0·101	2300	—	0	—14	—44	17	17
10	46·0	0·1005	2300	—	0	—14	—44	17	17
16	46·5	0·1000	2300	—	0	—14	—44	17	17
25	45·0	0·1005	2300	—	0	—14	—44	17·5	18
30	46·5	—	—	—	—	—	—	17·5	18·5
35	46·5	0·1000	2300	—	0	—14	—44	18·1	18·5
45	46·5	0·1005	2300	—	0	—14	—44	18	18·5
50	46·5	0·1000	2300	—	0	—14	—44	18	19
55	45·0	0·1000	2300	—	0	—14	—44	18	19
58	45·0	0·1000	2300	—	0	—14	—44	18	19
62	45·0	0·1000	2400	174·64	0	—14	—44	18	19
65	Abgestellt								

Barometerstand 754 *mm* Hg.

Luftmenge. 52·6 *l* von 17·5° C. und 754 *mm* Hg, respektive 48·06 *l* von 0° C. und 760 *mm* Hg, welche in 65 Minuten durch den Bogen gingen. Hieraus ergibt sich die Strömungsgeschwindigkeit (pro Stunde) zu 44·4 *l* von 0° C. und 760 *mm* Hg.

Die Analyse erfolgte derart, daß jede Waschflasche einzeln untersucht wurde.

Flasche I enthielt 300 *cm*³ nitroser Säure. 9·9 *cm*³ dieser Säure lieferten bei der Zersetzung im Nitrometer 63·08 *cm*³ NO von 20° C. und 753 *mm* Hg, somit in 300 *cm*³ nitroser Säure 1911·5 *cm*³ NO von 20° C. und 753 *mm* Hg.

Flasche II von 300 *cm*³ Inhalt; 10·0 *cm*³ nitroser Säure gaben 8·36 *cm*³ NO von 20° C. und 753 *mm* Hg, somit in 300 *cm*³ nitroser Säure 250·8 *cm*³ NO von 20° C. und 753 *mm* Hg.

Flasche III enthielt 200 *cm*³ nitroser Säure. 25·0 *cm*³ derselben gaben 7·56 *cm*³ NO von 21·5° C. und 753 *mm* Hg.

Flasche IV enthielt 200 *cm*³ nitroser Säure. 30·3 *cm*³ gaben 4·93 *cm*³ NO von 22° C. und 753 *mm* Hg.

Flasche V enthielt 200 *cm*³ nitroser Säure. 30·0 *cm*³ nitroser Säure gaben 2·93 *cm*³ NO von 22° C. und 753 *mm* Hg.

Eine Kontrollbestimmung wurde derart ausgeführt, daß den Flaschen I und II gleiche Teile entnommen und vereinigt wurden. Ebenso wurde der Inhalt der Flaschen III, IV und V behandelt.

Flaschen I und II enthielten zusammen 600 *cm*³. 10·0 *cm*³ gaben 36·06 *cm*³ NO von 20° C. und 753 *mm* Hg, somit in 600 *cm*³ 2163·6 *cm*³ NO von 20° C. und 753 *mm* Hg, während die Einzelbestimmungen 2162·3 *cm*³ NO ergaben.

Die Flaschen III, IV und V enthielten zusammen 600 *cm*³ nitroser Säure. 30·0 *cm*³ derselben gaben 5·61 *cm*³ NO von 22° C. und 753 *mm* Hg, somit in 600 *cm*³ nitroser Säure 112·2 *cm*³ NO, während die Einzelbestimmungen 112·9 *cm*³ NO ergaben.

Die Absorptionsverhältnisse in den einzelnen Flaschen ergeben folgendes Bild:

				In Prozenten des Gesamtstickoxyds
Flasche	I	absorbierte	1911·5 *cm*³ NO (20° C. und 753 *mm* Hg)	84·0
»	II	»	250·8 *cm*³ NO (20° C. » 753 *mm* Hg)	11·0
»	III	»	60·5 *cm*³ NO (21·5° C. » 753 *mm* Hg)	2·7
»	IV	»	32·9 *cm*³ NO (22° C. » 753 *mm* Hg)	1·4
»	V	»	19·5 *cm*³ NO (22° C. » 753 *mm* Hg)	0·9

Die Gesamtmenge des absorbierten Stickoxyds beträgt 2099·6 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm* Hg, welche aus 48·06 *l* Luft entstanden, die Stickoxydkonzentration somit 4·37 % NO.

Um das Verhältnis von Nitrosylschwefelsäure zu Salpetersäure in der Nitrose zu bestimmen, wurde letztere aus einer Bürette in vorgelegtes Kaliumpermanganat einfließen gelassen, wobei die Vorsichtsmaßregel gebraucht wurde, die Titration in geschlossenen Glasflaschen vorzunehmen. Der Index des zu diesen Bestimmungen verwendeten Kaliumpermanganats betrug 0·04703. Für

die Umrechnung gilt, daß 1 *cm*³ $^{n}/_{1}$ $KMnO_4$ 11·2 *cm*³ Stickoxyd von 0° C. und 760 *mm* Hg entspricht.

Flasche I: 300 *cm*³ nitroser Säure. 35·0 *cm*³ $KMnO_4$ von obigem Index verbrauchten 6·6 *cm*³ nitroser Säure. Somit würden 300 *cm*³ nitroser Säure 74·82 *cm*³ $^{n}/_{1}$ $KMnO_4$ verbrauchen, entsprechend 838·0 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm* Hg.

Flasche II: 300 *cm*³ nitroser Säure. 10·0 *cm*³ $KMnO_4$ von obigem Index verbrauchten 14·7 *cm*³ nitroser Säure, somit in 300 *cm*³ 107·5 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm* Hg.

Flasche III: 200 *cm*³ nitroser Säure. 5·0 *cm*³ $KMnO_4$ von obigem Index verbrauchten 20·0 *cm*³ nitroser Säure, somit in 200 *cm*³ 26·0 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm* Hg.

Flasche IV: 200 *cm*³ nitroser Säure. 3·0 *cm*³ $KMnO_4$ verbrauchten 23·2 *cm*³ nitroser Säure, somit in 200 *cm*³ nitroser Säure 13·6 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm* Hg.

Flasche V: 200 *cm*³ nitroser Säure. 2·0 *cm*³ $KMnO_4$ verbrauchten 29·3 *cm*³ nitroser Säure, somit in 200 *cm*³ nitroser Säure 7·2 *cm*³ NO von 0° C. und 760 *mm* Hg.

Das molekulare Verhältnis von Nitrat zu Nitrit in den einzelnen Flaschen ergibt sich, wie folgt:

Flasche	I......	926·5 : 838·0	oder wie	1·10 : 1
»	II......	124·0 : 107·5	» »	1·15 : 1
»	III......	29·6 : 26·0	» »	1·14 : 1
»	IV......	16·5 : 13·6	» »	1·21 : 1
»	V......	10·7 : 7·2	» »	1·48 : 1.

Das Gesamtverhältnis von Nitrat zu Nitrit beträgt 1·11 : 1. Ähnliche Zahlen ergaben sich auch bei den übrigen Versuchen. Stets fand sich mehr Nitrat als Nitrit, eine Erscheinung, die noch der Aufklärung bedarf.

Bei jenen Versuchen, welche statt mit Luft mit einem hälftigen Gemisch von Sauerstoff und Stickstoff gemacht wurden, wurden zwischen Gasuhr und Trockensystem vor und nach jedem Versuch Gasproben zur Ermittlung der Zusammensetzung der zu verbrennenden Gasmischung entnommen und nur jene Versuche verwertet, bei denen das Gemisch im Laufe der Arbeit keine Änderung seiner Zusammensetzung erfuhr.

Ergebnisse.

In der nachfolgenden Tabelle 11 sind die Ergebnisse von zwei Versuchsgruppen vermerkt, von denen sich die erste auf Luft, die zweite auf etwa hälftige Gemische von Stickstoff und Sauerstoff bezieht. Jede Gruppe teilt sich in zwei Reihen, die sich durch verschiedenen Energieverbrauch unterscheiden.

Tabelle 11[1] (Fig. 5).

Versuchsnummer	Strömungsgeschwindigkeit in Liter pro Stunde	Ausgangsmischung		Temperatur der Gasluft	Druck vor dem Ofen in Millimeter Hg	Strom in Ampere	Spannung in Volt	Watt	Durch den Bogen strömten insgesamt Liter	Liter NO	C_{NO}	$\frac{NO}{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}$	Versuchsreihe
54	30·9	Luft		16·5	738	0·0985	2300	175	30·9	1·4854	4·81	7·83	I
55	44·4			17·5	740	0·1000	2300	175	48·1	2·0996	4·37	8·68	
56	48·3			19·0	736	0·0995	2375	175	24·2	1·0730	4·44	8·54	
57	104·1			16·4	727	0·0950	2600	175	78·1	2·2621	2·90	13·40	
58	38·7	Luft		16·5	740	0·125	2000	190	38·7	1·8628	4·81	7·83	II
59	87·6			18·0	732	0·125	2100	206	73·0	3·0168	4·13	9·22	
60	92·0			16·5	739	0·123	2150	201	69·0	2·7156	3·93	9·73	
61	22·0	49·9% O_2,	50·1% N_2	21·5	735	0·0850	2475	184	22·0	1·2960	5·89	7·99	III
62	26·7	50·5	49·5	17·0	734	0·0820	2550	186	40·0	2·2846	5·71	8·25	
63	40·1	50·0	50·0	19·5	742	0·0840	2450	181	40·1	2·2118	5·50	8·59	
64	54·3	50·1	49·9	20·0	743	0·0825	2525	184	54·3	2·6972	4·96	9·58	
65	55·8	50·0	50·0	23·0	731	0·0810	2650	185	55·8	2·8114	5·04	9·42	
66	41·6	55·0	45·0	18·3	828	0·095	2775	216*	34·7	1·9454	5·61	8·36	IV
67	76·9	45·7	54·3	19·0	699	0·097	2650	211*	51·3	2·5850	5·04	9·38	
68	106·8	49·7	50·3	18·0	817	0·095	2950	230*	55·2	2·4644	4·46	10·71	
69	112·7	51·0	49·0	15·0	832	0·097	2800	223*	56·4	2·4870	4·41	10·83	

1 Die mit * bezeichneten Watt sind aus den Voltamperes berechnet, alle übrigen mittels Spiegelwattmeter gemessen.

Leider gelang es nicht, den Wattverbrauch des Bogens innerhalb der einzelnen Versuchsreihen (mit Ausnahme der ersten) konstant zu halten.

In Fig. 5 ist die Verschiebung der Stickoxydkonzentration mit wachsender Strömungsgeschwindigkeit graphisch dargestellt. Die den einzelnen Kurven beigefügten Zahlen be-

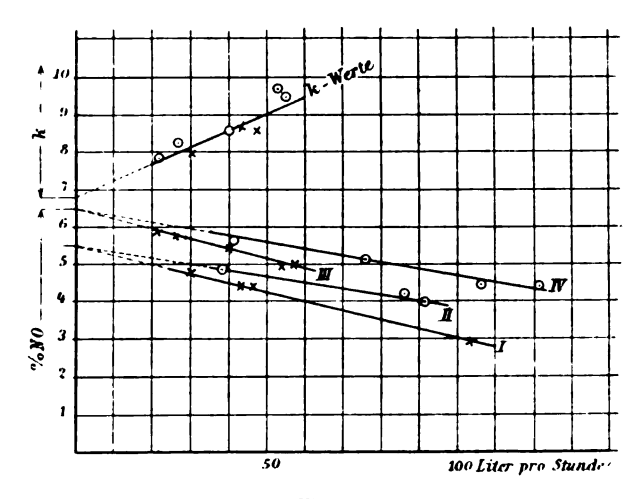


Fig. 5.

ziehen sich auf die respektiven Versuchsreihen. Ferner sind daselbst die entsprechenden k-Werte

$$\left[k = \frac{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}{(NO)}\right]$$

eingezeichnet. Hiebei konnten nur, wie weiter unten dargetan wird, die Ergebnisse der Versuchsreihen I (×) und III (⊙) verwertet werden, deren Wattverbrauch nicht allzusehr untereinander differierte.

Folgendes läßt sich aus dem Verlauf der in Fig. 5 dargestellten Kurven entnehmen:

1. Gleichgewicht. Wenn man die einer Versuchsreihe zugehörigen, bei verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten ermittelten Konzentrationen auf die Geschwindigkeit Null

graphisch extrapoliert, so erhält man jene Stickoxydkonzentrationen, die dem Gleichgewicht im Flammenbogen entsprechen dürften.

Hiebei ergibt sich zunächst, daß die Kurven verschiedenen Energieverbrauches I und II, respektive III und IV je einem Werte zustreben, und zwar bei Luft zu 5·5% NO, bei dem etwa hälftigen Gemisch zu 6·6% NO.

Das besagt zunächst, daß das im Flammenbogen sich einstellende Stickoxydgleichgewicht vom Energieverbrauch des Bogens (innerhalb der untersuchten Grenzen) unabhängig ist. Dies steht in voller Übereinstimmung mit einer bereits früher gefundenen Beziehung, wonach bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit die Konzentration mit steigender Stromstärke, beziehungsweise steigenden Watt wächst, um oberhalb einer bestimmten Stromstärke praktisch konstant zu bleiben.[1]

Wie wir damals betonten, wird bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten der Mehraufwand an elektrischer Energie oberhalb eines gewissen Energieverbrauches (z. B. 136 Watt bei einem 4·7 *cm* langen Bogen) nicht mehr zur Erhöhung der Flammentemperatur benützt, sondern dürfte als strahlende Energie für die Stickoxydbildung verloren gehen.

Der weitere Vergleich der Kurven I und II, respektive III und IV zeigt aber, daß mit steigender Strömungsgeschwindigkeit in Bogen größeren Wattverbrauches höhere Stickoxydkonzentrationen erzielt werden als in solchen niederen Wattverbrauches. Letztere Erscheinung dürfte auf eine Abkühlung des Bogens durch die rasch einströmende Luft zurückzuführen

---

[1] Diese Sitzungsberichte, l. c., 1615. Le Blanc (Zeitschrift für Elektrochemie, *13*, 304) teilt eine Versuchsreihe mit veränderlicher Stromstärke mit und konstatiert keinen wesentlichen Einfluß der Stromstärke auf die Konzentration. Die bei 0·033 Ampere ermittelten niedrigeren Werte will Le Blanc nur mit Vorsicht verwertet wissen, weil die Flamme unruhig war und die Bestimmungen untereinander differierten. Vergleicht man Le Blanc's Versuchsergebnisse mit den von uns innerhalb derselben Stromstärken gewonnenen (l. c., 1616), so ergibt sich in beiden Fällen dieselbe Abhängigkeit der Konzentration von der Stromstärke. Nur liegen Le Blanc's Werte um etwa 10% tiefer, entsprechend der durch seine Versuchsanordnung bedingten größeren Zersetzung des NO im Abkühlungsgebiet.

sein, die bei Bogen geringeren Energieverbrauches größer ist als bei solchen höheren Verbrauches. Für diese Erklärung spricht das Ansteigen der Spannung mit wachsender Strömungsgeschwindigkeit bei konstant gehaltener Stromstärke (Abnahme der Leitfähigkeit). Mit einem Abfall der Temperatur ist aber nicht nur eine Verschiebung des Gleichgewichtes zu Ungunsten des Stickoxyds, sondern auch eine Verminderung der Bildungsgeschwindigkeit verbunden.

Es läßt sich demnach wohl denken, daß auch bei sehr großen Strömungsgeschwindigkeiten eine Konzentration von $5 \cdot 5\%$ NO in Luft erzielt werden kann, wenn der Energieverbrauch des Bogens eine entsprechende Erhöhung erfährt.

2. Die Gleichgewichtskonstante des Massenwirkungsgesetzes. Vergleichen wir zunächst die durch Extrapolation in beiden Gasmischungen erhaltenen Werte von $5 \cdot 5\%$ NO (Luft) und $6 \cdot 6\%$ NO (hälftiges Gemisch), so ergeben sich die respektiven K zu $6 \cdot 77$, bezichungsweise $7 \cdot 08$, entsprechend einer Differenz von $4 \cdot 3\%$. Mit $k = 6 \cdot 77$ berechnet sich die Stickoxydkonzentration in hälftigem Gemisch zu $6 \cdot 87\%$, während $6 \cdot 6\%$ extrapoliert wurden.

Dies ist eine in Anbetracht der hohen Temperaturen überraschend gute Übereinstimmung, die einer weiteren Prüfung bedarf, da es sich vielleicht nur um einen Zufallswert handeln kann.

Zu dem Zwecke wurden die k-Werte, welche verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten entsprechen, in Fig. 5 graphisch aufgetragen.

Vergleichbar sind aber nach dem früher Gesagten nur solche k-Werte, die annähernd gleichem Wattverbrauch und gleicher Strömungsgeschwindigkeit entsprechen. Da aber, wie wir zeigten, eine Verschiedenheit des Wattverbrauches die Stickoxydwerte erst bei hohen Geschwindigkeiten beeinflußt, so lassen die in den Versuchsreihen I und II ermittelten k-Werte auch bei verschiedenen Watt dann einen Vergleich zu, falls man sich auf geringe und nahezu gleiche Strömungsgeschwindigkeiten beschränkt, wie dies z. B. aus nachfolgender Zusammenstellung ersichtlich ist.

Tabelle 12.

Versuchs-nummer	Geschwindig-keit	Mischung	Watt	$\frac{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}{NO}$
55	44·4	Luft	175	8·68
63	40·1	50% O_2	181	8·59
66	41·6	55% O_2	216	8·36

In Fig. 5 sind nun die k-Werte der Versuchsreihen I (×) und III (⊙) bis zu einer Strömungsgeschwindigkeit von 55·8 l pro Stunde aufgenommen und durch dieselben eine Kurve gelegt, die die y-Achse (Gleichgewicht) bei $k = 6·9$ schneidet. Man erkennt, daß die k-Werte keine größere Abweichung als 5% von dieser Linie aufweisen.

Bei der sauerstoffreicheren Mischung liegen die k-Werte fast durchaus wenig höher als in Luft, demnach sind die im hälftigen Gemisch gefundenen Konzentrationen etwas geringer als die aus den Luftwerten berechneten. Geringe Verschiebungen im Abkühlungsgebiet, bedingt durch die größere Zersetzungsgeschwindigkeit des Stickoxyds höherer Konzentration, würden bei Annahme eines bimolekularen Verlaufes der Reaktion schon allein die Differenzen erklären.[1]

Somit glauben wir die Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes auch bei der Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen experimentell bewiesen zu haben und fügen noch eine kleine Versuchsreihe an, die zeigt, daß Druckänderungen das Stickoxydgleichgewicht im Flammenbogen nicht beeinflussen, wie dies das Massenwirkungsgesetz für die untersuchte, ohne Änderung der Molekülzahl verlaufende Reaktion verlangt.

---

[1] Der Beweis des bimolekularen Verlaufes wurde von Jellinek (Zeitschr. für anorg. Chemie, *49*, 275) in dem Intervall von 650 bis 1750° erbracht.

Tabelle 13.

Versuchsnummer	Strömungsgeschwindigkeit	Druck vor dem Ofen in Millimeter Hg	Watt	C_{NO}	$\frac{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}{NO}$
70	26·2	761	179·3	5·38	7·34
71	28·1	811	180·8	5·30	7·50
72	28·6	847	180·0	5·30	7·50

3. Ausbeute. Die in Tabelle 11 niedergelegten Zahlen gestatten ferner, die Ausbeuten an Stickoxyd, respektive Salpetersäure für die Einheit der aufgewendeten elektrischen Energie zu berechnen. So ergibt sich z. B.:

Tabelle 14.

Versuchsnummer	Ausgangsmischung	Strömungsgeschwindigkeit	Watt	C_{NO}	Ausbeute in Kilogramm HNO_3 pro Kilowattjahr
57	Luft	104	175	2·90	447
60	»	92	201	3·93	445
69	51% O_2	113	223	4·41	548

Diese Zahlen stellen nicht das Ausbeutemaximum dar. Letzteres wird vielmehr erst bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten erreicht werden. Es soll nur gezeigt werden, daß die Ausbeute bei Anwendung einer sauerstoffreicheren Ausgangsmischung als Luft in der Tat dem Massenwirkungsgesetz entsprechend erhöht wird.

4. Die Temperatur unseres Hochspannungsbogens läßt sich auf thermodynamischer Grundlage berechnen unter der nunmehr berechtigten Voraussetzung, daß die im Flammenbogen ermittelten Stickoxydkonzentrationen dem thermischen Gleichgewicht entsprechen. Mit Hilfe der beiden Wärmesätze findet Nernst[1] für das Stickoxydgleichgewicht:

---

1 Zeitschr. für anorg. Chemie, *49*, 213 (1906).

$$\log k = -\frac{4726}{T} + 0\cdot5442$$

worin $k = \frac{(NO)}{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}$.

Wir fanden $\frac{1}{k}$ für das Gleichgewicht in Luft zu 6·77, im hälftigen Gemisch zu 7·08.

Mit dem Mittelwert $\frac{1}{k} = 6\cdot9$ berechnet sich die Temperatur unseres Flammenbogens zu 3416° T oder zu rund 3150° C.

Aus der Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes bei gleichem Energieaufwand und bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit kann weiterhin geschlossen werden, daß die Temperatur der Hochspannungsflamme bei Einhaltung dieser Bedingungen in beiden Gasmischungen dieselbe ist. Dies kann aber nur dann statthaben, wenn die spezifischen Wärmen von Sauerstoff und Stickstoff auch noch bei diesen Temperaturen nicht allzusehr voneinander abweichen.

2. Versuche am 7 cm-Bogen.

(Ausgangsmischung Luft.)

Die Erhöhung der Bogenlänge von 5 *cm* auf 7 *cm* brachte es mit sich, daß zur Erhaltung eines gut ausgebildeten Flammenbogens der Energieverbrauch desselben auf mindestens 240 Watt gesteigert werden mußte. Unterhalb dieses Wattverbrauches war der Bogen sehr schmal und instabil.

Eine Versuchsreihe an einem 5 *cm*-Bogen mit 240 Watt durchzuführen, mußte bald wegen zu starker Verstäubung der Elektroden, die die Glasinnenwand mit einem leitenden Platinspiegel bedeckten, aufgegeben werden. Aus diesen Gründen mußte auf einen Vergleich des 5 *cm*- und 7 *cm*-Bogens verzichtet werden.

Die Ergebnisse der am 7 *cm*-Bogen durchgeführten Versuchsreihe sind in Tabelle 15 (siehe p. 346) zusammengefaßt.

Tabelle 15.

Versuchsnummer	Strömungsgeschwindigkeit in Liter pro Stunde	Temperatur der Gasuhr	Druck vor dem Ofen in Millimeter Hg	Strom in Ampere	Spannung in Volt	Watt	Gasmenge in Liter (0°, 760 *mm* Hg)	Liter NO (0°, 760 *mm* Hg)	C_{NO}	$\frac{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}{(NO)}$
73	21·4	17·0	729	0·115	2700	240*	21·4	1·0684	5·00	7·53
74	21·7	17·5	719	0·1145	2700	240	21·7	1·1763	5·42	6·90
75	48·9	16·5	716	0·109	2700	237	36·7	1·7900	4·88	7·71
76	83·1	16·5	734	0·111	2800	240	83·1	3·3128	4·00	9·54
77	83·1	18·0	702	0·109	2900	243*	62·3	2·4960	4·00	9·54
78	105·9	17·0	721	0·107	3050	240	79·4	2·9763	3·75	10·22
79	108·4	16·5	716	0·110	3000	240	81·4	3·0044	3·69	10·30

Durch graphische Extrapolation auf die Strömungsgeschwindigkeit Null läßt sich auch hier, ebenso wie beim 5 *cm*-Bogen, die Gleichgewichtskonzentration ermitteln. Dieselbe wird etwas unsicher durch die Nichtübereinstimmung der beiden ersten Versuche, die um 8% differieren. Unter Zugrundelegung des Mittelwertes ergibt sich für das Gleichgewicht eine Stickoxydkonzentration von 5·5%, im Falle alleiniger Berücksichtigung des höheren Wertes eine solche von 5·8%.

Die Erhöhung der Bogenlänge von 5 *cm* auf 7 *cm* ruft demnach trotz Erhöhung des Energieverbrauches keine Steigerung der Gleichgewichtskonzentration hervor. Die in unserer I. Mitteilung ausgesprochene Ansicht, daß eine Erhöhung der Stickoxydkonzentration mit wachsender Bogenlänge als wahrscheinlich bezeichnet werden muß, ist somit irrig.[1]

Weiters würde folgen — bei Beachtung der in Tabelle 11, Versuchsreihe I und II, gefundenen Zahlen —, daß innerhalb eines Wattverbrauches von 175 bis 240 Watt die Temperatur des Flammenbogens in ruhender Luft von Wattverbrauch und Bogenlänge unabhängig ist.

Es wäre sehr wünschenswert gewesen, einen Vergleich der Ausbeuten an 5 und 7 *cm* langen Bogen bei gleichem Wattverbrauch durchzuführen, um die Überlegenheit langer Bogen kürzeren gegenüber, die wir früher bei den Versuchsreihen am 3 und 5 *cm* langen Bogen konstatiert hatten, zu überprüfen und auszudehnen.

Aus den am Anfang dieses Abschnittes dargelegten technischen Gründen mußte hierauf verzichtet werden. Wir vermerken bloß, daß bei Versuch 79 infolge zu niederer Strömungsgeschwindigkeit gegenüber dem höheren Wattverbrauch das Ausbringen an Salpetersäure pro Kilowattjahr nur 405 *kg* beträgt.

---

[1] L. c., 1653. Wir hatten daselbst einen 3 *cm* und 5 *cm* langen Bogen bei der Strömungsgeschwindigkeit von 30 *l* verglichen und fanden mit ersterem bei 108 Watt 4·99% NO und bei 203 Watt 5·0% NO, mit letzterem bei 163 Watt 5·61% NO. Aus Fig. 5 dieser Mitteilung ergibt sich aber ohneweiters, daß der letztgenannte Wert um zirka 12% zu hoch liegt.

3. Ausbeutebestimmung in Luft am 5 cm-Bogen.

Bei Verwendung der gekühlten Kapillare von zirka 1 *mm* Durchmesser, die wir bei allen bisher beschriebenen Versuchen benützten, konnten wir mit unserer Wasserstrahlpumpe nicht zu höheren Strömungsgeschwindigkeiten wie 108 *l* pro Stunde gelangen. Wir haben daher, um den Abfall der Stickoxydkonzentration und den Anstieg der Ausbeute mit steigender Geschwindigkeit weiter verfolgen zu können, eine Versuchsreihe mit einem Absaugerohr von 2 *mm* innerem Durchmesser durchgeführt. Dieses Rohr war 16 *cm* lang, gleichfalls aus Platin und mit derselben Kühlvorrichtung versehen wie die kleinere Kapillare. Um an Platin zu sparen, wurden die äußeren Röhren aus Messing gefertigt. Wir haben mit dieser Vorrichtung bis 168 *l* pro Stunde aus dem Bogen abgesaugt und der Analyse zugeführt.

Die Ergebnisse der gewonnenen Versuchsreihe sind in Tabelle 16 niedergelegt (siehe p. 349).

In der letzten Kolumne dieser Tabelle sind die Ausbeuten verzeichnet, welche den respektiven Strömungsgeschwindigkeiten entsprechen.

Es fällt zunächst auf, daß diese Ausbeuten gegenüber dem in unserer ersten Mitteilung angegebenen Werte von rund 545 *kg* HNO_3 etwas zurückbleiben. Doch stimmen sie mit dem daselbst angeführten unteren Grenzwert von 518 *kg* HNO_3 gut überein. Die Anwendung eines breiteren Absaugrohres bringt es mit sich, daß das Gas nicht nur der heißesten Zone, sondern zum Teil auch der umliegenden kälteren Zone mit entnommen wird, so daß die erhaltenen Stickoxydkonzentrationen sich niederer ergeben dürften, als wenn sie nur dem heißesten Teile allein entzogen würden. Wir halten es für wenig wahrscheinlich, daß infolge des größeren Querschnittes des Absaugrohres geringere Abschreckung und somit größere Zersetzung an der Austrittstelle des Bogens auftritt, da an dieser Stelle jedenfalls sehr starke Gaswirbel auftreten. Für diese Auffassung spricht Versuch 80, indem bei diesem die Stickoxydkonzentration sogar etwas höher liegt als bei Anwendung des engeren Absaugrohres. Jedenfalls kann gefolgert werden, daß zumindest ein Ausbringen von 500 *kg* Salpetersäure pro Kilowattjahr bei einer

Tabelle 16.

Versuchsnummer	Strömungsgeschwindigkeit in Liter pro Stunde	Temperatur der Gasuhr	Druck vor dem Ofen in Millimeter Hg	Strom in Ampere	Spannung in Volt	Watt	Gasmenge in Liter (0°, 760 *mm* Hg)	Liter NO (0°, 760 *mm* Hg)	C_{NO}	$\frac{(N_2)^{1/2}(O_2)^{1/2}}{(NO)}$	Ausbeute in Kilogramm HNO_3 pro Kilowattjahr
80	46·7	19·0	734	0·1125	zirka 2050	175	58·4	2·8380	4·86	7·74	314·9
81	106·4	16·8	738	0·096	» 2250	171	70·9	2·1753	3·06	12·67	462·3
82	113·1	16·5	733	0·102	» 2200	173*	75·4	2·2958	3·05	12·67	484·1
83	146·2	17·5	730	0·0915	» 2550	179	243·6	6·2050	2·55	15·32	505·6
84	167·8	18·5	743	0·103	» 2350	186*	167·8	4·2773	2·33	16·83	510·2

um 3 Volumprozent liegenden Stickoxydkonzentration erzielt werden kann.

Die durch die Versuche dieser Mitteilung gewonnenen Stickoxydkonzentrationen gehören, ebenso wie die in unserer ersten Mitteilung erwähnten, einer Größenordnung an, die sehr wahrscheinlich als nur durch die thermische Wirkung des Stromes erzeugt aufgefaßt werden kann.

In einer jüngst erschienenen und sehr beachtenswerten Arbeit haben Haber und König[1] auf Grund ihrer bei stark vermindertem Drucke gewonnenen hohen Stickoxydkonzentrationen,[2] die, als nur thermisch entstanden aufgefaßt, zu Bogentemperaturen führen würden, deren Höhe aus gewissen Gründen unwahrscheinlich ist, geschlossen, daß die Stickoxydbildung primär auf Elektronenstoß zurückzuführen ist. Entsprechend der — vom Gasdruck abhängigen — Mitteltemperatur des Bogens nimmt dieselbe bei niederen Drucken Werte an, bei welchen die Zerfallsgeschwindigkeit des Stickoxyds so geringfügig ist, daß das durch Elektronenstoß gebildete Stickoxyd seinen thermischen Gleichgewichtszustand nicht erreichen kann. Bei höheren Drucken und somit höherer Mitteltemperatur des Bogens, bei der das thermische Gleichgewicht sehr beweglich wird, stellt sich alsbald das letztere ein. Unsere bei Atmosphärendruck gewonnenen Ergebnisse stehen somit mit der Haber-König'schen Auffassung in vollem Einklange.

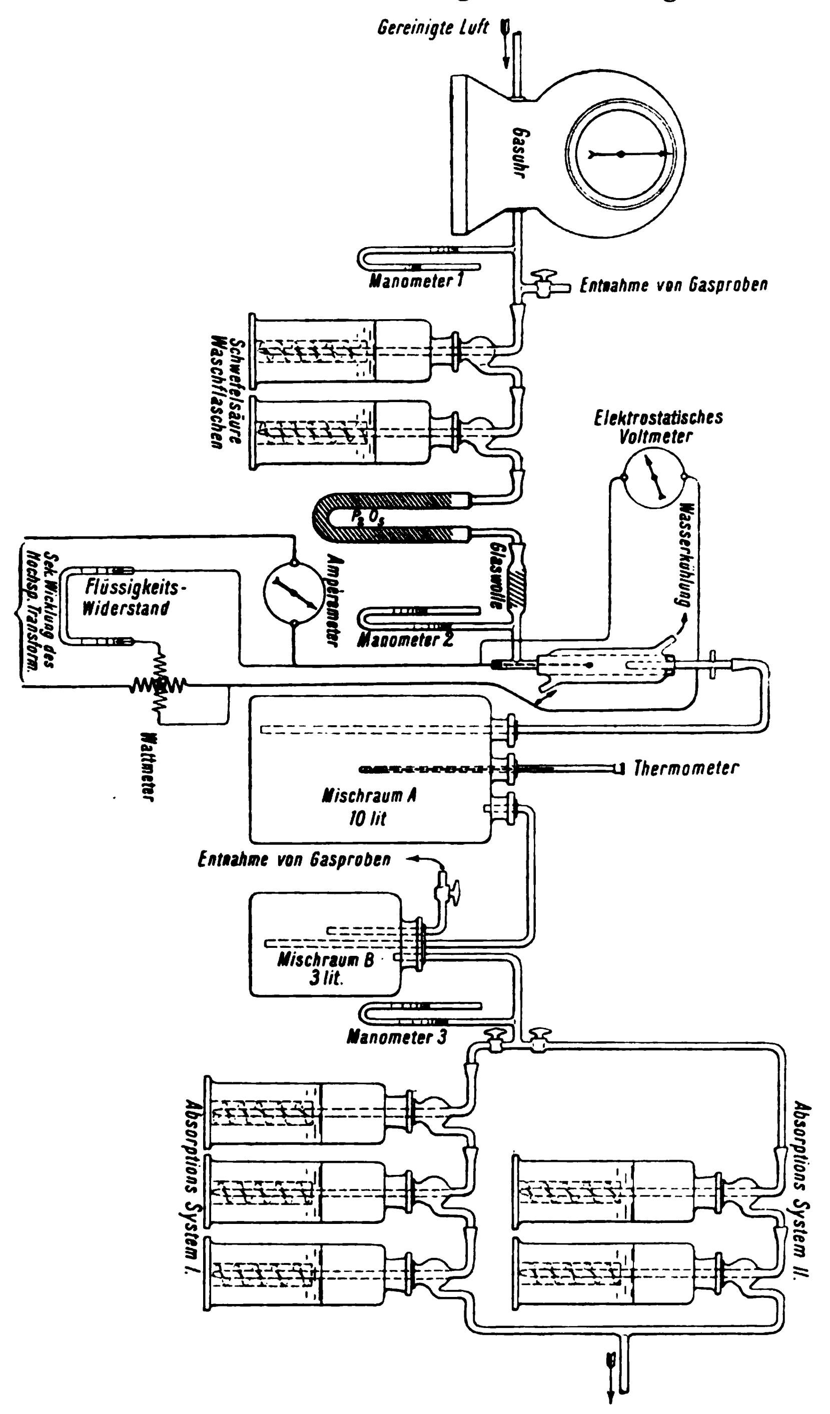
Eine Zusammenfassung der hier gewonnenen Resultate findet sich am Schlusse der nachfolgenden IV. Mitteilung.

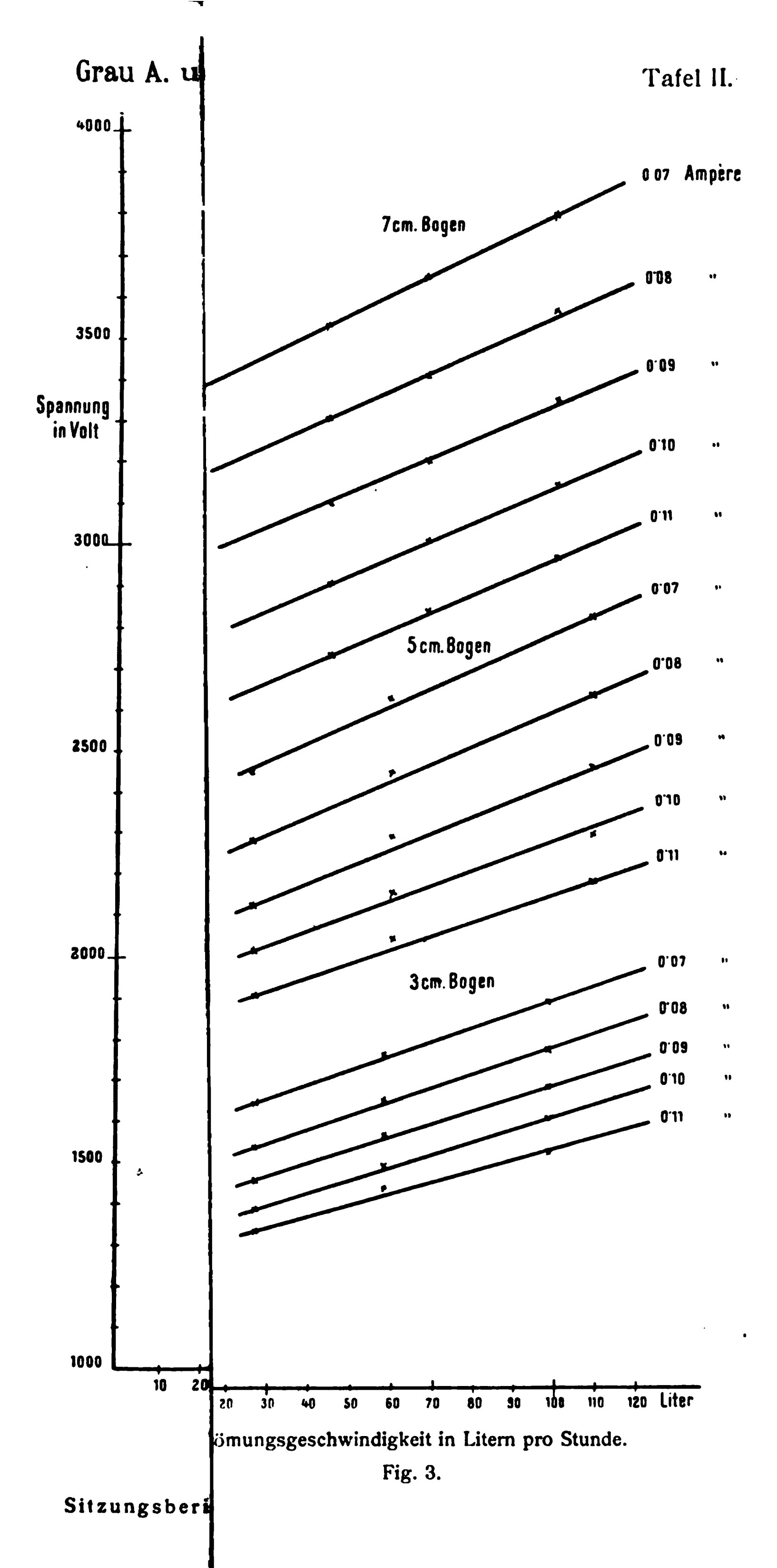
---

[1] Zeitschrift für Elektrochemie, November 1907.

[2] 9·8 Volumprozent NO in Luft bei etwa 100 *mm* Druck.

Inhaltsübersicht.


Gereinigte Luft
Gasuhr
Manometer 1
Entnahme von Gasproben
Schwefelsäure Waschflaschen
Elektrostatisches Voltmeter
P_2O_5
Glaswolle
Wasserkühlung
Ampèremeter
Sek. Wicklung des Hochsp. Transform.
Flüssigkeits-Widerstand
Manometer 2
Wattmeter
Thermometer
Mischraum A 10 lit
Entnahme von Gasproben
Mischraum B 3 lit.
Manometer 3
Absorptions System I.
Absorptions System II.



ömungsgeschwindigkeit in Litern pro Stunde.

Fig. 3.

Experimentaluntersuchung über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen.

(III. Teil.)

Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Sauerstoff

von

A. Grau und F. Russ.

(Mit Subvention aus der Erbschaft Treitl.)

(Mit 2 Doppeltafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

In unserer ersten Mitteilung über die Luftverbrennung konnten wir zeigen, daß — bei gleichen Stromstärken — der in sauerstoffreicheren Gasmischungen als Luft brennende Flammenbogen höhere Spannungs- und Energiewerte aufweist als in Luft.[1] Anläßlich der Prüfung der Gültigkeit des Massenwirkungsgesetzes bei der Stickoxydbildung im Flammenbogen[2] haben wir die Stromspannungskurve für Luft einerseits und andrerseits für ein Gasgemisch von der Zusammensetzung $50\cdot5\,\%\ O_2$, $49\cdot5\,\%\ N_2$ festgelegt und bereits daselbst angedeutet, daß bei gleicher Stromstärke dem in Stickstoff brennenden Flammenbogen die geringsten und dem in Sauerstoff brennenden die höchsten Spannungs- und Energiewerte zukommen. In dieser Mitteilung berichten wir nun über Messungen, welche an in Sauerstoff brennenden Bogen durchgeführt wurden. Es handelte sich zunächst — wie bei unseren früheren an Luft ausgeführten

---

1 Diese Sitzungsberichte, CXV, Abt. II a, 1613 (1906).

2 Diese Sitzungsberichte, CXVII, Abt. II a, 14 (1908).

Untersuchungen — um die Festlegung der Strom- und Spannungswerte in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, wobei der Einfluß des Druckes und der Strömungsgeschwindigkeit zu berücksichtigen war. Gleichzeitig wurden die Energiewerte ermittelt, welche zur Bestimmung der Größe $C = \frac{\text{Watt}}{\text{Volt.Ampere}}$ dienten. Die Messungen wurden wie bei den früheren Versuchsreihen in Luft an stabilen Bogen von 3, 5 und 7 *cm* Länge durchgeführt. Die Versuchsanordnung und die Meßeinrichtung war die gleiche, welche wir in unserer zweiten Mitteilung benützt haben.[1] Für die Durchführung der Versuche diente uns käuflicher Bombensauerstoff von der Zusammensetzung 96·4% O_2 und 3·6% N_2.

Der im Sauerstoff brennende Lichtbogen stellt sich als bläulich leuchtende und breite Flamme dar, an welcher zwei Zonen noch zu unterscheiden sind. Die äußere Zone wies einen schwach rotbraun gefärbten Saum, ähnlich wie die Luftflamme auf. Diese Umsäumung, welche in reinem Sauerstoffe nicht beobachtet wurde,[2] ist jedenfalls auf den N_2-Gehalt des Gases und den dadurch bedingten Stickoxydgehalt der Flamme zurückzuführen.

Die nachfolgenden Zahlen stellen Mittelwerte aus mehreren Ablesungen dar. Die Strömungsgeschwindigkeit und der Druck sind auf 0° C. und 760 *mm* Hg reduziert angegeben.

---

[1] L. c., CXVII, 2 (1908).

[2] Vergl. auch Brode, »Über die Oxydation des Stickstoffes in der Hochspannungsflamme. Halle a. d. S., 1905, p. 57.

I. Abhängigkeit der Bogenspannung von der Strömungsgeschwindigkeit bei konstantem Drucke.

1.) 5 *cm*-Bogen.

Tabelle 1.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·061	3700	225·7	200·25			0·88
0·072	3500	252·0	225·00			0·89
0·079	3400	268·6	242·5	28·6	726·7	0·90
0·089	3275	291·48	262·5			0·90
0·102	3125	318·75	281·25			0·88
0·117	2975	348·07	300·0			0·86
0·061	3800	231·8	216			0·90
0·071	3675	260·93	232·5			0·89
0·080	3550	284·00	253·5	88	726·7	0·89
0·090	3400	306·00	277·5			0·90
0·102	3275	334·05	300·0			0·90
0·1145	3150	360·68	318·75			0·88
0·0635	3800	241·30	219			0·90
0·072	3700	266·40	240			0·90
0·080	3610	288·8	258·75	114	723·9	0·89
0·0905	3500	316·75	282·0			0·89
0·1025	3375	345·94	307·5			0·89
0·1145	3250	372·13	331·5			0·89

2.) 7 *cm*-Bogen.

Tabelle 2.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·070	4850	339·5	300			0·88
0·080	4650	372·0	337·5			0·91
0·090	4500	405·0	367·5	**55·1**	773	0·91
0·100	4300	430·0	397·5			0·90
0·112	4150	464·8	416·25			0·90
0·070	5000	350·0	315			0·90
0·080	4750	380·0	348·75			0·92
0·090	4600	414·0	375	**79·1**	776	0·91
0·100	4400	440·0	405			0·92
0·110	4250	467·5	423·75			0·91
0·070	—	—	—			—
0·080	4900	392·0	356·25			0·91
0·090	4650	418·5	382·5	**99·8**	773	0·91
0·100	4500	450·0	408·75			0·91
0·110	4350	478·5	431·25			0·90

Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Fig. 1 graphisch dargestellt, in der die Stromstärken als Abszissen, die Spannungen als Ordinaten eingetragen wurden.

Ermittelt man aus den Kurven der Fig. 1 für konstante Stromstärken die den verschiedenen Geschwindigkeiten und Bogenlängen zugehörigen Spannungen, trägt dieselben als Ordinaten und die Strömungsgeschwindigkeit als Abszissen in

ein ebensolches Koordinatensystem ein, so ergibt sich das Bild der Fig. 2, welches den Zusammenhang zwischen Bogenspannung und Strömungsgeschwindigkeit für konstante Stromstärken als lineare Beziehung darstellt.

II. Abhängigkeit der Bogenspannung vom Drucke bei konstanter Strömungsgeschwindigkeit.

1.) 3 *cm*-Bogen.

Tabelle 3.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·061	2500	152·5	140			0·92
0·070	2400	168·0	157·5			0·93
0·0805	2300	185·15	168·75	59·3	688·4	0·91
0·0900	2200	198·0	187·5			0·94
0·101	2150	217·15	206·25			0·95
0·109	2100	228·9	217·5			0·95
0·060	2500	150·0	135			0·90
0·072	2400	172·8	155			0·89
0·077	2350	180·95	161·2	55·6	708·8	0·89
0·089	2250	200·25	186			0·93
0·103	2150	221·5	204			0·92
0·1145	2100	240·5	220			0·91
0·0615	2525	155·3	146·25			0·94
0·0690	2475	170·78	159·0			0·93
0·0810	2350	190·35	180·0	61·0	786·1	0·94
0·0895	2300	205·85	192·0			0·93
0·1015	2225	225·84	212·0			0·94
0·109	2200	239·8	223·0			0·93

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·063	2550	160·65	150	62·4	**764·5**	0·93
0·070	2500	175·0	161·25			0·92
0·080	2400	192·0	178			0·93
0·091	2325	211·6	197·3			0·93
0·101	2250	227·25	210			0·92
0·1095	2200	240·9	222			0·92

2.) 5 *cm*-Bogen.

Tabelle 4.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·061	3700	225·7	191·25	55·3	**689·0**	0·84
0·071	3560	252·76	213·75			0·84
0·082	3425	280·85	241·5			0·86
0·089	3320	295·48	254·0			0·86
0·1015	3200	324·80	280·0			0·86
0·112	3090	346·08	296·0			0·85
0·0605	3810	230·50	202·5	58·1	**736·0**	0·87
0·067	3725	249·58	217·5			0·87
0·079	3575	282·43	242·5			0·86
0·092	3375	310·50	270·0			0·87
0·101	3250	328·25	285·0			0·87
0·106	3200	339·20	296·25			0·87
0·060	3920	235·20	204·0	60·8	**788·1**	0·87
0·071	3775	268·03	228·75			0·86
0·080	3650	292·00	248·25			0·85
0·091	3450	313·95	270·0			0·86
0·1015	3325	337·49	289·5			0·86
0·112	3200	358·40	304·5			0·855

3.) 7 *cm*-Bogen.

Tabelle 5.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·070	4780	334·6	303·75			0·91
0·080	4600	368·0	337·5			0·92
0·090	4400	396·0	363·75	52	726	0·92
0·100	4270	427·0	386·25			0·90
0·110	4150	456·0	412·5			0·90
0·070	4850	339·5	300			0·90
0·080	4650	372·0	337·5			0·91
0·090	4500	405·0	367·5	55·1	773	0·91
0·100	4300	430·0	397·5			0·90
0·112	4150	464·8	416·25			0·90
0·070	4920	344·4	314·5			0·91
0·080	4720	377·6	340·75			0·90
0·090	4550	409·5	374·5	51	806	0·91
0·100	4380	438·0	397·0			0·91
0·110	4275	470·25	415·75			0·88

Die Messungen zeigen, daß mit wachsendem Druck die Spannungen zunehmen und daß für konstante Stromstärken die Beziehung zwischen Spannung und Druck linearer Natur ist. (Vergl. Fig. 3 und 4.)

Die Größe $C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$ wurde bei den verschiedenen Bogenlängen berechnet und ist in den Tabellen enthalten. Infolge der bereits an anderer Stelle niedergelegten Bedenken[1]

[1] Diese Sitzungsberichte, CXVII, 4 (1908).

darf den absoluten Zahlwerten keine allzu große Bedeutung beigelegt werden.

Um einen Anhaltspunkt über das Verhalten von C bei verschiedener Bogenlänge zu gewinnen, wird man sich nur auf die Wattmessung beschränken, welche die im Bogen verbrauchte Energie $A = EJ \cos \varphi$ angibt, wenn E die Bogenspannung, J die Stromstärke und φ die Phasenverschiebung bedeuten. Bei konstanter Stromstärke ist die Beziehung der Spannung zur Bogenlänge durch eine Gerade dargestellt. Wäre nun $\cos \varphi$ konstant, so müßte auch die Beziehung der im Bogen verbrauchten Energie zur Bogenlänge durch eine Gerade versinnbildlicht werden.

Wenn wir nun für z. B. drei konstante Stromstärken 0·07, 0·09, 0·11 Ampere die bei den Bogenlängen 3 *cm*, 5 *cm* und 7 *cm* aufgewendete Energie ermitteln, so ergeben sich bei gleichem Druck (736 *mm*) und gleicher Geschwindigkeit (61 *l*) folgende Werte:

Tabelle 6.

3 *cm*-Bogen		5 *cm*-Bogen		7 *cm*-Bogen	
Ampere	Watt	Ampere	Watt	Ampere	Watt
0·07	159	0·07	225	0·07	307
0·09	192	0·09	265	0·09	368
0·11	223	0·11	305	0·11	417

Trägt man die Bogenlängen als Abszissen und die Watt als Ordinaten ein, so erhält man drei sehr schwach nach aufwärts gekrümmte Kurven, welche nur um weniges von einer Geraden abweichen. Diese Differenzen dürften durch Fehler in der Wattbestimmung bedingt sein. Es kann somit die Größe C als konstant betrachtet werden.

Ein Vergleich der am Sauerstoff gefundenen Meßresultate mit den an Luft gewonnenen liefert folgende Ergebnisse:

1. Bei gleicher Stromstärke und unter auch sonst gleichen Bedingungen kommen dem in Sauerstoff brennenden Flammenbogen wesentlich höhere Spannungswerte als dem in Luft brennenden zu.

2. Die Bogenspannung ist unter sonst gleichen Bedingungen in beiden Gasen eine lineare Funktion der Strömungsgeschwindigkeit.

3. Der Wert $C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$ ist in Sauerstoff größer als in Luft.

4. Die Abhängigkeit der Spannung vom Druck ist in beiden Gasen unter sonst gleichen Verhältnissen verschieden. Während in Luft innerhalb der angewendeten geringen Druckdifferenzen eine merkliche Änderung der Spannung nicht nachweisbar war, konnte in Sauerstoff innerhalb nahe derselben Drucke ein beträchtliches Ansteigen der Spannung mit zunehmendem Drucke konstatiert werden, wie sich aus folgender Zusammenstellung ergibt.

	Luft 5 *cm*			Sauerstoff 5 *cm*		
Strom in Ampere	Spannung in Volt bei		Differenz für 100 *mm* Druckzunahme	Spannung in Volt bei		Differenz für 100 *mm* Druckzunahme
	700 *mm*	795 *mm*		689 *mm*	783 *mm*	
0·07	2725	2700	—21 Volt	3560	3775	+228 Volt
0·09	2340	2320	—21 »	3320	3575	+271 »
0·11	2100	2100	0	3090	3200	+117 »

Die Änderung der Spannungswerte mit dem Druck in Sauerstoff dürfte ihre Erklärung wahrscheinlich in der Verschiedenheit der chemischen Reaktionen finden, welche an die hohen Temperaturen des Flammenbogens in beiden Gasen geknüpft sind.

Daß in reinem Sauerstoff jedenfalls eine chemische Reaktion vor sich geht, ergibt schon das äußere Bild der Entladungsform, welche sich als Flamme darstellt, während z. B. in reinem Stickstoff und reinem Wasserstoff eine Flammen-

bildung nicht wahrnehmbar ist und wie Brode gezeigt hat, die Flammenbildung stets auf eine chemische Reaktion schließen läßt.

Während in Luft wahrscheinlich nur Stickoxyd entsteht, bildet sich in Sauerstoff Ozon.[1]

Indem die thermische Ozonbildung durch Druck begünstigt wird, die Stickoxydbildung jedoch nicht, kann die durch Druckerhöhung bedingte Zunahme der Spannung in Sauerstoff auf eine gesteigerte Ozonbildung zurückgeführt werden.

Eine Zusammenfassung der hier gewonnenen Resultate findet sich am Schlusse der nachfolgenden IV. Mitteilung.

---

[1] Vergl. Brode, l. c., p. 59.

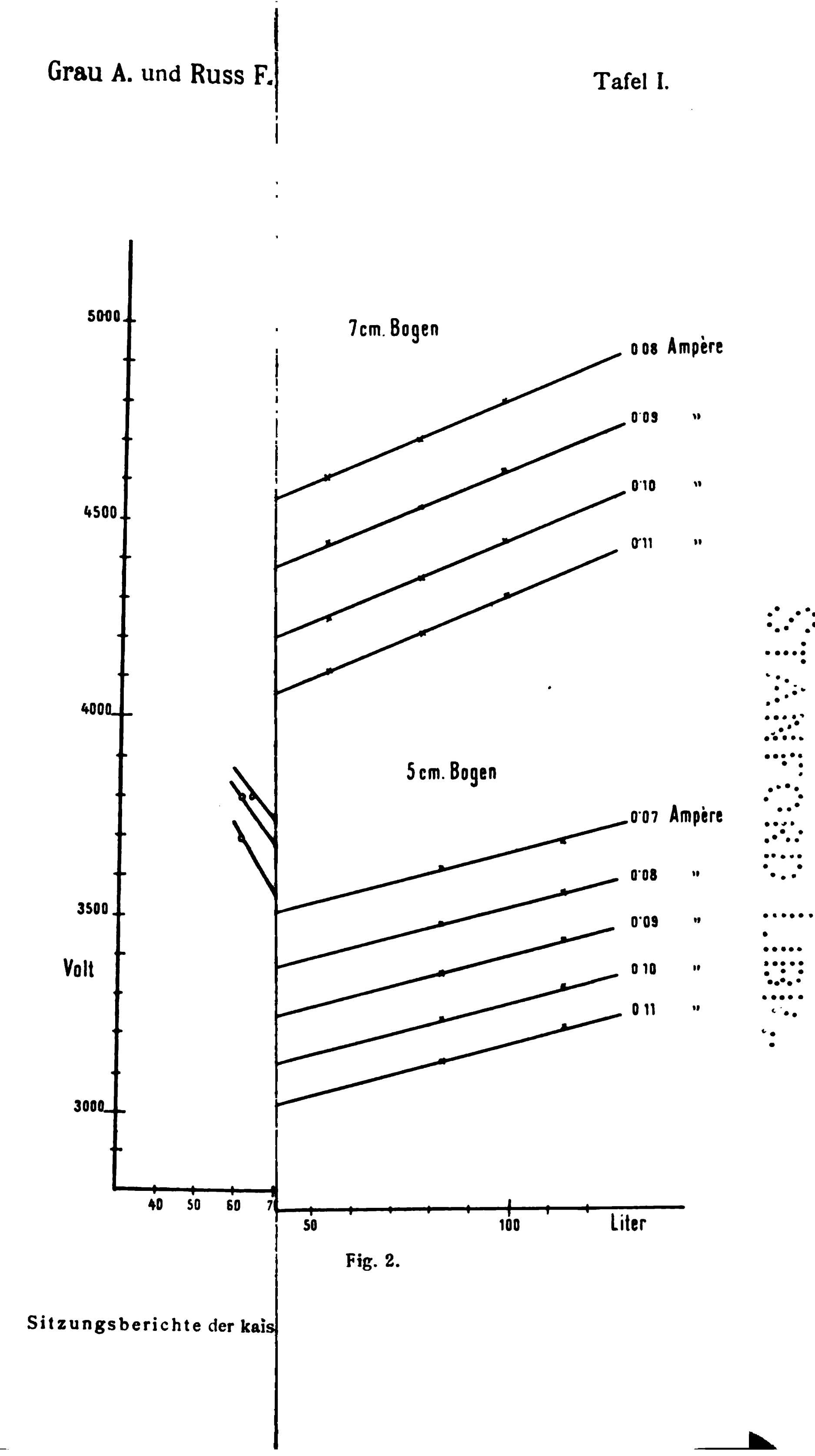
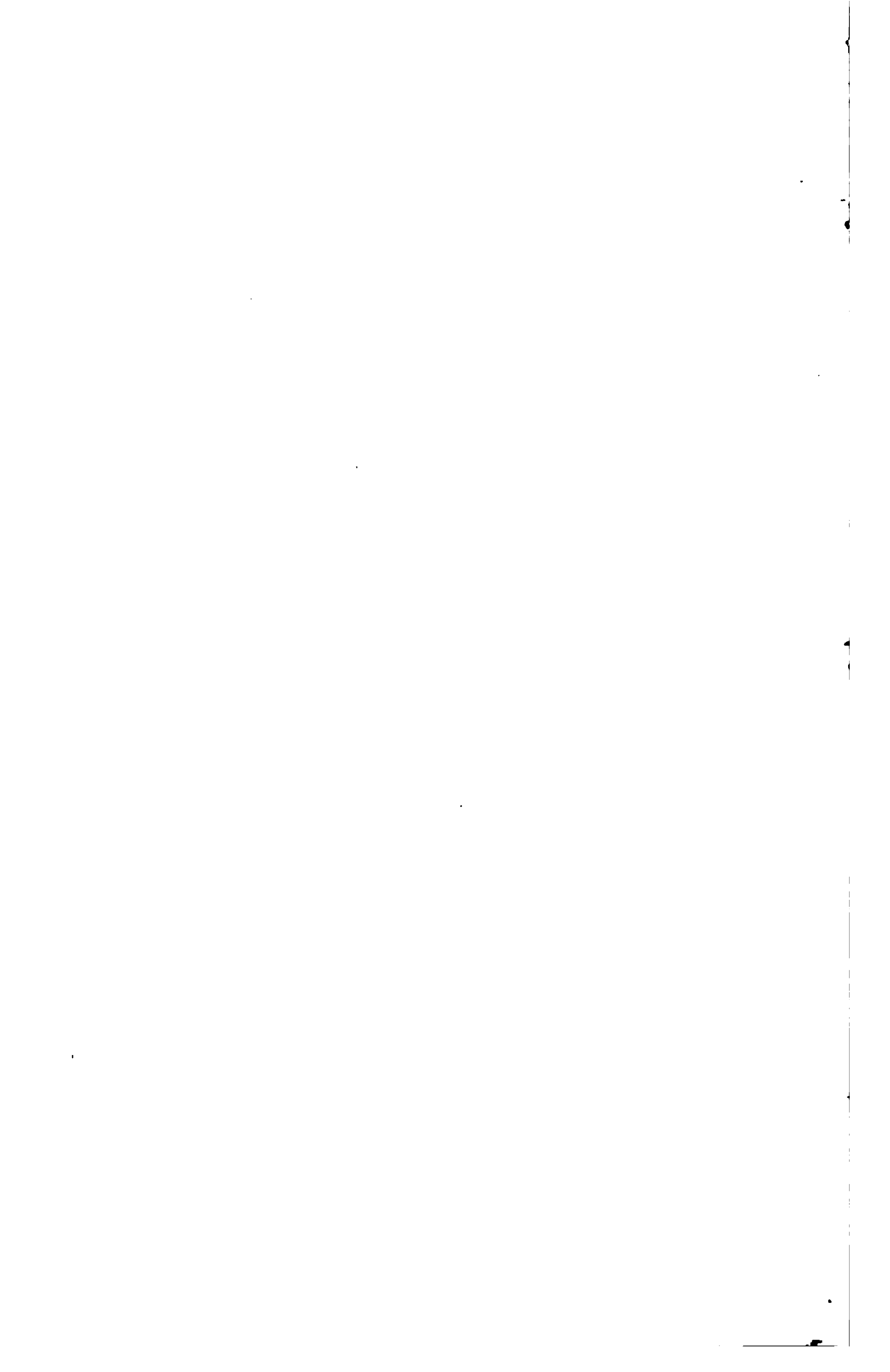

7cm. Bogen
0·08 Ampère
0·09 "
0·10 "
0·11 "
5cm. Bogen
0·07 Ampère
0·08 "
0·09 "
0·10 "
0·11 "
5000
4500
4000
3500
3000
Volt
40
50
60
70
50
100
Liter

Fig. 2.



Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen.

(IV. Teil.)

Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Stickstoff

von

A. Grau und F. Russ.

(Mit Subvention aus der Erbschaft Treitl.)

(Mit 1 Doppeltafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1908.)

Im Anschluß an Messungen, welche wir an dem in Sauerstoff brennenden Flammenbogen durchgeführt hatten,[1] haben wir analoge Bestimmungen an in Stickstoff gebildeten stabilen Flammenbogen angestellt.

Wir benützten käuflichen Stickstoff (nach Linde) von nachfolgender Zusammensetzung:

99·8% Stickstoff + Edelgase,
0·2% Sauerstoff.

Der in diesem Gasgemische gebildete elektrische Flammenbogen zeigt ein zirka 1 *mm* breites, die Elektroden verbindendes, purpurgefärbtes Band, welches von einer grünlich, schwachleuchtenden, breiteren Zone umgeben ist. In reinem Stickstoff

---

[1] A. Grau und F. Russ, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. III. Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Sauerstoff.

besteht nach Brode[1] der Bogen nur aus einem schmalen, blaugrün leuchtenden Bande.

Die Versuchsanordnung war die gleiche, wie in unserer II. und III. Mitteilung.

Strom, Spannung, Energie, Druck und Gasgeschwindigkeit wurden direkt gemessen. Gasdruck und Strömungsgeschwindigkeit sind in den nachfolgenden Tabellen auf 0° C. und 760 *mm* Barometerstand reduziert angegeben.

Die Messungen wurden wieder an 3 *cm*, 5 *cm* und 7 *cm* langen Bogen durchgeführt. Die Resultate führen wir in derselben Reihenfolge an wie bei Luft und Sauerstoff.

I. Abhängigkeit der Bogenspannung von der Strömungsgeschwindigkeit bei konstantem Druck.

1.) 3 *cm*-Bogen.

Tabelle 1.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·061	1875	114·38	96·0	59·8	748	0·84
0·070	1775	124·25	105·0			0·845
0·080	1650	132·00	112·5			0·84
0·090	1580	141·75	118·5			0·83
0·100	1500	150·00	124·5			0·83
0·110	1430	157·30	131·25			0·83
0·070	1880	131·60	112·5	115·4	750	0·85
0·080	1800	144·00	124·5			0·87
0·090	1700	153·00	132·0			0·86
0·100	1610	161·00	139·5			0·87
0·110	1540	170·94	148·5			0·87

[1] Über die Oxydation des Stickstoffes in der Hochspannungsflamme, p. 56, Wilhelm Knapp, Halle a. S. 1905.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·070	1730	121·1	99·75			0·82
0·080	1610	128·8	105·0			0·82
0·090	1500	135·0	112·5	**29·7**	743	0·83
0·100	1425	142·5	117·75			0·83
0·110	1375	151·25	122·25			0·80

2.) 5 *cm*-Bogen.

Tabelle 2.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·060	2700	162·00	123·75			0·76
0·070	2450	171·5	135·0			0·79
0·080	2250	180·0	144·38	**22·4**	766	0·80
0·090	2130	191·7	153·75			0·80
0·0995	2025	201·49	161·25			0·80
0·110	1910	210·1	167·25			0·80
0·061	2850	173·85	130·5			0·75
0·070	2625	183·75	140·6			0·77
0·080	2410	192·8	150·0	**62·0**	766	0·77
0·090	2250	202·5	159·0			0·79
0·100	2140	214·0	165·0			0·77
0·110	2025	222·75	176·25			0·79
0·060	3050	183·0	135·0			0·74
0·070	2800	196·0	146·25			0·75
0·080	2500	208·0	156·0	**100·3**	769	0·75
0·090	2400	216·0	165·0			0·76
0·1005	2250	226·13	174·0			0·77
0·110	2150	236·5	182·25			0·77

3.) 7 *cm*-Bogen.

Tabelle 3.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·070	3600	252·0	189·0			0·75
0·080	3300	264·0	198·75			0·75
0·090	3120	280·8	210·75	**55·7**	763	0·75
0·100	2950	295·0	221·25			0·75
0·110	2775	305·25	231·0			0·75
0·080	3500	280·0	207·0			0·74
0·089	3260	290·14	221·25	**80·7**	757	0·76
0·100	3050	305·0	231·0			0·75
0·110	2900	319·0	238·25			0·74
0·080	3630	290·4	215·25			0·74
0·0895	3400	304·3	226·5	**114·5**	761	0·74
0·100	3200	320·0	240·0			0·75
0·110	3020	332·2	248·25			0·75

Diese Ergebnisse sind in Fig. 1 graphisch dargestellt.

Entnimmt man aus den Kurven der Fig. 1 für konstante Stromstärken die den verschiedenen Geschwindigkeiten und Bogenlängen zugehörigen Spannungen, so kann man in bekannter Weise den Zusammenhang zwischen Bogenspannung und Strömungsgeschwindigkeit graphisch darstellen (vergl. Fig. 2).

II. Abhängigkeit der Bogenspannung vom Druck.

1.) 3 *cm*-Bogen.

Tabelle 4.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·061	1875	114·38	96·0			0·84
0·070	1750	122·50	105·0			0·86
0·080	1660	132·80	112·5	54·9	701	0·84
0·090	1575	141·75	118·5			0·83
0·100	1500	150·00	124·5			0·83
0·110	1450	159·50	131·25			0·82
0·061	1875	114·38	96·0			0·84
0·070	1775	124·25	105·0			0·85
0·080	1650	132·00	112·5	59·3	748	0·84
0·090	1575	141·75	118·5			0·83
0·100	1500	150·00	124·5			0·83
0·110	1430	157·30	131·25			0·83
0·061	1875	114·38	nicht bestimmt			nicht bestimmt
0·070	1750	122·50				
0·080	1630	130·40		62·8	794	
0·090	1550	139·50				
0·1015	1475	149·71				
0·110	1425	156·75				

2.) 5 *cm*-Bogen.

Tabelle 5.

Strom in Ampere	Spannung in Volt	Voltampere	Watt	Geschwindigkeit in Liter pro Stunde	Druck in Millimeter Hg	$C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$
0·060	2850	171·0				
0·070	2650	185·5				
0·080	2425	194·0	nicht bestimmt	54·9	**728**	nicht bestimmt
0·090	2275	203·01				
0·100	2150	215·00				
0·110	2025	221·75				
0·061	2850	173·85	130·5			0·75
0·070	2625	183·75	140·6			0·76
0·080	2410	192·80	150·0	62·0	**766**	0·77
0·090	2250	202·5	159·0			0·78
0·100	2140	214·0	165·0			0·77
0·110	2025	222·75	176·25			0·79

Nachdem sich beim 3 *cm* und 5 *cm* langen Flammenbogen keine nennenswerte Veränderung der Bogenspannung mit dem Drucke ergab, so wurde auf die Versuchsreihen am 7 *cm* langen Bogen verzichtet.

Graphische Betrachtungen zeigen, daß die Wattwerte mit zunehmender Bogenlänge bei konstanter Stromstärke auf sehr schwach nach aufwärts gekrümmten Kurven liegen, wenn die Energie in Watt als Ordinate und die Bogenlängen als Abszisse in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem eingetragen werden.

Wenn man die Energiewerte für den 5 *cm* langen Bogen um zirka 5 Watt erhöht, so würden die den drei Bogenlängen entsprechenden Energiewerte in einer Geraden liegen.

Da nach früheren Untersuchungen bei konstantem Strome die Kurve, welche die Beziehung zwischen Spannung und Bogenlänge darstellt, eine Gerade ist und, wie soeben erörtert

wurde, die Kurve, welche die Beziehung zwischen Energie und Bogenlänge bei konstanter Stromstärke festlegt, einen sehr schwach nach aufwärts gekrümmten Linienzug bildet, so kann aus dieser Erscheinung und der Tatsache, daß die im Bogen verbrauchte Energie

$$A = EJ\cos\varphi$$

ist, wobei E die Bogenspannung, φ die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom bedeuten, gefolgert werden, daß der Ausdruck $\frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$ konstant bleibt.

Die dieser Betrachtung zu Grunde gelegten Energiewerte für die Geschwindigkeit von 61 *l* sind der Vollständigkeit halber hier beigefügt.

Tabelle 6.

	Stromstärke	Watt
Bogenlänge 3 *cm*	0·07	105·3
	0·09	119·2
	0·11	131·5
Bogenlänge 5 *cm*	0·07	140·6
	0·09	159·0
	0·11	176·25
Bogenlänge 7 *cm*	0·07	190·4
	0·09	212·3
	0·11	232·8

Die in dieser Mitteilung angeführten Messungen lehren, daß das physikalische Verhalten des in Stickstoff gebildeten Flammenbogens dem in Luft brennenden analog ist.

Die wesentlichsten Resultate der in den Mitteilungen I bis IV niedergelegten Arbeit lassen sich etwa wie folgt zusammenfassen:

1. Es wurden an Flammenbogen, welche zwischen horizontalen Metallelektroden von 5 bis 10 *cm* Abstand in Luft

brannten, die sogenannten charakteristischen Kurven aufgenommen und gezeigt, daß bei konstanter Stromstärke die Bogenspannung eine lineare Funktion der Elektrodenentfernung ist.

2. Die Bogenspannung ist vom Elektrodenmaterial abhängig. In der Reihe Platin, Kupfer, Nickel, Silber, Zink kommen dem Platin die höchsten und dem Zink die niedersten Spannungswerte zu.

3. Der zwischen vertikalen Elektroden frei brennende Bogen zeigt gegenüber dem zwischen horizontalen Elektroden gebildeten, unter sonst gleichen Bedingungen, geringere Spannungswerte.

4. Es wurde eine Versuchsanordnung getroffen, bei der vertikale stabile Hochspannungsbogen von 3 bis 7 *cm* Länge, die innerhalb eines wassergekühlten Glas- oder Quarzrohres brannten, zur Verwendung kamen, wobei die im Flammenbogen entstandenen Gase mit Hilfe einer wassergekühlten Platinkapillare der heißesten Zone entzogen wurden. Mit dieser Versuchsanordnung wurden nachstehende Ergebnisse erzielt:

5. Der solcher Art eingeschlossene Bogen weist infolge Querschnittsverengerung und stärkerer Abkühlung höhere Spannungswerte auf, als der zwischen vertikalen Elektroden frei in Luft brennende.

6. Die Größe $C = \frac{\text{Watt}}{\text{Voltampere}}$ ist für die verschiedenen Bogenlängen als konstant anzusehen. Sie ist in Sauerstoff größer als in Luft und Stickstoff.

7. Mit steigendem Sauerstoffgehalt der Ausgangsmischung nimmt die Bogenspannung und die im Bogen verbrauchte Energie bei konstanter Stromstärke zu und erreicht in reinem Sauerstoff den höchsten Wert. Die entsprechenden Spannungen in Stickstoff ordnen sich unter die bei Luft erhaltenen.

8. In Sauerstoff, Luft und Stickstoff ist die Bogenspannung eine lineare Funktion der Gasgeschwindigkeit.

9. Druckänderungen haben nur bei den in Sauerstoff brennenden Bogen Einfluß auf die Spannungswerte, und zwar herrscht auch hier — innerhalb der Drucke von 700 bis 800 *mm* Hg — zwischen Spannung und Druck lineare Abhängigkeit.

10. Es wurden die Methoden der quantitativen Analyse nitroser Gase einer eingehenden Untersuchung unterzogen und gefunden, daß die Bestimmung des Stickoxyds durch Ermittlung des Sauerstoffgehaltes des nach der Absorption des Peroxydes rückbleibenden Gasrestes verläßliche Resultate liefert, falls diese Absorption statt wie bisher durch Wasser, durch Schwefelsäure oder $\frac{n}{1}$ Lauge vorgenommen wird. Bei Strömungsversuchen ist konzentrierte Schwefelsäure als Absorptionsmittel der Lauge vorzuziehen.

11. Die Stickoxydkonzentration innerhalb des Flammenbogens ist wesentlich höher als knapp außerhalb desselben.

12. Die Stickoxydkonzentration des Bogens ist von der Stromstärke, beziehungsweise dem Energieverbrauch abhängig, erreicht aber bei verhältnismäßig geringer Stromstärke (zirka 0·1 Ampere) einen Grenzwert. Die oberhalb dieses Grenzwertes zugeführte Energie geht wahrscheinlich als Strahlung für die Stickoxydbildung nutzlos verloren.

13. Das Stickoxydgleichgewicht in Luft ergab sich als unabhängig von der Bogenlänge (3 bis 7 *cm*) und dem Energieverbrauch (oberhalb einer bestimmten Grenze) zu 5·5 Volumprozent NO; im hälftigen Gemisch zu 6·6 % NO.

14. Das Stickoxydgleichgewicht in Flammenbogen gleichen Energieverbrauches gehorcht dem Gesetz der chemischen Massenwirkung.

15. Die bei Atmosphärendruck gefundenen Stickoxydkonzentrationen gehören einer Größenordnung an, die sehr wahrscheinlich als nur durch die thermische Wirkung des Stromes bedingt aufgefaßt werden kann. Auch alle übrigen Beobachtungen stehen mit dieser Auffassung in vollem Einklang. Auf Grund derselben berechnet sich die Temperatur unseres Hochspannungsbogens zu zirka 3150° C.

16. Mit unserer Versuchsanordnung kann an einem 5 *cm* langen Bogen mit Sicherheit ein Ausbringen von 500 *kg* HNO_3 pro Kilowattjahr bei einer um 3 Volumprozent liegenden Stickoxydkonzentration erzielt werden.

Grau A.

Tafel.

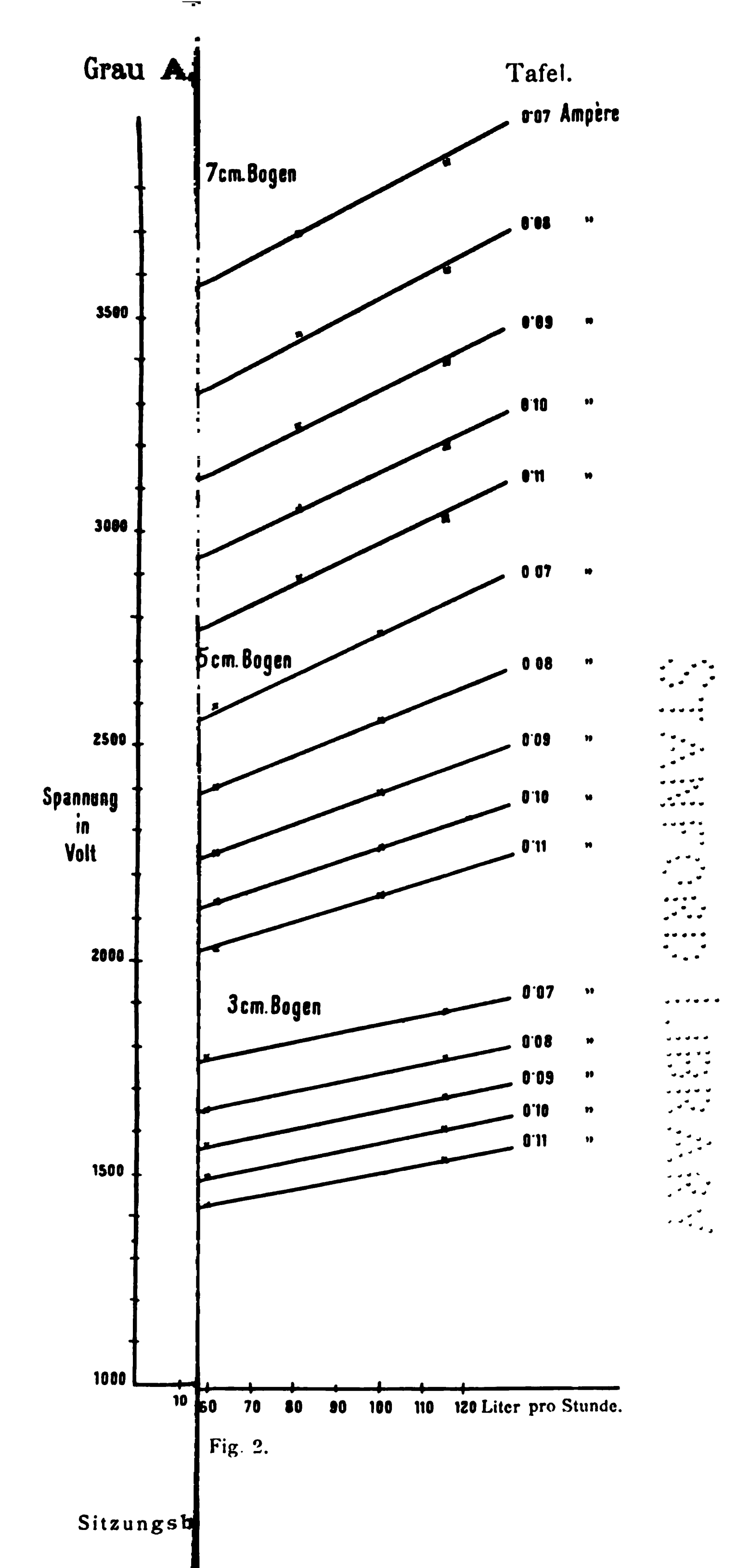


Fig. 2.

Konstanz der Thermoelemente bei langem Gebrauch

von

Ernst Lecher,

k. M. k. Akad.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. April 1908.)

Es wurde schon manchmal die Vermutung ausgesprochen, daß eine lang andauernde kontinuierliche Verwendung von Thermoelementen eine durch den Gebrauch bedingte Veränderung der Lötstellen nach sich ziehen könne. Es liegen Überlegungen nahe, wonach gewisse Abweichungen der Versuchsergebnisse von den theoretischen Forderungen auf Kosten eines Verbrauches von innerer Energie vor sich gingen.[1]

Ich habe nun einen Dauerversuch mit den Kombinationen Eisen-Platin, Eisen-Kupfer, Eisen-Nickel und Eisen-Konstantan gemacht. Es wurden von jeder dieser vier Kombinationen je zwei gleiche Thermoelemente verfertigt. Der Drahtdurchmesser betrug etwa $^1/_2$ *mm* und es befanden sich die mit Hartlot verfertigten Lötstellen immer je in der Mitte eines etwa 50 *cm* langen, dünnen Porzellanröhrchens mit einer inneren, lichten Weite von 1 *mm*. Es waren also im ganzen acht solche Röhrchen in Verwendung. Dieselben wurden parallel nebeneinander zu einem Bündel vereinigt, mit Ton umgeben und kamen dann in ein Eisenrohr von etwa 40 *cm* Länge und etwa 5 *cm* innerem Durchmesser. Dieses ganze Bündel war horizontal in der Mitte eines Digestoriums aufgehängt und eine kräftige Gasflamme

---

[1] Ein Hinweis auf eine solche innere Energie findet sich z. B. Szaervassi, Ann. der Phys., 17, p. 263 (1905).

erhitzte die Mitte dieses Eisenrohres während der ganzen Versuchsdauer, während etwa $7^1/_2$ Monate, auf ungefähr 500°. Über dem Eisenrohre befand sich ein Asbestdach. Aus der einen Seite dieses erhitzten Eisenrohres ragten die acht Eisendrähtchen heraus und auf der anderen Seite je zwei Platin-, Kupfer-, respektive Konstantandrähtchen. Jeder der herausragenden und isolierten Drähte hat eine Länge von $1^1/_2$ *m* und führte zu je einem Quecksilbernäpfchen. Ein Element jeder Type, und zwar II war dauernd geschlossen, indes das gleiche Kontrollelement I ungeschlossen blieb. Von Zeit zu Zeit, etwa nach je einem Monate wurden dann alle Elemente der Reihe nach mit einem Millivoltmeter in Bezug auf ihre elektromotorische Kraft durchgemessen. Die Versuchsergebnisse zeigt die folgende Tabelle, wobei aber für die Messung Konstantan-Eisen dem Millivoltmeter 300 Ω vorgeschaltet werden mußten, um es unempfindlicher zu machen.

Tabelle I.

Datum	Fe-Kon		Fe-Ni		Fe-Cu		Fe-Pt	
	II	I	II	I	II	I	II	I
16. X. 1906	138·9	144·2	119·0	116·6	3	2·4	42·2	42·0
28. X. 1906	136·5	143·0	120·0	117·1	3·1	2·8	42·2	41·4
30. XI. 1906	137·9	144·2	121·0	118·8	2·9	2·3	42·7	42·1
15. I. 1907	144·4	150·0	121·9	121·0	—3·0	—3·0	43·5	43·1
4. III. 1907	148·4	152·0	122·0	121·9	—2·9	—3·1	44·8	43·9
30. V. 1907	148·0	151·5	121·8	121·0	—2·5	—2·4	44·4	43·9

Es ergibt sich zunächst, daß es unmöglich ist, die Temperatur durch so lange Zeit mit Hilfe einer einfachen Gasflamme konstant zu erhalten. Da aber die zu vergleichenden Lötstellen unmittelbar nebeneinander in der großen Tonmasse und im Eisenrohre eingebettet waren, so konnte man doch einiger-

maßen einer während der Messung gleichen Temperatur dieser beiden Lötstellen sicher sein. Dividiert man die elektromotorische Kraft des dauernd kurz geschlossenen Elementes II durch die elektromotorische Kraft des nur während der Messung kurz geschlossenen Elementes I, so erhält man folgende Werte.

Tabelle II.

Datum	Fe-Kon	Fe-Ni	Fe-Pt
16. X. 1906	963	102	101
28. X. 1906	955	102	102
30. XI. 1906	956	102	101
15. I. 1907	963	101	101
4. III. 1907	976	100	102
30. V. 1907	976	101	101

Diese Zahlen ergeben zwar für Konstantan-Eisen ein langsames Anwachsen, doch erfolgt dies in einem Sinn, als ob das dauernd kurz geschlossene Element stärker würde; bei einem Verbrauch innerer Energie müßte es aber gerade umgekehrt sein. Die kleinen Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenzen der Anordnung. Kupfer-Eisen konnte leider zu diesen Schlußrechnungen nicht herangezogen werden, da gerade bei 500° die elektromotorische Kraft fast ganz verschwindet; doch ergibt sich auch hier aus der Gleichheit der Zahlen in Tabelle I, daß eine Änderung nicht eintritt.

Es dürfte bei allen diesen Versuchen die Ausbildung von Oxydschichten an der Oberfläche eine weitergehende Genauigkeit unmöglich machen.[1]

Es ändert also eine dauernde Belastung eines Thermoelementes durch seinen Eigenstrom bei Kurzschluß die elektromotorische Kraft der untersuchten Elemente bei 500° C. nicht.

---

[1] Siehe Walter P. White, Phys. Zeitschr., VIII, p. 325 (1907).

Daß bei gewöhnlichen Temperaturen eine dauernde Einschaltung eines Thermoelementes in einen Gleichstrom ohne Effekt an der Lötstelle ist, ergibt sich aus dem bekannten Versuch von Riecke[1] für Kupfer und Aluminium. Allerdings geschah hier die Kontrolle einer eventuellen Änderung durch Wägung, doch dürfte es vielleicht möglich sein, mit einer thermoelektrischen Anordnung genauere Resultate zu erzielen.

---

[1] E. Riecke, Phys. Zeitschr., II, p. 639 (1901).

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. IV. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Elektromagnetische Theorie

von

G. Jaumann,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1908.)

Die elektromagnetische Theorie des Verfassers, deren Entwicklung sich nach früheren Mitteilungen[1] verfolgen läßt, hat seither einen großen Fortschritt gemacht, welcher ausging von einer neuen Auffassung der chemischen Eigenschwingungen der Medien. Die Bemühungen, diese Schwingungen mit Energie auszustatten und das Energieprinzip hiebei streng zu erfüllen, führten zur Entdeckung des notwendigen Vorhandenseins eines neuen elektrischen Stromes, des chemischen Stromes, welcher zu dem Leitungsstrom und Verschiebungsstrom hinzutritt und viele eigenartige Entladungs- und Strahlungserscheinungen bewirkt, worüber im folgenden berichtet wird.

Erster Teil.

I. Homogene chemische Eigenschwingungen.

1. Schon in der letztzitierten Abhandlung wurde vorläufig mitgeteilt, daß ich die ionisierten Gase als Medien ansehe, welche sich im Zustand andauernder, sehr gesetzmäßig gedämpfter chemischer Eigenschwingungen befinden, und daß ich auch die Radioaktivität, ferner die Lumineszenz sowohl als das Glühen und die zugehörigen Absorptionen auf chemische Eigenschwingungen des strahlenden Mediums zurückführe.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIV, p. 747 (1895); — Bd. CXIV, p. 1635 (1905); — Bd. CXV, p. 337 (1906); — Bd. CXVI, p. 389 (1907).

Da aber die kohärenten chemischen Schwingungen der Strahlen elektrochemische Schwingungen, d. h. periodische Umsetzungen elektrischer in chemische Energie, sind und dieser Umsatz auch bei der Emission der Strahlung stattfindet, so hielt ich auch die chemischen Eigenschwingungen der Medien für elektrochemische Schwingungen, doch so lange ich hiebei verharrte, erwies sich die Theorie dieser Schwingungen als nicht entwicklungsfähig.

2. Als chemischen Zustand σ bezeichne ich eine physikalisch wichtige Variable, von welcher alle stofflichen Eigenschaften (Materialkonstanten) abhängen. Gäbe es nur einen chemischen Zustand σ, so müßten (bei konstanter Temperatur und konstantem Druck) alle stofflichen Eigenschaften, da sie nur von σ abhängen würden, Funktionen voneinander sein und eine solche Abhängigkeit findet nicht statt.

Es muß also zwei miteinander nicht durch eine Zustandsgleichung verbundene Variable σ und τ geben, welche man beide mit gleichem Rechte als chemische Zustände des Mediums bezeichnen kann, da die stofflichen Eigenschaften desselben Funktionen dieser zwei unabhängigen Variablen sind.

Kleine Änderungen einer beliebigen dieser abhängigen oder unabhängigen stofflichen Variablen sind also lineare homogene Funktionen der kleinen Änderungen zweier beliebiger dieser Variablen, so daß man in allen Gleichungen für die kleinen Änderungen der unabhängig variablen σ und τ leicht die Änderungen von ε und μ einführen kann. Hiedurch wird es möglich, der vorzeitigen Entscheidung der Frage auszuweichen, ob der dielektrische und diamagnetische Koeffizient ε und μ vielleicht mit σ und τ identisch sind, also die hohe Bedeutung der chemischen Zustände des Mediums haben, für deren Bejahung eben die große Rolle, die sie in den elektromagnetischen Gleichungen spielen, sprechen würde.

3. Als ich nach vergeblichen Versuchen, die elektrochemischen Eigenschwingungen festzuhalten, einsah, daß die chemischen Eigenschwingungen der Medien rein chemische Vorgänge sind, faßte ich die prinzipiell neue Idee, daß diese chemischen Eigenschwingungen periodische Umsetzungen des Zustandes σ in den Zustand τ sind.

Damit setzte eine rapide Entwicklung der Theorie ein, so daß ich das System der Differentialgleichungen der neuen Form meiner Theorie binnen wenigen Stunden gewann.

4. Wenn die chemischen Eigenschwingungen nur skalare oder dyadische Variable σ (beziehungsweise ε) und τ (beziehungsweise μ) betreffen, nicht aber die elektromagnetischen Vektoren, so sind homogene chemische Schwingungen des Mediums möglich, d. h. die Variablen ε und μ können vom Orte unabhängig sein und nur mit der Zeit sich ändern. Bezeichne

$$\bar{\varepsilon} \overset{g}{=} \varepsilon - \varepsilon_0, \quad \bar{\mu} \overset{g}{=} \mu - \mu_0$$

die Abweichung der Variablen von ihren Ruhewerten ε_0 und μ_0. Die Differentialgleichungen einer gesetzmäßig gedämpften homogenen chemischen Eigenschwingung müssen lauten:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + c\bar{\varepsilon} + r\bar{\mu} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\mu}{dt} + x\bar{\mu} + s\bar{\varepsilon} = 0, \tag{2}$$

worin c, x, r und s Materialkonstante sind, deren Werte sich während dieser chemischen Schwingungen nicht oder nur unmerklich wenig ändern. Diese Gleichungen stellen aber nichts anderes vor als eine ohnehin empfehlenswerte Verallgemeinerung der Gleichungen[1] für die Fluxion von ε und μ, welche der älteren Form meiner Theorie zugrunde liegen, so daß der Anschluß dieser chemischen Gleichungen an die elektromagnetischen Gleichungen gesichert ist.

5. Als so die chemischen Schwingungen losgelöst von den elektromagnetischen Vorgängen waren, erkannte ich erst die Möglichkeit und Notwendigkeit, sie mit allen jenen Attributen auszustatten, welche erfahrungsgemäß allen physikalischen Schwingungen zukommen.

Diese homogenen chemischen Schwingungen wären kraftlos, wesenlos, wenn sie nicht die periodischen Umsetzungen

---

[1] Vergl. Gleichung *(E)*, p. 424, der letztzitierten Abhandlung.

zweier verschiedener chemischer Energien ineinander darstellen würden. Es folgt somit, daß die Abweichung $\bar{\varepsilon}$ der dielektrischen Dyade von ihrem Ruhewerte nicht ohne Aufwendung von Energie zustande kommen kann. Damit der Ruhezustand der Stoffe aber stabil ist, darf bei keinem Sinne der Änderungen $\bar{\varepsilon}$, beziehungsweise $\bar{\mu}$ Energie gewonnen werden und so müssen die chemischen Energien quadratische Formen der dyadischen Werte $\bar{\varepsilon}$, beziehungsweise $\bar{\mu}$ sein. Eine Energie ist aber ein skalarer Wert. Es gibt nur zwei skalare Quadrate einer Dyade, nämlich das Gibbs'sche Doppelprodukt:

$$\bar{\varepsilon} : \bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon}_c)_s \tag{3}$$

und das analoge Doppelprodukt $(\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon})_s$. Letzteres hat meiner reichlichen Erfahrung nach sowohl für geometrische als physikalische Probleme nicht die gleiche Anwendbarkeit wie das Gibbs'sche Doppelprodukt. Hier aber ist entscheidend, daß das Gibbs'sche Doppelprodukt einer reellen Dyade mit sich selbst immer positiv ist, was von dem zweiten Doppelprodukte nicht gilt.

Die chemischen Energien müssen ferner außer dem Quadrate der Variablen $\bar{\varepsilon}$, beziehungsweise $\bar{\mu}$ noch eine Materialkonstante e, beziehungsweise m enthalten, da gleiche Abweichungen in verschiedenen Medien verschiedenen Energiewert haben müssen. Die Ausdrücke für die chemischen Energien E_2:

$$E_2 = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} : e : \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\bar{\mu} : m : \bar{\mu} \tag{4}$$

müssen also ganz analog gebaut sein wie die bekannten Ausdrücke für die elektromagnetischen Energien E_1:

$$E_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{e} \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e} + \frac{1}{2}\mathfrak{m} \cdot \mu \cdot \mathfrak{m} \tag{5}$$

Die Konstanten e und m sind in isotropen Medien Skalare, in kristallischen Medien aber können sie nicht Dyaden sein, da sie der Symmetrie halber die doppelte Bindung dieser Produkte vermitteln müssen. Die Materialkonstanten e und m müssen deshalb Tetraden sein.

Ob bei den eigentlichen chemischen Reaktionen nicht noch Energieverwandlungen anderer Art stattfinden, ziehe ich nicht in den Kreis der Betrachtung.

6. Ferner muß das räumliche Verharren inhomogener chemischer Schwingungen ausgeschlossen werden. Nach den Gleichungen (1) und (2) wäre es möglich, daß in einem begrenzten Teile des Mediums oder sogar nur in einem Punkte desselben eine chemische Schwingung stattfindet, das Medium in der Umgebung aber im normalen Zustande verharrt. Tatsächlich greifen jedoch chemische Schwingungen zwar langsam aber doch sehr merklich von den schwingenden Teilen des Mediums auf die benachbarten, anfänglich normalen Gebiete desselben über, worauf meiner Auffassung nach die Diffusion der Ionisierung und die Diffusion der Emanation, die Ionisierung der Gase beim Kontakte mit glühenden Körpern etc. beruht.

Diese Diffusion der chemischen Schwingungen läßt erkennen, daß noch eine räumliche Derivation von ε und μ den Gleichungen (1) und (2) hinzugefügt werden muß. Es gibt aber nur eine dyadische räumliche Derivation einer Dyadenverteilung $\bar{\mu}$, nämlich die derivierte Dyade $\nabla \times \bar{\mu}$. Würde man diese, mit der Materialkonstante $\varkappa_0$ behaftet, der Gleichung (1) zufügen:

$$e : \frac{d\varepsilon}{dt} + c\bar{\varepsilon} + r\bar{\mu} = \varkappa_0 \nabla \times \bar{\mu}, \tag{6}$$

so erkennt man, daß dann diese dyadischen chemischen Gleichungen eine große Analogie hätten zu den vektorischen elektromagnetischen Gleichungen.

7. Mindestens muß aber die Gleichberechtigung der dyadischen chemischen Gleichungen und der elektromagnetischen Gleichungen bei der Bildung der Energiegleichung anerkannt werden, was ich früher nicht erkannt hatte. So wie man aus den Maxwell'schen Gleichungen durch Multiplikation mit $\mathfrak{e}\cdot$, beziehungsweise $\mathfrak{m}\cdot$ die elektromagnetischen Energiewerte, die Joule'sche Wärmeproduktion und den Poynting'schen Energiefluß erhält, so muß man aus den chemischen Gleichungen (6) durch doppelte Multiplikation mit $\bar{\varepsilon}:$, beziehungs-

weise $\bar{\mu}$: die chemischen Energien (4), die chemische Wärmeproduktion und den lange gesuchten chemischen Energiefluß gewinnen.

8. Aber die Ähnlichkeit der Gleichung (6) mit den elektromagnetischen Gleichungen ist gar zu groß. Nach derselben würde nicht eine diffusionsartige, sondern eine strahlenartige Ausbreitung der chemischen Schwingungen eintreten. Deshalb muß die mit dem Faktor $\varkappa_0$ behaftete räumliche Derivation von $\bar{\mu}$ in Gleichung (6) ersetzt werden durch eine Derivation zweiter Ordnung, wodurch die chemischen Gleichungen formale Ähnlichkeit erhalten mit der Fourier'schen Diffusionsgleichung und also auch die gewöhnliche Diffusion gelöster Salze im Lösungsmittel etc. mit der hier betrachteten Diffusion des chemischen Schwingungszustandes in Beziehung gebracht wird. Tatsächlich haben wir in der Diffusion der Emanation eine Erscheinung, welche man ebensowohl als Diffusion eines Stoffes wie als Diffusion des chemischen Schwingungszustandes ohne materielle Diffusion auffassen kann.

Von den zahlreichen räumlichen Derivationen zweiter Ordnung einer Dyadenverteilung $\bar{\mu}$, welche selbst dyadisch sind, erfüllt aber nur eine die Bedingung, daß ihr derivierter Vektor identisch verschwindet. Es ist dies die Derivation

$$\nabla \underset{;}{\times} \nabla \cdot \bar{\mu} \overset{2}{=\!=} \nabla \times (\nabla \times \bar{\mu}), \tag{7}$$

für welche identisch gilt:

$$\nabla \cdot \nabla \underset{;}{\times} \nabla \cdot \bar{\mu} \overset{3}{=\!=} 0.$$

Diese letztere Bedingung muß aber erfüllt sein, damit die Derivationen (7), in der in § 7 angegebenen Weise mit $\bar{\varepsilon}$:, beziehungsweise $\bar{\mu}$: multipliziert und addiert, die Divergenz eines Vektors, welcher dann der chemische Energiefluß ist, ergeben.

Auch dieser Energiefluß ist in elektrischen Longitudinalstrahlen stets gleich Null, diese Strahlen haben also weder einen elektromagnetischen noch einen chemischen Energiefluß.

9. Damit waren die dyadischen chemischen Gleichungen unabhängig entwickelt. Ihr Anschluß an die elektromagnetischen Gleichungen ist gegeben durch die derivierten Dyaden $a\nabla$, $\mathfrak{c}$,

beziehungsweise $b\nabla, \mathfrak{e}$, welche (nach der in § 4 zitierten Gleichung) die für meine Theorie charakteristische chemische Wirkung der Inhomogenität des elektrischen Feldes bestimmen, welche am augenscheinlichsten bei der Elektrolyse zu beobachten ist. Die derivierten Dyaden $a\nabla, \mathfrak{e}$, beziehungsweise $b\nabla, \mathfrak{e}$ kuppeln die chemischen Vorgänge und Schwingungen an die elektrischen.

Bildet man nun nach der in § 7 angegebenen Methode die Energiegleichung, so treten in derselben die Werte:

$$\bar{\varepsilon} : a\nabla, \mathfrak{e}, \text{ beziehungsweise } \bar{\mu} : b\nabla, \mathfrak{e} \qquad (8)$$

auf und die Deutung dieser Energiebeträge gelang mit einem über alle Hoffnungen hinausgehenden Erfolge. Es wurde hiebei nicht nur der *elektrochemische Energiefluß* aufgefunden, welcher endlich der Energiefluß der Longitudinalstrahlen ist, sondern ein ganz neues, nie vermutetes Glied der elektromagnetischen Gleichungen entdeckt, der *chemische Strom*:

$$\nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu}),$$

welcher den Einfluß der Inhomogenitäten des chemischen Feldes auf elektrische Vorgänge bestimmt, also die elektromagnetischen Gleichungen an die chemischen kuppelt.

Hiemit ist die Methode, welche bei Begründung dieser Theorie angewendet wurde, in Kürze dargelegt. Was noch zur Verständlichkeit fehlen sollte, wird im folgenden klar werden.

II. Aufstellung des Gleichungssystems.

10. Das folgende Gleichungssystem meiner elektrochemischen Theorie gilt für bewegte, stofflich veränderliche Medien. Dasselbe gilt unbeschränkt für jede Bewegungsform des Mediums und auch für hohe Geschwindigkeiten desselben. Jedoch wurde bei der Aufsuchung dieses Gleichungssystems vorausgesetzt, daß das Medium im Ruhezustande nicht überaus stark inhomogen sei und daß auch die stofflichen Änderungen, welche dasselbe während der betrachteten Vorgänge erfährt, klein bleiben.

$$[\varepsilon]\cdot\frac{\partial}{\partial t}\,\mathfrak{e}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon+\gamma\right)\cdot\mathfrak{e}+\nabla\cdot(a\,\bar{\varepsilon}+b\,\bar{\mu})\overset{3}{=}c_0\nabla\times\mathfrak{m}, \qquad \text{(I)}$$

$$[\mu]\cdot\frac{\partial}{\partial t}\,\mathfrak{m}+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mu+\xi\right)\cdot\mathfrak{m}+\nabla\cdot(a'\bar{\varepsilon}+b'\bar{\mu})\overset{3}{=}-c_0\nabla\times\mathfrak{e}, \qquad \text{(II)}$$

$$\bar{\gamma}+\gamma_i\bar{\varepsilon}+[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\varepsilon\overset{2}{=}0, \qquad \text{(III)}$$

$$\bar{\xi}+\nu\bar{\mu}+[\nabla,\mathfrak{v}]\cdot\mu\overset{2}{=}0, \qquad \text{(IV)}$$

$$e:\frac{d}{dt}\varepsilon+c\bar{\varepsilon}+r\bar{\mu}+a\nabla,\mathfrak{e}+a'\nabla,\mathfrak{m}+n\nabla,\mathfrak{v}\overset{2}{=}\varkappa_0\nabla\,\dot{\times}\,\nabla\cdot\bar{\mu}, \qquad \text{(V)}$$

$$m:\frac{d}{dt}\mu+x\bar{\mu}+s\bar{\varepsilon}+b\nabla,\mathfrak{e}+b'\nabla,\mathfrak{m}+n'\nabla,\mathfrak{v}\overset{2}{=}-\varkappa_0\nabla\,\dot{\times}\,\nabla\cdot\bar{\varepsilon}. \qquad \text{(VI)}$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{e}$ den elektrischen, $\mathfrak{m}$ den magnetischen Vektor, ε die dielektrische, μ die diamagnetische Dyade,

$$[\varepsilon]=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon_c, \qquad [\mu]=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\mu_c$$

deren symmetrische Anteile, ε_s und μ_s deren isotrope Teile und endlich

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon-\varepsilon_0, \qquad \bar{\mu}=\mu-\mu_0$$

deren Abweichungen von den Ruhewerten ε_0 und μ_0.

γ ist die elektrische, ξ die magnetische Leitfähigkeit,

$$\bar{\gamma}=\gamma-\gamma_0, \qquad \bar{\xi}=\xi-\xi_0$$

sind deren Abweichungen von den Ruhewerten γ_0, beziehungsweise ξ_0, von welchen der letztere in allen Medien Null zu sein scheint.

$\mathfrak{v}$ ist die Geschwindigkeit der Teile des Mediums.

Alle nicht besonders erwähnten Faktoren bedeuten Materialkonstante, d. i. skalare stoffliche Eigenschaften, welche sich bei den betrachteten Vorgängen niemals merklich ändern. Auch die Faktoren e und m können in isotropen Medien als skalare Materialkonstante aufgefaßt werden, spielen aber doch eine besondere Rolle in den chemischen Gleichungen (V) und (VI), nämlich eine ähnliche Rolle wie die dyadischen Werte ε und μ in den elektromagnetischen Gleichungen (I)

und (II). Dementsprechend müssen e und m in Kristallen **tetradische** Werte sein, ihre Variabilität dürfte weit geringer sein als jene von ε und μ, aber doch nicht unwichtige Wirkungen äußern. Wir sehen jedoch der Einfachheit wegen e und m im folgenden als Konstante an.

11. Die variablen Dyaden treten nicht immer einfach mit skalaren Faktoren behaftet in die Nahewirkungsgleichungen ein, sondern in komplizierteren linearen Formen, indem der isotrope Teil, der symmetrische Teil und der antisymmetrische Teil der Dyade in verschiedenen Medien in verschiedenem Verhältnisse wirksam sind. Ich habe den größten Wert darauf gelegt, die Annahme nicht machen zu müssen, daß der antisymmetrische Teil einer Dyade irgendeine stoffliche Wirkung habe, damit die stofflichen Dyaden stets streng symmetrisch bleiben können, und habe auch bis auf eine geringe Ausnahme damit Erfolg gehabt, jedenfalls in dieser Richtung große Fortschritte gemacht. Unbedingt und prinzipiell ist jedoch daran festzuhalten, daß der antisymmetrische Teil der derivierten Dyade $\nabla ; \mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsverteilung keine stoffliche Wirkung hat, daß also die stofflichen Eigenschaften des Mediums wohl durch die Deformation, nicht aber durch die Rotation des Mediums geändert werden.

Die Symbole a, b, a', b' vertreten je drei Materialkonstante. Es bedeutet z. B.

$$a\bar{\varepsilon} \overset{9}{=} a_1\bar{\varepsilon} + a_2\bar{\varepsilon}_c + a_3\bar{\varepsilon}_s,$$

$$a\nabla, \mathfrak{e} \overset{9}{=} a_1\nabla ; \mathfrak{e} + a_2\mathfrak{e} ; \nabla + a_3\nabla \cdot \mathfrak{e},$$

$$[\nabla, \mathfrak{v}] \overset{9}{=} \nabla ; \mathfrak{v} + \mathfrak{v} ; \nabla - \nabla \cdot \mathfrak{v} \overset{9}{=} \nabla ; \mathfrak{v} + \nabla \overset{\times}{;} \mathfrak{v},$$

$$n\nabla, \mathfrak{v} \overset{9}{=} n_1(\nabla ; \mathfrak{v} + \mathfrak{v} ; \nabla) + n_3\nabla \cdot \mathfrak{v},$$

$$n'\nabla, \mathfrak{v} \overset{9}{=} n'_1(\nabla ; \mathfrak{v} + \mathfrak{v} ; \nabla) + n'_3\nabla \cdot \mathfrak{v}.$$

12. Es bedeutet ferner $\partial/\partial t$ die **lokale** Fluxion, bezogen auf ein in der **indifferenten Grenzschale**[1] des betrachteten Vorganges festgelegtes Koordinatensystem.

---

[1] Vergl. diese Sitzungsber., Bd. CXV, p. 348.

Hingegen bedeutet d/dt die materielle Fluxion, bezogen auf ein in dem betrachteten kleinen materiellen Teile festgelegtes, also mit diesem transferiertes und rotiertes Koordinatensystem. Man kann leicht die Rechenregel ableiten:

$$\frac{d}{dt}\varepsilon \stackrel{9}{=} \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + \mathfrak{v}\cdot\nabla;\varepsilon + \frac{1}{2}(\varepsilon \times \operatorname{rot}\mathfrak{v} - \operatorname{rot}\mathfrak{v} \times \varepsilon). \tag{9}$$

13. Die Gleichungen (III) und (IV), welche die Abhängigkeit der Leitfähigkeiten γ und ξ des Mediums von der Deformationsgeschwindigkeit desselben bestimmen, konnte ich, da die mit η, beziehungsweise ν behafteten Glieder derselben meist als verschwindend klein angesehen werden können, äußerst einfach gestalten, was zu den Erfolgen der neuen Form der Theorie zu rechnen ist, denn früher war ich genötigt, mich übermäßig auf die Annahme einer Variabilität der Leitfähigkeiten während chemischer Schwingungen zu stützen.

III. Die Energiegleichung.

14. Als erste aller Deduktionen einer exakten Theorie muß die Energiegleichung derselben aufgestellt werden. Hiebei ist die äußerste Strenge geboten und sind nicht die geringsten Vernachlässigungen gestattet, dafür darf man dann das Energieprinzip anderen Deduktionen dieser Theorie, ohne einen Fehlschluß fürchten zu müssen, zugrunde legen.

Ich habe die positiv heuristische Wirkung des Energieprinzips schon bei Aufstellung der Grundgleichungen meiner Theorie verwendet und gewann gleichzeitig mit diesen auch die Methode, aus ihnen die Energiegleichung zu deduzieren, sowie Klarheit über die Bedeutung der Glieder dieser Gleichung.

Man gewinnt die Energiegleichung nach einer Methode, welche eine Verallgemeinerung der von Poynting auf die Maxwell'schen Gleichungen angewandten Methode ist. Man muß jede vektorische Gleichung der Theorie mit einem Vektor, jede dyadische Gleichung mit einer Dyade absättigen und die so erhaltenen skalaren Gleichungen addieren, so erhält man die Energiegleichung.

Die elektromagnetischen Gleichungen (I) und (II) müssen mit $\mathfrak{e}\cdot$, beziehungsweise $\mathfrak{m}\cdot$ skalar multipliziert werden. Addiert man dieselben dann, so erhält man die folgende Gleichung (10).

Die dyadischen Gleichungen (III), beziehungsweise (IV) müssen mit den Dyaden $\frac{1}{2}\mathfrak{e};\mathfrak{e}:$, beziehungsweise $\frac{1}{2}\mathfrak{m};\mathfrak{m}:$ doppelt multipliziert werden, ihre Addition ergibt dann Gleichung (11).

Die chemischen Gleichungen (V) und (VI) müssen mit $\bar{\varepsilon}:$, beziehungsweise $\bar{\mu}:$ doppelt multipliziert und addiert werden, wodurch man Gleichung (12) erhält.

$$\frac{\partial}{\partial t}E_1+\mathfrak{e}\cdot\gamma\cdot\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot\xi\cdot\mathfrak{m}+\mathfrak{e}\cdot\nabla\cdot(a\bar{\varepsilon}+b\bar{\mu})+$$
$$+\mathfrak{m}\cdot\nabla\cdot(a'\bar{\varepsilon}+b'\bar{\mu})+c_0\,\mathrm{div}\,\mathfrak{e}\times\mathfrak{m}=0, \quad (10)$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathfrak{e}\cdot(\bar{\gamma}+\eta\bar{\varepsilon})\cdot\mathfrak{e}-\frac{1}{2}\mathfrak{m}\cdot(\bar{\xi}+\nu\bar{\mu})\cdot\mathfrak{m}-$$
$$-\frac{1}{2}(\mathfrak{e}\cdot\varepsilon;\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot\mu;\mathfrak{m}):[\nabla,\mathfrak{v}]=0, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}E_2+c\bar{\varepsilon}:\bar{\varepsilon}+x\bar{\mu}:\bar{\mu}+(r+s)\bar{\varepsilon}:\bar{\mu}+$$
$$+\bar{\varepsilon}:(a\nabla,\mathfrak{e}+a'\nabla,\mathfrak{m})+\bar{\mu}:(b\nabla,\mathfrak{e}+b'\nabla,\mathfrak{m})+$$
$$+\bar{\varepsilon}:n\nabla,\mathfrak{v}+\bar{\mu}:n'\nabla,\mathfrak{v}=\varkappa_0(\bar{\varepsilon}:\nabla\underset{;}{\times}\nabla\cdot\bar{\mu}-\bar{\mu}:\nabla\underset{;}{\times}\nabla\cdot\bar{\varepsilon}). \quad (12)$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so erhält man die *Energiegleichung* meiner Theorie. Hierin bedeutet:

$$E_1=\frac{1}{2}\mathfrak{e}\cdot\varepsilon\cdot\mathfrak{e}+\frac{1}{2}\mathfrak{m}\cdot\mu\cdot\mathfrak{m} \quad (13)$$

die potentielle elektromagnetische Energie und:

$$E_2=\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}:e:\bar{\varepsilon}+\frac{1}{2}\bar{\mu}:m:\bar{\mu} \quad (14)$$

die potentielle *chemische Energie* (vergl. § 5). Die Deutung der übrigen Glieder der Energiegleichung muß in folgender Weise geschehen.

IV. Die Wärmeproduktionen.

15. Der Betrag $\mathfrak{e}\cdot\gamma\cdot\mathfrak{e}$ der Gleichung (10) entspricht der Joule'schen Wärmeproduktion in Leitern oder Stromwärme, bezogen auf die Volums- und Zeiteinheit. Die dual zugeordnete magnetische Stromwärme $\mathfrak{m}\cdot\xi\cdot\mathfrak{m}$ ist stets äußerst klein. Die aus Gleichung (11) herrührenden, ähnlich gebauten Glieder

$$-\frac{1}{2}(\mathfrak{e}\cdot(\bar{\gamma}+\eta\bar{\varepsilon})\cdot\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot(\bar{\xi}+\nu\bar{\mu})\cdot\mathfrak{m})$$

müssen ebenfalls Wärmeproduktionen entsprechen, die stets sehr klein sein werden, da die Abweichungen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\xi}$ der Leitfähigkeiten von ihren Ruhewerten γ_0 und ξ sehr klein sind. Die gesamte elektromagnetische Wärmeproduktion Q_1 hat also pro Volums- und Zeiteinheit in mechanischem Maße den Wert:

$$Q_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{e}\cdot(\gamma+\gamma_0)\cdot\mathfrak{e}+\frac{1}{2}\mathfrak{m}\cdot(\xi+\xi_0)\cdot\mathfrak{m}. \qquad (15)$$

Die analog gebauten Glieder der Gleichung (12) bestimmen die Wärmeproduktionen in Nichtleitern. Diese chemische Wärmeproduktion Q_2 hat den Wert:

$$Q_2 = c\bar{\varepsilon}:\bar{\varepsilon}+x\bar{\mu}:\bar{\mu}+(r+s)\bar{\varepsilon}:\bar{\mu}. \qquad (16)$$

Die Quadrate $\bar{\varepsilon}:\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}:\bar{\mu}$ sind wesentlich positive Zahlen, das Doppelprodukt $\bar{\varepsilon}:\bar{\mu}$ kann auch negative Werte annehmen. Tatsächlich ist aber die Wärmeproduktion $(r+s)\bar{\varepsilon}:\bar{\mu}$ in den meisten von mir untersuchten Fällen gleich Null.

V. Der elektromagnetische und der chemische Energiefluß.

16. In der Energiegleichung erscheint neben den anderen Gliedern die Divergenz eines Vektors $\mathfrak{s}$ und diesen muß man als den Energiefluß bezeichnen, weil sich das Raumintegral einer Divergenz in ein Oberflächenintegral verwandeln läßt und dieses sein Vorzeichen wechselt, je nachdem man die betrachtete geschlossene Fläche als Oberfläche des eingeschlossenen oder ausgeschlossenen Raumes ansieht. Die Divergenz des Energieflusses stellt deshalb einen Energiebetrag dar,

welcher pro Volums- und Zeiteinheit von dem betrachteten Teile des Mediums auf den ausgeschlossenen Teil übertragen wird. Das letzte Glied der Gleichung (10) ergibt zunächst den elektromagnetischen oder Poynting'schen Energiefluß:

$$\mathfrak{s}_1 \stackrel{s}{=} c_0 \mathfrak{e} \times \mathfrak{m}. \tag{17}$$

Aus der einigermaßen analog gebauten rechten Seite der Gleichung (12) ergibt sich der chemische Energiefluß, den wir nun berechnen wollen, zu welchem Behufe ein vektoranalytischer Satz vorausgeschickt werden muß.

Das Gibbs'sche skalare Doppelprodukt zweier beliebiger Dyaden ε und μ, welches der Skalar des dyadischen Produktes $\varepsilon \cdot \mu_c$ ist, worin μ_c die konjugierte Dyade von μ ist, gestattet bekanntlich Kommutation und Konjugation beider Faktoren:

$$\varepsilon : \mu = \mu : \varepsilon = \varepsilon_c : \mu_c.$$

Als vektorisches Doppelprodukt zweier beliebiger Dyaden ε und μ definiere ich den Rotor des dyadischen Produktes $\varepsilon \cdot \mu_c$ und bezeichne dasselbe durch das Doppelmultiplikationszeichen $\dot{\times}$:

$$\varepsilon \dot{\times} \mu \stackrel{s}{=} (\varepsilon \cdot \mu_c)_r. \tag{18}$$

Auch das vektorische Doppelprodukt gestattet distributive Multiplikation von Polynomen, ferner Kommutation der Faktoren nach folgender Regel:

$$\varepsilon \dot{\times} \mu \stackrel{s}{=} -\mu \dot{\times} \varepsilon. \tag{19}$$

Für die Divergenz eines vektorischen Doppelproduktes läßt sich leicht folgende sehr verwendbare Rechenregel beweisen:

$$\operatorname{div} \varepsilon \dot{\times} \mu = \nabla \times \varepsilon : \mu - \nabla \times \mu : \varepsilon. \tag{20}$$

Hienach ist, wenn man $\nabla \times \varepsilon$ an die Stelle von ε setzt:

$$\operatorname{div} (\nabla \times \varepsilon) \dot{\times} \mu = \nabla \times (\nabla \times \varepsilon) : \mu - \nabla \times \mu : \nabla \times \varepsilon,$$

$$\operatorname{div} (\nabla \times \mu) \dot{\times} \varepsilon = \nabla \times (\nabla \times \mu) : \varepsilon - \nabla \times \varepsilon : \nabla \times \mu.$$

Subtrahiert man diese Gleichungen voneinander und berücksichtigt, daß:

$$\nabla\times(\nabla\times\varepsilon) \stackrel{\mathfrak{g}}{=} \nabla\dot{\times}\nabla\cdot\varepsilon, \qquad \nabla\times(\nabla\times\mu) \stackrel{\mathfrak{g}}{=} \nabla\dot{\times}\nabla\cdot\mu,$$

so ergibt sich:

$$\operatorname{div}((\nabla\times\mu)\dot{\times}\varepsilon-(\nabla\times\varepsilon)\dot{\times}\mu) = \varepsilon:\nabla\dot{\times}\nabla\cdot\mu-\mu:\nabla\dot{\times}\nabla\cdot\varepsilon. \tag{21}$$

Man erkennt nun, daß sich die rechte Seite der Energiegleichung (12) als die Divergenz eines Vektors darstellen läßt und daß dieser chemische Energiefluß den Wert hat:

$$\mathfrak{s}_2 = -\varkappa_0(\nabla\times\bar{\mu})\dot{\times}\bar{\varepsilon}+\varkappa_0(\nabla\times\bar{\varepsilon})\dot{\times}\bar{\mu}. \tag{22}$$

VI. Elektrochemischer Energiefluß. Entdeckung des chemischen Stromes.

17. Als elektrochemische Dyaden bezeichne ich die charakteristischen Glieder $a\nabla,\mathfrak{e}$ und $b\nabla,\mathfrak{e}$ der Grundgleichungen (V) und (VI), welche die chemischen Vorgänge an die elektrischen Vorgänge kuppeln. Dieselben bilden den Ausgangspunkt und die Grundlage meiner Theorie. Sie geben den Wert:

$$\bar{\varepsilon}:a\nabla,\mathfrak{e}+\bar{\mu}:b\nabla,\mathfrak{e} \tag{23}$$

an die Energiegleichung (12) ab, dessen Deutung zu dem größten heuristischen Erfolge führte, welchen meine Theorie aufzuweisen hat.

Um den Wert (23) umzugestalten, gehen wir von der Rechenregel:

$$\nabla\cdot(\varepsilon\cdot\mathfrak{e}) = (\nabla\cdot\varepsilon)\cdot\mathfrak{e}+\varepsilon:\nabla;\mathfrak{e} \tag{24}$$

aus, welche gestattet, die Divergenz des vektorischen Produktes $\varepsilon\cdot\mathfrak{e}$ einer beliebigen Dyade ε mit einem Vektor $\mathfrak{e}$ zu zerlegen. Es ist also:

$$a_1\bar{\varepsilon}:\nabla;\mathfrak{e} = \nabla\cdot(a_1\bar{\varepsilon}\cdot\mathfrak{e})-(\nabla\cdot a_1\bar{\varepsilon})\cdot\mathfrak{e},$$

$$a_2\bar{\varepsilon}:\mathfrak{e};\nabla = \nabla\cdot(a_2\bar{\varepsilon}_c\cdot\mathfrak{e})-(\nabla\cdot a_2\bar{\varepsilon}_c)\cdot\mathfrak{e},$$

$$a_3\bar{\varepsilon}:\nabla\cdot\mathfrak{e} = \nabla\cdot(a_3\bar{\varepsilon}_s\cdot\mathfrak{e})-(\nabla\cdot a_3\bar{\varepsilon}_s)\cdot\mathfrak{e}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} : a\nabla, \mathfrak{e} &= \nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{e}) - (\nabla \cdot a\bar{\varepsilon}) \cdot \mathfrak{e}, \\ \bar{\mu} : b\nabla, \mathfrak{e} &= \nabla \cdot (b\bar{\mu} \cdot \mathfrak{e}) - (\nabla \cdot b\bar{\mu}) \cdot \mathfrak{e}. \end{aligned} \tag{25}$$

Der Wert (23) der Energiegleichung zerfällt demnach in die Divergenz des Vektors:

$$(a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu}) \cdot \mathfrak{e}, \tag{26}$$

welcher also ein elektrochemischer Energiefluß, und zwar der lange gesuchte Energiefluß der longitudinalen elektrischen Strahlen ist, und in einen zweiten an sich nicht erklärbaren Wert:

$$-(\nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu})) \cdot \mathfrak{e}.$$

Ich versichere, daß ich hieraus und nur hieraus mit Sicherheit geschlossen habe, daß die erste Maxwell'sche Gleichung durch Hinzufügung des Gliedes:

$$\nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu}) \tag{27}$$

vervollständigt werden muß. Dieser Vektor gibt, wenn er nach der Poynting'schen Methode mit $\mathfrak{e}\cdot$ multipliziert wird, den Betrag:

$$\mathfrak{e} \cdot \nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu})$$

an die Energiegleichung (10) ab, welcher den sonst nicht erklärbaren gleichen und entgegengesetzten Restbetrag der Energiegleichung (12) aufhebt.

Der Vektor (27) bestimmt also einen Strom, welcher zu dem Verschiebungsstrome und dem Leitungsstrome hinzutritt und welchen ich als chemischen Strom bezeichne, weil er ausschließlich durch die temporäre chemische oder stoffliche Inhomogenität des Mediums hervorgerufen wird.

Daß dieser chemische Strom bei der Elektrolyse und der elektrischen Entladung eine große Rolle spielen muß, ist leicht einzusehen. Derselbe bewirkt aber ferner die Kuppelung der elektromagnetischen Gleichungen (I) und (II) an die chemischen Gleichungen (V) und (VI), vor Auffindung des chemischen Stromes waren die elektromagnetischen Gleichungen nur im

starken elektromagnetischen Felde durch die Verschiebungsströme:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\cdot \mathfrak{e}_0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot \mathfrak{m}_0$$

an die chemischen Gleichungen gekuppelt, bei Abwesenheit starker statischer Felder aber ganz unabhängig von denselben. Es ist sonach ausschließlich der Auffindung des chemischen Stromes zuzuschreiben, daß meine Theorie jetzt alle Strahlungserscheinungen bei Abwesenheit statischer elektromagnetischer Felder (Dispersion, Emission und Absorption, natürliche Drehung der Polarisationsebene, Longitudinalstrahlen im unelektrischen Felde etc.) darstellt.

Berücksichtigt man in analoger Weise die magnetochemischen Dyaden $a'\nabla, \mathfrak{m}$ und $b'\nabla, \mathfrak{m}$, welche weniger wichtig sind, weil die Konstanten a' und b' in den meisten Medien nahezu Null sind, so ergibt sich, daß der magnetischen Grundgleichung (II) der magnetochemische Strom:

$$\nabla\cdot(a'\bar{\varepsilon}+b'\bar{\mu}) \tag{28}$$

hinzugefügt werden muß, welcher zu dem magnetischen Verschiebungsstrome hinzukommt, den Ausgleich eventuell auftretender magnetischer Ladungen besorgt und bei der natürlichen Drehung der Polarisationsebene mitwirkt.

Es ergibt sich hiebei, daß der gesamte elektrochemische Energiefluß $\mathfrak{s}_8$ den Wert hat:

$$\mathfrak{s}_8 \overset{s}{=} (a\bar{\varepsilon}+b\bar{\mu})\cdot\mathfrak{e}+(a'\bar{\varepsilon}+b'\bar{\mu})\cdot\mathfrak{m}. \tag{29}$$

Es dürfte dies auch der Energiefluß der Elektrolyse, des Peltier- und Thomsoneffektes sein, welche Erscheinungen wir jedoch hier nicht betrachten werden.

Damit ist die Untersuchung der Energiegleichung für ruhende Medien abgeschlossen.

VII. Ponderomotorische Wirkungen im elektromagnetischen Felde. Energiefluß in bewegten Medien.

19. Die Bewegung des Mediums hat nach meiner Theorie durchaus keine direkte Wirkung auf elektromagnetische Vor-

gänge. Alle ponderomotorischen Wirkungen im elektromagnetischen Felde ergeben sich ausschließlich als Folge der temporären Veränderungen der Leitfähigkeiten γ und ξ zufolge der Deformation des bewegten Mediums nach (III) und (IV). Diese Deformationen finden nach der Energiegleichung (11) mit dem Energiegewinne:

$$-\frac{1}{2}(\mathfrak{e}\cdot\varepsilon;\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot\mu;\mathfrak{m}):[\nabla,\mathfrak{v}]=-\nabla;\mathfrak{v}:\Theta_1 \qquad (30)$$

statt, was die Kraftwirkungen im elektrischen und magnetischen Felde erklärt.

Die Dyade Θ_1, welche durch Gleichung (30) definiert ist, muß die Spannungsdyade des elektromagnetischen Feldes sein, da sich nach der Rechenregel (24) dieser Wert:

$$-\nabla;\mathfrak{v}:\Theta_1=-\operatorname{div}(\Theta_1\cdot\mathfrak{v})+(\nabla\cdot\Theta_1)\cdot\mathfrak{v}$$

zerlegen läßt in die Divergenz eines Energieflusses $-\Theta_1\cdot\mathfrak{v}$ und in das skalare Produkt eines durch das elektromagnetische Feld bestimmten Vektors $\nabla\cdot\Theta_1$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Dieses Produkt stellt also die materielle Variation der Bewegungsenergie, d. i. die Änderung der Bewegungsenergie eines bestimmten Teiles der Materie pro Volums- und Zeiteinheit. Den derivierten Vektor $\nabla\cdot\Theta_1$ der Spannungsdyade Θ_1 pflegt man als Kraft pro Volumseinheit zu bezeichnen. Da

$$[\nabla,\mathfrak{v}]=\nabla;\mathfrak{v}+\nabla\underset{;}{\times}\mathfrak{v}$$

und

$$\nabla\underset{;}{\times}\mathfrak{v}:\mathfrak{e}\cdot\varepsilon;\mathfrak{e}=\nabla;\mathfrak{v}:\mathfrak{e}\cdot\varepsilon\underset{;}{\times}\mathfrak{e},$$

so folgt aus (30):

$$\Theta_1=\frac{1}{2}(\mathfrak{e}\cdot\varepsilon;\mathfrak{e}+\mathfrak{e}\cdot\varepsilon\underset{;}{\times}\mathfrak{e}+\mathfrak{m}\cdot\mu;\mathfrak{m}+\mathfrak{m}\cdot\mu\underset{;}{\times}\mathfrak{m}). \qquad (31)$$

Es ist dies präzise die Maxwell-Hertz'sche Spannungsdyade; aus meiner Theorie folgen also genau dieselben ponderomotorischen Wirkungen im elektromagnetischen Felde wie aus der Maxwell-Hertz'schen Theorie.

20. Wir können die ganze Energiegleichung auf einen Teil der bewegten Materie beziehen, wenn wir erst die

materiellen Variationen $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}t$ der potentiellen Energien statt deren materieller, beziehungsweise lokaler Fluxion eingeführt haben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_2 &= \frac{\delta}{\delta t} E_2 - E_2 \operatorname{div} \mathfrak{v}, \\ \frac{\partial}{\partial t} E_1 &= \frac{\delta}{\delta t} E_1 - \operatorname{div} E_1 \mathfrak{v}. \end{aligned} \tag{32}$$

Die lokale Fluxion unterscheidet sich nur durch die Divergenz eines Energieflusses $-E_1 \mathfrak{v}$ von der materiellen Variation, welcher den Transport der elektromagnetischen Energie E_1 mit der Materie rückgängig macht, d. h. aufhebt, wie es sein muß, da die elektromagnetischen Vorgänge nicht von der Bewegung der Materie abhängen. Der gesamte von der Geschwindigkeit des Mediums abhängende Energiefluß hat also den Wert:

$$\mathfrak{s}_4 \overset{\mathrm{s}}{=} -\Theta \cdot \mathfrak{v} - E_1 \mathfrak{v}, \tag{33}$$

worin Θ die Summe aller vorhandenen Spannungsdyaden ist. Den Fluß der Bewegungsenergie $-\Theta \cdot \mathfrak{v}$ pflegt man als Arbeit der an der Oberfläche des betrachteten Teiles des Mediums angreifenden Spannungen zu bezeichnen.

VIII. Ponderomotorische Wirkung der temporären stofflichen Inhomogenitäten.

21. Nach den Grundgleichungen (V) und (VI) ändern sich zufolge der Deformation des Mediums, aber auch aus anderen Ursachen die Dyaden ε und μ, so daß mit Deformationen des Mediums der Energiegewinn:

$$\bar{\varepsilon} : n\nabla, \mathfrak{v} + \bar{\mu} : n'\nabla, \mathfrak{v} - E_2 \operatorname{div} \mathfrak{v} = -\nabla ; \mathfrak{v} : \Theta_2 \tag{34}$$

verbunden ist, welcher den restlichen Betrag der Energiegleichung (12) sowie das in (32) noch nicht berücksichtigte Glied zusammenfaßt. Es treten also im stofflich inhomogenen Felde Kräfte auf, welche die derivierten Vektoren der Spannungsdyade Θ_2 sind.

Da nach (25):

$$\bar{\varepsilon} : n \nabla, \mathfrak{v} = \nabla \cdot (n \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{v}) - (\nabla \cdot n \bar{\varepsilon}) \cdot \mathfrak{v},$$

$$\bar{\mu} : n' \nabla, \mathfrak{v} = \nabla \cdot (n' \bar{\mu} \cdot \mathfrak{v}) - (\nabla \cdot n' \bar{\mu}) \cdot \mathfrak{v},$$

worin:

$$n \bar{\varepsilon} \stackrel{9}{=} n_1 (\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_c) + n_3 \varepsilon_s,$$
$$n' \bar{\mu} \stackrel{9}{=} n_1' (\bar{\mu} + \bar{\mu}_c) + n_3' \mu_s, \tag{35}$$

so ergibt sich für diese Spannungsdyade der temporären stofflichen Inhomogenität der Wert:

$$\Theta_2 \stackrel{9}{=} -(n \bar{\varepsilon} + n' \bar{\mu}) + E_2. \tag{36}$$

Da das stoffliche Feld $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ an das elektromagnetische Feld gekuppelt ist, werden auch im inhomogenen elektromagnetischen Felde Kraftwirkungen zu beobachten sein, welche durch die Spannungsdyade Θ_2 bestimmt sind, also hinzutreten zu den durch die Spannungsdyade Θ_1 bestimmten Maxwell-Hertz'schen Kräften, doch werden diese neuen Kraftwirkungen sehr klein sein, da die Abweichungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ sehr klein sind.

Weitaus wichtiger, weil leichter rein zu beobachten, sind aber die Spannungen Θ_2 im unelektrischen Felde, welche wir nun berechnen wollen.

IX. Theorie der Elastizität und der Doppelbrechung deformierter Medien.

22. Wir betrachten ein ideales Medium, für welches mit hinreichender Annäherung

$$c = x = r = s = 0$$

gesetzt werden kann, welches also einer Wärmeproduktion Q_2 im unelektrischen Felde (Gleichung 16) unfähig ist. Ferner nehmen wir an, daß in diesem Medium stoffliche Inhomogenitäten statisch bestehen können, daß also die Konstante $\varkappa_0$ (die Diffusion stofflicher Abweichungen) hinreichend klein ist. Endlich betrachten wir nur kleine Deformationen dieses

Mediums. Die derivierte Dyade $\nabla;\mathfrak{u}$ der Verschiebungen $\mathfrak{u}$ der materiellen Punkte sei also klein. Da:

$$\mathfrak{v}\cdot(I-\nabla;\mathfrak{u}) \overset{3}{=} \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{u},$$

so können wir mit hinreichender Annäherung:

$$n\nabla, \mathfrak{v} = \frac{d}{dt}(n\nabla, \mathfrak{u}).$$

setzen. Die Grundgleichungen (V) und (VI) nehmen nach allen diesen Vernachlässigungen die einfache Gestalt an:

$$e: \frac{d}{dt}\varepsilon + \frac{d}{dt}(n\nabla, \mathfrak{u}) = 0, \tag{37}$$

$$m: \frac{d}{dt}\mu + \frac{d}{dt}(n'\nabla, \mathfrak{u}) = 0, \tag{38}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$e: \bar{\varepsilon} \overset{2}{=} -n\nabla, \mathfrak{u}, \tag{39}$$

$$m: \bar{\mu} \overset{2}{=} -n'\nabla, \mathfrak{u}. \tag{40}$$

Hiemit ergibt sich, daß in diesem idealen Medium stoffliche Abweichungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ durch und nur durch die Deformation des Mediums bestimmt werden. Wir wollen solche ausschließlich durch Deformation bewirkte stoffliche Änderungen nicht geradezu chemische Änderungen nennen, im Lichte meiner Theorie ist aber diese Unterscheidung unwesentlich.

Daß aber die dielektrische, beziehungsweise diamagnetische Dyade ε, beziehungsweise μ zufolge der Deformation des Mediums wirklich kristallische Änderungen $\bar{\varepsilon}$, beziehungsweise $\bar{\mu}$ erleiden, ist eine Tatsache, welche meiner Auffassung nach unmittelbar aus der Doppelbrechung deformierter Medien folgt. Die Gleichungen (39) und (40) geben das Gesetz dieser Doppelbrechung genau an, und zwar sowohl für im Ruhezustande isotrope als auch anisotrope Medien.

Noch direkter beweisen die berühmten Versuche Boltzmann's eine Änderung der dielektrischen Dyade ε der Gase bei Volumsänderung derselben, deren Gesetz, allerdings nur für kleine Volumsänderungen, ebenfalls durch (39) ausgesprochen ist.

23. Um die Änderungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ in Kristallen berechnen zu können, müssen wir durch e, beziehungsweise m dividieren. Als reziproke Tetrade e^{-1} definieren wir eine Tetrade, welche, doppelt an die Tetrade e gebunden, die Einheitstetrade:

$$I^{IV} \stackrel{81}{=} \mathfrak{i};I;\mathfrak{i}+\mathfrak{j};I;\mathfrak{j}+\mathfrak{k};I;\mathfrak{k}$$

ergibt:

$$e^{-1} : e \stackrel{81}{=} I^{IV}. \tag{41}$$

Die Einheitstetrade ist definiert durch ihre Eigenschaft, daß sie doppelt an eine beliebige Dyade ε gebunden werden kann, ohne deren Wert zu ändern:

$$I^{IV} : \varepsilon \stackrel{9}{=} \varepsilon : I^{IV} \stackrel{9}{=} \varepsilon.$$

Oben ist ihr analytischer Wert angegeben, worin $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ rektanguläre Einheitsvektoren sind. Multiplizieren wir (39) doppelt mit $e^{-1}:$ und (40) mit $m^{-1}:$, so ergibt sich:

$$\bar{\varepsilon} \stackrel{9}{=} -e^{-1} : n\nabla, \mathfrak{u}, \tag{42}$$

$$\bar{\mu} \stackrel{9}{=} -m^{-1} : n'\nabla, \mathfrak{u}. \tag{43}$$

24. Die stoffliche Energie E_2, welche den Abweichungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ entspricht und durch entsprechende Arbeitsleistung bei der Deformation des Mediums gewonnen wird, hat nach (14), (42) und (43) den Wert:

$$E_2 = \frac{1}{2} n\nabla, \mathfrak{u} : e^{-1} : n\nabla, \mathfrak{u} + \frac{1}{2} n'\nabla, \mathfrak{u} : m^{-1} : n'\nabla, \mathfrak{u}. \tag{44}$$

Die Spannungsdyade Θ_2, welche die durch die Deformation erweckten Kräfte bestimmt, hat nach (36), (42) und (43) den Wert:

$$\Theta_2 \stackrel{9}{=} ne^{-1} : n\nabla, \mathfrak{u} + n' m^{-1} : n'\nabla, \mathfrak{u}. \tag{45}$$

Man erkennt, daß diese aus den Grundgleichungen meiner Theorie ohne jede Zusatzannahme folgenden Deformationskräfte nichts anderes als die elastischen Kräfte sind und daß die reziproken Tetraden e^{-1} und m^{-1} in einer linearen, leicht berechenbaren Beziehung zu der W. Voigt'schen Elastizitätstetrade stehen. E_2 ist die potentielle elastische Energie.

Für isotrope Medien können e und m wie skalare Materialkonstante behandelt werden, für diese ergibt sich also nach (45) die elastische Spannungsdyade:

$$\Theta_2 \stackrel{2}{=} K(\nabla ; \mathfrak{u} + \mathfrak{u} ; \nabla) + \lambda \nabla \cdot \mathfrak{u}, \tag{46}$$

worin:

$$K = \frac{2 n_1^2}{e} + \frac{2 n_1'^2}{m}$$

und

$$\lambda = \frac{3 n_3^2 + 4 n_1 n_3}{e} + \frac{3 n_3'^2 + 4 n_1' n_3'}{m}.$$

Nach (46) ist K der Torsionsmodul und λ der Lamé'sche Modul. Diese Moduln sind wesentlich positiv und hängen auch wesentlich von den Quadraten der Materialkonstanten n ab. Die Doppelbrechung deformierter Medien hat hingegen in verschiedenen Medien verschiedenes Vorzeichen und hängt tatsächlich nach (42) und (43) von der ersten Potenz der Materialkonstanten n ab.

25. Vernachlässigen wir die Konstanten c, x, r und s nicht, so ergibt sich eine Theorie der unvollkommen elastischen Medien, auf welche hier nicht eingegangen werden kann. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des extremsten Falles unvollkommen elastischer Medien, nämlich der zähen Flüssigkeiten.

X. Theorie der Zähigkeit und des Kundt'schen Phänomens.

26. Wir betrachten nur inkompressible Flüssigkeiten und dürfen die Änderungen der elastischen Energie E_2 derselben außer acht lassen, also:

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = 0$$

setzen. Daß diese Vernachlässigung nicht vollkommen gestattet ist, merkt man sehr wohl bei den feineren Beobachtungen an in zähen Flüssigkeiten schwingenden starren Körpern.

Die Grundgleichungen (V) und (VI) nehmen, wenn wir wieder die Diffusionskonstante $\varkappa_0$ gleich Null setzen, die Form an:

$$c\bar{\varepsilon}+r\bar{\mu}+n_1[\nabla,\mathfrak{v}]=0, \tag{47}$$

$$x\bar{\mu}+s\bar{\varepsilon}+n_1'[\nabla,\mathfrak{v}]=0. \tag{48}$$

Die stationären stofflichen Änderungen bestimmen sich also durch:

$$\bar{\varepsilon}\overset{9}{=}\frac{n_1 x-n_1' r}{rs-cx}[\nabla,\mathfrak{v}], \tag{49}$$

$$\bar{\mu}\overset{9}{=}\frac{n_1' c-n_1 s}{rs-cx}[\nabla,\mathfrak{v}]. \tag{50}$$

Daß die dielektrische, beziehungsweise diamagnetische Dyade zufolge der raschen Deformation der Flüssigkeit wirklich kristallische Änderungen $\bar{\varepsilon}$, beziehungsweise $\bar{\mu}$ erfahren, ist eine Tatsache, welche meiner Auffassung nach unmittelbar aus der Kundt'schen Doppelbrechung folgt. Die Gleichungen (49) und (50) geben das Gesetz dieser Doppelbrechung genau an.[1]

27. Die Spannungsdyade Θ_2, welche die durch die rasche Deformation der zähen Flüssigkeit erweckten Reibungskräfte bestimmt, berechnet sich nach (36), (49) und (50) zu:

$$\Theta_2\overset{9}{=}K[\nabla,\mathfrak{v}], \tag{51}$$

worin:

$$K=\frac{n_1^2 x+n_1'^2 c-n_1 n_1'(r+s)}{cx-rs}.$$

---

[1] Kundt gehört also meiner Auffassung nach zu den Entdeckern flüssiger Kristalle; auch die Lehmann'schen flüssigen Kristalle sind nichts anderes als Medien, deren dielektrischer Koeffizient ε merklich dyadisch ist und deren Torsionsmodul klein ist. An flüssigen Kristallen kann ich gar nichts Verwunderliches finden, verwunderlich sind vielmehr die festen Kristalle wegen ihren ebenen Flächen. Um diese zu erklären, müßte man das Gesetz der Spannungsdyade inhomogener Medien (der Oberflächenspannung) aufsuchen.

Hiemit ist die Bewegung der zähen Flüssigkeiten beschrieben. Der Zähigkeitsmodul K ist wesentlich positiv und hängt auch wesentlich von den Quadraten der Konstanten n ab. Die Kundt'sche Doppelbrechung hat hingegen für verschiedene Medien verschiedenes Vorzeichen und hängt tatsächlich nach (49) und (50) von den ersten Potenzen der Materialkonstanten n ab.

28. Die Wärmeproduktion Q in rasch deformierten zähen Flüssigkeiten berechnet sich nach (16) zu:

$$Q_2 = c\bar{\varepsilon} : \bar{\varepsilon} + x\bar{\mu} : \bar{\mu} + (r+s)\bar{\varepsilon} : \bar{\mu}, \tag{52}$$

und zwar ergibt sich, wenn man die Werte $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ aus (49) und (50) einführt, hiefür der höchst einfache Wert:

$$Q_2 = K[\nabla, \mathfrak{v}] : [\nabla, \mathfrak{v}] \tag{53}$$

und dies ist der genau richtige Wert der Wärmeproduktion in mechanischem Maße pro Volums- und Zeiteinheit in bewegten, zähen, inkompressiblen Flüssigkeiten.[1]

XI. Elektromagnetische Wirkungen der Deformation.

29. Außer den ponderomotorischen Wirkungen hat die Deformation auch elektromagnetische Wirkungen, es treten die Deformationsströme, das sind magnetische, beziehungsweise elektrische Wirbel auf, welche direkt nachgewiesen werden können (Versuche von Rowland, Röntgen, Wilson) oder durch Induktion von Strömen (Faraday'sche und Unipolarinduktion) oder durch ihre ladende Wirkung (Reibungselektrisierung und Piezoelektrisierung) merklich werden.

Die elektromagnetischen Vorgänge werden jedoch meiner Auffassung nach keineswegs direkt von der Bewegung des Mediums beeinflußt und hängen nur dadurch von der Deformation desselben ab, daß die Materialkonstanten ε, μ, γ und ξ der elektromagnetischen Grundgleichungen (I) und (II) in deformierten Medien abnormale Werte annehmen. Weit wichtiger als die Änderungen von ε und μ sind in elektromagnetischer Hinsicht die Änderungen der Leitfähigkeiten $\bar{\gamma}$ und $\bar{\xi}$ nach (III)

[1] Vergl. Jaumann, Bewegungslehre. Leipzig 1905, p. 396.

und (IV), weil diese weit leichter nachweisbare Wirkungen, insbesondere im starken elektromagnetischen Felde haben müssen.

Wir können deshalb zunächst von der Variabilität von ε und μ absehen. Eliminieren wir ferner $\overline{\gamma}$ und ξ aus den Grundgleichungen, so nehmen die elektromagnetischen Gleichungen (I) und (II) die Form an:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \cdot \mathfrak{e}) - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e} + \gamma_0 \cdot \mathfrak{e} = c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \qquad (\mathrm{I}a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu \cdot \mathfrak{m}) - [\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu \cdot \mathfrak{m} = -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}. \qquad (\mathrm{II}a)$$

Die Glieder

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \mathfrak{m},$$

welche hier weggelassen wurden, dürfen bei den jetzt zu betrachtenden Vorgängen in einigermaßen homogenen Medien gewiß völlig vernachlässigt werden, nicht aber in den Grenzflächen verschiedener Medien, insbesondere in den Stirnflächen bewegter starrer Körper. Für diese dünnen Grenzschichten von ungemein starker Inhomogenität gelten aber meine Gleichungen überhaupt nicht, keine Oberflächenwirkung wird durch dieselben dargestellt. Zu diesen Oberflächenwirkungen rechne ich die Oberflächenspannung, Kristallisation sowie die auf das Auftreten permanenter elektrischer, beziehungsweise magnetischer Wirbel in den Oberflächenschichten zurückzuführenden kontaktelektromotorischen Wirkungen,[1] permanenten Elektrisierungen der piezoelektrischen Kristalle und permanenten Magnetisierungen.

Die Deduktionen aus den Gleichungen (Ia) und (IIa) habe ich a. a. O.[2] ausführlich mitgeteilt, kann mich also hier kurz fassen und darauf beschränken, einige nähere Ausführungen und Zusätze mitzuteilen.

---

[1] Vergl. diese Sitzungsber., Bd. CIX (1900), Ann. d. Phys., 3, p. 587f.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. CXV (1906), p. 346.

XII. Rowlandeffekt und Unipolarinduktion.

30. Das Rowland'sche Phänomen sowie der vom Standpunkte meiner Theorie hievon nicht wesentlich verschiedene Röntgen'sche Versuch haben ihr genaues Analogon in der Unipolarinduktion und dem von dieser meiner Auffassung nach nicht wesentlich verschiedenen Wilson'schen Versuche. Sie stellen direkte experimentelle Beweise für das wirkliche Vorhandensein des elektrischen, beziehungsweise magnetischen Deformationsstromes:

$$-[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e}, \quad \text{beziehungsweise} \quad -[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \mu \cdot \mathfrak{m},$$

welcher nach (I*a*) und (II*a*) zu dem Verschiebungs- und Leitungsstrome hinzutritt, dar. Diese Deformationsströme entstehen zufolge der raschen Torsion, welche das Medium erfährt, das die bei diesen Versuchen rotierenden Körper umgibt, weil diese Torsion im starken elektrischen, beziehungsweise magnetischen Felde stattfindet. Auch die quantitative Übereinstimmung meiner Theorie mit diesen Beobachtungen ist eine präzise (vergl. a. a. O., p. 899 und 905).

Durch weit genauere Beobachtungen, als bisher vorliegen, wäre aber eine Entscheidung zwischen meiner und den früheren Auffassungen dieser Erscheinungen möglich. Nach meiner Theorie verlaufen die von Rowland und Röntgen nachgewiesenen Kreisströme in dem tordierten Medium und haben nicht ihren Sitz in der Oberfläche der rotierenden Platten.

Aus der Lorentz'schen Theorie folgt, daß ein um einen Durchmesser rotierender, mit einem starren Dielektrikum gefüllter, aus konzentrischen Metallkugelschalen bestehender Kondensator nach außen auch dann magnetische Wirkungen äußern müßte, wenn die innere Belegung geladen und die äußere zur Erde abgeleitet ist. Nach meiner Theorie ist dies ausgeschlossen, denn bei diesem Versuche finden im elektrischen Felde keine Deformation statt und dort, wo Deformationen stattfinden, ist kein elektrisches Feld. Bei dem ähnlichen Eichenwald'schen Versuche sind Deformationen im elektrischen Felde nicht hinreichend ausgeschlossen worden, wodurch sich seine Beobachtung erklären dürfte.

XIII. Reibungselektrisierung und Piëzoelektrisierung.

31. Der Rowland'sche Strom ist ringförmig geschlossen, verläuft parallel zu den rotierenden Platten und bewirkt deshalb keine Ladung derselben. Er hat auch keine Wärmewirkung, da er senkrecht gegen den elektrischen Feldvektor verläuft.

Es ist jedoch hiebei die Änderung $\bar{\varepsilon}$ vernachlässigt worden, welche die dielektrische Dyade des rasch deformierten Mediums zwischen den Platten erfährt. Dieses wird die Kundt'sche Doppelbrechung zeigen und es ist nach (49):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \alpha[\nabla, \mathfrak{v}], \tag{54}$$

worin:

$$\alpha = \frac{n_1 x - n_1' r}{rs - cx}.$$

Der Deformationsstrom hat also den Wert:

$$-[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{e} = -[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e} - \alpha[\nabla, \mathfrak{v}]^2 \cdot \mathfrak{e}. \tag{55}$$

Der erste Teil des Deformationsstromes ist der Rowlandsche Strom:

$$-[\nabla, \mathfrak{v}] \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e} = -\mathfrak{v}_0 \frac{1}{\mathfrak{n}} \varepsilon_0 \cdot \mathfrak{e}.$$

Hierin ist $\mathfrak{v}_0$ die Differenz der Geschwindigkeiten der Platten an gegenüberliegenden Stellen und $\mathfrak{n}$ ihre Entfernung voneinander. Der Rowland'sche Strom hat die periphere Richtung $\mathfrak{v}_0$ und hängt von der ersten Potenz der Deformationsgeschwindigkeit ab.

Der zweite Teil des Deformationsstromes, welcher vom Quadrate der Deformationsgeschwindigkeit abhängt, ist der reibungselektrische Strom. Dieser hat den Wert:

$$-\alpha[\nabla, \mathfrak{v}]^2 \cdot \mathfrak{e} = -2\alpha \frac{\mathfrak{v}_0^2}{\mathfrak{n}^2} \mathfrak{e}, \tag{56}$$

also die Richtung $\mathfrak{e}$, welche zu den Platten normal ist. Dieser Strom geht von einer Platte zur anderen und muß also fortwährend anwachsende entgegengesetzte Ladungen derselben bewirken.

32. Ich will versuchen, diese Erscheinung im Zusammenhange mit dem gleichzeitig auftretenden Kundt'schen Phänomen experimentell nachzuweisen. Sie unterscheidet sich dadurch von der gewöhnlichen Reibungselektrisierung, daß die beiden Platten nicht aus verschiedenem Material zu bestehen brauchen, daß aber dafür anfänglich ein wenn auch sehr schwaches elektrisches Feld zwischen den beiden Platten gegeben sein muß. Ist die Kundt'sche Konstante α des Mediums zwischen den Platten negativ, so hat der Deformationsstrom die Richtung $\mathfrak{e}$, entladet also die anfänglich geladenen Platten, wonach nur mehr der Rowland'sche Strom bestehen bleibt. Ist aber α positiv, so hat der reibungselektrische Strom die Richtung $-\mathfrak{e}$, verstärkt also die anfänglich gegebene schwache Ladung der Platten fortwährend.

33. Bei der eigentlichen Reibungselektrisierung ist anfänglich kein elektrisches Feld zwischen den Platten gegeben, dafür müssen dieselben aus verschiedenem Material bestehen und es ist sehr wahrscheinlich, daß das für das erste Auftreten des reibungselektrischen Stromes nötige sehr schwache elektrische Feld durch Kontaktelektrisierung der beiden genäherten Platten entsteht. Dasselbe und mit ihm der reibungselektrische Strom verstärkt sich zufolge des Deformationsstromes sehr rasch, wenn die Konstante α des Zwischenmediums positiv ist.

34. Da es keine Reibungsmagnetisierung gibt, muß (abgesehen davon, daß es keine Kontaktmagnetisierung gibt) geschlossen werden, daß die der Konstanten α entsprechende Konstante der Gleichung (50) in allen Medien entweder Null oder negativ ist.

35. Daß meine Theorie besser als jede andere geeignet ist, die Piezoelektrisierung darzustellen, welche augenscheinlich die elektromagnetische Wirkung der Deformation beweist, scheint mir nicht zweifelhaft zu sein. Doch fehlt noch die Erklärung des schwachen, aber permanenten elektrischen Feldes, welches in allen piezoelektrischen Kristallen vorhanden sein muß. Der piezoelektrische Strom ergibt sich sodann als einfacher Deformationsstrom, da er der ersten Potenz der Deformationsgeschwindigkeit proportional ist. Das Gesetz dieses permanenten elektrischen Feldes der Kristalle läßt sich deshalb einfach und

exakt aus den piezoelektrischen Gesetzen folgern, die Erklärung dieses permanenten elektrischen Feldes dürfte aber ohne ein Eingehen in die Theorie der Kristalloberflächen (vergl. § 29) nicht möglich sein.

XIV. Die Faraday'sche Induktion in bewegten Medien.

36. Auch die Faraday'sche Induktion in bewegten Medien ist meiner Auffassung nach eine Folge der temporären magnetischen Leitfähigkeit $\bar{\xi}$, welche in rasch deformierten Medien auftritt. Ist ein magnetisches Feld vorhanden, so bewirken diese Leitfähigkeiten ξ das Auftreten magnetischer Ströme, d. i. elektrischer Wirbel, welche die elektromotorischen Kräfte der Induktion bestimmen. Den Nachweis, daß meine Theorie unter jenen Bedingungen, unter welchen Induktionsmessungen ausgeführt werden, präzise zu dem Faraday'schen Induktionsgesetze führt, habe ich a. a. O.[1] erbracht und verweise hierauf. Ferner will ich diesen Beweis hier in einer zweiten abgeänderten Form führen.

Die (nach l. c. p. 358 stets erfüllte) Bedingung, welche dem magnetischen Felde auferlegt werden muß, damit nach meiner Theorie nur die gewöhnlichen Induktionserscheinungen auftreten, lautet:

$$\operatorname{rot}(\mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mu \cdot \mathfrak{m}) = 0. \tag{57}$$

Man kann [vergl. l. c. p. 360, Gleichung (43)] die magnetische Grundgleichung (IIa) in die Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu \cdot \mathfrak{m}) + \operatorname{rot}(\mu \cdot \mathfrak{m} \times \mathfrak{v}) + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mu \cdot \mathfrak{m} + \operatorname{grad} s = -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}, \tag{58}$$

worin:

$$\operatorname{grad} s = \mathfrak{v} \times \operatorname{rot} \mu \cdot \mathfrak{m} - \operatorname{grad} \mathfrak{v} \cdot \mu \cdot \mathfrak{m} \tag{59}$$

gesetzt wurde, was nach (57) zulässig ist. Meine Gleichung (IIa) unterscheidet sich also von der magnetischen Gleichung der Maxwell-Hertz'schen Theorie nur durch einen Gradienten

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CXV (1906), p. 358 ff.

und es muß nachgewiesen werden, daß dies für die Berechnung der elektromotorischen Kräfte, d. i. der elektrischen Wirbel, also für die Berechnung von rot $\mathfrak{e}$ gleichgültig ist.

Wir zerlegen die elektrische Vektorverteilung in einen rotorfreien und einen solenoidalen Teil, setzen also:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e}_1 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{e}_2 = 0.$$

Dann ist:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{e} = \operatorname{rot} \mathfrak{e}_1$$

und es handelt sich also nur um die Berechnung von $\mathfrak{e}_1$. Hiezu muß man die Verteilung des Vektors:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{e}_1 = \nabla^2 \mathfrak{e}_1$$

im ganzen Raume kennen. Es haben übrigens hiebei die von dem betrachteten Orte entfernteren Teile des Raumes einen mit dem Quadrate der Entfernung abnehmenden Einfluß. Bei dieser Berechnung muß man also den Vektor

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{e} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{e}_1$$

aus (58) berechnen, indem man den Rotor aller Glieder dieser Gleichung berücksichtigt. Hiebei fällt aber das Glied grad s völlig weg, weil:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} s \equiv 0.$$

Es ergibt sich also wieder der Satz: Ist das magnetische Feld und die Geschwindigkeitsverteilung gegeben, so berechnen sich hieraus die auftretenden elektromotorischen Kräfte (elektrischen Wirbel) nach meiner Theorie genau in derselben Weise wie nach der Maxwell-Hertz'schen Theorie.

37. Damit ist allerdings noch nicht bewiesen, daß ein Induktionsexperiment von längerer Dauer nach meiner Theorie ebenso verlaufen muß wie nach der Hertz'schen Theorie, denn es könnte sich das anfänglich gegebene magnetische Feld nach meiner Theorie in anderer Weise ändern, als den Beobachtungen entspricht. Daß dies aber nicht zu fürchten ist, läßt sich in folgender Weise einsehen.

Zunächst kann in derselben Weise wie in § 36 nachgewiesen werden, daß, wenn das elektrische Feld und die

Geschwindigkeitsverteilung gegeben sind, die auftretenden Ströme zusammengenommen (also die auftretenden magnetischen Wirbel) aus meiner Theorie sich ebenso wie aus der Hertz'schen Theorie berechnen.

Wir dürfen hiebei überdies die nach meiner Theorie auftretenden, für die Entladung des Feldes nicht unwichtigen chemischen Ströme:

$$\nabla \cdot (a \bar{\mathfrak{e}} + b \bar{\mathfrak{u}}), \quad \text{beziehungsweise} \quad \nabla \cdot (a' \bar{\mathfrak{e}} + b' \bar{\mathfrak{u}})$$

nicht unberücksichtigt lassen. Diese stellen aber ebenfalls mit sehr großer Annäherung Gradienten dar, ihr Auftreten kann also an der Gültigkeit obiger Sätze nichts ändern.

Da also die magnetischen Wirbel und elektrischen Wirbel sich nach beiden Theorien in gleicher Weise bestimmen, so muß nur noch der Nachweis erbracht werden, daß nach meiner Theorie nicht ein den Beobachtungen widersprechendes Auftreten elektrischer Ladungen und magnetischer Ladungen zu erwarten ist, was aber nach Kapitel XVI ausgeschlossen ist. Damit ist dann auch der Nachweis erbracht, daß auch bei länger dauernden Induktionsexperimenten das magnetische Feld sich nach meiner Theorie nicht merklich anders verändert als nach der Hertz'schen Theorie und daß also auch diese Induktionsexperimente nach beiden Theorien in gleicher Weise ablaufen müssen.

XV. Erhaltung der materiellen Ladungen.

38. Nach der Maxwell-Hertz'schen Theorie bleibt die elektrische und magnetische Ladung jedes Teiles der Materie in Nichtleitern unbedingt erhalten, was diese Theorie klassisch einfach, aber unnatürlich macht, denn die Ladungen bleiben tatsächlich nicht erhalten, wie die Reibungselektrisierung und die Entladung in Gasen, welche doch keine wahre Leitfähigkeit haben, beweisen.

Jedoch ist ein gewisses, wenn auch nicht unbedingtes Haften der Ladung an der Materie, welches zur Vorstellung der Materialität der Ladungen geführt hat, augenscheinlich vorhanden und dieses liegt auch meiner Theorie zugrunde. Aber die materielle Erhaltung der Ladungen folgt keineswegs aus

den elektromagnetischen Grundgleichungen (I) und (II), sondern aus den stofflichen Gleichungen (V) und (VI) meiner Theorie. Betrachten wir nur langsame Veränderungen eines starren oder langsam deformierten Mediums. Der skalare Teil der Gleichungen reduziert sich in diesem Falle mit hinreichender Annäherung auf:

$$c\bar{\varepsilon} + r\bar{\mu} + \frac{a_3}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \varepsilon_0 \mathfrak{e} + \frac{a_3'}{\mu_0} \operatorname{div} \mu_0 \mathfrak{m} = 0, \tag{60}$$

$$x\bar{\mu} + s\bar{\varepsilon} + \frac{b_3}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \varepsilon_0 \mathfrak{e} + \frac{b_3'}{\mu_0} \operatorname{div} \mu_0 \mathfrak{m} = 0. \tag{61}$$

Es wurde hiebei berücksichtigt, daß die elektrochemischen Dyaden $a\nabla, \mathfrak{e}$, $b\nabla, \mathfrak{e}$, $a'\nabla, \mathfrak{m}$ und $b'\nabla, \mathfrak{m}$ mit Annäherung isotrop, also den Ladungen in einem nicht allzu inhomogenen Medium proportional sind, so daß auch der isotrope Teil der materiellen Änderungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ den kristallischen Teil derselben weit übertrifft. Die stofflichen Anomalien $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ sind also mit Annäherung lineare Funktionen der Ladungen $\operatorname{div} \varepsilon_0 \mathfrak{e}$ und $\operatorname{div} \mu_0 \mathfrak{m}$. Da also die elektrischen und magnetischen Ladungen mit stofflichen Änderungen verbunden sind, so werden sie nahezu unverändert mit der Materie transportiert.

39. Während aber der anisotrope Teil der elektrochemischen Dyaden immerhin noch merkliche Größe hat, verschwindet der antisymmetrische Teil derselben ganz oder fast völlig (vergl. § 11). Da also der Rotor aller Glieder der Gleichungen (V) und (VI) verschwindend klein ist, können die elektrischen und magnetischen Wirbel in homogenen Nichtleitern unabhängig von materiellen Änderungen auftreten und verschwinden, diese Wirbel sind also auch unabhängig von der Bewegung der Materie. Die permanenten elektrischen und magnetischen Wirbel (elektromotorische Grenzringe, magnetomotorische Oberflächenschichten der Stahlmagnete, Leitungsströme) verdanken ihr Haften an der Materie also ausschließlich Gliedern der elektromagnetischen Grundgleichungen, von welchen jene, die sich auf sehr inhomogene Medien (Oberflächenschichten) beziehen, in Gleichung (I) und (II) nicht berücksichtigt sind.

XVI. Ausgleich der Ladungen in Nichtleitern. Entladungsströme.

40. Das im vorigen Kapitel betrachtete Haften der Ladungen an der Materie wird übrigens gewöhnlich nur in den Oberflächenschichten geladener Konduktoren beobachtet. In homogenen deformierbaren Medien findet nur insofern Erhaltung der Ladungen statt, als diese dauernd ungeladen bleiben.

Nach meiner Theorie treten aber in rasch deformierten Medien im elektromagnetischen Felde die Deformationsströme (§ 30) auf und diese sind keineswegs geschlossen, sondern bewirken freie elektrische und magnetische Ladungen. Diese sind zwar sehr schwach, wären aber doch merklich und es würde also der in § 37 befürchtete Fall eintreten, daß während länger andauernder Bewegungen sich das magnetische und elektrische Feld in anderer Weise ändern könnte, als den Beobachtungen entspricht, nach welchen die ungeladenen Medien mit großer Annäherung ungeladen bleiben.

Auch nach meiner Theorie ist jedoch das Auftreten von merklichen Ladungen ausgeschlossen, weil die durch die Deformationsströme oder andere Ursachen in einem anfänglich homogenen Medium hergestellten Ladungen auch dann, wenn das Medium präzise nichtleitend ist, sogleich Entladungsströme hervorrufen und sich hiedurch ausgleichen.

Die elektromagnetischen Gleichungen (I) und (II) nehmen, wenn wir von den Deformationsströmen absehen und die Divergenzen ihrer Glieder betrachten, die Form an:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \varepsilon_0 \mathfrak{e} + \operatorname{div} \nabla \cdot (a \bar{\varepsilon} + b \bar{\mu}) = 0, \qquad (62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mu_0 \mathfrak{m} + \operatorname{div} \nabla \cdot (a' \bar{\varepsilon} + b' \bar{\mu}) = 0. \qquad (63)$$

Die Werte $(a\bar{\varepsilon}+b\bar{\mu})$ und $(a'\bar{\varepsilon}+b'\bar{\mu})$ sind aber nach (60) und (61) lineare Funktionen der Ladungen, also sind durch diese Gleichungen die zeitlichen Änderungen der Ladungen als Funktion ihrer räumlichen Verteilung bestimmt. Diese Gleichungen haben aber den Typus von Diffusionsgleichungen

Fourier'scher Form. Hieraus folgt, daß die anfänglich in beliebiger Verteilung gegebenen oder durch die Deformationsströme bewirkten elektrischen und magnetischen Ladungen sich auch in einem präzise nichtleitenden Medium diffusionsartig ausgleichen müssen und daß die chemischen Ströme $\nabla\cdot(a\bar{\varepsilon}+b\bar{\mu})$ und $\nabla\cdot(a'\bar{\varepsilon}+b'\bar{\mu})$ als Entladungsströme wirken.

Es wird also durch die Auffindung der chemischen Ströme auch die nicht ganz unbedenkliche Annahme entbehrlich, daß viele feste Stoffe im normalen Zustand eine geringe magnetische Leitfähigkeit haben. Man kann jetzt sogar das Eisen als präzise magnetisch nichtleitend ansehen.

Zweiter Teil.

XVII. Elektrochemische Strahlen und chemische Schwingungen.

41. Im folgenden sollen nur mehr Medien betrachtet werden, welche sich ohne Deformation bewegen und welche weder im normalen Zustande noch vorübergehend metallische Leitfähigkeit haben. Eine Ausnahme hievon soll nur gemacht werden bei Berechnung der Fortpflanzung von Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten. Wir werden überdies fast immer nur ruhende Medien betrachten, ausgenommen jene Kapitel, in welchen die Aberration des Lichtes, das Fizeausche Phänomen und das Strömen ionisierter Gase behandelt werden.

Endlich nehmen wir meist an, daß die elektrochemischen Strahlen und Schwingungen, welche wir betrachten wollen, kleine Amplitude haben, und können uns zunächst begnügen, die Integration unter Vernachlässigung aller Glieder, welche Produkte dieser kleinen Größen enthalten, durchzuführen. Da die chemischen Änderungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ klein gegen die normalen Werte ε_0 und μ_0 der dielektrischen Dyaden sind, nehmen die Grundgleichungen (I), (II), (V) und (VI) folgende einfache Form an:

$$\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e}_0 + \eta \bar{\varepsilon} \cdot \mathfrak{e}_0 + \nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu}) \stackrel{3}{=} c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m}, \qquad (\mathrm{I}b)$$

$$\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \mathfrak{m}_0 + \nu \bar{\mu} \cdot \mathfrak{m}_0 + \nabla \cdot (a'\bar{\varepsilon} + b'\bar{\mu}) \stackrel{3}{=} -c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{e}, \quad (\mathrm{II}b)$$

$$e \frac{d}{dt} \varepsilon + c\bar{\varepsilon} + r\bar{\mu} + a\nabla, \mathfrak{e} + a'\nabla, \mathfrak{m} \stackrel{9}{=} \varkappa_0 \nabla \times \nabla \cdot \bar{\mu}, \qquad (\mathrm{V}b)$$

$$m \frac{d}{dt} \mu + x\bar{\mu} + s\bar{\varepsilon} + b\nabla, \mathfrak{e} + b'\nabla, \mathfrak{m} \stackrel{9}{=} -\varkappa_0 \nabla \times \nabla \cdot \bar{\varepsilon}. \qquad (\mathrm{VI}b)$$

42. Das allgemeinste Integral dieser Gleichungen, aus welchem eine ebene, gedämpfte Sinuswelle hergestellt werden kann, lautet:

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e} - \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}' e^{i\varphi}, & \mathfrak{e}' = \mathfrak{e}_1 + i\mathfrak{e}_2, \\ \bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} - \mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}' e^{i\varphi}, & \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_1 + i\mathfrak{m}_2, \\ \bar{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon' e^{i\varphi}, & \varepsilon' = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \\ \bar{\mu} = \mu - \mu_0 = \mu' e^{i\varphi}, & \mu' = \mu_1 + i\mu_2. \end{array}\right\} \quad (64)$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, ε_1, ε_2, μ_1, μ_2 reelle konstante Vektoren, beziehungsweise Dyaden. $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{m}'$, ε', μ' sind die komplexen Amplituden der Welle. Die Art, wie man aus den berechneten komplexen Wellen reelle Wellen zusammensetzen kann, darf als bekannt vorausgesetzt werden, sie ist übrigens in § 119 angegeben. Es können $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{m}_1$, ε_1, μ_1 als reelle Amplituden einer Sinuswelle und $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{m}_2$, ε_2, μ_2 als reelle Amplituden einer kohärenten, um eine Viertelwellenlänge vorauseilenden Welle betrachtet werden. Ferner bedeutet:

$$\varphi = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} - pt, \qquad (65)$$

worin:

$$\mathfrak{q} \stackrel{3}{=} \mathfrak{q}_1 + i\mathfrak{q}_2 \stackrel{3}{=} p\mathfrak{n}(1 + i\varkappa).$$

Hierin ist, wenn τ die Schwingungsdauer der Welle bedeutet, die reelle Zahl

$$p = \frac{2\pi}{\tau}$$

die Schwingungszahl der Welle. Es bedeutet $\mathfrak{r}$ den von einem beliebigen ruhenden Nullpunkt aus gezählten Ortsvektor, $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ zwei reelle Vektoren. Ergibt sich $\mathfrak{n}$ und $\varkappa$ reell, so bedeutet $\mathfrak{n}$ die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle und $\varkappa$ die Dämpfung pro Wellenlänge. Ergibt sich aber $\mathfrak{n}$ als imaginärer Wert, so ist $i\varkappa\mathfrak{n}$ die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit und $-\frac{1}{\varkappa}$ die Dämpfung pro Wellenlänge.

43. Die Fluxionen der Variablen (64) der Welle werden gebildet, indem man dieselben mit $-ip$ multipliziert. Die räumlichen Derivationen derselben werden gebildet, indem man $i\nabla\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{r} \stackrel{1}{=} i\mathfrak{q}$ an die Stelle von ∇ setzt.

XVIII. Amplituden der kohärenten chemischen Schwingungen.

44. In den chemischen Grundgleichungen (V) und (VI) kommen die materiellen Fluxionen d/dt der stofflichen Variablen vor. Es ist nach (9):

$$\frac{d}{dt}\bar{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t}\bar{\varepsilon} + \mathfrak{v}\cdot\nabla;\bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}\times\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} - \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\times\bar{\varepsilon}).$$

Die ersten zwei Werte sind groß, weil der kleinen Schwingungsdauer und Wellenlänge der betrachteten Strahlen wegen die zeitlichen und räumlichen Änderungen von $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ sehr groß sind. Hingegen ist der in den letzten zwei Gliedern angegebene Einfluß der Rotation des Mediums wohl äußerst schwer beobachtbar, denn diese zwei Glieder heben sich völlig auf, wenn $\bar{\varepsilon}$ isotrop ist, die Anisotropie dieser stofflichen Anomalien ist aber gering, und ferner ist die Winkelgeschwindigkeit des Mediums weit kleiner als die Schwingungszahl der betrachteten Strahlen. Es ist also:

$$\frac{d}{dt}\bar{\varepsilon} = i(-p + \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{q})\bar{\varepsilon}' e^{i\varphi}$$

oder:

$$e\frac{d}{dt}\bar{\varepsilon} = e(1 - \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})\frac{\partial}{\partial t}\bar{\varepsilon}. \tag{66}$$

Der Einfluß der Bewegung des Mediums auf die Fortpflanzung raschschwingender Wellen beschränkt sich also darauf, daß statt der Materialkonstanten e, beziehungsweise m die Werte:

$$e(1-\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}), \text{ beziehungsweise } m(1-\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})$$

in allen Beziehungen eintreten. Wir betrachten vorerst nur ruhende Medien.

45. Setzen wir das Integral (64) in die chemischen Gleichungen (Vb) und (VIb) ein, so erhalten wir die Amplitudengleichungen:

$$(-iep+c)\cdot\varepsilon'+(r+\varkappa_0\mathfrak{q}\,\dot{\times}\,\mathfrak{q})\cdot\mu' = -i(a\mathfrak{q},\mathfrak{e}'+a'\mathfrak{q},\mathfrak{m}'), \quad (67)$$

$$(-imp+x)\cdot\mu'+(s-\varkappa_0\mathfrak{q}\,\dot{\times}\,\mathfrak{q})\cdot\varepsilon' = -i(b\mathfrak{q},\mathfrak{e}'+b'\mathfrak{q},\mathfrak{m}'). \quad (68)$$

Die Determinante D dieser Gleichungen ist eine symmetrische, nahezu isotrope komplexe Dyade:

$$D \stackrel{9}{=} D_1+iD_2,$$

worin:

$$D_1 = -emp^2-rs+cx+\varkappa_0(r-s)\mathfrak{q}\,\dot{\times}\,\mathfrak{q}-\varkappa_0^2\mathfrak{q}^2\mathfrak{q}\,\dot{\times}\,\mathfrak{q}, \quad (69)$$

$$D_2 = -p(ex+mc). \quad (70)$$

Man erhält nun aus (67) und (68) die Amplituden der chemischen Schwingungen als Funktion der elektromagnetischen Amplituden:

$$D\cdot\varepsilon' \stackrel{9}{=} -(mp+ix)(a\mathfrak{q},\mathfrak{e}'+a'\mathfrak{q},\mathfrak{m}')+$$
$$+i(r+\varkappa_0\mathfrak{q}\,\dot{\times}\,\mathfrak{q})\cdot(b\mathfrak{q},\mathfrak{e}'+b'\mathfrak{q},\mathfrak{m}'), \quad (71)$$

$$D\cdot\mu' \stackrel{9}{=} -(ep+ic)(b\mathfrak{q},\mathfrak{e}'+b'\mathfrak{q},\mathfrak{m}')+$$
$$+i(s-\varkappa_0\mathfrak{q}\,\dot{\times}\,\mathfrak{q})\cdot(a\mathfrak{q},\mathfrak{e}'+a'\mathfrak{q},\mathfrak{m}'). \quad (72)$$

XIX. Amplituden der Verschiebungsströme in starken Feldern.

46. Nun ist es leicht, die Amplitude des Verschiebungsstromes:

$$\varepsilon_0\cdot\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e}_0, \text{ beziehungsweise: } \mu_0\cdot\frac{\partial\mathfrak{m}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m}_0$$

meiner Theorie zu berechnen. Die Maxwell'sche Komponente desselben hat die Amplitude:

$$-ip\varepsilon_0\mathfrak{e}', \quad \text{beziehungsweise} \quad -ip\mu_0\mathfrak{m}'.$$

Die Amplituden der von den statischen Feldstärken $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$ abhängenden Komponenten der Leitungs- und Verschiebungsströme bestimmen sich in folgender Weise als Funktion der elektromagnetischen Amplituden des Strahles:

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi}D\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}+\eta\right)\bar{\varepsilon}\cdot\mathfrak{e}_0 \overset{3}{=} & \mathfrak{q}(g_1\mathfrak{e}'\cdot\mathfrak{e}_0+g_1'\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{e}_0)+ \\ & +\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}_0(g_2\mathfrak{e}'+g_2'\mathfrak{m}')+ \\ & +\mathfrak{e}_0(g_3\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'+g_3'\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{m}')+ \\ +\frac{1}{2}p\varkappa_0\mathfrak{q}\times\mathfrak{q}\cdot(\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}_0(b_2\mathfrak{e}'+b_2'\mathfrak{m}'))&+\mathfrak{e}_0\mathfrak{q}\cdot(b_3\mathfrak{e}'+b_3'\mathfrak{m}'). \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi}D\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}+\nu\right)\bar{\mu}\cdot\mathfrak{m}_0 \overset{3}{=} & \mathfrak{q}(h_1\mathfrak{e}'\cdot\mathfrak{m}_0+h_1'\mathfrak{m}'\cdot\mathfrak{m}_0)+ \\ & +\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{m}_0(h_2\mathfrak{e}'+h_2'\mathfrak{m}')+ \\ & +\mathfrak{m}_0(h_3\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'+h_3'\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{m}')- \\ -\frac{1}{2}p\varkappa_0\mathfrak{q}\times\mathfrak{q}\cdot(\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{m}_0(a_2\mathfrak{e}'+a_2'\mathfrak{m}'))&+\mathfrak{m}_0\mathfrak{q}\cdot(a_3\mathfrak{e}'+a_3'\mathfrak{m}'). \end{aligned} \tag{74}$$

Hierin bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2}(ia_1mp^2+(b_1r-a_1x)p)\left(1+2i\frac{\eta}{p}\right) \\ g_2 &= \frac{1}{2}(ia_2mp^2+(b_2r-a_2x)p)\left(1+2i\frac{\eta}{p}\right) \\ g_3 &= \frac{1}{2}(ia_3mp^2+(b_3r-a_3x)p)\left(1+2i\frac{\eta}{p}\right) \\ h_1 &= \frac{1}{2}(ib_1ep^2+(a_1s-b_1c)p)\left(1+2i\frac{\nu}{p}\right) \\ h_2 &= \frac{1}{2}(ib_2ep^2+(a_2s-b_2c)p)\left(1+2i\frac{\nu}{p}\right) \\ h_3 &= \frac{1}{2}(ib_3ep^2+(a_3s-b_3c)p)\left(1+2i\frac{\nu}{p}\right) \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_1' &= \frac{1}{2}(i a_1' m p^2 + (b_1' r - a_1' x) p) \\
g_2' &= \frac{1}{2}(i a_2' m p^2 + (b_2' r - a_2' x) p) \\
g_3' &= \frac{1}{2}(i a_3' m p^2 + (b_3' r - a_3' x) p) \\
h_1' &= \frac{1}{2}(i b_1' e p^2 + (a_1' s - b_1' c) p) \\
h_2' &= \frac{1}{2}(i b_2' e p^2 + (a_2' s - b_2' c) p) \\
h_3' &= \frac{1}{2}(i b_3' e p^2 + (a_3' s - b_3' c) p).
\end{aligned}\right\} \quad (76)$$

XX. Amplituden der chemischen Ströme.

47. Schwieriger ist es, die Amplituden der chemischen Ströme:

$$\nabla\cdot(a\overline{\varepsilon}+b\overline{\mu}), \text{ beziehungsweise } \nabla\cdot(a'\overline{\varepsilon}+b'\overline{\mu})$$

zu berechnen, wenn man berücksichtigt, daß $\overline{\varepsilon}$ und $\overline{\mu}$ nicht unbedingt als genau symmetrische Dyaden betrachtet werden dürfen. Es ist mir allerdings gelungen, an der präzisen Symmetrie von $\overline{\varepsilon}$ und $\overline{\mu}$ für feste und flüssige Medien festzuhalten, für Gase habe ich sogar die Isotropie dieser stofflichen Abweichungen mit Annäherung annehmen können, doch behalten sie auch eine geringe Unsymmetrie. Dafür kann für Gase die Konstante $\varkappa_0$ als verschwindend klein angenommen werden, so daß für diese die Determinante D isotrop wird. Jedenfalls ist also die Kommutation:

$$D\cdot\overline{\varepsilon} \overset{9}{=} \overline{\varepsilon}\cdot D$$

gestattet, was die weitere Rechnung ungemein vereinfacht. Da D eine exakt symmetrische konstante Dyade ist, gilt allgemein (auch für unsymmetrische Werte von $\overline{\varepsilon}$):

$$D\cdot(\nabla\cdot\overline{\varepsilon}) \overset{3}{=} \nabla\cdot(\overline{\varepsilon}\cdot D).$$

Also erhalten wir:

$$D\cdot\nabla\cdot(a\overline{\varepsilon}+b\overline{\mu}) = \nabla\cdot(D\cdot a\overline{\varepsilon}+D\cdot b\overline{\mu})$$

und können diese Werte aus (71) und (72) berechnen, wobei zu berücksichtigen ist, daß nach § 11:

$$a\bar{\mathfrak{e}} = a_1\bar{\mathfrak{e}} + a_2\bar{\mathfrak{e}}_c + a_3\bar{\mathfrak{e}}_s, \quad a'\bar{\mathfrak{e}} = a'_1\bar{\mathfrak{e}} + a'_2\bar{\mathfrak{e}}_c + a'_3\bar{\mathfrak{e}}_s, \tag{77}$$

$$b\bar{\mathfrak{u}} = b_1\bar{\mathfrak{u}} + b_2\bar{\mathfrak{u}}_c + b_3\bar{\mathfrak{u}}_s, \quad b'\bar{\mathfrak{u}} = b'_1\bar{\mathfrak{u}} + b'_2\bar{\mathfrak{u}}_c + b'_3\bar{\mathfrak{u}}_s. \tag{78}$$

Es ergeben sich folgende Werte der Amplituden der chemischen Ströme:

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} D\cdot\nabla\cdot(a\bar{\mathfrak{e}} + b\bar{\mathfrak{u}}) \stackrel{3}{=} & -ip\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\cdot(u_1\mathfrak{e}' + u'_1\mathfrak{m}') - \\ & -ip\mathfrak{q}^2(u_2\mathfrak{e}' + u'_2\mathfrak{m}') + \\ & +\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\cdot((v_1 - w_3\mathfrak{q}^2)\mathfrak{e}' + (v'_1 - w_2\mathfrak{q}^2)\mathfrak{m}') + \\ & +\mathfrak{q}^2(v_2\mathfrak{e}' + (v'_2 + w_2\mathfrak{q}^2)\mathfrak{m}'); \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} D\cdot\nabla\cdot(a'\bar{\mathfrak{e}} + b'\bar{\mathfrak{u}}) \stackrel{3}{=} & -ip\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\cdot(u''_1\mathfrak{m}' + u'_1\mathfrak{e}') - \\ & -ip\mathfrak{q}^2(u''_2\mathfrak{m}' + u'_2\mathfrak{e}') + \\ & +\mathfrak{q}:\mathfrak{q}\cdot((v''_1 + w_3\mathfrak{q}^2)\mathfrak{m}' + ('v_1 + w_2\mathfrak{q}^2)\mathfrak{e}') + \\ & +\mathfrak{q}^2(v''_2\mathfrak{m}' + ('v_2 - w_2\mathfrak{q}^2)\mathfrak{e}'). \end{aligned} \tag{80}$$

Hierin bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \{a\,a\}m + \{b\,b\}e, \\ u'_1 &= \{a'a\}m + \{b'b\}e, \\ u''_1 &= \{a'a'\}m + \{b'b'\}e, \\ u_2 &= (a_1^2 + a_2^2)m + (b_1^2 + b_2^2)e, \\ u'_2 &= (a'_1a_1 + a'_2a_2)m + (b'_1b_1 + b'_2b_2)e, \\ u''_2 &= (a_1'^2 + a_2'^2)m + (b_1'^2 + b_2'^2)e; \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \{a\,a\}x + \{b\,b\}c - \{a\,b\}(r+s), \\ v''_1 &= \{a'a'\}x + \{b'b'\}c - \{a'b'\}(r+s), \\ v'_1 &= \{a'a\}x + \{b'b\}c - \{b'a\}r - \{a'b\}s, \\ {}'v_1 &= \{a\,a'\}x + \{b\,b'\}c - \{b\,a'\}r - \{ab'\}s, \\ v_2 &= (a_1^2 + a_2^2)x + (b_1^2 + b_2^2)c - (a_1b_1 + a_2b_2)(r+s), \\ v''_2 &= (a_1'^2 + a_2'^2)x + (b_1'^2 + b_2'^2)c - (a'_1b'_1 + a'_2b'_2)(r+s), \\ v'_2 &= (a'_1a_1 + a'_2a_2)x + (b'_1b_1 + b'_2b_2)c - (b'_1a_1 + b'_2a_2)r - \\ &\qquad - (a'_1b_1 + a'_2b_2)s, \\ {}'v_2 &= (a_1a'_1 + a_2a'_2)x + (b_1b'_1 + b_2b'_2)c - (b_1a'_1 + b_2a'_2)r - \\ &\qquad - (a_1b'_1 + a_2b'_2)s; \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2 &= \varkappa_0 (a_2 b'_2 - b_2 a'_2), \\ w_3 &= \varkappa_0 (a_3 b'_3 - b_3 a'_3). \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Die in geschweiften Klammern eingeschlossenen Werte haben die Bedeutung:

$$\{\alpha\beta\} = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + 3\alpha_3\beta_3,$$

worin für α sowohl als für β nach Bedarf a, a', b oder b' gesetzt werden kann. Es ist also beispielsweise:

$$\{aa\} = 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) + 3a_3^2,$$

$$\{ab'\} = \{b'a\} = a_1 b'_2 + a_2 b'_1 + a_2 b'_3 + a_3 b'_2 + a_3 b'_1 + a_1 b'_3 + 3 a_3 b'_3.$$

XXI. Spezielle Werte der Kuppelkonstanten.

48. Von den 12 Kuppelkonstanten a, a', b und b' haben viele in den meisten Medien verschwindend kleine Werte, so daß es sich empfiehlt, hierauf sogleich Rücksicht zu nehmen. Aus meiner Theorie folgen außer allen beobachteten Strahlungserscheinungen auch einige (nicht allzuviele) noch nicht beobachtete Erscheinungen. Diese müssen in drei Gruppen gesondert werden: 1. Erscheinungen, welche wahrscheinlich nie zur Beobachtung gelangen werden, z. B. elektrische Doppelbrechung von Gasen. Diese müssen durch Nullsetzen der sie bestimmenden Kuppelkonstanten ausgeschaltet werden. 2. Erscheinungen, welche durch Nullsetzen einiger Kuppelkonstanten ausgeschaltet werden können, ohne daß damit eine beobachtete Erscheinung entfällt. Diese neuen Erscheinungen werden wir nicht oder nur vorübergehend erwähnen. 3. Neue Erscheinungen, welche nicht ausgeschaltet werden können. Diese treten gerade dadurch, daß man von Anfang an möglichst viele Kuppelkonstanten Null setzt, deutlich hervor. Die Rechnung wird übrigens so geführt werden, daß man den Einfluß spezieller Annahmen der Kuppelkonstanten stets leicht beurteilen kann und auch diese Annahmen leicht abändern kann.

Doch habe ich mich bei der Auswahl der speziellen Werte der Kuppelkonstanten nicht ausschließlich durch die beobachteten Erscheinungen leiten lassen, sondern war bestrebt, die Wahl so zu treffen, daß die stofflichen Änderungen $\bar{\mathfrak{s}}$ und $\bar{\mu}$ in

Gasen möglichst isotrop, in festen und flüssigen Medien aber wenigstens symmetrisch bleiben. Ich habe mich vorläufig für folgende Wahl entschieden, welche wohl noch mancher Verbesserung fähig sein dürfte.

49. In allen Gasen ist:

$$a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \quad \eta = 0,$$
$$a'_1 = a'_2 = a'_3 = 0, \quad b'_1 = b'_2 = b'_3 = 0.$$

Ferner ist in Gasen die Konstante $\varkappa_0$ nahezu gleich Null und soll vernachlässigt werden, auch die Absorptionskonstanten c und x sind sehr klein. Die Schwingungskonstanten r und s sind entgegengesetzt gleich:

$$r + s = 0.$$

Von Null verschieden sind in Gasen nur die Kuppelkonstanten a_3, b_3 und b_2 und es ist b_2 gegen b_3 sehr klein. Es ist also für Gase:

$$\begin{aligned} u_1 &= 3a_3^2 m + (3b_3^2 + 2b_2 b_3)e, \quad u_2 = b_2^2 e, \\ v_1 &= 3a_3^2 x + (3b_3^2 + 2b_2 b_3)c, \quad v_2 = b_2^2 c. \end{aligned} \tag{84}$$

Alle anderen u und v, ebenso wie w_2 und w_3 sind Null.

50. In allen festen und flüssigen Stoffen ist:

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad b'_3 = 0,$$
$$a'_1 = a'_2 = a'_3 = 0, \quad \eta = \nu = 0.$$

Von den von Null verschiedenen Kuppelkonstanten ist:

$$a_1 = a_2 \doteq -a_3, \quad \text{also} \quad a\nabla, \mathfrak{e} \doteq a_1[\nabla, \mathfrak{e}] = a_1(\nabla ; \mathfrak{e} + \nabla \times \mathfrak{e}),$$
$$b'_1 = b'_2.$$

Letztere sind nur in optisch aktiven Medien von Null verschieden. Die mit dem Index 3 behafteten Konstanten dürften tatsächlich sämtlich große Werte haben. Sie haben aber nur auf longitudinale Strahlen Einfluß, welche in festen und flüssigen Medien keine Wichtigkeit haben, und wurden der Einfachheit wegen weggelassen. Die 12 Kuppelkonstanten reduzieren sich dann allgemein auf höchstens drei.

Es ist also für feste und flüssige Medien:

$$\left.\begin{array}{lll} u_1 = u_2 = 2a_1^2 m, & u_1'' = u_2'' = 2b_1'^2 e, & u_1' = u_2' = 0, \\ v_1 = v_2 = 2a_1^2 x, & v_1'' = v_2'' = 2b_1'^2 c, & v_1' = {}^c v_1 = 0, \\ w_2 = \varkappa_0 a_1 b_1', & v_2' = -2a_1 b_1' r, & \\ w_3 = 0, & {}^c v_2 = -2a_1 b_1' s. & \end{array}\right\} \quad (85)$$

51. Die Amplituden der chemischen Ströme erhalten hienach für alle Medien folgende einfachere Werte. Es ist nach (79) und (80):

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} D \cdot \nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu}) \stackrel{3}{=} \mathfrak{q}(\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}')(-ipu_1 + v_1) + \\ + \mathfrak{q}^2 \mathfrak{e}'(-ipu_2 + v_2) + \\ + \mathfrak{q}^2 \mathfrak{m}' \cdot (v_2' - w_2 \mathfrak{q} \times \mathfrak{q}); \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} D \cdot \nabla \cdot (a'\bar{\varepsilon} + b'\bar{\mu}) \stackrel{3}{=} (\mathfrak{q}(\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{m}') + \mathfrak{q}^2 \mathfrak{m}')(-ipu_1'' + v_1'') + \\ + \mathfrak{q}^2 \mathfrak{e}' \cdot ({}^c v_2 + w_2 \mathfrak{q} \times \mathfrak{q}). \end{aligned} \quad (87)$$

52. Ferner verzichten wir darauf, das Verhalten natürlich drehender Medien in starken elektromagnetischen Feldern zu berechnen; dasselbe ist zwar leicht zu beobachten, doch liegen keine charakteristischen Beobachtungen vor. Wir dürfen dann setzen:

$$g_1' = g_2' = g_3' = 0, \quad h_1' = h_2' = h_3' = 0$$

und erhalten für die Verschiebungsströme in starken Feldern statt (73) und (74) die einfacheren Werte:

$$e^{-i\varphi} D \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e}_0 \stackrel{3}{=} g_1 \mathfrak{q} \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}_0 + g_2 \mathfrak{e}' \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}_0 + g_3 \mathfrak{e}_0 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}', \quad (88)$$

$$e^{-i\varphi} D \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \mathfrak{m}_0 \stackrel{3}{=} h_1 \mathfrak{q} \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{m}_0 + h_2 \mathfrak{e}' \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{m}_0 + h_3 \mathfrak{m}_0 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}'. \quad (89)$$

XXII. Die chemischen Eigenschwingungen.

53. Auch die homogenen chemischen Eigenschwingungen (vergl. Kapitel I) ergeben sich als spezielle Form des Integrals (64), welche man erhält, wenn man $\mathfrak{q}$ gleich Null setzt. Hiedurch

wird die chemische Amplitudengleichung (67) und (68) homogen und ihre Determinante verschwindet:

$$D = -emp^2 - rs + cx - ip(ex + mc) = 0.$$

In diesem Falle muß p komplex sein:

$$p = p_0(1 + i\varkappa)$$

und es ergibt sich für die Schwingungszahl p_0 der chemischen Eigenschwingungen des Mediums

$$p_0^2 = -\frac{rs}{em} - \frac{(ex - mc)^2}{4em} \tag{90}$$

und für die Dämpfung $\varkappa$ derselben:

$$\varkappa = \frac{1}{2p_0}\left(\frac{x}{m} + \frac{c}{e}\right). \tag{91}$$

Die Dämpfung ist den Absorptionskonstanten c und x proportional und erfolgt nach (16) unter der Wärmeproduktion

$$Q_2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_1 : \varepsilon_1 + \frac{1}{2} x \mu_2 : \mu_2, \tag{92}$$

welche auf die Zeit und Volumseinheit bezogen ist. ε_1 und μ_2 sind die Amplituden der Schwingung, falls die Dämpfung klein ist, in welchem Falle auch der Anteil $(r+s)\bar{\varepsilon}:\bar{\mu}$ der Wärmeproduktion vernachlässigt werden kann, da er das Vorzeichen während der Schwingung wechselt und im Mittel Null ist, weil $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ mit nahezu ein Viertel Schwingungsdauer Phasendifferenz schwingen.

Vollkommen durchsichtige Medien haben verschwindend kleine Absorptionskonstanten c und x und können nahezu ungedämpfte Eigenschwingungen mit der Schwingungszahl:

$$p_0^2 = -\frac{rs}{em} \tag{93}$$

ausführen. Schwarze Körper haben hingegen bei normaler Temperatur große Absorptionskonstanten c und x und sind deshalb unfähig, chemische Schwingungen anzunehmen.

54. Alle Materialkonstanten hängen außer von dem chemischen Ruhezustande des Mediums auch von Druck und Temperatur ab und können bei fortschreitenden Veränderungen des Mediums auch durch Null gehen und ihr Vorzeichen ändern. Für alle Medien muß aber die Stabilitätsbedingung:

$$\frac{rs}{em} < 0 \tag{94}$$

erfüllt sein, denn die chemischen Schwingungen aller beständigen Stoffe müssen eine reelle (nicht allzu kleine) Schwingungszahl p_0 haben, damit gelegentlich gegebene kleine chemische Abweichungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ sich unter gedämpften Oszillationen ausgleichen.

Es kann aber bei fortschreitender Temperaturänderung eine der Konstanten r und s früher als die andere durch Null hindurchgehen und ihr Vorzeichen wechseln, damit geht die Eigenschwingungszahl durch Null und wird imaginär, d. h. der chemische Zustand des Stoffes wird labil, anfänglich gegebene kleine Anomalien $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ vergrößern sich fortschreitend und sehr rasch so lange, bis sich zufolge dieses Prozesses die anderen Materialkonstanten soweit geändert haben, daß die Stabilitätsbedingung (94) wieder erfüllt ist, worauf dieser Vorgang, den man als eine chemische Umsetzung auffassen könnte, mit gedämpften chemischen Oszillationen abschließt.

55. Betrachten wir Medien von geringer chemischer Stabilität, für welche c, x, r und s gegen e und m klein sind, und welche also nur sehr langsamer chemischer Eigenschwingungen fähig sind, noch etwas näher. Die chemischen Grundgleichungen (Vb) und (VIb) nehmen dann die einfache Form an:

$$\begin{aligned} e\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + a\nabla, \mathfrak{e} &= \varkappa_0 \nabla \times \nabla \cdot \bar{\mu}, \\ e\frac{\partial}{\partial t}\mu + b\nabla, \mathfrak{e} &= -\varkappa_0 \nabla \times \nabla \cdot \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{95}$$

Wenn ε und μ nahezu isotrop bleiben, so haben die mit $\varkappa_0$ behafteten Glieder keinen isotropen Anteil und es ergibt sich:

$$e \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_s + a \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0,$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \mu_s + b \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0. \tag{96}$$

Dort, wo das gegebene elektrische Feld starke Divergenz hat, also besonders an den Elektroden einer elektrolytischen Zelle, treten also fortschreitende chemische Reaktionen ein, deren Richtung vom Vorzeichen der Ladung der Elektrode abhängt.

56. Ist kein elektrisches Feld gegeben, so wird auch kein solches auftreten, falls anfänglich

$$\nabla \cdot \bar{\varepsilon} \overset{3}{=} 0, \qquad \nabla \cdot \bar{\mu} \overset{3}{=} 0 \tag{97}$$

ist. Da nämlich

$$\nabla \cdot \nabla \underset{;}{\times} \nabla \cdot \bar{\mu} \equiv 0, \qquad \nabla \cdot \nabla \underset{;}{\times} \nabla \cdot \bar{\varepsilon} \equiv 0,$$

folgt in diesem Falle aus (95):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{\varepsilon} \overset{3}{=} 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{\mu} \overset{3}{=} 0;$$

es bleibt also die Beziehung (97) bestehen und damit haben auch die chemischen Ströme $\nabla \cdot (a \bar{\varepsilon} + b \bar{\mu})$ verschwindend kleinen Wert, so daß elektromagnetische Vorgänge nicht angeregt werden. Die Gleichungen (95) nehmen die Form an:

$$e \frac{\partial}{\partial t} \bar{\varepsilon} = -\varkappa_0 \nabla \cdot \nabla ; \bar{\mu}, \tag{98}$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mu} = +\varkappa_0 \nabla \cdot \nabla ; \bar{\varepsilon}. \tag{99}$$

Es können sich also in diesem Medium rein chemische Wellen fortpflanzen und dies wird mit einiger Annäherung für alle Medien gelten. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ergibt sich daraus, daß die Determinante der Gleichungen (98) und (99) verschwinden muß:

$$D = -emp^2 + \varkappa_0^2 \mathfrak{q}^4 = 0.$$

Es ist also:

$$\frac{1}{p^2}\,\mathfrak{q}^2 = \mathfrak{n}^2(1-\varkappa^2)+2i\mathfrak{n}^2\varkappa = \pm\frac{\sqrt{em}}{p\varkappa_0}.$$

Falls $em < 0$, was für viele feste und flüssige Medien zutrifft, ist $\mathfrak{p}$ imaginär und also die Dämpfung $\varkappa = 1$. Grenzt an das betrachtete Medium mit sehr langsamer chemischer Eigenschwingung ein anderes, welches sich in lebhafter andauernder Eigenschwingung befindet, so werden durch die Grenzfläche chemische Wellen eindringen, welche aber so stark gedämpft sind, daß ihre Amplitude pro Wellenlänge im Verhältnis $e^{2\pi}:1$ abnimmt. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ bestimmt sich durch

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{1}{\mathfrak{n}^2} = \pm\frac{2p\varkappa_0}{\sqrt{-em}}.$$

Es ist dies also bloß ein chemischer Skineffekt und zu vergleichen mit dem Eindringen kinetischer Schwingungen in zähe Flüssigkeiten, Temperaturschwingungen in Wärmeleitern und Stromschwingungen in Metalldrähte.

Ist aber $em < 0$, wie dies für Gase stets zutrifft, so ist $\mathfrak{q}$ reell. Dann sind diese chemischen Wellen ungedämpft und haben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\mathfrak{c}^2 = \pm\frac{p\varkappa_0}{\sqrt{em}}. \tag{100}$$

Tatsächlich pflanzen sich diese Wellen aber in Gasen sehr langsam fort, denn deren Diffusionskonstante $\varkappa_0$ ist sehr klein, überdies verschwindet rs keineswegs gegen em, was die Fortpflanzung dieser Wellen, wie man leicht berechnet, sehr verlangsamt.

57. Die glühenden, lumineszierenden und radioaktiven Substanzen sowie die ionisierten Gase sind Medien, welche sich in andauernden, gesetzmäßig gedämpften, nahezu homogenen chemischen Eigenschwingungen befinden. Da diese chemischen Schwingungen nach (100) in Gasen sich nur sehr langsam ausbreiten, bewahrt das Gas eine in einem

begrenzten Teile desselben hervorgerufene Ionisation ziemlich lange. Immerhin verbreitet sich dieselbe allmählich durch die ganze Gasmasse. Da in den Grundgleichungen (V) und (VI) die materiellen Fluxionen der stofflichen Variablen auftreten, wird in bewegten Gasen der chemische Schwingungszustand (die Ionisation) mit der Materie transportiert. Man kann deshalb ionisierte Gase durch Röhren weiterleiten, ohne daß sie ihre Ionisation ganz verlieren, außer wenn das Gas hiebei in turbulente Bewegung gerät.

Leitet man das Gas durch enge kalte Metallröhren, so diffundieren seine chemischen Schwingungen in die Metallwand, es verliert also zufolge des chemischen Skineffektes (§ 56) seine Ionisation. Umgekehrt wird ein Gas ionisiert, wenn man es durch eine glühende Röhre leitet, weil die chemischen Schwingungen des glühenden Mediums in das Gas diffundieren.

Die akzidentelle Leitfähigkeit, welche die ionisierten Gase auszeichnet, dürfte sich auf die Emission von Longitudinalstrahlen (α- und β-Strahlen) im elektrischen Felde zurückführen lassen, deren entladende Wirkung im § 133 berechnet wird. Zufolge dieser Emission erfahren die chemischen Eigenschwingungen des Gases ein starke Dämpfung, so daß die Ionisation desselben rasch absinkt. Über Longitudinalstrahlen in starken elektrischen Feldern vergl. Kapitel XLV.

58. In § 56 wurde gezeigt, daß in dem Grenzfalle eines Mediums von sehr kleiner Eigenschwingungszahl p_0 rein chemische Schwingungen und Wellen auftreten können. Im allgemeinen sind aber die chemischen und elektromagnetischen Schwingungen gekuppelt, und zwar einerseits durch die elektrochemischen Dyaden $a\nabla,\mathfrak{e}$ und $b\nabla,\mathfrak{e}$, andrerseits durch die chemischen Ströme $\nabla\cdot(a\bar{\mathfrak{e}}+b\bar{\mu})$. Es müssen deshalb eindringende elektromagnetische Strahlen das Medium in chemische Eigenschwingungen versetzen, welcher Vorgang den Charakter einer Resonanzwirkung haben muß und wodurch sich die Erregung und das Nachklingen der Ionisation, beziehungsweise der Lumineszenz durch Bestrahlung erklärt.

59. Die Emission des Lichtes durch glühende und lumineszierende Körper sowie die Radioaktivität besteht

in einer Aussendung elektromagnetischer Strahlen durch Körper, welche sich in lebhafter chemischer Eigenschwingung befinden. Da diese niemals vollständig homogen sein kann, so treten chemische Ströme $\nabla\cdot(a\bar{\mathfrak{e}}+b\bar{\mu})$ auf, welche Schwingungen von derselben Periode und Dämpfung ausführen, und nach den elektromagnetischen Grundgleichungen (I) und (II) elektromagnetische Schwingungen gleicher Richtung, also im allgemeinen sowohl transversale als longitudinale elektromagnetische Strahlen anregen.

60. Weit merkwürdiger als diese Anregung von Oszillationen durch Wellen und umgekehrt ist das *Glühen*, also die Emission des Lichtes zufolge erhöhter *Temperatur*. Denn tatsächlich (abgesehen von der Molekulartheorie) haben doch die Wärmevorgänge den Charakter äußerst träger Änderungen der stofflichen Eigenschaften und durchaus nichts Periodisches, es schien mir deshalb früher eine befriedigende Erklärung der Temperaturemission unerreichbar zu sein.

Die Emission zufolge erhöhter Temperatur kann jetzt einfach dadurch erklärt werden, daß die Absorptionskonstanten c und $\varkappa$, welche wie alle Materialkonstanten von der Temperatur abhängen, bei Temperaturerhöhung den Wert Null erreichen und darüber hinaus *negative Werte* annehmen.

Dann haben die chemischen Eigenschwingungen des Mediums nach (91) *negative Dämpfung*, womit aber keineswegs der chemische Zustand desselben labil wird, da die Stabilitätsbedingung (94) erfüllt und die Eigenschwingungszahl p_0 reell bleibt. Da aber stets zufällige, wenn auch nur äußerst kleine stoffliche Anomalien $\bar{\mathfrak{e}}$ und $\bar{\mu}$ gegeben sind, so werden Eigenschwingungen auftreten, deren Amplitude anfänglich ungemein klein ist, aber zufolge der *negativen* Dämpfung fortgesetzt wächst und große Werte annimmt.

Dem Anwachsen der chemischen Energie dieser Schwingungen entspricht eine *Abkühlung* des Mediums, da nach (92) die Wärmeproduktion:

$$Q_2 = \frac{1}{2} c\,\mathfrak{e}_1 : \mathfrak{e}_1 + \frac{1}{2} \varkappa\,\mu_2 : \mu_2$$

negativ ist, weil c und $\varkappa$ negativ sind.

Deckt man durch Wärmezufuhr diesen Verlust, so daß eine stationäre Temperatur sich einstellt, so würden die chemischen Eigenschwingungen ins Unendliche anwachsen, wenn nicht notwendig die Lichtstrahlung eintreten müßte, welche mit der Amplitude der chemischen Eigenschwingungen an Intensität gewinnen muß und, sobald sie die der Wärmezufuhr entsprechende Energie entführt, eine stationäre Amplitude der chemischen Schwingungen herbeiführt.

Die chemischen Eigenschwingungen sind nahezu homogen, d. h. sie mögen in Gebieten, deren Volum Bruchteile eines Kubikmillimeters erreicht, homogen sein, die Eigenschwingungen ausgedehnterer Körper sind aber inhomogen, das von weiter voneinander entfernten Partien des Körpers ausgesendete Licht ist inkohärent. Aber die im Innern des Körpers während dessen Schwingung sich einstellenden stofflichen Gefälle sind doch gering und haben wenig emittierende Wirkung. Anders aber in der Oberflächenschicht des strahlenden Körpers. Dort müssen chemische Ströme $\nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu})$ von großer Stärke auftreten, welche nach § 59 die Ursache der elektromagnetischen Strahlung des glühenden Körpers sind. Man erkennt, daß ebensogut wie die negative Dämpfung der Eigenschwingung des glühenden Körpers auch die negative Dämpfung der Eigenschwingung des denselben umgebenden Gases die Ursache der Emission sein könnte, da es nur auf die periodischen Änderungen der stofflichen Gefälle (chemischen Ströme) in der Oberflächenschichte ankommt. Es gibt noch eine zweite Art der Temperaturemission aus dem Inneren glühender Gase, welche in § 92 und 93 berechnet werden wird.

61. Die spektralanalytischen Beobachtungen ermöglichen ein erfolgreiches Vordringen bei der theoretischen Untersuchung der chemischen Eigenschwingungen der leuchtenden Gase. Dieselben sind offenbar weit komplizierter, als die vorliegende abstrakte Theorie annimmt, und es soll hier auf die naheliegendsten Annahmen hingewiesen werden, durch welche eine Anpassung der Theorie an diese Beobachtungen möglich ist.

Zunächst ist es nur mit Annäherung gestattet, die Schwingungen der Leitfähigkeiten γ und ξ, welche alle chemischen Schwingungen begleiten, zu vernachlässigen. Gestaltet man die Grundgleichungen (III) und (IV) ebenso wie die Gleichungen (V) und (VI) aus, so hat dieses Gleichungsystem eine Determinante D, welche in p_0^2 vom zweiten Grade ist, also ist sehr wahrscheinlich, daß alle Stoffe zwei Eigenschwingungen von verschiedener Schwingungszahl haben.

Es kommt jedoch noch die Variabilität mancher anderen Materialkonstanten in Betracht. Am wichtigsten ist die Variabilität der Werte e und m (vergl. § 10). Diese Variablen spielen in den chemischen Gleichungen (V) und (VI) dieselbe Rolle, welche ε und μ in den elektromagnetischen Gleichungen spielen, ihre Variabilität muß durch selbständige Gesetze bestimmt sein, und es sind also auch chemische Schwingungen denkbar, bei welchen hauptsächlich e und m sich ändern. Diese müssen sehr langsam sein, da sich e und m nahezu wie Konstante verhalten, und ich möchte diese Schwingungen für die exzitierenden Unterschwingungen (siehe diese Sitzungsber., Bd. CIII, p. 320) halten, welche positiv gedämpfte Schwingungen von ε und μ (emittierende Schwingungen) stets von neuem exzitieren, so daß eine Spektralbande oder Serie emittiert wird. Ein prinzipieller Unterschied zwischen Banden und Serien kann nicht sichergestellt werden. Die Serien haben ihre Kante im Ultraviolett und verlaufen gegen das Rot, viele Banden verlaufen umgekehrt gegen das Violett, z. B. die Cyanbanden, aber es gibt auch viele Banden, die ebenso wie die Serien ihre Kante dem Violett zuwenden und gegen das rote Ende des Spektrums auslaufen, z. B. die blauen Aluminiumbanden und Schwefelbanden.

Vielleicht verlaufen alle Banden zwischen zwei Kanten (Kopf- und Schweifkante), wie dies bekanntlich für einige Banden (z. B. der Baryumhaloidsalze) nachweisbar ist.

Dies würde darauf hinweisen, daß die exzitierenden Schwingungen (von e und m) einen echten, aber periodischen chemischen Verbindungs- und Zersetzungsprozeß begleiten. Die Bandenspektren werden meist von labilen chemischen Verbindungen, nicht von elementaren Gasen aus-

gesendet. Das Verbindungsprodukt muß andere Werte der Materialkonstanten $\varepsilon\ \mu$ als das Zersetzungsprodukt haben. Diese Werte bestimmen aber die Schwingungszahl p_0 der emittierenden Schwingung nach (93). Wenn also die Verbindungs- und Zersetzungsvorgänge periodisch mit der Frequenz π_0 stattfinden, so wird das emittierte Licht periodisch seine Schwingungszahl ändern, es wird also eine breite Bande emittiert und die Kopf- und Schweifkante entsprechen den Eigenschwingungszahlen des reinen Verbindungsproduktes, beziehungsweise des reinen Zersetzungsproduktes. Der ganze Vorgang ist aber periodisch, die Bande ist deshalb nicht kontinuierlich, sondern besteht aus vielen scharfen Linien. Die Differenz der Schwingungszahlen zweier aufeinanderfolgender Linien muß ein ganzzahliges Vielfaches der Exzitationsperiode π_0 sein. Das Deslandres'sche Gesetz, wonach die Differenzen der Schwingungszahlen der Bandenlinien und der Kante die Reihe der Quadrate der ganzen Zahlen bilden, stimmt hiemit, was die Ganzzahligkeit dieser Reihe betrifft, warum aber gerade nur die Quadrate der ganzen Zahlen deutlich sichtbaren Bandenlinien zugehören, weiß ich nicht zu erklären. Der Lösung dieser Frage stehen allzu große mathematische Schwierigkeiten entgegen.

Wir wenden uns nun der Betrachtung der den elektromagnetischen Strahlen kohärenten chemischen Wellen zu.

XXIII. Strahlungen im unelektrischen und unmagnetischen Felde.

63. Nachdem wir nun einige Kenntnis der chemischen Eigenschwingungen der Medien gewonnen haben, wenden wir uns der Betrachtung der transversalen und longitudinalen elektromagnetischen Strahlen zu, welche in diesen Medien sich ausbilden können, d. h. sich als Integral der Grundgleichungen (Ib), (IIb), (Vb), (VIb) ergeben, und zwar berechnen wir zunächst die bei Ausschluß starker elektromagnetischer Felder auftretenden Strahlungen. Es ist dann der elektrochemische Verschiebungsstrom $\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e}$, beziehungsweise $\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m}$ von zweiter Größenordnung klein und kann vernachlässigt werden.

Die Amplituden der chemischen Ströme $\nabla\cdot(a\bar{\varepsilon}+b\bar{\mu})$ und $\nabla\cdot(a'\bar{\varepsilon}+b'\bar{\mu})$ sind in Gleichung (86) und (87) angegeben, wir erhalten sonach für die elektromagnetischen Amplituden $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{m}'$ des Strahles:

$$-ip\varepsilon_0\cdot D\cdot\mathfrak{e}'+\mathfrak{q}\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'(-ipu_1+v_1)+ \\ +\mathfrak{q}^2\mathfrak{e}'(-ipu_2+v_2)+ \\ +\mathfrak{q}^2\mathfrak{m}'\cdot(v_2'-w_2\mathfrak{q}\underset{;}{\times}\mathfrak{q}) \stackrel{3}{=} ic_0 D\cdot(\mathfrak{q}\times\mathfrak{m}'), \qquad (101)$$

$$-ip\mu_0\cdot D\cdot\mathfrak{m}'+(\mathfrak{q}\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{m}'+\mathfrak{q}^2\mathfrak{m}')(-ipu_1''+v_1'')+ \\ +\mathfrak{q}^2\mathfrak{e}'\cdot({}^{\prime}v_2+w_2\mathfrak{q}\underset{;}{\times}\mathfrak{q}) \stackrel{3}{=} -ic_0 D\cdot(\mathfrak{q}\times\mathfrak{e}'). \qquad (102)$$

64. Wir betrachten zunächst transversale Strahlen in nicht absorbierenden Medien. Für Transversalstrahlen ist:

$$\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'=0, \quad \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{m}'=0.$$

Die Absorptionskonstanten des Mediums sollen verschwindend klein sein:

$$c=x=0.$$

Dann ist nach (84) und (85) auch $v_1=v_2=v_1''=0$ und nach (70) verschwindet der imaginäre Teil der Determinante D; diese kann der Transversalität des Strahles wegen durch die reelle Zahl:

$$D_1=-emp^2-rs+\varkappa_0\mathfrak{q}^2(s-r)+\varkappa_0^2\mathfrak{q}^4 \qquad (103)$$

ersetzt werden. Die elektromagnetischen Amplitudengleichungen nehmen die Form an:

$$ip(\varepsilon_0\cdot D_1+\mathfrak{q}^2u_2)\cdot\mathfrak{e}'=(\mathfrak{q}^2(v_2'+w_2\mathfrak{q}^2)-ic_0D_1\cdot(\mathfrak{q}\times I))\cdot\mathfrak{m}', \qquad (104)$$

$$ip(\mu_0\cdot D_1+\mathfrak{q}^2u_1'')\cdot\mathfrak{m}'=(\mathfrak{q}^2({}^{\prime}v_2-w_2\mathfrak{q}^2)+ic_0D_1\cdot(\mathfrak{q}\times I))\cdot\mathfrak{e}'. \qquad (105)$$

Um Gleichungen für die elektrischen Amplituden zu gewinnen, eliminieren wir $\mathfrak{m}'$, indem wir jede dieser Gleichungen mit jenem Faktor, welchen $\mathfrak{m}'$ in der anderen hat, multiplizieren und addieren. Bei dieser Multiplikation berücksichtigen wir, daß jene Glieder von (104) und (105), welche D_1 nicht enthalten und von den chemischen Strömen herrühren, sehr klein sind. Wir dürfen sie zwar nicht selbst, wohl aber ihre Produkte miteinander vernachlässigen. So ergibt sich:

$$\mathfrak{c}' \cdot [\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot D_1 - \mathfrak{n}^2 c_0^2 D_1 + p^2 \mathfrak{n}^2 (\varepsilon_0 u_1'' + \mu_0 u_2) + \\ + i c_0 \mathfrak{n}^2 (\mathfrak{q} \times I)(v_2' - {}'v_2 + 2 w_2 \mathfrak{q}^2)] = 0. \qquad (106)$$

Die eingeklammerte Dyade muß, wenn $\mathfrak{c}'$ reell ist, planar sein und da sie in isotropen Medien auch isotrop sein muß, so muß sie in diesen gleich Null sein.

XXIV. Dispersion und Metallreflexion nicht absorbierender Medien.

65. Wir betrachten zunächst optisch inaktive Medien. Für diese ist:

$$b_1' = b_2' = 0,$$

also nach (85) auch:

$$v_2' = {}'v_2 = w_2 = u_1'' = 0$$

und nach (106) ist $\mathfrak{c}'$ reell und:

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot D_1 - \mathfrak{n}^2 c_0^2 D_1 - p^2 \mathfrak{n}^2 \mu_0 u_2 = 0. \qquad (107)$$

Dividieren wir nun durch $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 D_1 \mathfrak{n}^2$ und bezeichnen mit:

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{\mathfrak{n}}$$

die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Transversalstrahlen, so ergibt sich:

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}_0^2 = -\frac{u_2}{\varepsilon_0} \frac{p^2}{D_1}, \qquad (108)$$

worin:

$$D_1 = em(p_0^2 - p^2) + \varkappa_0^2 \frac{p^4}{\mathfrak{c}^4}. \qquad (109)$$

Es ist hierin die Eigenschwingungsdauer p_0 des Mediums nach (93):

$$p_0^2 = -\frac{rs}{em}$$

eingeführt, ferner bedeutet:

$$\mathfrak{c}_0 = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \qquad (110)$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen äußerst kleiner Schwingungszahl (der langwelligsten Hertz'schen Strahlen). Endlich wurde das Glied $\varkappa_0(s-r)\mathfrak{q}^2$ weggelassen, weil sich w. u. § 81 zeigt, daß für die festen und flüssigen Medien $s=r$ ist, während für Gase $\varkappa_0=0$ ist.

66. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalstrahlen hängt nach (108) von deren Schwingungszahl p ab, es findet also in allen Medien Dispersion statt. Das Dispersionsgesetz, welches aus meiner Theorie folgt, hat aber eine ganz wesentlich andere (ja geradezu die reziproke) Form als das Dispersionsgesetz von Ketteler, Helmholtz und Drude.

Schließen wir zunächst die ultravioletten Strahlen von der Betrachtung aus, so verschwindet das mit $\varkappa_0^2$ behaftete Glied der Determinante D_1 und das Dispersionsgesetz für ultrarotes Licht lautet:

$$\mathfrak{c}^2-\mathfrak{c}_0^2=\frac{u_2}{\varepsilon_0 em}\frac{p^2}{p^2-p_0^2} \tag{111}$$

oder, wenn wir wie üblich mit:

$$n=\frac{4\pi c_0}{\mathfrak{c}}, \qquad n_0=4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

die Brechungsexponenten und mit:

$$\lambda=\frac{4\pi^2 c_0}{p}, \qquad \lambda_0=\frac{4\pi^2 c_0}{p_0}$$

die Wellenlänge des betrachteten Strahles im Vakuum bezeichnen, so nimmt mein Dispersionsgesetz für ultrarotes Licht die Form an:

$$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_0^2}=\frac{k}{\lambda_0^2-\lambda^2}, \tag{112}$$

während das Dispersionsgesetz von Ketteler, Helmholtz und Drude die Form hat:

$$n^2-n_0^2=\frac{k_1}{\lambda_0^2-\lambda^2}+\frac{k_2}{\lambda_1^2-\lambda^2}; \tag{113}$$

k ist eine positive, k_1 und k_2 sind negative Konstante.

Eine Ähnlichkeit beider Dispersionsgesetze besteht in der Annahme von Eigenschwingungen des Mediums, so daß die rechten Seiten der Gleichungen (112) und (113) ganz gleich sind, um so mehr, als auch nach meiner Theorie nicht nur eine, sondern mindestens zwei Eigenschwingungen vorhanden sind (vergl. § 61).

Aber die linken Seiten beider Dispersionsgesetze sind so verschieden, daß meine und die früheren Dispersionstheorien sich widersprechen. Der Unterschied tritt besonders in der Nähe der Eigenschwingungsdauer λ_0 hervor, bei Annäherung an diese nehmen meine Strahlen unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit an, während die Strahlen der früheren Theorien die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Null annehmen. Mein Dispersionsgesetz bewährt sich aber unbeschränkt, auch in der Nähe der Eigenschwingungsdauer, es folgt nämlich der wahre Wert derselben aus meiner Theorie, während die Ketteler'sche Formel (113) nur dadurch mit den Dispersionsbeobachtungen in Einklang gebracht werden kann, daß willkürliche Werte der Eigenwellenlängen angenommen werden.

67. Der wahre Wert der Eigenschwingungsdauer eines durchsichtigen Mediums kann nach meiner Theorie direkt beobachtet werden, er fällt nämlich präzis zusammen mit der Wellenlänge der Rubens'schen Reststrahlen. Man nahm bisher an, daß die sogenannte metallische Reflexion auch sehr durchsichtiger Medien wie Flußspat, Sylvin, Steinsalz, Quarz ausschließlich durch die sehr starke Absorption dieser Medien in der Nähe ihrer Eigenschwingungsdauer bewirkt werde. Auch nach meiner Theorie findet dort die stärkste Absorption statt (vergl. § 89), aber dieselbe spielt bei so durchsichtigen Medien keine sehr wesentliche Rolle. Auch ideal nicht absorbierende Medien müssen nach meiner Theorie Reststrahlen von der Eigenschwingungsdauer reflektieren. Auch die anomale Dispersion tritt nach meiner Theorie ganz ebenso in ideal nichtabsorbierenden Medien wie in absorbierenden Medien auf, ja sogar noch ausgesprochener.

68. Nach meinem Dispersionsgesetz (112) ist für alle Wellenlängen zwischen den Grenzen:

$$\lambda_0^2 < \lambda^2 < \lambda_0^2 + k n_0^2 \tag{114}$$

der Brechungsexponent, also auch der Vektor $\mathfrak{n}$ imaginär, und dann hat nach § 42 nicht mehr dieser Vektor, sondern der Vektor $i\varkappa\mathfrak{n}$ die Bedeutung der reellen reziproken Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Da in nichtabsorbierenden Medien der imaginäre Anteil von $\mathfrak{q}$, also $\varkappa$, stets Null ist, so ist also die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit aller Strahlen, deren Schwingungsdauern in dem Intervalle (114) liegen, Null und diese Strahlen werden also von dem betrachteten Medium bei jedem Einfallswinkel total reflektiert. Die Reflexion der Reststrahlen an einem durchsichtigen Medium ist also keine Metallreflexion, d. h. nicht die Folge der Absorption, sondern im wesentlichen eine Totalreflexion, d. h. die Folge der unendlich großen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reststrahlen in dem reflektierenden Medium.

Die Absorption mildert im Gegenteile diese schroffen Gegensätze der Strahlen innerhalb und außerhalb des Intervalles (114), da zufolge einer geringen Absorptionsfähigkeit des Mediums $\varkappa$ nicht ganz Null, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen dieses Intervalles nicht geradezu unendlich ist. Sie werden deshalb auch nicht merklich als Reststrahlen reflektiert, nur beim Flußspat beschreibt Rubens merkliche Reflexion in dem ganzen Intervall, aber an dem einen Ende für $\lambda = \lambda_0$ bleibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ungemein groß und bleibt also die Reflexion von (recht homogenen) Reststrahlen bestehen. (Genaueres hierüber siehe § 88 und 89).

Wir sind also durch die Rubens'schen Beobachtungen von vornherein über die Eigenwellenlänge λ_0 jener sehr durchsichtigen Medien, deren Dispersion auch am vollständigsten beobachtet ist, unterrichtet. Es ist

für Flußspat..... $\lambda_0 = 24\cdot 0^{\mu}$,
» Sylvin ...... $= 61\cdot 1^{\mu}$,
» Steinsalz .... $= 51\cdot 2^{\mu}$

$(1^{\mu} = 10^{-4}\,cm)$.

Da überdies für diese Stoffe der Brechungsexponent für unendlich lange Hertz'sche Wellen mit hinreichender Genauigkeit beobachtet ist, und zwar:

für Flußspat..... $n_0^2 = 6{\cdot}9$,
» Sylvin....... $= 4{\cdot}9$,
» Steinsalz .... $= 6{\cdot}0$,

so ist in meinem Dispersionsgesetz (112) nur die Konstante k frei wählbar.

In der Tat ergibt sich für das ganze (sehr ausgedehnte) ultrarote Spektrum eine geradezu exakt lineare Beziehung der beobachteten Werte $\frac{1}{\lambda_0^2-\lambda^2}$ und $\frac{1}{n^2}$. Damit scheint mir die Überlegenheit meiner Dispersionstheorie bestätigt zu sein. Jedoch ergab sich ein unerwarteter, sehr kleiner Wert für das konstante Glied $\frac{1}{n_0^2}$ von (112). Meine Dispersionsformel ist also tatsächlich nicht einkonstantig, sondern zweikonstantig:

$$\frac{1}{n^2} - k' = \frac{k}{\lambda_0^2-\lambda^2}. \tag{115}$$

Die Erklärung dieses Hinzutretens eines konstanten Gliedes k' von unerwartetem Werte kann in folgender Weise versucht werden:

69. Nach § 61 dürfte noch eine zweite Eigenschwingung dieser Medien mit der Eigenwellenlänge λ_1 vorhanden sein, so daß auch meiner Dispersionsgleichung ein Glied von der Form:

$$\frac{k_2}{\lambda_1^2-\lambda^2} \tag{116}$$

ganz ähnlich wie der Ketteler-Drude'schen Gleichung (113) hinzugefügt werden muß. Ketteler, Helmholtz und Drude nehmen an, daß diese zweite Eigenschwingung im Ultraviolett liegt, aber dieser Annahme könnte ich mich nicht unbedenklich anschließen. Nach meiner Theorie ist das Auftreten Rubens'scher Reststrahlen die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Zulässigkeit der Annahme einer

Eigenschwingung des Mediums. Nun wurden noch nie ultraviolette Reststrahlen beobachtet, gäbe es dieselben aber, so müßten sie viel leichter als die ultraroten Reststrahlen nachweisbar sein.

Hingegen scheint mir die Annahme zulässig, daß die zweite Eigenschwingung λ_1 jenseits des Ultraroten, gleich weit von den Hertz'schen Strahlen einerseits und den Rubens'schen Strahlen andrerseits liegt. Wenn diese Eigenwellenlänge λ_1 also viel größer als die Wellenlängen λ des ultraroten Lichtes ist, so hat das Glied (116) für alle Lichtarten einen konstanten Wert und damit ist das Auftreten der additiven Konstanten k' in meinem Dispersionsgesetz erklärt. Da andrerseits die zweite Eigenwellenlänge λ_1 viel kleiner als die Wellenlängen der Hertz'schen Strahlen ist, nimmt für diese ungemein großen Wellenlängen λ das Glied (116) einen ungemein kleinen Wert an, für die Hertz'schen Strahlen gilt also das Dispersionsgesetz (112) unverändert. Hienach soll die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich langer Hertz'scher Strahlen gleich $c_0/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ sein, wie dies den Beobachtungen entspricht, ferner soll die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben mit abnehmender Wellenlänge abnehmen; Beobachtungen über die Dispersion Hertz'scher Strahlen liegen nur für Wasser vor, und zwar ist (zitiert nach den Landolt'schen Tabellen [1905], p. 765):

	Beobachter	λ	n^2
Wasser (17° C.)	Drude	200 *cm*	80·6
	»	74	81·7
	»	38	83·6
	Marx	53	83·7
	»	36·5	82·5
	»	3·2	85·0
	Lampa	0·8	80·5
	»	0·6	88·5
	»	0·4	90·2

Von jedem einzelnen Beobachter wurde tatsächlich eine Zunahme des Brechungsexponenten n der Hertz'schen Strahlen mit abnehmender Wellenlänge konstatiert. Die Eigen-

wellenlängen des Wassers liegen ebenfalls zwischen den Hertz'schen Strahlen und dem Ultraroten, wie man an der anomalen Dispersion in diesem Gebiete erkennt. Die Brechungsexponenten des Lichtes in Wasser sind ungefähr siebenmal kleiner als jene der Hertz'schen Strahlen.

70. Die Gleichung (112) gilt nur für lange Wellen. Schon für das sichtbare Licht zeigt sich ein zu rasches Ansteigen des Brechungsexponenten, welches im Ultravioletten zu enormen Abweichungen führt. Deshalb ist für die Ketteler'sche Theorie die Annahme einer zweiten Eigenschwingung im Ultraviolett unvermeidlich. Für meine Theorie gilt dies aber keineswegs, sondern die scharfe Abbiegung der Dispersionskurve im Violett wird erklärt durch das in (112) vernachlässigte Glied:

$$\varkappa_0^2 \frac{p^4}{c^4} \tag{117}$$

der Determinante (109). Dieses ist der vierten Potenz der Schwingungszahl p proportional, wodurch sich sein großer Einfluß auf die Fortpflanzung des ultravioletten Lichtes erklärt. Es macht sich für diese Strahlen schon die selbständige Fortpflanzungsfähigkeit der chemischen Schwingungen (vergl. § 56) geltend. Überdies ist die Fortpflanzungsgleichung (108) bei Berücksichtigung des Gliedes (117) in c^2 vom dritten Grade, außer dem vorwiegend elektromagnetischen ultravioletten Licht gibt es also noch zwei raschschwingende transversale Strahlenarten (Röntgen- und γ-Strahlen), welche vorwiegend chemische Schwingungen führen.

Das vollständige Dispersionsgesetz meiner Theorie hat also die Form:

$$\frac{1}{n^2} - k' = \frac{k}{\lambda_0^2 - \lambda^2 + k'' \frac{n^4}{\lambda^2}}, \tag{118}$$

wenn:

$$k' = -\varkappa_0^2 \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 cm} \tag{119}$$

eine dritte positive, aber sonst frei wählbare Konstante ist. Diese Dispersionsformel ist dreikonstantig und umfaßt das

ganze Gebiet der Transversalstrahlen, erklärt auch die Rubensschen Reststrahlen. Die Ketteler-Drude'sche Formel (113) ist fünfkonstantig,[1] schließt sich wohl schwerlich im Ultrarot gut an die Beobachtungen und erklärt die Reststrahlen nicht.

XXV. Dispersion des Flußspates.

71. Die Beobachtungsdaten wurden den Landolt'schen Tabellen (1905), p. 625, entnommen. Das Dispersionsgesetz (118) wurde in der Form:

$$\delta = + \frac{n^2}{1-k'n^2} - \frac{1}{k}(\lambda_0^2-\lambda^2) - \frac{k''}{k} \cdot \frac{n^4}{\lambda^2} \tag{119}$$

mit den Beobachtungen verglichen. Nach (118) soll δ gleich Null sein. Setzt man also in die rechte Seite von (119) die beobachteten Werte von n und λ ein, so stellt δ die Differenz Beobachtung—Rechnung dar.

Die Beobachtungen rühren von Langley (L.), Rubens (R), Paschen (P), Stefan (S), Martens (M) u. a. her und wurden sämtlich mit gleichem Gewicht berücksichtigt.

Die erste Kolonne der folgenden Tabelle bezeichnet den Beobachter, die folgenden geben die beobachteten Werte von n und λ sowie die hieraus berechneten drei Glieder der rechten Seite von (119), so daß man den Einfluß dieser drei Glieder in verschiedenen Teilen des Spektrums vergleichen kann. Die letzte Kolonne gibt die algebraische Summe dieser drei Glieder, also den Fehler δ an. Derselbe ist wenig größer als die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, und zeigt einen geringen systematischen Gang; diesen möchte ich der in (118) nicht berücksichtigten Absorption zuschreiben.

Als Eigenwellenlänge wurde die Wellenlänge der Rubens'schen Reststrahlen $\lambda_0 = 24\cdot0^\mu$, genauer $\lambda_0 = 23\cdot989^\mu$ angenommen. Die drei frei wählbaren Konstanten haben die Werte:

$$\frac{1}{k} = 0\cdot0037657, \quad \frac{k''}{k} = 0\cdot0017422, \quad k' = 0\cdot02904.$$

---

[1] Vergl. Drude, Lehrbuch der Optik, Leipzig 1900, p. 361.

Beobachter	λ	n	$\frac{n^2}{1-k'n^2}$	$\frac{1}{k}(\lambda_0^2-\lambda^2)$	$\frac{k''}{k}\cdot\frac{n^4}{\lambda^2}$	δ
M.	0·186 μ	1·50930	2·4393	2·1669	0·2625	0·0099
»	0·199	1·49636	2·3948	2·1669	0·2215	0·0064
Sarasin	0·202	1·4933	2·3842	2·1669	0·2114	0·0059
»	0·206	1·4904	2·3745	2·1669	0·2024	0·0052
»	0·209	1·48750	2·3646	2·1669	0·1953	0·0024
M.	0·214	1·48462	2·3548	2·1669	0·1841	0·0038
»	0·219	1·48159	2·3446	2·1669	0·1745	0·0032
Sa.	0·226	1·47762	2·3312	2·1669	0·1620	0·0023
M.	0·231	1·47525	2·3232	2·1669	0·1543	0·0020
»	0·242	1·47025	2·3064	2·1668	0·1390	0·0006
»	0·257	1·4648	2·2881	2·1668	0·1213	0·0000
»	0·274	1·45967	2·2712	2·1668	0 1054	—0·0010
Sa.	0·325	1·44987	2·2388	2·1667	0·0728	—0·0007
M.	0·340	1·4478	2·2318	2·1666	0·0662	—0·0010

M.	0·346	1·4470	2·2293	2·1666	0·0638	—0·0011
Sa.	0·361	1·44535	2·2240	2·1666	0·0583	—0·0009
M. und S.	0·396	1·4421	2·2135	2·1665	0·0481	—0·0011
»	0·410	1·44112	2·2101	2·1664	0·0447	—0·0010
»	0·486	1·4371	2·1971	2·1662	0·0315	—0·0006
»	0·589	1·4339	2·1867	2·1658	0·0212	—0·0003
M.	0·656	1·43251	2·1821	2·1654	0·0170	—0·0003
S.	0·686	1·4320	2·1805	2·1653	0·0156	—0·0004
M.	0·760	1·43101	2·1773	2·1649	0·0126	—0·0002
Carvallo	0·777	1·43086	2·1768	2·1648	0·0121	-0·0001
»	0·878	1·42991	2·1737	2·1642	0·0095	—0·0000
L. und P.	0·884	1·42982	2·1734	2·1641	0·0093	0·0000
Ca.	1·009	1·4290	2·1709	2·1632	0·0071	0·0006
L. und P.	1·1786	1·42788	2.1672	2·1618	0·0052	0·0002
Ca.	1·187	1·42792	2·1673	2·1618	0·0051	0·0004
L. und P.	1·3756	1·42690	2·1640	2·1599	0·0038	0·0003
Ca.	1·444	1·42669	2·1633	2·1592	0·0035	0·0006
L. und P.	1·4733	1·42641	2·1624	2·1589	0·0033	0·0002

Beobachter	λ	n	$\frac{n^2}{1-k'n^2}$	$\frac{1}{k}(\lambda_0^2-\lambda^2)$	$\frac{k''}{k}\cdot\frac{n^4}{\lambda^2}$	δ
L. und P.	1·5715 μ	1·42596	2·1609	2·1578	0·0029	0·0002
»	1·7680	1·42505	2·1580	2·1553	0·0023	0·0004
»	1·9153	1·42434	2·1558	2·1532	0·0020	0·0006
»	1·9644	1·4241	2·1550	2·1525	0·0019	0·0006
»	2·0626	1·4236	2·1535	2·1510	0·0017	0·0008
»	2·1608	1·42307	2·1517	2·1495	0·0015	0·0007
»	2·3573	1·42199	2·1482	2·1461	0·0013	0·0008
»	2·5537	1·42084	2·1445	2·1425	0·0011	0·0009
»	2·6519	1·4202	2·1423	2·1406	0·0010	0·0007
»	2·9466	1·4182	2·1362	2·1344	0·0008	0·0010
»	3·2413	1·4161	2·1293	2·1275	0·0007	0·0011
Paschen	3·5359	1·4138	2·1219	2·1200	0·0006	0·0013
»	3·8306	1·4112	2·1138	2·1118	0·0005	0·0015
»	4·1252	1·40855	2·1053	2·1030	0·0004	0·0019

Rubens	4·715	1·4024	2·0860	2·0834	0·0003	0·0023
»	5·304	1·3953	2·0636	2·0611	0·0002	0·0023
Paschen	5·8932	1·3872	2·0382	2·0363	0·0002	0·0017
»	6·4825	1·3782	2·0103	2·0088	0·0001	0·0014
»	7·0718	1·3681	1·9792	1·9787	0·0001	0·0004
Rubens	7·36	1·3654	1·9710	1·9631	0·0001	+0·0078
P.	7·6612	1·35680	1·9449	1·9460	0·0001	−0·0012
R.	7·86	1·3570	1·9455	1·9344	0·0000	+0·0111
»	8·13	1·3510	1·9273	1·9182	0·0000	+0·0091
P.	8·2505	1·34444	1·9077	1·9107	0·0000	−0·0030
R.	8·56	1·3432	1·9039	1·8911	0·0000	+0·0128
P.	8·8398	1·33079	1·8580	1·8728	0·0000	−0·0148
R.	8·95	1·3348	1·8789	1·8654	0·0000	+0·0135
P.	9·4291	1·31612	1·8239	1·8323	0·0000	−0·0084
Rubens	24·0	0·0000	0·0000	−0·0020	0·0000	+0·0020

Der Anschluß der im Ultraroten nur zweikonstantigen Dispersionsformel ist dort durchwegs sehr gut, die letzten größeren Abweichungen für die längsten Wellen dürften Beobachtungsfehlern zuzuschreiben sein, da die Messungen in diesem Spektralgebiet äußerst schwierig sind und weil die Brechungsexponenten, welche Rubens im äußersten Ultrarot angibt, durchwegs zu groß, die von Paschen gemessenen Brechungsexponenten aber um ebensoviel zu klein erscheinen.

XXVI. Dispersion des Sylvins.

72. Die Beobachtungsdaten wurden den Landolt'schen Tabellen (1905), p. 626, entnommen.

Ergab sich schon für Flußspat ein sehr kleiner Wert von k', so ist für Sylvin merkwürdigerweise k' präzis gleich Null. Obgleich k' jeden beliebigen positiven und negativen Wert annehmen kann, halte ich doch das vollständige Verschwinden von k' nicht für einen Zufall. Es hat die Bedeutung, daß das Licht unendlich großer Schwingungszahl (äußerstes ultraviolettes Licht) in Sylvin die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Null hat.

Hiedurch nimmt das Dispersionsgesetz (118) die einfache Gestalt an:

$$0 = n^2 - \frac{1}{k}(\lambda_0^2 - \lambda^2) - \frac{k''}{k} \cdot \frac{n^4}{\lambda^2}. \qquad (120)$$

Diese nur zweikonstantige Gleichung stellt die ganze Beobachtungsreihe vom Ultraviolett bis zu den Reststrahlen dar. Die Wellenlänge der Reststrahlen wurde von Rubens zu $\lambda_0 = 61 \cdot 1^{\mu}$ bestimmt und genau derselbe Wert wurde als Eigenwellenlänge dieses Mediums angenommen. Die frei wählbaren zwei Konstanten haben für Sylvin die Werte:

$$\frac{1}{k} = 0 \cdot 00058181,$$

$$\frac{k''}{k} = 0 \cdot 003532.$$

Beobachter	λ	n	n^2	$\frac{1}{k}(\lambda_0^2 - \lambda^2)$	$\frac{k''}{k} \cdot \frac{n^4}{\lambda^2}$	δ
Martens	0·185 μ	1·82704	3·33808	2·17199	1·1499	+0·0162
	0·186	1·81847	3·30683	2·17199	1·1164	+0·0184
	0·197	1·73114	2·99685	2·17198	0·8173	+0·0075
	0·198	1·72432	2·97328	2·17198	0·7964	+0·0049
	0·200	1·71864	2·95372	2·17198	0·7704	+0·0114
»	0·204	1·69811	2·88358	2·17198	0·7057	+0·0059
	0·208	1·68302	2·83256	2·17198	0·6550	+0·0056
	0·211	1·67275	2·79809	2·17198	0·6211	+0·0050
	0·214	1·66182	2·76165	2·17198	0·5882	+0·0015
	0·219	1·64739	2·71390	2·17198	0·5424	−0·0005
»	0·224	1·63606	2·67669	2·17198	0·5043	+0·0004
	0·231	1·62037	2·62560	2·17198	0·4563	−0·0027
	0·242	1·60041	2·56131	2·17197	0·3957	−0·0063
	0·250	1·58973	2·52724	2·17197	0·3609	−0·0056
	0·257	1·58119	2·50016	2·17197	0·3343	−0·0061

Beobachter	λ	n	n^2	$\frac{1}{k}(\lambda_0^2-\lambda^2)$	$\frac{k''}{k}\cdot\frac{n^4}{\lambda^2}$	δ
Martens	0·263 μ	1·57477	2·47990	2·17197	0·3140	—0·0061
	0·267	1·57038	2·46609	2·17197	0·3013	—0·0078
	0·274	1·56380	2·44547	2·17196	0·2813	—0·0078
	0·281	1·55830	2·42830	2·17196	0·2637	—0·0074
	0·291	1·55134	2·40666	2·17196	0·2416	—0·0069
	0·308	1·54130	2·37561	2·17195	0·2101	—0·0065
	0·312	1·53920	2·36914	2·17195	0·2037	—0·0065
	0·340	1·52720	2·33234	2·17194	0·1662	—0·0058
	0·358	1·52109	2·31371	2·17193	0·1475	—0·0058
	0·394	1·51213	2·28654	2·17192	0·1190	—0·0043
Stefan, Martens und Pulfrich	0·396	1·51068	2·28215	2·17191	0·1173	—0·0070
	0·410	1·50901	2·27711	2·17191	0·1090	—0·0038
	0·430	1·50549	2·26650	2·17190	0·0981	—0·0035
	0·434	1·50493	2·26481	2·17190	0·0962	—0·0033
	0·441	1·50381	2·26143	2·17189	0·0929	—0·0033

Stefan, Martens und	0·467 μ	1·50038	2·25114	2·17188	0·0821	—0·0028
Pulfrich	0·486	1·49835	2·24505	2·17187	0·0754	—0·0022
	0·508	1·49610	2·23831	2·17186	0·0686	—0·0021
	0·533	1·49401	2·23205	2·17184	0·0619	—0·0017
	0·546	1·49313	2·22944	2·17183	0·0590	—0·0014
»	0·560	1·49212	2·22642	2·17182	0·0558	—0·0012
	0·589	1·49039	2·22126	2·17180	0·0502	—0·0008
	0·627	1·48841	2·21536	2·17178	0·0441	—0·0005
	0·643	1·48768	2·21318	2·17177	0·0418	—0·0004
	0·656	1·48721	2·21180	2·17175	0·0402	—0·0001
»	0·670	1·48663	2·21007	2·17174	0·0384	—0·0001
	0·686	1·48604	2·20831	2·17173	0·0366	0·0000
	0·760	1·48384	2·20178	2·17167	0·0296	+0·0005
	0·768	1·48374	2·20148	2·17167	0·0290	+0·0008
	0·845	1·4823	2·1972	2·17166	0·0239	+0·0017
Rubens u. a.	0·893	1·4813	2·1942	2·17154	0·0213	+0·0014
	0·940	1·4809	2·1931	2·17150	0·0192	+0·0023
	0·944	1·4806	2·1921	2·17149	0·0190	+0·0016
	0·982	1·4802	2·1910	2·17145	0·0176	+0·0020
	1·003	1·4799	2·1901	2·17132	0·0168	+0·0020

Beobachter	λ	n	n^2	$\frac{1}{k}(\lambda_0^2-\lambda^2)$	$\frac{k''}{k}\frac{n^4}{\lambda^2}$	δ
Rubens u. a.	1·070 μ	1·4793	2·1883	2·17131	0·0148	+0·0023
	1·145	1·4786	2·1863	2·17124	0·0147	+0·0004
	1·179	1·4780	2·1845	2·17120	0·0121	+0·0012
	1·473	1·4770	2·1815	2·17074	0·0077	+0·0030
	1·584	1·4765	2·1801	2·17155	0·0067	+0·0028
»	1·768	1·4760	2·1786	2·17018	0·0036	+0·0048
	2·230	1·4749	2·1753	2·16911	0·0034	+0·0029
	2·947	1·4742	2·1733	2·1670	0·0019	+0·0044
	4·125	1·4721	2·1661	2·1621	0·0010	+0·0030
	4·714	1·4711	2·1641	2·1591	0·0009	+0·0041
»	4·810	1·4709	2·1635	2·1586	0·0009	+0·0041
	5·137	1·4706	2·1627	2·1566	0·0006	+0·0054
	5·304	1·4699	2·1606	2·1557	0·0006	+0·0044
	5·471	1·4699	2·1606	2·1546	0·0006	+0·0055
	5·893	1·4688	2·1574	2·1518	0·0005	+0·0051

Rubens u. a.	5·950 μ	1·4686	2·1568	2·1514	0·0005	+0·0049
	6·482	1·4678	2·1544	2·1476	0·0004	+0·0065
	7·080	1·4660	2·1492	2·1429	0·0003	+0·0060
	7·661	1·4645	2·1448	2·1379	0·0003	+0·0066
	8·840	1·4606	2·1334	2·1267	0·0002	+0·0066
»	9·006	1·4603	2·1325	2·1248	0·0002	+0·0075
	10·01	1·4565	2·1214	2·1137	0·0002	+0·0074
	10·193	1·4549	2·1167	2·1116	0·0002	+0·0050
	11·197	1·4522	2·1089	2·0942	0·0001	+0·0145
	14·14	1·4362	2·0627	2·0557	0·0001	+0·0169
»	18·10	1·4108	1·9904	1·9814		+0·0089
	20·60	1·3882	1·9271	1·9251		+0·0019
	22·50	1·3692	1·8747	1·8775		−0·0028
	61·10	0·0000	0·0000	0·0000		0·0000

XXVII. Dispersion der Gase.

73. Aus der Tatsache, daß die Ionisation einer Gasmasse lange Zeit erhalten bleibt und sich nur langsam in das benachbarte Gas ausbreitet, muß geschlossen werden, daß die Konstante $\varkappa_0$ der chemischen Diffusion in Gasen verschwindend klein ist. Die Determinante D_1 hat also nach (109) den einfachen Wert:

$$D_1 = em(p_0^2 - p^2). \tag{121}$$

74. Wir setzen ferner voraus, daß für Gase die Annahme einer zweiten Eigenschwingung nicht so zulässig ist wie für dichtere Medien, da dies nach § 61 auf das Auftreten temporärer elektrischer Leitfähigkeiten deuten würde, welches ich für Gase nicht gern annehmen möchte. Es hat also das Dispersionsgesetz die einfache Form (111):

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} = \frac{k}{\lambda_0^2 - \lambda^2}. \tag{111}$$

Sehr wichtig für das Folgende ist die Bestimmung der Eigenschwingungsdauer λ_0 der Gase, da diese die Schwingungsdauern der Kathoden- und β-Strahlen von jenen der Anoden- und α-Strahlen trennt. Reststrahlen, welche von Luft reflektiert wurden, können in Luft nicht eindringen und also schwerlich beobachtet werden. Man ist also für Gase darauf angewiesen, die Eigenschwingungsdauer aus den Dispersionsbeobachtungen zu entnehmen, was in mehr als einer Beziehung unsicher ist.

Die Dispersion der Gase ist normal, d. h. das violette Licht wird stärker gebrochen als das rote, also ist die Dispersionskonstante k positiv. Je nachdem nun das Quadrat des Brechungsexponenten n^2 größer oder kleiner als die Dielektrizitätskonstante n_0^2 ist, muß also λ_0 kleiner oder größer als λ sein, d. h. liegt die Eigenschwingungsdauer im Ultravioletten oder Ultraroten.

75. Leider liegen viel zu wenig Beobachtungen der Dispersion von Gasen vor. Die berühmten Messungen, mit welchen

Ketteler[1] (1865) die Dispersion der Gase nachgewiesen hat, würden gestatten, alle drei Konstanten der Dispersionsgleichung (111) zu berechnen, doch ergeben sich dieselben mit allzu großen wahrscheinlichen Fehlern. Jedoch erkennt man aus denselben wenigstens die Größenordnung der Eigenschwingungsdauer. Es ist

	Beobachtet von Ketteler			ε_0
	n^2 (Li)	n^2 (Na)	n^2 (Tl)	
Luft	1·00058734	1·00058941	1·00059134	1·000586
Wasserstoff ...	28456	28588	28712	264
Kohlensäure...	89536	89844	90144	966
Schwefeldioxyd	1·00136310	1·00137202	1·00138142	1·0095

Für Wasserstoff und Luft ist also n^2 größer als die von Boltzmann und Klemencic beobachteten Dielektrizitätskonstanten ε_0 und liegt also die Eigenschwingungsdauer jenseits des Ultravioletts. Für Kohlensäure und Schwefeldioxyd ist aber n^2 kleiner als ε_0 und liegt also die Eigenschwingungsdauer wie für die meisten festen und flüssigen Medien im Ultraroten. Für SO_2 muß die Eigenwellenlänge aber nicht sehr groß sein, da n^2 so auffallend viel kleiner ist als ε_0, so daß es vielleicht möglich wäre, ultrarote Reststrahlen durch Reflexion an Schwefeldioxydgas nachzuweisen.

76. Ketteler (l. c., p. 399) bestimmt die Eigenwellenlänge der Luft bereits recht gut mit $\lambda_0 = 0 \cdot 07^{\mu}$, weil für Gase sein Dispersionsgesetz mit dem meinigen nahezu zusammenfällt, da n nahezu gleich 1 ist. Ketteler gibt aber an, daß alle Gase, ja sogar alle festen und flüssigen Stoffe Eigenschwingungsdauern von derselben Größenordnung haben; dem stimme ich selbstverständlich nicht zu. Indes scheint auch mir wahrlich, daß viele Gase, insbesondere verdünnte Gase und vielleicht alle sehr verdünnten Gase dieselbe Eigenschwingungsdauer λ_0 haben.

[1] Ketteler, Pogg. Ann., *124*, p. 390.

77. Hiefür spricht, daß die Eigenschwingungsdauer vieler Gase von ihrem Drucke sehr wenig abhängt. Dies folgt aus der schon von Ketteler konstatierten Tatsache, daß das Brechungsvermögen der Gase für jede Lichtart ihrer Dichte genau proportional ist. Dies läßt erkennen, daß die Dispersionskonstante k (Gl. 111) der Gasdichte genau proportional ist und daß die Eigenwellenlänge λ_0 nicht von der Gasdichte abhängt. Wäre dies der Fall, so könnte schwerlich eine so einfache Beziehung zwischen Brechungsvermögen und Dichte bestehen.

78. Die Dispersion der Luft kennen wir dank den Messungen von Kayser und Runge (Berl. Akad. 1893, Landolt's Tabellen [1905], p. 689) bis weit in das Ultraviolett hinein genau. Doch wären noch weiter ins Ultraviolette für ein nicht absorbierendes Gas fortgesetzte Messungen von großem Interesse. Kayser und Runge stellen ihre Beobachtungen durch die Cauchy'sche Dispersionsformel dar. Ich habe dieselben nach meiner Dispersionsgleichung (111) berechnet, um die Eigenschwingungsdauer λ_0 der Luft kennen zu lernen. Es ergab sich für die drei Konstanten der Dispersionsgleichung:

$$\lambda_0 = 0\cdot103^{\mu} \pm 0\cdot005^{\mu}, \tag{121}$$

$$n_0^2 = 1\cdot0005747 \pm 0\cdot0000004, \tag{122}$$

$$k = 0\cdot00000310.$$

Die Übereinstimmung der Beobachtungen von Kayser und Runge mit dieser Rechnung ergibt sich aus nebenstehender Tabelle.

Die Dielektrizitätskonstante der Luft ergibt sich also aus diesen Dispersionsbeobachtungen nach (122) zu:

$$\varepsilon_0 = 1\cdot0005747,$$

also etwas kleiner als nach den statischen Messungen von Boltzmann ($\varepsilon_0 = 1\cdot000590$) und Klemencic ($\varepsilon_0 = 1\cdot000586$).

Ferner dürfte die Eigenschwingungsdauer aller verdünnten Gase nicht weit von der in (121) angegebenen Eigenschwingungsdauer der Luft $0\cdot1^{\mu}$ liegen. Man begreift auch, daß die Schumann'schen Beobachtungen im äußersten ultravioletten

Licht gerade bis zu dieser Wellenlänge $0 \cdot 1^{\mu}$ und nicht weiter reichen, denn die Reststrahlen der Luft können sich in Luft nicht fortpflanzen, und überdies liegt bei der Eigenwellenlänge immer ein Absorptionsstreifen.

λ	n beobachtet	n berechnet	Differenz
0·762	1·0002905	1·0002901	+ 4
0·6870	2911	2907	+ 4
0·6563	2914	2911	+ 3
0·5893	2922	2920	+ 2
0·527	2933	2932	+ 1
0·486	2943	2946	− 3
0·4308	2962	2962	0
0·3968	2978	2980	− 2
0·3934	2980	2981	− 1
0·382	2987	2988	− 1
0·373	2993	2994	− 1
0·3581	3003	3005	− 2
0·3441	3015	3017	− 2
0·336	3023	3026	− 3
0·329	3031	3033	− 2
0·318	3043	3045	− 2
0·310	3053	3055	− 2
0·302	3064	3066	− 2
0·295	3075	3077	− 2
0·255	3159	3159	0
0·236	3220	3218	+ 2

79. Licht von noch weitaus kleinerer Wellenlänge könnte aber wieder beobachtbar sein und man könnte die Röntgenstrahlen für Transversalstrahlen extrem kleiner Wellenlänge halten. Dem steht allerdings entgegen, daß die Röntgenstrahlen beim Eintritt in feste Medien nicht gebrochen werden, aber vielleicht ist es nicht gestattet, das Brechungsgesetz auf Strahlen extrem kleiner Wellenlänge anzuwenden.

XXVIII. Chemische Wirksamkeit des ultravioletten Lichtes.

80. Die bei gleicher Amplitude (gleicher Strahlungsenergie) weitaus größere chemische Wirksamkeit des kurzwelligeren Lichtes erklärt sich daraus, daß die Amplituden ε' und μ' der chemischen Schwingungen des ultravioletten Lichtes bei gegebener elektrischer Amplitude $\mathfrak{e}'$ (gegebener Wärmewirkung des Lichtes) weit größer sind als für das langwellige Licht.

Diese chemischen Amplituden werden allgemein durch Gleichung (71) und (72) bestimmt. Sie wachsen hienach mit $p\mathfrak{q} = p^2\mathfrak{n}$, also mit dem Quadrate der Schwingungszahl p und mit dem Brechungsexponenten $\mathfrak{n}$. Noch wichtiger ist aber, daß die chemischen Amplituden der Determinante D_1 verkehrt proportional sind. In Gasen nehmen deshalb die chemischen Schwingungen aller Strahlen (auch der Longitudinalstrahlen) bei Annäherung ihrer Schwingungszahl nach (111) bis ins Unendliche zu. Aber auch für feste und flüssige Medien nimmt die Determinante D_1 nach (109) im Ultravioletten sehr rasch ab, was an dem raschen Ansteigen der Brechungsexponenten kenntlich ist, welches durch das mit $\varkappa_0$ behaftete, der vierten Potenz der Schwingungszahl proportionale Glied der Determinante bewirkt wird.

XXIX. Natürliche Drehung der Polarisationsebene.

81. Wir betrachten nun Medien, deren magnetochemische Kuppelkonstanten

$$b_1' = b_2'$$

nicht verschwindend klein sind, gehen also wieder zu der Gleichung (106) für die elektrische Amplitude:

$$\mathfrak{e}' \stackrel{s}{=} \mathfrak{e}_1 + i\mathfrak{e}_2$$

zurück. Die eingeklammerte Dyade in (106) ist komplex; das gleiche gilt also für $\mathfrak{e}'$, linearpolarisiertes Licht kann sich in einem solchen Medium sonach nicht fortpflanzen. Dividieren wir wieder durch $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot D_1 \mathfrak{n}^2$ und setzen:

$$\mathfrak{c}_0'^2 = \mathfrak{c}_0^2 + \left(\frac{u_2}{\varepsilon_0} + \frac{u''}{\mu_0}\right)\frac{p^2}{D_1} \tag{123}$$

und

$$\alpha = \frac{c_0}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{v_2' - {}'v_2 + 2 w_2 \mathfrak{q}^2}{D_1}. \tag{124}$$

$\mathfrak{c}_0'$ kann man bezeichnen als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in diesem Medium mit Rücksicht auf die Dispersion, aber ohne Rücksicht auf die Polarisationsart des Lichtes.

Trennen wir nun die reellen und imaginären Glieder von (106), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}_0'^2)\mathfrak{e}_1 &\stackrel{1}{=} \alpha \mathfrak{q} \times \mathfrak{e}_2, \\ (\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}_0'^2)\mathfrak{e}_2 &\stackrel{1}{=} -\alpha \mathfrak{q} \times \mathfrak{e}_1. \end{aligned} \tag{125}$$

Es müssen also die um eine Viertelwellenlänge gegeneinander verschobenen transversalen Komponenten $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ gleich groß und gegeneinander senkrecht sein, sonach kann sich in einem Medium, in welchem $b_1' = b_2'$ merkliche Größe haben, nur zirkularpolarisiertes Licht fortpflanzen.

Aus (125) folgt:

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}_0'^2 = \pm \alpha p \frac{n}{4\pi c_0}, \tag{126}$$

da

$$\mathfrak{q}^2 = p^2 \mathfrak{n}^2 = p^2 \frac{n^2}{16\pi^2 c_0^2}.$$

Wählt man das obere Vorzeichen, so erkennt man aus (125), daß das Licht rechts zirkular ist, wenn α positiv ist. Für das untere Vorzeichen von (126) ergibt sich dann linkszirkulares Licht und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser beiden entgegengesetzt zirkularen Strahlen ist nach (126) verschieden, und zwar ist mit hinreichender Annäherung:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0' \pm \frac{1}{2}\delta, \tag{127}$$

worin:

$$\delta = \frac{\alpha p}{\mathfrak{c}_0'^2} = \alpha p \mathfrak{n}^2.$$

Hiemit ist die natürliche Drehung der Polarisationsebene erklärt. Optische Antipoden sind hienach einfach

Stoffe, deren skalare Materialkonstanten $b_1' = b_2'$ gleiche entgegengesetzte Werte haben. Ein die Polarisationsebene drehendes Medium braucht nicht selbst eine schraubige stereochemische Struktur zu haben, die Schraubigkeit liegt schon in den Maxwell'schen Gleichungen. Das wichtige van t'Hoff'sche Gesetz kann also immerhin stereochemisch gedeutet, aber keineswegs stereochemisch begründet werden.

82. Die Drehung der Polarisationsebene berechnet sich aus dem Gangunterschiede δ bekanntlich durch:

$$d = \frac{p\delta}{\mathfrak{c}_0'^2}.$$

Es ist also nach (127) und (124), da:

$$\frac{p^2}{D_1} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\mu_0 u_2 + \varepsilon_0 u''} \left(\frac{1}{\mathfrak{n}^2} - \frac{1}{\mathfrak{n}_0^2} \right),$$

$$d = \frac{2 a_1 b_1' c_0}{\mu_0 u_2 + \varepsilon_0 u''} \cdot \frac{n_0^2 - n^2}{n_0^2} \cdot \mathfrak{n}^2 \left((s-r) + \pi^2 \varkappa_0 \frac{n^2}{\lambda^2} \right). \quad (128)$$

Sieht man ab von der Dispersion, d. h. betrachtet man n als annähernd konstant und berücksichtigt, daß für feste und flüssige Medien mit Annäherung

$$s = r$$

ist, so ergibt sich aus (128) das Biot'sche Gesetz, daß die Drehung der Polarisationsebene dem Quadrate der Wellenlänge verkehrt proportional ist. Da die vorliegenden Beobachtungen nicht umfangreich genug sind, habe ich mich begnügt, die Dispersion der Drehung der Polarisationsebene für Natriumchlorat nach der Formel:

$$d = k_1 + k_2 \frac{1}{\lambda^2}, \quad (129)$$

worin:

$$k_1 = -0 \cdot 10,$$
$$k_2 = 1 \cdot 134;$$

für Quarz aber nach der Formel:

$$d = n^2\left(k_1 + k_2 \frac{n^2}{\lambda^2}\right), \tag{130}$$

worin:

$$n_{\mathrm{Na}}^2 \cdot k_1 = -3 \cdot 0,$$

$$n_{\mathrm{Na}}^4 \cdot k_2 = 8 \cdot 345,$$

zu berechnen. Diese Verschiedenheit kommt daher, daß für Quarz eine große Reihe von Brechungsexponenten bekannt sind und ich darüber unterrichtet bin, daß für Quarz ebenso wie für Sylvin und Flußspat (siehe § 72) für $\frac{1}{n_0^2}$ in die Dispersionsgleichung ein sehr kleiner Wert eintritt. Es ist also mit hinreichender Annäherung

$$\frac{n_0^2 - n^2}{n_0^2} = 1,$$

wodurch man zu Formel (130) gelangt.

Für Natriumchlorat sind zwar die Brechungsexponenten n selbst hinreichend bekannt, doch ist diese Dispersionsreihe nicht ausgedehnt genug, um auf den Wert n_0 schließen zu können. Ich habe deshalb für dieses Medium auf eine Korrektion bezüglich der Veränderlichkeit von n ganz verzichtet oder, was auf dasselbe hinauskommt, ich habe angenommen, daß:

$$n_0^2 = 1 \cdot 5 n_{\mathrm{Na}}^2,$$

wodurch $(n_0^2 - n^2) n^4$ nahezu konstant würde.

Die Beobachtungsdaten wurden den Landolt'schen Tabellen p. 706, entnommen.

Für Natriumchlorat ist nach den Beobachtungen von Guye:

λ	*d* beobachtet	*d* berechnet nach (129)	Differenz Beob.— Rechn.
0·250	14·97	17·93	−2·96
0·283	13·43	14·08	−0·65
0·299	12·42	12·60	−0·18
0·307	11·92	11·92	0·00
0·323	10·79	10·73	+0·06
0·339	9·80	9·76	+0·04
0·356	8·86	8·82	+0·04
0·374	8·10	8·03	+0·07
0·384	7·65	7·58	+0·07
0·407	6·75	6·74	+0·01
0·428	6·10	6·06	+0·04
0·455	5·33	5·36	−0·03
0·489	4·59	4·64	−0·05
0·532	3·84	3·93	−0·09
0·590	3·10	3·14	−0·04
0·651	2·60	2·58	+0·02
0·679	2·32	2·35	−0·03
0·718	2·07	2·10	−0·03

Für Quarz ist nach den Beobachtungen von Soret und Sarasin:

λ	*d* beobachtet	*d* berechnet für $n = n_{Na}$	Korrektion auf die Veränderlichkeit von n	*d* berechnet nach (130)	Differenz Beob.— Rechn.
0·250	143·27	133·5	+10·8	144·3	−1·0
0·283	121·05	105·3	5·8	111·1	+9·0
0·318	84·97	81·7	4·0	85·7	−0·7
0·329	78·58	76·3	3·3	79·6	−1·0
0·336	74·57	72·9	3·0	75·9	−1·3

λ	d beobachtet	d berechnet für $n = n_{Na}$	Korrektion auf die Veränderlichkeit von n	d berechnet nach (130)	Differenz Beob.— Rechnung
0·344	70·59	69·5	+ 2·8	72·3	−1·7
0·358	64·46	63·9	2·3	66·2	−1·7
0·373	58·89	58·8	2·0	60·8	−0·9
0·382	55·63	55·8	1·7	57·5	−1·9
0·393	52·16	52·6	1·5	54·1	−1·9
0·397	51·19	51·5	1·3	52·8	−1·7
0·431	42·60	43·2	1·0	44·2	−1·6
0·486	32·77	33·4	0·7	34·1	−1·3
0·527	27·54	27·9	0·4	28·3	−0·8
0·590	21·70	21·6	0·2	21·8	−0·1
0·656	17·32	16·9	0·2	17·1	+0·2
0·687	15·75	15·2	0·1	15·3	+0·5
0·719	14·30	13·7	0·1	13·8	+0·5
0·760	12·67	11·9	0·0	11·9	+0·8

Man ersieht hieraus, daß die Korrektion auf die Veränderlichkeit von n zwar unbedeutend ist, aber doch die Übereinstimmung merklich weiter in das Ultraviolette herstellt, daß also das aus meiner Theorie folgende Gesetz der Dispersion der natürlichen Drehung noch etwas besser mit den Beobachtungen stimmt als das einfache Biot'sche Gesetz.

Wichtiger ist der Aufschluß, welchen man über die Materialkonstante $(s-r)$ erhält. Dieselbe ist der Konstanten k_1 proportional und diese ist so klein, daß sie fast, aber nicht ganz in den Beobachtungsfehlern verschwindet.

XXX. Das Fizeau'sche Phänomen.

82. Meine Versuche, auf Grund der früheren Form meiner Theorie das Fizeau'sche Phänomen, welches für die Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Medien so wichtig ist, zu erklären, mußten gänzlich fehlschlagen, denn

diese erklärte die Dispersion des Lichtes überhaupt nicht, und das Fizeau'sche Phänomen ist, wie sich jetzt zeigt, ganz wesentlich eine Dispersionserscheinung in bewegten Medien.

Nach Kapitel IX (vergl. auch § 14 der Einleitung) sind die rein elektromagnetischen Vorgänge von der Bewegung vollkommen unabhängig, sie finden im Raum und nicht in der Materie statt. Die stofflichen Änderungen $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ sind hingegen völlig an die Materie gebunden. Es drückt sich dies in den Grundgleichungen dadurch aus, daß in den elektromagnetischen Gleichungen I und II nur die lokalen Fluxionen, in den chemischen Gleichungen V und VI aber die materiellen Fluxionen auftreten.

Ein elektromagnetischer Strahl ist nun immer von chemischen Schwingungen begleitet, welche in ruhenden Medien vollkommen kohärent sind. Dies kann aber in bewegten Medien nicht in gleicher Weise stattfinden, denn die elektromagnetischen Schwingungen des Strahles für sich wären von der Bewegung der Materie vollkommen unabhängig, die chemischen Schwingungen des Strahles für sich würden aber von der bewegten Materie vollkommen mitgeführt werden. Die Folge ist die Fizeau'sche teilweise Mitführung des ganzen Strahles.

83. In § 44 wurde gezeigt, daß der Einfluß der Bewegung des Mediums auf einen Strahl sich darauf beschränkt, daß in allen Beziehungen statt der Materialkonstanten e und m die Werte:

$$e(1-\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}), \text{ beziehungsweise } m(1-\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})$$

erscheinen.

Diese Werte treten nun auch in dem Dispersionsgesetz auf, welches nach (108) die Gestalt hat:

$$\mathfrak{c}_0'^2-\mathfrak{c}_0^2=-\frac{u_2}{\varepsilon_0}\frac{p^2}{D_1}, \tag{131}$$

worin nach § 49 und § 50:

$$u_2=b_2^2e \quad \text{und} \quad D_1=-rs \tag{132}$$

für Gase,

$$u_2 = 2a_1^2 m \quad \text{und} \quad D_1 = -emp^2 \tag{133}$$

für feste und flüssige Medien.

Hierin bedeutet $\mathfrak{c}_0'$ die Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Medium. Ferner ist:

$$\mathfrak{c}_v^2 = \frac{c_0^2}{\varepsilon_0 \mu_0}. \tag{134}$$

In (133) wurden die mit $\varkappa_0$ behafteten Glieder der Determinante D_1 vernachlässigt, weil diese für langwelliges Licht (Natriumlicht) hinreichend klein sind. Da die Eigenschwingung der Gase im Ultraviolett, jene der dichten Medien im Ultrarot liegt, konnte ferner in (132) p^2 gegen p_0^2, in (133) aber p_0^2 gegen p^2 vernachlässigt werden.

Das Dispersionsglied u_2/D_1 enthält also den Faktor e für Gase, aber den Faktor $1/e$ für flüssige und feste Medien. In bewegten Medien erhält es also den Faktor $(1-\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})$ für Gase, aber den Faktor $(1+\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n})$ für dichte Medien. Bezeichne $\mathfrak{c}$ die Lichtgeschwindigkeit in bewegten Medien, so ist also:

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}_0^2 = (\mathfrak{c}_0'^2 - \mathfrak{c}_0^2)(1-\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}) \tag{135}$$

für Gase,

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}_0^2 = (\mathfrak{c}_0'^2 - \mathfrak{c}_0^2)(1+\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}) \tag{136}$$

für flüssige und feste Medien.

Es ist sonach:

$$\mathfrak{c} \stackrel{3}{=} \mathfrak{c}_0' + \delta\mathfrak{v},$$

worin δ den Mitführungskoeffizienten bezeichnet. Derselbe berechnet sich nach (135), beziehungsweise (136) wie folgt:

$$2\delta\mathfrak{c}_0'\cdot\mathfrak{v} = (\mathfrak{c}_0^2 - \mathfrak{c}_0'^2)\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}$$

für Gase,

$$2\delta\mathfrak{c}_0'\cdot\mathfrak{v} = (\mathfrak{c}_0'^2 - \mathfrak{c}_0^2)\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{n}$$

für dichtere Medien.

Wenn das Medium eine zweite Eigenschwingungsdauer hat (vergl. § 72), so kann dies an der Anwendbarkeit von Gleichung (134), nichts ändern, denn auch das Dispersionsglied, welches diese zweite Eigenschwingung einführt, muß

Materialkonstanten enthalten, die ebenso wie e und m von der Geschwindigkeit des Mediums abhängen. Es folgt also:

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{n^2 - n_0^2}{n_0^2} \tag{137}$$

für Gase,

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{n_0^2 - n^2}{n_0^2} \tag{138}$$

für flüssige und feste Medien.

Der Korreptionskoeffizient δ ist also wesentlich positiv, denn für alle Medien, deren Eigenschwingungsdauer im Ultraviolett liegt, ist $n > n_0$ (siehe § 76) und gilt (137), für alle Stoffe aber, deren Eigenschwingung im Ultraroten liegt, ist nach § 76 $n_0 > n$ und gilt (138).

Der Fresnel'sche Wert δ' des Korreptionskoeffizienten, zu welchem auch die Lorentz'sche Theorie führt, ist hingegen bekanntlich:

$$\delta' = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

Die folgende Tabelle stellt die aus meiner Theorie folgenden Werte δ dieses Koeffizienten mit den Fresnel'schen Werten δ' für einige Medien zusammen:

	$\varepsilon_0 = n_0^2$	n^2_{Na}	Nach Fresnel $\delta' = \frac{n^2-1}{n^2}$	Nach meiner Theorie $\delta = \pm \frac{1}{2}\frac{n_0^2 - n^2}{n_0^2}$
Wasser	80·0	1·78	0·438	0·488
Alkohol	27·0	1·85	0·46	0·46
Äther	4·3	1·82	0·45	0·29
Rüböl	2·85	2·16	0·54	0·12
Terpentinöl	2·23	2·20	0·55	0·007
Schwefelkohlenstoff	2·62	2·65	0·62	0·006
Schwefeldioxyd	1·0095	1·00137	0·00137	0·0081
Kohlensäure	1·00096	1·00090	0·00090	0·00003
Wasserstoff	1·000264	1·000285	0·000285	0·00001
Luft	1·000575	1·000584	0·000584	0·000005

Die aus meiner Theorie und den früheren Theorien folgenden Werte des Korreptionskoeffizienten sind also sehr verschieden. Leider liegen aber nur Beobachtungen für Wasser und Luft vor und gerade für Wasser fallen die Werte δ und δ' nahezu zusammen, so daß hier eine Entscheidung unmöglich ist. Für Luft sind aber diese Werte zu klein, immerhin möge daran erinnert werden, daß Michelson den Korreptionskoeffizienten der Luft unmeßbar klein fand, während derselbe, wenn er den Wert 0·000584 hätte, noch ganz wohl meßbar wäre.

Man muß bedauern, daß die Experimentatoren, welche den Fizeau'schen Versuch mit Wasser wiederholt haben, nicht gleich mit derselben Versuchsanordnung den Versuch mit einer Reihe anderer Flüssigkeiten wiederholt haben. Dieses Versäumnis muß nachgeholt werden und auch auf diesem Wege ist ein für oder gegen meine Theorie entscheidendes Experiment zu gewinnen.

XXXI. Aberration des Lichtes und Michelson'scher Versuch.

84. Die Wellenfortpflanzung des Lichtes wird ausschließlich durch die eben berechnete Fizeau'sche Korreption in bewegten Medien beeinflußt und dieser Einfluß verschwindet, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Mediums senkrecht auf der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ der Lichtwelle ist.

Anders die Strahlrichtung des Lichtes; diese hängt von dem Energieflusse ab und dieser hat nach Gleichung (33), § 20, eine Komponente, welche der Geschwindigkeit des Mediums proportional ist. Die Arbeit $-\Theta\cdot\mathfrak{v}$ der an der Oberfläche des betrachteten Teiles der Materie angreifenden ponderomotorischen Spannungen kann auch als Energiefluß bezeichnet werden, kommt aber hier nicht in Betracht, da zugegeben werden dürfte, daß ein Strahl auf eine Fläche, welche er streift, eine Kraft (einen Zug) ausüben kann, also die Bewegungsenergie nicht in der Strahlrichtung transportiert wird.

Der übrige Energiefluß hat nach (33) den Wert:

$$\mathfrak{S} \overset{s}{=} \mathfrak{S}_0 - E_1\mathfrak{v}. \qquad (139)$$

Hierin ist $\mathfrak{S}_0$ der Energiefluß der betrachteten Lichtwelle im ruhenden Medium und E_1 die elektromagnetische Energie des Strahles. Es ist dies nicht die ganze Energie des Strahles, sondern es kommt noch die Energie E_2 der chemischen Schwingungen desselben hinzu, welche aber meist verschwindend klein ist. Nun muß für jeden ungedämpften Strahl (siehe § 125) die Beziehung

$$\mathfrak{c}^* \overset{3}{=} \frac{\mathfrak{S}}{E_1 + E_2} \tag{140}$$

erfüllt sein. Es folgt also:

$$\mathfrak{c}^* \overset{3}{=} \mathfrak{c}_0^* - \mathfrak{v} \frac{E_1}{E_1 + E_2}. \tag{141}$$

Hierin ist $\mathfrak{c}^*$ die Strahlgeschwindigkeit im bewegten Medium, $\mathfrak{c}_0^*$ die Strahlgeschwindigkeit im ruhenden Medium. Diese haben nach (141) nicht gleiche Richtung, sondern ihre vektorische Differenz ist gleich der negativen Geschwindigkeit des Mediums. Damit ist die Aberration des Lichtes erklärt.

Jedoch soll nach meiner Theorie in solchen Medien, in welchen das Licht von kohärenten chemischen Schwingungen von beträchtlicher Energie E_2 begleitet wird, z. B. in der Nähe des Absorptionsstreifens anomal dispergierender Substanzen, sich eine merklich geringere Aberration des Lichtes ergeben, ja es ist sogar die Hoffnung nicht auszuschließen, daß man bei Wiederholung des Airy'schen Versuches mit einem mit einer durchsichtigen Flüssigkeit gefüllten, aber genau achromatisierten Fernrohr einen spurweise abweichenden Wert der Aberration, ja vielleicht sogar eine Dispersion der Aberration bemerken könnte.

85. Der Michelson'sche Versuch besteht nur darin, daß nachgewiesen wird, daß irgend ein optisches Experiment, bei welchem die Lichtquelle, die ganze Versuchsanordnung und der Beobachter im selben Zimmer sich in relativer Ruhe befinden, nicht von der Bewegung der Gestirne (den Weltrichtungen) abhängt. Dies ist nach § 12 selbstverständlich, da bei einem solchen Versuche die Zimmerwände den beobachteten Vorgang hinreichend abschließen.

XXXII. Transversale Strahlen in absorbierenden Medien.

86. Wir betrachten von nun an nur mehr Medien ohne natürliche Drehung der Polarisationsebene, für welche also alle mit Akzenten versehenen Kuppelkonstanten Null sind. Ferner setzen wir zunächst wieder voraus, daß kein starkes statisches elektrisches oder magnetisches Feld vorhanden ist. Dann gelten die Gleichungen (101) und (102) und nehmen die einfachere Form an:

$$-ip\varepsilon_0\cdot D\cdot\mathfrak{e}'+\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'(-ipu_1+v_1)+$$
$$+\mathfrak{q}^2\mathfrak{e}'(-ipu_2+v_2)\overset{3}{=}ic_0D\cdot(\mathfrak{q}\times\mathfrak{m}'), \qquad (142)$$

$$-ip\mu_0\cdot D\cdot\mathfrak{m}'=-ic_0D\cdot(\mathfrak{q}\times\mathfrak{e}'). \qquad (143)$$

Für transversale Strahlen, für welche $\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'=0$, folgt hieraus [statt der einfacheren Gleichung (108)] die komplexe Gleichung:

$$\mathfrak{c}^2-\mathfrak{c}_0^2=-\frac{u_2}{\varepsilon_0}\frac{p^2}{D}-i\frac{v_2}{\varepsilon_0}\frac{p}{D}. \qquad (144)$$

Hierin ist:

$$\mathfrak{c}\overset{3}{=}\frac{p}{\mathfrak{q}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}=p\,\mathfrak{n}(1+i\varkappa),$$

also $\mathfrak{c}^2=\mathfrak{c}_1^2+i\,\mathfrak{c}_2^2$, worin:

$$\mathfrak{c}_1^2=\frac{1}{\mathfrak{n}^2}\,\frac{1-\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2}, \qquad (145)$$

$$\mathfrak{c}_2^2=-\frac{1}{\mathfrak{n}^2}\,\frac{2\varkappa}{(1+\varkappa^2)^2}. \qquad (146)$$

Da alle Fortpflanzungsgleichungen von Strahlen, die nicht im starken elektromagnetischen Felde fortschreiten, den Wert $\mathfrak{c}^2$ bestimmen, ergibt sich der Wert $\varkappa$ aus einer Gleichung von der Form:

$$2\mathfrak{c}_1^2\varkappa=\mathfrak{c}_2^2(1-\varkappa^2).$$

Die beiden Wurzeln von $\varkappa$ sind also notwendig von entgegengesetztem Vorzeichen und reziprok. Deshalb ergeben

diese beiden Wurzeln nicht zwei verschiedene Lösungen der Fortpflanzungsgleichung (144), sondern zwei physikalisch ganz identische Strahlen. Die eine Wurzel macht nämlich nach (145) und (146) notwendig $\mathfrak{n}$ imaginär und dann hat nach § 42 nicht diese, sondern wieder die andere Wurzel von $\varkappa$ die Bedeutung der Dämpfung des Strahles. Es steht uns also frei, stets jene und nur jene Wurzel von $\varkappa$ zu wählen, welche $\mathfrak{n}$ reell macht.

88. Durch Trennung der reellen und imaginären Glieder von (144) erhält man:

$$\mathfrak{c}_0'^2 \frac{1-\varkappa^2}{(1+\varkappa^2)^2} - \mathfrak{c}_0^2 = -\frac{u_2 p^2 D_1 + v_2 p D_2}{\varepsilon_0 (D_1^2 + D_2^2)}, \tag{147}$$

$$-\mathfrak{c}_0'^2 \frac{2\varkappa}{(1+\varkappa^2)^2} = \frac{v_2 p D_1 - u_2 p^2 D_2}{\varepsilon_0 (D_1^2 + D_2^2)}. \tag{148}$$

Hierin ist $\mathfrak{c}_0'^2 = \frac{1}{\mathfrak{n}^2}$ die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Transversalstrahles. Da $\varkappa$ die Dämpfung pro Wellenlänge bedeutet, so muß für nicht allzustarke Absorptionen $\varkappa^2$ gegen 1 verschwindend klein sein, und es stellt also (147) unmittelbar das Dispersionsgesetz für absorbierende Medien dar. Führen wir die Werte D_1 und D_2 aus (69) und (70) ein, so ergibt sich, wenn wir uns auf das ultrarote Spektrum beschränken und also das mit $\varkappa_0$ behaftete Glied von D_1 vernachlässigen können, daß der Nenner des Dispersionsgliedes $(D_1^2 + D_2^2)$ in p^2 vom zweiten Grade ist. Es wird also in wenig absorbierenden festen oder flüssigen Medien die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht für die Eigenschwingungszahl p_0 des Mediums, sondern für zwei benachbarte Schwingungsdauern unendlich werden, es werden also zwei Stellen der anomalen Dispersion und der Reflexion von Reststrahlen im Spektrum nachweisbar sein, von welchen die eine der Eigenschwingungszahl sehr nahe liegt, die andere etwas weiter davon abliegt. Dies scheint z. B. mit den Beobachtungen von Rubens am Flußspat sehr gut übereinzustimmen.

XXXIII. Absorption und Emission des Lichtes in nichtleitenden Medien.

89. Durch Division von (147) und (148) ergibt sich:

$$\frac{2\varkappa}{1-\varkappa^2} = \frac{-p v_2 D_1 + p^2 u_2 D_2}{\varepsilon_0 c_0^2 (D_1^2 + D_2^2) - (p^2 u_2 D_1 + p v_2 D_2)}. \qquad (149)$$

Hiedurch ist die Dämpfung $\varkappa$ pro Wellenlänge der transversalen Strahlen, also die Absorption des Lichtes in nicht metallisch leitenden Medien eindeutig (vergl. § 87) als Funktion der Schwingungszahl p bestimmt.

Der Nenner ist wieder in p^2 vom zweiten Grade, verschwindet also für zwei Schwingungszahlen in der Nähe der beiden Stellen anomaler Dispersion (siehe § 88) im Spektrum.

Hier erreicht also die Absorption ihr Maximum $\varkappa^2 = 1$. Sowohl zwischen diesen beiden Absorptionsbändern als außerhalb derselben auf beiden Seiten des Spektrums muß $\varkappa^2$ kleiner als 1 sein, weil ein größerer Wert als 1 nach (147) c_0' imaginär machen würde, was wir nach § 87 stets ausschließen können. Es möge eine Stelle des Spektrums, in welcher $\varkappa^2 = 1$ wird, eine Stelle anomaler Absorption genannt werden, an diesen Stellen findet eine Diskontinuität der Absorption statt. Stets muß zwischen den beiden Stellen anomaler Absorption $\varkappa$ das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie auf beiden Seiten des Spektrums außerhalb dieser Stellen. Die Absorptionsbanden haben also in diesen Stellen scharfe Kanten oder stellen einseitig verbreiterte Linien dar. Sie verlaufen entweder nach außen, wobei das Medium zwischen ihren Kanten durchsichtiger ist, als es ohne dies wäre, oder umgekehrt, sie verlaufen nach innen, so daß die Absorption auf ein nach beiden Seiten scharf begrenztes Band beschränkt ist.

Ist aber, wie dies bei den meisten Medien der Fall sein dürfte, die Absorptionsfähigkeit so gering, daß $\varkappa^2$ für keine reelle Schwingungszahl den Wert 1 erreicht, so erreicht $\varkappa$ ein einfaches Maximum in der Nähe der Eigenschwingungsdauer, so daß nur ein nach beiden Seiten allmählich verlaufender

Absorptionsstreifen oder eine symmetrisch verbreiterte Linie auftritt.

90. In Gasen ist die Dispersion so klein, daß man die rechte Seite von (147) vernachlässigen kann. Dann ergibt sich:

$$2\varkappa = \frac{-v_2 p D_1 + u_2 p^2 D_2}{\varepsilon_0 c_0^2 (D_1^2 + D_2^2)}. \tag{150}$$

Hier ist der Nenner wieder dem Modul $D_1^2 + D_2^2$ der Determinante D proportional und müssen also die beiden Stellen anomaler Absorption mit den beiden Stellen anomaler Dispersion (§ 88) in Gasen genau zusammenfallen.

Da in Gasen jedoch die Absorptionskonstanten sehr klein sind, so ist nur zu erwarten, daß dieselben einfache, aber sehr scharfe Absorptionslinien haben, welche fast genau mit der Eigenschwingung zusammenfallen.

91. Schließlich ist zu beachten, daß der Zähler von (149) mit p verschwindet. Es ist sonach die Dämpfung sehr langsam schwingender Strahlen in allen, auch den stärkst absorbierenden Medien sehr klein, alle Medien sind deshalb für Hertz'sche Strahlen durchsichtig, ausgenommen die metallisch leitenden, welche wir hier von der Betrachtung ausgeschlossen haben.

92. In § 60 wurde die Emission des Glutlichtes dadurch erklärt, daß zufolge der Temperaturerhöhung die Absorptionskonstanten c und x negative Werte annehmen und deshalb die emittierenden chemischen Eigenschwingungen des Mediums negativ gedämpft sind. Das Negativwerden der Absorptionskonstanten bewirkt aber noch eine zweite Art der Temperaturemission, welche die genaue Umkehrung der Absorption ist: In einem Medium mit negativen Absorptionskonstanten fortschreitende Strahlen sind ebenfalls negativ gedämpft, da die Dämpfungskonstante $\varkappa$ nach (150) proportional v_2 und D_2, und diese zwei Werte den Absorptionskonstanten proportional sind.

Die Strahlen, welche im Innern des glühenden Mediums zufolge der Inhomogenität der chemischen Eigenschwingungen nach § 60 emittiert werden, mögen an ihren Ursprungsstellen sehr kleine Intensität haben, indem sie aber das leuchtende Gas passieren, gewinnen sie zufolge der negativen Dämpfung

an Amplitude und sammeln dabei unter Abkühlung des Gases jene ganz beträchtliche Energie, mit welcher sie ausgestrahlt werden.

93. Es werden bei nicht zu hoher Temperatur des Gases symmetrisch verbreiterte Linien emittiert werden, deren Lichtstärke und Verbreiterung mit Erhöhung der Temperatur wächst, so lange bis im Maximum der Emission die Dämpfung den Wert -1 erreicht, den sie nach § 89 nicht überschreiten kann, ohne daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen imaginär würde. Bei weiterer Temperaturerhöhung treten die beiden Stellen anomaler Emission, in welchen $\varkappa$ den Wert -1 erreicht, immer weiter auseinander, die Emission erstreckt sich auf ein immer größeres Spektralgebiet auf beiden Seiten außerhalb dieses Intervalles, bricht aber an den beiden Stellen anomaler Emission scharf ab und zwischen denselben hat das Medium nicht nur keine Temperaturemission, sondern eine sehr starke positive Absorption. Es dürfte hiemit die Selbstumkehrung der Spektrallinien bei intensiver Emission treffend dargestellt sein. Das Auftreten einer feinen hellen Linie inmitten der dunklen Umkehrung, welches oft zu beobachten ist, kann als eine Emission durch die negativ gedämpften Eigenschwingungen des Mediums an seiner Oberfläche nach § 60 erklärt werden.

XXXIV. Longitudinale elektrische Strahlen bei Ausschluß eines elektrostatischen Feldes.

94. Einen großen Fortschritt hat meine Theorie damit gemacht, daß sie nun das Auftreten longitudinaler Strahlen im unelektrischen Felde erklärt. Es kann gezeigt werden, daß diese Strahlen alle charakteristischen Eigentümlichkeiten der Kathodenstrahlen und β-Strahlen, beziehungsweise der Anodenstrahlen, Kanalstrahlen und α-Strahlen haben.

Die Amplitudengleichung (142) nimmt für longitudinale Strahlen die Form an:

$$p\varepsilon_0 D + \mathfrak{q}^2 (p(u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)) = 0. \tag{151}$$

Aus (143) ergibt sich $\mathfrak{m}' = 0$, die longitudinalen Strahlen sind also elektrochemische Strahlen, sie werden nicht von

magnetischen Schwingungen begleitet. Berücksichtigen wir, daß:

$$\mathfrak{q}^2 = p^2\mathfrak{n}^2(1-\varkappa^2+2i\varkappa) \quad \text{und} \quad D = D_1+iD_2$$

und trennen die reellen und imaginären Glieder von (151), so ergibt sich:

$$2\varkappa w\mathfrak{n}^2-y = 0, \tag{152}$$

$$(1-\varkappa^2)w\mathfrak{n}^2+z = 0, \tag{153}$$

worin:

$$w = p^2(u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2, \tag{154}$$

$$y = \varepsilon_0(v_1+v_2)\frac{D_1}{p}-\varepsilon_0(u_1+u_2)D_2, \tag{155}$$

$$z = \varepsilon_0(u_1+u_2)D_1+\varepsilon_0(v_1+v_2)\frac{D_2}{p}. \tag{156}$$

Aus (152) und (153) folgt:

$$2\varkappa = \mathfrak{c}^2\frac{y}{w}, \tag{157}$$

$$\mathfrak{c}^2 = (\varkappa^2-1)\frac{w}{z}. \tag{158}$$

Man erhält also für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalstrahlen:

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{2wz}{y^2}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}}\right) \tag{159}$$

und für ihre Dämpfung pro Wellenlänge:

$$\varkappa = \frac{z}{y}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{y^2}{z^2}}\right). \tag{160}$$

Von dem Doppelvorzeichen hat man nach § 87 nur jenes zu wählen, welches $\mathfrak{c}^2$ positiv macht. Die Lösung ist eindeutig, für jede Schwingungsdauer gibt es nur eine Art Longitudinalstrahl.

w ist wesentlich positiv, also hat man das obere Vorzeichen zu wählen, wenn $z > 0$ und umgekehrt. Nun ist

$$z = \varepsilon_0(u_1+u_2)D_1,$$

worin:

$$D_1 = em(p_0^2 - p^2),$$

da $(v_1 + v_2) \cdot D_2$ die sehr kleinen Absorptionskonstanten c und x des Gases im Quadrat enthält und vernachlässigt werden kann. Da der normalen Dispersion der Gase wegen (vergl. § 73) $(u_1 + u_2)$ positiv ist, so ist

$$z \gtrless 0,$$

je nachdem:

$$p \lessgtr p_0.$$

Da ferner y den Absorptionskonstanten proportional ist, ist y viel kleiner als z und man erhält:

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{2wz}{y^2}\left(1 \pm \left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{z^2}\right)\right), \tag{161}$$

worin das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem p kleiner oder größer als die Eigenschwingungszahl p_0 der Gase ist.

95. Die Longitudinalstrahlen scheiden sich in zwei Gruppen, deren Verhalten sehr verschieden, ja in vielen Beziehungen entgegengesetzt ist, da für diese zwei Gruppen die Determinante D_1 der chemischen Amplitudengleichungen entgegengesetztes Vorzeichen hat, und die elektrochemischen Verschiebungsströme $\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e}$ und chemischen Ströme $\nabla \cdot (a\bar{\varepsilon} + b\bar{\mu})$, welche das eigenartige Verhalten der Strahlen bewirken, dieser Determinante verkehrt proportional sind. Wir können erst weiter unten das Verhalten der Longitudinalstrahlen im elektromagnetischen Felde berechnen, wollen aber vorgreifend hier mitteilen, wie die Longitudinalstrahlen verschiedener Schwingungsdauer zu deuten sind. Dieselben trennen sich bei Abwesenheit eines elektrostatischen Feldes in zwei, im elektrostatischen Felde aber in drei Gruppen. Es wird sich weiter unten zeigen,

1. daß alle Longitudinalstrahlen, deren Schwingungszahl **größer** ist als die Eigenschwingungszahl:

$$p_0 = 1 \cdot 83 \times 10^{16}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

der Gase (vergl. § 78), also größer als die Schwingungszahl des äußersten ultravioletten Lichtes, Kathodenstrahlen oder β-Strahlen sind;

2. daß alle Anoden-, Kanal- und α-Strahlen kleinere Schwingungszahlen haben, und zwar die Schwingungszahlen des ultravioletten, sichtbaren und ultraroten Lichtes;

3. daß es in starken elektrostatischen Feldern, aber nur in diesen, außerdem Kathodenstrahlen gibt, welche die äußerst kleinen Schwingungszahlen der Hertz'schen Strahlen haben.

96. Die gewöhnlichen, äußerst rasch schwingenden Kathodenstrahlen, welche auch in das unelektrische Feld austreten können, haben nach (161) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{(\varkappa_1 + \varkappa_2)}{\varepsilon_0 e m} \frac{p^2}{(p^2 - p_0^2)}. \tag{162}$$

Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathoden- und β-Strahlen ist also von dem Absorptionsvermögen des Gases unabhängig.

Für die Anoden- und α-Strahlen ist hingegen die Determinante D_1 negativ und diese haben nach (161) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{4 w z}{y^2}. \tag{163}$$

Diese sinkt ganz bedeutend, wenn das Absorptionsvermögen des Gases steigt. Deshalb ist die Dämpfung pro Einheit des zurückgelegten Weges, welche den Wert $\chi p \mathfrak{n}$ hat, nach (157) und (163) wesentlich positiv und bestimmt durch:

$$\chi^2 p^2 \mathfrak{n}^2 = \frac{\varepsilon_0}{(\varkappa_1 + \varkappa_2) D_1},$$

also von den Absorptionskonstanten des Gases unabhängig, aber nur für Strahlen, deren Schwingungsdauern weit im Ultraroten liegen, klein. Je größer also die Schwingungszahl der Anoden- und α-Strahlen ist, desto stärker sind dieselben gedämpft und desto geringer ist nach (163) ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

der Kathoden- und β-Strahlen mit ungemein hohen Werten einsetzt, allerdings ebenfalls mit steigender Schwingungszahl sinkt und ihre Dämpfung der Absorptionsfähigkeit des Gases proportional, also sehr klein ist.

XXXV. Das Stark'sche Phänomen.

97. Nach Stark's Entdeckung zeigt das Lumineszenzlicht der Kanalstrahlen den Dopplereffekt und Gehrcke und Reichenheim haben ein gleiches für die von ihnen aufgefundenen Anodenstrahlen nachgewiesen.

Unzweifelhaft stichhältig ist die darauf gegründete Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Strahlen. Es ist aber nicht richtig, daß hiedurch ein experimentum crucis zu Gunsten der Emissionstheorie dieser Strahlen gewonnen ist, denn aus meiner Undulationstheorie dieser Strahlen folgt das Stark'sche Phänomen ganz ebenso zwingend.

Der Dopplereffekt ist kein Beweis, daß sich die leuchtende Materie bewegt, sondern nur ein Beweis, daß die Lichtquelle ihren Ort ändert, hiezu braucht sich aber das Medium nicht zu bewegen, sondern die Lichtquelle kann sich auch in dem ruhenden Medium fortpflanzen.

Nach meiner Theorie sind es die chemischen Schwingungen des Mediums, welche die Emission des Lichtes bewirken. Die Longitudinalstrahlen meiner Theorie führen aber kohärente chemische Schwingungen mit sich, welche als rasch sich fortpflanzende Lichtquellen wirken, denn sie sind die Ursache des Lumineszenzlichtes, das den Weg dieser Strahlen bezeichnet.

Vorausgesetzt muß aber dabei werden, daß diese Lichtemission möglichst direkt von den kohärenten chemischen Schwingungen angeregt wird; dieses rasche Ansprechen der Lichtschwingungen kann aber nur dann eintreten, wenn die Schwingungszahl des Longitudinalstrahles der Schwingungszahl des Lumineszenzlichtes naheliegt und dies findet nur für die Kanal- und Anodenstrahlen nach § 95 statt. Kathodenstrahlen werden also vermutlich den Dopplereffekt nicht zeigen.

Eine zweite Bedingung ist, daß das Lumineszenzlicht nach dem Aufhören der Anregung durch die kohärenten chemischen Schwingungen des Strahles sofort verlöscht, nicht aber auch nach dem Weiterschreiten des Wellenzuges noch nachklingt. Es hängt dies auch von der Art der Eigenschwingungen des Mediums ab, welche das Lumineszenzlicht aussenden und selbst durch den Strahl angeregt werden. So erklärt sich, daß das Linienspektrum des durchstrahlten Wasserstoffes den Stark'schen Effekt zeigt, während das Bandenspektrum des Wasserstoffes von einer schwer anzuregenden, langsam ausklingenden chemischen Unterschwingung dieses Mediums herrühren dürfte, da es den Stark'schen Effekt nicht zeigt.

Dritter Teil.

XXXVI. Strahlungen in starken elektromagnetischen Feldern.

98. Der Einfluß starker elektromagnetischer Felder auf transversale und longitudinale Strahlen beruht darauf, daß mit den statischen Feldstärken $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$ die elektrochemischen Verschiebungsströme:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m}$$

wachsen, durch welche die elektromagnetischen Grundgleichungen nochmals an die chemischen Grundgleichungen gekuppelt sind und deren Amplituden (für ein Medium ohne natürliche Drehung der Polarisationsebene) in Gleichung (88) und (89) angegeben sind.

Die elektromagnetischen Amplitudengleichungen (142) und (143) müssen nun durch diese Glieder vervollständigt werden und nehmen die Form an:

$$-ip\varepsilon_0\cdot D\cdot\mathfrak{e}'+\mathfrak{q}\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'(-ipu_1+v_1)+\mathfrak{q}^2\mathfrak{e}'(-ipu_2+v_2)+$$
$$+\mathfrak{q}g_1\mathfrak{e}'\cdot\mathfrak{e}_0+\mathfrak{e}'g_2\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}_0+\mathfrak{e}_0g_3\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{e}'\overset{3}{=}ic_0D\cdot(\mathfrak{q}\times\mathfrak{m}'); \quad (164)$$

$$-ip\mu_0 \cdot D \cdot \mathfrak{m}' +$$
$$+\mathfrak{q} h_1 \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{e}' h_2 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_0 h_3 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}' \overset{3}{=} -ic_0 D \cdot (\mathfrak{q} \times \mathfrak{e}'). \quad (165)$$

Um $\mathfrak{m}'$ zu eliminieren, multiplizieren wir (165) rotorisch mit $-\frac{c_0}{\mu_0}\mathfrak{n}\times$ und addieren (164). So ergibt sich für die elektrische Amplitude $\mathfrak{e}'$:

$$-ipD \cdot \left(\varepsilon_0 + \frac{c_0^2}{\mu_0}\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}\right) \cdot \mathfrak{e}' +$$
$$+\mathfrak{q}\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}'(-ipu_1 + v_1) + \mathfrak{q}^2 \mathfrak{e}'(-ipu_2 + v_2) +$$
$$+g_1 \mathfrak{q} \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}_0 + g_2 \mathfrak{e}' \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}_0 + g_3 \mathfrak{e}_0 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}' +$$
$$-\frac{c_0}{\mu_0} h_2 (\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}') \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{m}_0 - \frac{c_0}{\mu_0} h_3 \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}' (\mathfrak{q} \times \mathfrak{m}_0) \overset{3}{=} 0. \quad (166)$$

Nun trennen wir sogleich die longitudinalen und transversalen Glieder dieser Gleichung, indem wir dieselbe einerseits skalar mit $\frac{i}{p}\mathfrak{c}\cdot$, andrerseits rotorisch mit $\frac{i}{p}\mathfrak{c}\times$ multiplizieren. So ergeben sich folgende zwei Gleichungen für die elektrische Amplitude, welche natürlich zusammen nur die Wertigkeit einer vektorischen Gleichung haben:

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}'(\varepsilon_0 \cdot D\mathfrak{c}^2 + p^2(u_1 + u_2) + ip(v_1 + v_2) + i(g_2 + g_3)\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_0) +$$
$$+ig_1 \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}_0 \overset{1}{=} 0; \quad (167)$$

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}'(\varepsilon_0 \cdot D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}_0^2) + p^2 u_2 + ipv_2 + ig_2 \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_0) +$$
$$+\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}'\left(ig_3 \mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0 + i\frac{c_0}{\mu_0} h_3 \mathfrak{c} \times (\mathfrak{m}_0 \times \mathfrak{n})\right) +$$
$$+i\frac{c_0}{\mu_0} h_2 \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}_0 \mathfrak{c} \times (\mathfrak{e}' \times \mathfrak{n}) \overset{2}{=} 0. \quad (168)$$

Es bezeichne $\mathfrak{t}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Strahlen gleicher Schwingungsdauer bei Abwesenheit eines statischen Feldes und ferner $\mathfrak{l}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von longitudinalen Strahlen, welche gleiche Schwingungsdauer wie der betrachtete allgemeine Strahl haben und sich im unelektrischen Felde fort-

pflanzen. Diese beiden Werte $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{l}$ sind uns bereits bekannt. Setzen wir in (167) und (168) $\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{m}_0 = 0$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\varepsilon_0 \cdot D\mathfrak{l}^2 + p^2(u_1 + u_2) + ip(v_1 + v_2) = 0, \tag{169}$$

$$\varepsilon_0 \cdot D(\mathfrak{t}^2 - \mathfrak{c}_0^2) + p^2 u_2 + ipv_2 = 0. \tag{170}$$

Multiplizieren wir (169) mit $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{c}'$ und (170) mit $\mathfrak{n}\times\mathfrak{c}'$ und subtrahieren von (167), beziehungsweise (168), so erhalten wir endlich:

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{c}'(\varepsilon_0 \cdot D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{l}^2) + i(g_2 + g_3)\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_0) + ig_1\mathfrak{c}'\cdot\mathfrak{e}_0 \overset{1}{=} 0; \tag{171}$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{n}\times\mathfrak{c}'(\varepsilon_0 \cdot D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{t}^2) + ig_2\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_0) + \\ &\quad + \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{c}'\left(ig_3\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_0 + i\frac{c_0}{\mu_0}h_3\mathfrak{c}\times(\mathfrak{m}_0\times\mathfrak{n})\right) + \\ &\qquad + i\frac{c_0}{\mu_0}h_2\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0\mathfrak{c}\times(\mathfrak{c}'\times\mathfrak{n}) \overset{2}{=} 0. \end{aligned} \tag{172}$$

Von diesen Gleichungen gehen wir in diesem Teile der Abhandlung stets aus, dieselben beschreiben alle Strahlungserscheinungen in starken elektromagnetischen Feldern. Hierin ist nach §§ 46, 49 und 50:

Für feste und flüssige Medien:

$$\begin{aligned} g_1 = g_2 = -g_3 &= \frac{1}{2}(ia_1mp^2 - a_1xp), \\ h_1 = h_2 = -h_3 &= \frac{1}{2}a_1sp. \end{aligned} \tag{173}$$

Hingegen für Gase:

$$\begin{aligned} &g_1 = 0, \quad g_2 = b_2rp, \quad g_3 = \frac{1}{2}(ia_3mp^2 + (b_3r - a_3x)p), \\ &h_1 = 0, \quad h_2 = \frac{1}{2}(ib_2ep^2 - b_2cp), \\ &\qquad h_3 = \frac{1}{2}(ib_3ep^2 + (a_3s - b_3c)p)\left(1 + 2i\frac{\nu}{p}\right). \end{aligned} \tag{174}$$

XXXVII. Elektrische Doppelbrechung.

99. Die elektrischen Amplitudengleichungen nehmen, wenn keine magnetostatische Kraft $\mathfrak{m}_0$ vorhanden ist, für feste und flüssige Medien die Form an:

$$\varepsilon_0 \cdot D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{k}^2)\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}' + i g_1 \mathfrak{e}'\cdot\mathfrak{e}_0 = 0,$$

$$(\varepsilon_0 \cdot D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{k}^2) + i g_2 \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_0)\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}' + i g_3 \mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_0 \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}' = 0.$$

Es kann hiernach linearpolarisiertes Licht im elektrostatischen Felde auftreten, jedoch muß die Schwingungsebene desselben eine von zwei durch das Feld bestimmten Orientierungen haben, so daß sich ein aus einem indifferenten Medium einfallender Lichtstrahl in zwei senkrecht aufeinander polarisierte Strahlen spalten muß. Diese Gleichungen können nämlich nur in folgenden zwei Fällen erfüllt werden:

1. Wenn $\mathfrak{e}'\cdot\mathfrak{e}_0 = 0$, also wenn die elektrischen Schwingungen auf der elektrostatischen Feldstärke senkrecht stehen.

Dann ist nach (171) auch $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}' = 0$, d. h. die Lichtwelle bleibt präzis transversal, dann verschwindet aber das mit g_3 behaftete Glied und es ergibt sich:

$$\varepsilon_0 \cdot D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{k}^2) + i g_2 \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_0 = 0. \qquad (175)$$

Verschwindet also der reelle, beziehungsweise imaginäre Teil der Kuppelkonstanten g_2 nicht, so hat die longitudinale Komponente der Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ einen Einfluß auf den imaginären, beziehungsweise reellen Teil von $\mathfrak{c}$, d. h. auf die Dämpfung (siehe § 111), beziehungsweise Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Letztere Erscheinung habe ich elektrische Konvektion des Lichtes genannt und es muß versucht werden, dieselbe in elektrisch doppelbrechenden Medien nachzuweisen. Ist sie nicht nachweisbar, so muß $a_2 = 0$ gesetzt werden, was weiter keine Folge hätte, als daß damit nachgewiesen wäre, daß die Dyaden ε und μ temporäre Unsymmetrien annehmen können (vergl. § 48).

Wenn überdies $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_0 = 0$, d. h. wenn die elektrische Feldstärke, wie dies bei Versuchen über elektrische Doppel-

brechung stets der Fall ist, auf der Strahlrichtung senkrecht steht, so folgt aus (175) $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{t}^2$, d. h. dieser Strahl erfährt von seiten des elektrostatischen Feldes keinerlei Beeinflussung.

2. Wenn $\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}'$ parallel $\mathfrak{c} \times \mathfrak{e}_0$, d. h. wenn die elektrischen Schwingungen in der Ebene der elektrostatischen Kraft und der Wellennormale liegen.

Dann folgt aus der ersten Gleichung:

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}' = -\frac{i\alpha}{g_3}\mathfrak{e}'\cdot\mathfrak{e}_0, \tag{176}$$

worin:

$$\alpha = \frac{g_1 g_3}{\varepsilon_0 D(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2)}.$$

Es hat also diese Lichtwelle eine geringe longitudinale Komponente. Deshalb gewinnt das letzte Glied der zweiten Gleichung, also die transversale elektrostatische Feldstärke Einfluß. Es ergibt sich für $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_0 = 0$:

$$\varepsilon_0\cdot D(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2)\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}' + \alpha\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}'\mathfrak{e}_0^2 = 0,$$

also:

$$\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2 = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 D}\mathfrak{c}^2\mathfrak{e}_0^2 \tag{177}$$

oder:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{t} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\varepsilon_0 D}\mathfrak{e}_0^2.$$

Der linearpolarisierte Strahl, dessen elektrische Schwingungen koplanar sind mit der elektrostatischen Feldstärke und der Strahlrichtung, erfährt also einen Einfluß von seiten des elektrischen Feldes, und zwar hat er nach (177) jedenfalls eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber in absorbierenden Medien auch eine andere Dämpfung als der zu ihm senkrecht polarisierte Strahl. In nicht absorbierenden Medien (für $x = 0$) tritt also nur elektrische Doppelbrechung, in absorbierenden Medien außerdem noch Dichroismus auf (siehe § 106).

Der Gangunterschied der beiden Strahlen ist nach (177) dem Quadrate der elektrostatischen Feldstärke proportional, wie dies durch die Messungen des Entdeckers dieser

Erscheinung Kerr u. a. festgestellt ist. Sehr wichtig und charakteristisch ist die Folgerung meiner Theorie, daß das senkrecht zur elektrostatischen Kraft schwingende Licht keinerlei Einfluß erfährt. Dies hat schon Kerr durch Interferenzexperimente konstatiert, welche so empfindlich waren, daß ihm ein Einfluß des Feldes auf diesen Strahl, wenn er nur ein Hundertstel der Einwirkung auf den zu diesem senkrecht polarisierten Strahl erreichen würde, nicht hätte entgehen können.

Meine Theorie stellt also die elektrische Doppelbrechung treffend dar. Nur das Verhalten des Nitrobenzols, welches auch eine ganz ungewöhnlich starke elektrische Doppelbrechung hat, aber dabei leitungsfähig ist, scheint komplizierteren Gesetzen zu folgen.

Die elektrische Doppelbrechung ist ferner der Kuppelkonstanten g_1 proportional, welche in Gasen Null ist. Tatsächlich zeigen diese niemals eine Spur dieser Erscheinung.

100. Ferner folgt aus (177) eine beträchtliche Dispersion der elektrischen Doppelbrechung, welche gegen das Violett zunehmen muß. Hierüber habe ich in der Literatur nichts gefunden. Aus eigener Anschauung ist mir aber bekannt, daß eine derartige und sehr beträchtliche Dispersion der elektrischen Doppelbrechung tatsächlich vorhanden ist. Beobachtet man die elektrische Doppelbrechung von Schwefelkohlenstoff zwischen konaxialen zylindrischen Elektroden, so sieht man bei gekreuzten Polarisatoren zunächst einen weißen, dann einen breiten roten und endlich einen schmalen blauen Ring von der inneren Elektrode sich ablösen, wenn man das radiale elektrische Feld allmählich verstärkt. Hieraus folgt, daß die blauen Strahlen eine viel stärkere elektrische Doppelbrechung erfahren als die roten Strahlen.

XXXVIII. Magnetische Drehung der Polarisationsebene.

101. Die elektrischen Amplitudengleichungen (171) und (172) nehmen, wenn kein elektrostatisches Feld $\mathfrak{e}_0$ vorhanden ist, die Form an:

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}' \overset{\perp}{=} 0,$$

$$\varepsilon_0\cdot D(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2)\,\mathfrak{e}' - i\,\frac{c_0}{\mu_0}\,h_2\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0\,\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}' \overset{\perp}{=} 0. \tag{178}$$

Das Licht bleibt also rein transversal und es hat nur die longitudinale Komponente der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{m}_0$ einen Einfluß auf dasselbe. Ferner muß $\mathfrak{e}'$ parallel $\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}'$ sein, was für einen reellen Vektor unmöglich ist. Es ist:

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}_1 + i\,\mathfrak{e}_2$$

und die beiden um eine Viertelwellenlänge gegeneinander verschobenen elektrischen Schwingungen müssen aufeinander senkrecht stehen. Trennt man die senkrecht zueinander gerichteten Vektoren der Gleichung (176), so ergibt sich:

$$\varepsilon_0\cdot D(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2)\,\mathfrak{e}_1 + \frac{c_0}{\mu_0}\,h_2\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0\,\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_2 \overset{\perp}{=} 0,$$

$$\varepsilon_0\cdot D(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2)\,\mathfrak{e}_2 - \frac{c_0}{\mu_0}\,h_2\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{m}_0\,\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_1 \overset{\perp}{=} 0.$$

Der Symmetrie dieser Gleichungen wegen muß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ gleiche Größe haben. Es kann sich also in einem magnetischen Felde nur zirkularpolarisiertes Licht fortpflanzen. Multiplizieren wir jede dieser Gleichungen mit jenem Faktor, welchen $\mathfrak{e}_1$ in ihr hat, und addieren, so erhalten wir:

$$\varepsilon_0^2 D^2(\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2)^2\,\mathfrak{e}_1 - \frac{c_0^2}{\mu_0^2}\,h_2^2\,\overline{\mathfrak{m}}_0^2\,\mathfrak{e}_1 = 0, \tag{179}$$

worin $\overline{\mathfrak{m}}_0$ die longitudinale Komponente von $\mathfrak{m}_0$ ist.

102. Berücksichtigen wir zunächst die Absorption des Lichtes nicht, so kann $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{t}$ und D als reell angesehen werden und es ergibt sich:

$$\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2 = \pm\frac{h_2}{D\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{m}_0. \tag{180}$$

Setzt man dies in (177) ein, so zeigt sich, daß $\mathfrak{e}_1$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen wie $\mathfrak{e}_2$ annimmt, d. h. daß der Strahl rechtszirkular, beziehungsweise linkszirkular wird,

je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen von (180) gelten läßt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der rechtszirkularen, beziehungsweise linkszirkularen Welle weichen also um gleiche, aber entgegengesetzte Beträge von der normalen Lichtgeschwindigkeit ab. Der Gangunterschied wird nur durch die longitudinale Komponente der magnetischen Feldstärke bestimmt; dies ergibt die bekannte, aus zwei gegeneinander in der Kraftrichtung verschobenen Kugeln bestehende Wellenfläche. Hiermit ist die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes erklärt.

XXXIX. Dispersion der magnetischen Drehung der Polarisationsebene.

102. Nun möge der Gangunterschied der beiden entgegengesetzt zirkularen Strahlen ausführlicher berechnet werden. Nach (180) ist:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{t} \pm \alpha \overline{\mathfrak{m}}_0, \tag{181}$$

worin:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{c_0}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{h_2}{D_1} \frac{1}{\mathfrak{t}^2}$$

und $h_2 = \frac{1}{2} a_1 s p$.

Die Konstante α der magnetischen Drehung ist also der Schwingungszahl p proportional, wenn man absehen darf von der Veränderlichkeit des Brechungsexponenten und weit von der Eigenschwingung des Mediums bleibt. Hieraus berechnet sich die Drehung d der Polarisationsebene pro Einheit des Lichtweges bekanntlich durch:

$$d = \frac{p}{\mathfrak{t}^2} \alpha \overline{\mathfrak{m}}_0.$$

Es ergibt sich also schließlich:

$$d = \frac{1}{4} \frac{c_0}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{a_1 s}{D_1} \cdot \frac{p^2}{\mathfrak{t}^4} = \frac{1}{8 c_0 \varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{a_1 s}{D_1} \cdot \frac{n^4}{\lambda^2}. \tag{182}$$

Die Drehung der Polarisationsebene muß dem Quadrate der Schwingungszahl proportional sein, vorausgesetzt, daß diese weit genug von der Eigenschwingungszahl entfernt

bleibt, so daß man D_1 als konstant ansehen kann. Es befolgt also die Dispersion der magnetischen Drehung ebensowohl als die Dispersion der natürlichen Drehung (vergl. § 82) mit Annäherung das Biot'sche Gesetz. Außerdem soll die magnetische Drehung aber nach (182) noch mit der vierten Potenz des Brechungsexponenten, also im Violett stärker, als dem Biot-schen Gesetz entspricht, wachsen. Die folgenden Tabellen lassen erkennen, daß dies tatsächlich der Fall ist. Die erste Kolonne gibt die beobachtete relative Drehung d' der Polarisationsebene der verschiedenen in der ersten Kolonne angegebenen Wellenlängen λ, die dritte Kolonne gibt das Produkt $d'\lambda^2$ an, welches schon annähernd konstant ist, die vierte Kolonne führt dann noch die Korrektion auf die Veränderlichkeit des Brechungsexponenten n ein.

Die Beobachtungsdaten wurden den Landolt'schen Tabellen (1905), p. 709, entnommen. Die magnetische Drehung des Wassers bei 20° C. hat nach den Beobachtungen von Siertsema folgende Dispersion:

λ	$d' = \frac{d}{d_{Na}}$	$d'.\lambda^2$	$d'.\frac{\lambda^2}{n^4}$
0·701	0·700	0·344	1·10×10⁻¹
0·688	0·720	343	1·10
0·672	0·748	337	1·07
0·658	0·778	337	1·07
0·647	0·808	338	1·07
0·589	1·000	348	1·10
0·579	1·039	348	1·10
0·576	1·051	348	1·10
0·546	1·182	352	1·11
0·535	1·232	351	1·11
0·526	1·278	354	1·11
0·518	1·320	355	1·11
0·509	1·369	356	1·12
0·488	1·498	357	1·12
0·481	1·547	361	1·13
0·470	1·630	363	1·13
0·458	1·723	364	1·13
0·437	1·906	365	1·13
0·430	1·975	365	1·13
0·409	2·178	367	1·13
0·405	2·218	364	1·11

Für Quarz ist nach den Beobachtungen von Disch und Borel:

λ	$d' = \frac{d}{d_H}$	$d'.\lambda^2$	$d'.\frac{\lambda^2}{n^4}$
0·656	1·000	0·429	$7\cdot59\times10^{-2}$
0·589	1·251	433	7·64
0·578	1·301	437	7·66
0·546	1·464	439	7·67
0·492	1·821	443	7·70
0·436	2·316	441	7·56
0 405	2·672	439	7·50
0·361	3·47	452	7·58
0·257	8·12	537	8·28
0·219	11·90	570	8·18

XL. Dichroismus der magnetischen Zirkularpolarisation.

103. Kehren wir nun zu der Gleichung (180) zurück, um die Rechnung in allgemeinerer Form für absorbierende Medien fortzusetzen. Es ist [siehe auch (145)]:

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{t}^2 = \pm \frac{c_0 h_2}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{1}{D} \cdot \mathfrak{m}_0, \qquad (180)$$

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}_1^2(1-2i\varkappa) \quad \text{und} \quad \mathfrak{t}^2 = \mathfrak{t}_1^2(1-2i\varkappa_1),$$

worin $\mathfrak{c}$ und $\varkappa$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dämpfung des Lichtes im magnetischen Felde, $\mathfrak{t}_1$ und $\varkappa_1$ die gleichen Wellenkonstanten für Licht von gleicher Schwingungszahl bei Abwesenheit eines magnetischen Feldes bedeuten. Ferner ist:

$$\frac{1}{D} = \frac{D_1}{D_1^2+D_2^2} - i\frac{D_2}{D_1^2+D_2^2}.$$

Trennen wir nun die reellen und imaginären Glieder von (180), wobei zu beachten ist, daß h_2 für feste und flüssige Medien nach (174) reell, für Gase von geringer Absorptionsfähigkeit c aber imaginär ist, so erhalten wir:

Für feste und flüssige Medien:

$$\mathfrak{c}_1^2 - \mathfrak{t}_1^2 = \pm \frac{c_0 h_2}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{D_1}{D_1^2 + D_2^2} \cdot \mathfrak{m}_0, \qquad (183)$$

$$2\mathfrak{c}_1^2 \varkappa - 2\mathfrak{t}_1^2 \varkappa_1 = \mp \frac{c_0 h_2}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{D_2}{D_1^2 + D_2^2} \cdot \mathfrak{m}_0. \qquad (184)$$

Für Gase ergibt sich hingegen auch dann, wenn man, wie wir uns der Einfachheit wegen gestatten wollen,

$$\mathfrak{c}_1 \doteq \mathfrak{t}_1$$

setzt, also von der magnetischen Drehung der Gase absieht, eine magnetische Dämpfung des Lichtes, welche allerdings nur in der Nähe der scharfen Absorptionslinien des Gases merklichen Einfluß haben kann. Man erhält, da für Gase

$$h_2 \doteq \frac{1}{2} i b_2 e p^2,$$

statt (184) die Absorptionsgleichung:

$$\varkappa - \varkappa_1 = \mp \frac{1}{4} \frac{b_2 e c_0}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{p^2}{\mathfrak{t}_1^2} \cdot \frac{D_1}{D_1^2 + D_2^2} \cdot \mathfrak{m}_0. \qquad (185)$$

Es besteht also der wesentliche Unterschied, daß für die dichteren Medien nach (184) die magnetische Dämpfung durch D_2, also durch die Absorptionskonstanten des Mediums bestimmt wird. Aus (183) ergibt sich dann das Gesetz der magnetischen Drehung der Polarisationsebene in absorbierenden Medien.

Für Gase ist hingegen die magnetische Dämpfung nach (185) proportional D_1, also von der Absorptionsfähigkeit des Gases fast unabhängig.

104. Setzt man (184), beziehungsweise (185) in (177) ein, so erkennt man, daß von dem Doppelvorzeichen das obere wieder dem rechtszirkularen, das untere dem linkszirkularen Strahle angehört.

Die beiden entgegengesetzt zirkularen Strahlen werden also verschieden stark absorbiert, und zwar ist dieser Dichroismus der magnetischen Zirkularpolarisation der ersten

Potenz der longitudinalen Komponente $\mathfrak{m}_0$ der magnetischen Feldstärke proportional.

Dieser Dichroismus ist ebenso wie die magnetische Drehung selbst nach (180) verkehrt proportional der Determinante D, erreicht also in der Nähe der Eigenschwingung des Mediums sehr hohe Werte, weil dort die kohärenten chemischen Schwingungen des Strahles sehr intensiv werden.

XLI. Der Zeeman'sche Longitudinaleffekt.

105. Der magnetische Dichroismus, welcher, wie eben gezeigt wurde, in der Nähe der Absorptionslinien der Gase beträchtliche Größe annimmt, hat dort jenen bemerkenswerten Effekt, den wir nun berechnen wollen. Untersuchen wir nur die unmittelbare Umgebung der Absorptionslinie, indem wir setzen:

$$p = p_0 + p', \qquad (186)$$

worin p' eine gegen die Eigenschwingungszahl p_0 des Mediums kleine Zahl sein möge. Dann ist unter zulässigen Vereinfachungen:

$$D_1 \doteq -2e^2 p_0 p',$$

worin $em = e^2$, und (187)

$$D_2 \doteq -2 p_0 e c,$$

worin $c = x$ gesetzt wurde, und es nimmt die Absorptionsgleichung (185) die einfachere Form an:

$$\varkappa - \varkappa_1 = \mp \frac{1}{8} b_2 e \frac{p_0}{\mathfrak{t}_1} \cdot \frac{p'}{e^2 p'^2 + c^2} \mathfrak{m}_0 . \qquad (188)$$

Die magnetische Dämpfung $(\varkappa - \varkappa_1)$ erreicht also ein Maximum und Minimum für

$$p' = \pm \frac{c}{e} . \qquad (189)$$

Die natürliche Dämpfung $\varkappa_1$ hat nach (150) den Wert:

$$\varkappa_1 = \frac{\mu_0 b_2^2 c}{4 c_0^2} \frac{p_0}{e^2 p'^2 + c^2},$$

also ihr Maximum mit der hier als hinreichend eingeführten Annäherung genau bei der Eigenschwingungszahl p_0.

Die gesamte Dämpfung $\varkappa$ hat also den Wert:

$$\varkappa = \frac{\mu_0 b_2^2 c}{4 c_0^2} \cdot \frac{p_0}{e^2 p'^2 + c^2}\left(1 \mp \frac{1}{2}\frac{c_0 e}{c b_2 \mu_0} \cdot p' \mathfrak{m}_0\right).$$

Dieser Wert hat ein Maximum bei

$$p' = \mp \frac{1}{4}\frac{c_0 c}{e b_2} \mathfrak{m}_0. \tag{190}$$

Von dem doppelten Vorzeichen bezieht sich das obere auf den rechtszirkularen, das untere auf den linkszirkularen Strahl. Diese Maxima sind desto schärfer, je geringer die Absorptionsfähigkeit c des Gases ist.

Die Absorptionslinie (beziehungsweise Emissionslinie) ist also zerlegt in eine rechtszirkulare und eine linkszirkulare Linie. Diese Linien sind in dem rechts-, beziehungsweise linkszirkularen Spektrum in entgegengesetzter Richtung um den Betrag (190) aus der natürlichen Lage verschoben. Die Differenz der Schwingungszahlen $2p'$ der beiden Linien dieses Doublets ist von der Schwingungszahl p_0 desselben unabhängig und deshalb für alle Linien derselben Spektralserie gleich groß und sie ist der longitudinalen magnetischen Feldstärke proportional. Hiermit ist der Zeeman'sche Longitudinaleffekt ohne jede Zusatzannahme aus den Differentialgleichungen meiner Theorie deduziert.

XLII. Elektrischer Transversaleffekt Zeeman'scher Art.

106. Wir wollen auch zu der Gleichung (177) zurückkehren, um den elektrischen Dichroismus zu berechnen. Es ist:

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{k}^2 = \frac{g_1 g_3 \mathfrak{c}^2}{\varepsilon_0^2(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{k}^2)} \cdot \frac{1}{D^2} \cdot \mathfrak{E}_0^2. \tag{177}$$

Nun darf für Gase, welche wir hauptsächlich betrachten wollen, nicht angenommen werden, daß g_1 einen imaginären Wert hat, weil dieselben sonst elektrische Doppelbrechung zeigen würden, was nie beobachtet wurde. Doch steht nichts im Wege, g_1 einen reellen Wert zuzuschreiben, indem man b_1

als von Null verschieden ansieht. Es ist dies eine sehr naheliegende Annahme, da auch b_3 für Gase einen deutlich von Null verschiedenen Wert hat, doch folgt eine noch nicht beobachtete Erscheinung, nämlich ein elektrischer Transversaleffekt Zeeman'scher Art aus dieser Annahme.

Gleichung (177) gilt nur für den Strahl, dessen elektrische Schwingungen in die Richtung der transversalen elektrostatischen Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ fallen, deren Quadrat diesen Transversaleffekt bestimmt. Ein wesentlicher Unterschied von (177) und (180), § 103, liegt aber auch darin, daß in (177) das Quadrat der Determinante D auftritt. Es ist:

$$\frac{1}{D^2} = \frac{D_1^2 - D_2^2}{D_1^2 + D_2^2} - 2i \frac{D_1 D_2}{D_1^2 + D_2^2}.$$

Die imaginären Glieder von (177) ergeben:

$$\varkappa - \varkappa_1 = -\frac{g_1 g_3}{\varepsilon_0^2(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{l}^2)} \cdot \frac{D_1^2 - D_2^2}{D_1^2 + D_2^2} \cdot \mathfrak{e}_0^2. \tag{191}$$

Diese Absorptionsgleichung bestimmt den Dichroismus der elektrischen Doppelbrechung, denn der senkrecht zur Feldstärke schwingende Strahl erfährt keine elektrische Absorption.

107. Es berechnet sich nun ebenso wie im vorigen Kapitel, daß die Absorptionslinien in dem senkrecht zur Feldstärke polarisierten Spektrum aus ihrer natürlichen Lage verschoben sind, und zwar spaltet sich jede Linie in zwei gleichweit nach entgegengesetzten Seiten verschobene Linien. Führt man nämlich die Werte D_1 und D_2 aus (187) in (191) ein, so ergibt sich, daß die elektrische Dämpfung $(\varkappa - \varkappa_1)$ zwei scharfe Maxima für:

$$p' = \pm \sqrt{3}\, \frac{c}{e} \quad \text{[vergl. (189)]}$$

hat. Es muß also ein Triplet ganz nach Art des Zeeman'schen Triplets auftreten, jedoch mit dem Unterschiede, daß die beiden äußeren Linien senkrecht zur Feldstärke, die unverschobene Linie aber parallel zur Feldstärke polarisiert sind, während dies bei den magnetischen Triplets bekanntlich umgekehrt ist.

Dieser elektrische Transversaleffekt muß noch aufgesucht werden; es dürfte allerdings schwierig sein, in leuchtenden Metalldämpfen, welche eine Art Leitfähigkeit haben, hinreichend starke elektrische Felder zu erzeugen, doch dürften rasch oszillierende Wechselfelder hier zum Ziele führen.

XLIII. Die magnetischen Transversaleffekte.

108. Die Grundgleichungen meiner Theorie sind in bezug auf $\mathfrak{e}$, ε, beziehungsweise $\mathfrak{m}$, μ vollkommen dual symmetrisch, so daß jeder elektrischen Erscheinung eine gleiche magnetische Erscheinung dual entsprechen muß. Die Unterschiede in der Beobachtbarkeit der elektrischen und magnetischen Erscheinungen sind also nur auf die verschiedenen Größen der einander dual entsprechenden Materialkonstanten zurückzuführen.

Den Konstanten a_1 und a_3, welche die elektrische Doppelbrechung bestimmen, entsprechen dual die Konstanten b'_1 und b'_3. Medien, in welchen letztere Kuppelkonstanten von Null verschieden sind, müssen also magnetische Doppelbrechung zeigen.

109. Sind diese Medien außerdem absorptionsfähig, so muß Dichroismus der magnetischen Doppelbrechung auftreten, welcher ebenfalls schon beobachtet worden ist.

Endlich folgt so wie im vorigen Kapitel, daß Gase, obgleich sie präzis keine magnetische Doppelbrechung zeigen, doch diesen Dichroismus in der Nähe ihrer Absorptionslinien aufweisen und zufolgedessen den Zeeman'schen Transversaleffekt zeigen, welcher dem in § 107 berechneten elektrischen Transversaleffekt genau dual entspricht.

Bei allen diesen Transversaleffekten im magnetischen Felde wird nur jener linearpolarisierte Strahl beeinflußt, dessen magnetische Schwingungen parallel zur Feldstärke sind und zufolgedessen ist das Zeeman'sche Triplet umgekehrt polarisiert als das in § 107 berechnete elektrische Triplet. Die nach außen verschobenen Linien des magnetischen Triplets müssen parallel zur Feldstärke, die unverschobene Linie muß senkrecht zur Feldstärke polarisiert sein, wie dies bekanntlich zutrifft.

Es folgt also aus meiner Theorie ohne Zusatzannahme der Zeeman'sche Transversaleffekt ebenso vollkommen wie der Zeeman'sche Longitudinaleffekt. Jedoch sind diese Effekte, und dies scheint mir auch ganz naturgemäß, zwei wesentlich verschiedene Erscheinungen. Die eine beruht auf dem Dichroismus der magnetischen Drehung der Polarisationsebene, die andere aber auf dem Dichroismus der magnetischen Doppelbrechung. Es scheint mir ganz wohl möglich, daß es leuchtende Gase gibt, welche den Zeeman'schen Longitudinaleffekt zeigen und doch den Zeeman'schen Transversaleffekt nicht zeigen oder umgekehrt.

110. Schließlich sei auf eine noch nicht beobachtete Erscheinung hingewiesen, welche aus den allgemeinen Gleichungen (171), (172) folgt. Für die elektrisch doppelbrechenden Medien folgt nach (176), daß der Strahl, dessen elektrische Schwingungen parallel zur elektrischen Feldstärke sind, eine wenn auch sehr geringe gleichphasige longitudinale Komponente annimmt. Wenn nun außer dem transversalen elektrischen Felde $\mathfrak{e}_0$ noch ein transversales magnetisches Feld $\mathfrak{m}_0$ vorhanden ist, doch so, daß $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$ gekreuzt sind und am besten aufeinander senkrecht stehen, so gewinnt das mit h_3 behaftete Glied der Gleichung (172) nun Einfluß, weil $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}'$ nach (176) von Null verschieden ist.

Wäre h_3 wirklich, so wie es in (172) angenommen wurde, für alle festen und flüssigen Stoffe rein reell, so würde nur ein elektromagnetischer Dichroismus auftreten, der schwer nachweisbar wäre. Gibt es aber einen elektrisch doppelbrechenden Stoff, für welchen die Kuppelkonstante b_3 von Null verschieden, also h_3 komplex ist, so muß die zu der elektrostatischen Kraft $\mathfrak{e}_0$ hinzutretende gekreuzte magnetische Kraft $\mathfrak{m}_0$ eine Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles, also eine Änderung der elektrischen Doppelbrechung bewirken, welche leicht nachweisbar wäre, weil sie dem Produkte der ersten Potenzen von $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$ proportional sein muß, sich also bei Umkehrung jeder dieser Feldstärken umkehrt.

Diese elektromagnetische Doppelbrechung werde ich experimentell nachzuweisen suchen.

XLIV. Dämpfung des Lichtes im elektrischen Felde.

111. Endlich kehren wir zu der Gleichung (175):

$$\varepsilon_0 D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{k}^2) + i g_2 \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{e}_0 = 0 \qquad (175)$$

zurück, deren zweites Glied Einfluß gewinnt, wenn die elektrostatische Feldstärke nicht transversal ist. Schon in § 99 wurde die eventuell in festen und flüssigen Medien auftretende elektrische Konvektion des Lichtes erwähnt, welche aber nur dann auftritt, wenn a_2 von Null verschieden, also g_2 imaginär ist. Von weit aktuellerem Interesse ist der analoge elektrische Longitudinaleffekt, welcher auftritt, wenn b_2 von Null verschieden, also g_2 reell ist, denn dies ist für Gase zweifellos der Fall. Für diese ist nach (174)

$$g_2 = \frac{1}{2} b_2 r p$$

und man ist über das elektrische Verhalten der Gase in so vielfachen Beziehungen genau unterrichtet, daß man sicher weiß, daß b_2 einen wenn auch äußerst kleinen, so doch merklich von Null verschiedenen Wert hat. Der elektrische Longitudinaleffekt in Gasen ist also eine neue Erscheinung, welche nach meiner Theorie unbedingt vorhanden sein muß.

Die imaginären Glieder von (175) ergeben, da

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}_1^2 (1 - 2 i \varkappa):$$

$$2 \varkappa \mathfrak{c}_1^2 = + \frac{g_2}{\varepsilon_0 D_1} \mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{e}_0. \qquad (192)$$

Hierin ist:

$$D_1 = em(p_0^2 - p^2)$$

und es wurde vorausgesetzt, daß das Gas keine merkliche natürliche Absorptionsfähigkeit c habe, daß also D_2 und die natürliche Dämpfung $\varkappa_1$ des Lichtes verschwindend klein ist. Dann nimmt (192) die Form an:

$$\varkappa = + \frac{b_2 r p}{4 \varepsilon_0 em(p_0^2 - p^2)} \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0. \qquad (193)$$

Das Licht erfährt also im elektrischen Felde eine Dämpfung $\varkappa$, welche ganz unabhängig ist von der natürlichen Absorptionsfähigkeit des Gases, in jedem Gase auftreten muß und der longitudinalen Komponente der elektrostatischen Feldstärke proportional ist, also bei Umkehrung derselben sich umkehrt. Je nach der Richtung, in welcher das Licht in dem Felde fortschreitet, ist dasselbe also positiv oder negativ gedämpft, d. h. verliert es oder gewinnt es an Strahlungsenergie.

Diese merkwürdige Dämpfung des Lichtes im elektrischen Felde dürfte man zunächst für eine unwahrscheinliche Folgerung halten, aber bei weiterem Studium der Strahlungen im elektrischen Felde (siehe § 113) lernt man diese elektrische Dämpfung des Lichtes begreifen und überzeugt sich von der Notwendigkeit ihres Vorhandenseins, so daß ich die Auffindung dieser allerdings sehr kleinen Dämpfung zu den Erfolgen meiner Theorie rechne.

Diese elektrische Dämpfung des Lichtes hängt mit der entladenden Wirkung desselben zusammen, welche weiter unten in § 145 berechnet werden wird.

XLV. Longitudinalstrahlen im starken elektrischen Felde.

112. Wir betrachten nur Gase mit verschwindend kleiner Absorptionsfähigkeit c und $\varkappa$, für welche nach (174) die Kuppelkonstante $g_1 = 0$ ist. Für diese nimmt die Amplitudengleichung (171) die Form an:

$$\varepsilon_0 D(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{l}^2) + i(g_2 + g_3)\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{e}_0 = 0. \tag{194}$$

Trennt man die reellen und imaginären Glieder dieser Gleichung, so ergibt sich:

$$\mathfrak{c}_1^2 - \mathfrak{l}_1^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0 D_1}(a_3 m p^2 - \varkappa(b_2 + b_3) r p)\mathfrak{c}_1\cdot\mathfrak{e}_0, \tag{195}$$

$$2\varkappa\mathfrak{c}_1^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0 D_1}(a_3 m p^2 \varkappa + (b_2 + b_3) r p)\mathfrak{c}_1\cdot\mathfrak{e}_0. \tag{196}$$

Es ist also mit hinreichender Annäherung:

$$\varkappa = \frac{(b_2 + b_3) r p}{4\varepsilon_0 D_1}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_0. \tag{197}$$

Diese Gleichungen gelten für Strahlen, deren longitudinale elektrische Schwingung weit überwiegt und welche rein longitudinal sind, wenn das elektrostatische und magnetische Feld longitudinal gerichtet ist, in welchem Falle alle Glieder der Amplitudengleichung (172) verschwinden. Diese Gleichung bestimmt, wenn $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$ transversale Komponenten haben, die Größe der kohärenten, gleichphasigen, transversalen, elektrischen und magnetischen Schwingungen, welche dann der Longitudinalstrahl annimmt, welche aber keinen Einfluß haben auf die allgemein durch (195) und (196) bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dämpfung der Longitudinalstrahlen im starken elektrischen Felde.

113. Die Longitudinalstrahlen erfahren eine elektrische Dämpfung $\varkappa$, welche nach (197) durch ein ganz ähnliches Gesetz bestimmt wird wie die im vorigen Kapitel berechnete elektrische Dämpfung des Lichtes, jedoch viel größer ist, da, wie schon öfters bemerkt wurde, b_2 viel kleiner als b_3 sein muß. Hier ist auch die Erklärung für die elektrische Dämpfung der Strahlen zu finden. Bei den Kathodenstrahlen sieht man ohneweiters ein, daß ein großer Teil ihrer Energie von dem elektrischen Felde geliefert wird, dem sie dieselbe durch ihre entladende Wirkung entziehen. Diese Strahlen müssen also an Energie und Amplitude gewinnen, während sie das Feld durchlaufen, und also müssen sie eine negative elektrische Dämpfung erfahren. Diesen Entladungs- und Emissionsvorgang werden wir weiter unten bis ins Detail durchrechnen (siehe Kapitel LV).

114. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ der Longitudinalstrahlen im elektrischen Felde unterscheidet sich nach (702) von ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit im unelektrischen Felde $\mathfrak{l}_1$, welche wir bereits in Kapitel XXXIV berechnet haben.

Im sehr starken elektrischen Felde verschwindet $\mathfrak{l}_1^2$ gegen $\mathfrak{c}_1^2$ und es ergibt sich aus (195):

$$\mathfrak{c}_1 = k_1 \cdot \bar{\mathfrak{e}}_0, \tag{198}$$

worin die sehr wichtige Wellenkonstante k_1 wesentlich von der Schwingungszahl des Strahles abhängt. Hierin bedeutet:

$$\bar{\mathfrak{e}}_0 = \mathfrak{c}_1 \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0$$

die longitudinale Komponente der elektrostatischen Feldstärke. Die Einseitigkeit der Fortpflanzung im elektrischen Felde, von welcher die Kathoden- und Anodenstrahlen ihren Namen haben, wird hierdurch, aber auch durch die im vorigen Paragraphen berechnete einseitige Emission (von der ersten Potenz der Feldstärke abhängende Dämpfung) erklärt.

Einen vorläufigen annähernden Wert von k_1 erhalten wir, indem wir in (195) das mit $\varkappa$ behaftete Glied vernachlässigen. Dann ergibt sich:

$$k_1 = \frac{a_3 m p^2}{2 \varepsilon_0 D_1} = \frac{a_3}{2 \varepsilon_0 e} \cdot \frac{p^2}{(p_0^2 - p^2)}. \tag{199}$$

Den so gewonnenen Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0 = \frac{2 \varepsilon_0 D_1}{a_3 m p^2}$$

führen wir in (197) ein und erhalten hierdurch einen hinreichend genauen Wert der elektrischen Dämpfung:

$$\varkappa = \frac{(b_2 + b_3) r}{2 a_3 m p} = \frac{(b_2 + b_3)}{2 a_3} \frac{p_0}{p}. \tag{200}$$

Diesen führen wir nun in (195) ein und erhalten den genauen Wert von k_1:

$$k_1 = \frac{1}{2 \varepsilon_0 D_1} \left(a_3 m p^2 - \frac{(b_2 + b_3)^2 r^2}{2 a_3 m} \right). \tag{201}$$

115. Für sehr kleine Schwingungszahlen ist D_1 positiv und nimmt k_1 den Wert an:

$$k_1 = - \frac{(b_2 + b_3)^2 r^2}{2 \varepsilon_0 D_1 a_3 m}. \tag{202}$$

Aus meinen Interferenzexperimenten geht hervor (vergl. diese Sitzungsberichte, Bd. CVII), daß es Kathodenstrahlen, deren Schwingungszahl gleich jener der Hertz'schen Strahlen, also weit kleiner als die aller anderen Strahlen ist, gibt. Für diese gilt (202). Für Kathodenstrahlen muß aber nach (196)

k_1 negativ sein, da diese sich nur im spitzen Winkel zur negativen elektrostatischen Feldstärke fortpflanzen. Es folgt also, daß:

$$a_3 m > 0 \tag{203}$$

und, da $\varkappa < 0$, folgt:

$$(b_2 + b_3) r < 0.$$

Das Vorzeichen von k_1 kehrt sich aber nach (201) bei zwei Schwingungszahlen p_1 und p_0 um:

1. bei der Schwingungszahl p_1, welche durch:

$$p_1^2 = \frac{(b_2 + b_3)^2 r^2}{2 a_3^2 m^2} p_0^2$$

bestimmt und kleiner als die Schwingungszahl der Rubens'schen Reststrahlen, aber größer als die Schwingungszahl der Hertzschen Strahlen sein dürfte:

$$10^{13} > p_1 > 10^{11} \, \mathrm{sec}^{-1};$$

2. bei der Eigenschwingungszahl (vergl. § 78):

$$p_0 = 1 \cdot 83 \times 10^{16} \, \mathrm{sec}^{-1}$$

der Gase. Die Longitudinalstrahlen zerfallen demnach nach ihrer Fortpflanzungs- und Emissionsrichtung im starken elektrischen Felde in drei Gruppen:

1. Die langwelligen Kathodenstrahlen, deren Schwingungszahl kleiner als p_1 ist, also die Größenordnung der Schwingungszahlen der Hertz'schen Strahlen hat. Diese haben Wellenlängen von der Größenordnung 1 *cm*, und deshalb sind mir die mehrfach zitierten Interferenzexperimente mit diesen Strahlen gelungen. Hierbei hat sich herausgestellt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Strahlen außerordentlich klein (0·003 der Lichtgeschwindigkeit) ist, und dies erklärt sich nun dadurch, daß für diese Kathodenstrahlen k_1 stets kleiner als der in (202) angegebene Wert ist und daß sich k_1 und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem Werte Null nähert, wenn die Schwingungszahl dieser Strahlen sich der Grenzzahl p_1 nähert.

2. Die Anodenstrahlen und Kanalstrahlen. Dies sind Strahlen, welche in der Richtung der positiven elektrostatischen Kraft fortschreiten und in dieser Richtung fortschreitend emittiert (durch das Feld verstärkt, negativ gedämpft) werden. Für sie muß k_1 positiv sein, ihre Schwingungszahlen müssen also zwischen den Grenzen

$$p_1 < p < p_0$$

liegen, also die Größenordnung der Schwingungszahlen des ultraroten, sichtbaren oder ultravioletten Lichtes haben.

3. Die kurzwelligen oder gewöhnlichen Kathodenstrahlen, deren Schwingungszahl größer, oft viel größer als die Eigenschwingungszahl p_0 der Gase ist, also vielleicht von der Größenordnung der Schwingungszahl der Röntgenstrahlen ist. Die vielfach variierten Interferenzexperimente, welche ich vor einigen Jahren mit diesen gewöhnlichen Kathodenstrahlen angestellt habe, gingen von der Voraussetzung aus, daß die Wellenlänge dieser Strahlen die Größenordnung 0·01 *cm* habe, und mißlangen sämtlich. Der Grund hierfür ist jetzt leicht einzusehen. Die Wellenlängen der gewöhnlichen Kathodenstrahlen müssen wenigstens zehnmal, oft aber 100mal kleiner sein als die des Lichtes.

Diese kurzwelligen Kathodenstrahlen sind weitaus am besten untersucht, weil sie ebenso wie die Kanalstrahlen und Anodenstrahlen sich nach § 96 im unelektrischen Felde fortpflanzen, also aus dem elektrischen Felde, in welchem sie emittiert wurden, in den unelektrischen Raum austreten können.

115. Wir berechnen nun allgemeiner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalstrahlen, ohne wie bisher vorauszusetzen, daß das elektrische Feld entweder nicht vorhanden oder aber sehr stark sei. Die Gleichung (195) hat, wenn man die selbständige Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{l}_1$ dieser Strahlen mit berücksichtigt, die Form:

$$\mathfrak{c}_1^2 - k_1 \mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{e}_0 - \mathfrak{l}_1^2 = 0. \tag{203}$$

Es ist, falls die longitudinale Komponente von $\mathfrak{e}_0$ klein ist:

$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{l}_1 + \frac{1}{2} k_1 \bar{\mathfrak{e}}_0 \tag{204}$$

oder, falls $\mathfrak{e}_0$ hinreichend groß ist:

$$\mathfrak{c}_1 = \frac{1}{2} k_1 \mathfrak{e}_0 (1 \pm 1) \pm \frac{\mathfrak{l}_1^2}{k_1 \mathfrak{e}_0}. \tag{205}$$

Im mäßig starken elektrostatischen Felde kann also ein Longitudinalstrahl nicht nur einseitig, sondern nach jeder Richtung fortschreiten, so daß Reflexionen möglich sind, doch ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit umso einseitiger (unsymmetrischer gegen die Potentialflächen des Feldes), je stärker das Feld ist.

Für die Strahlen, welche in ihrer Emissionsrichtung (gewöhnlichen Richtung) fortschreiten, gelten die oberen Vorzeichen in (204) und (205), ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit wächst mit der Feldstärke. Für die in der umgekehrten Richtung fortschreitenden Longitudinalstrahlen gelten die unteren Vorzeichen; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit nimmt ab, wenn das Feld stärker wird.

XLVI. Elektrostatische Ablenkung der Longitudinalstrahlen im starken Felde.

116. Es ist leicht einzusehen, daß der Strahlengang der elektrischen Longitudinalwellen, da deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit wesentlich von der elektrostatischen Feldstärke abhängt, nicht von dieser unabhängig sein kann, daß also elektrostatische Ablenkung der Strahlen erfolgen muß. Unter der Ablenkung der Strahlen ist stets eine Krümmung der Strahllinien zu verstehen, nicht bloß eine Ablenkung der Strahlrichtung (des Energieflusses) aus der Wellennormalen. Der elektrochemische Energiefluß der Longitudinalstrahlen [siehe Gleichung (29)] ist longitudinal gerichtet. Transversale (ablenkende) elektrische und magnetische Kräfte bewirken allerdings nach (172) das Auftreten gleichphasiger transversaler elektrischer und magnetischer Schwingungen des Strahles und damit das Auftreten eines transversalen Energieflusses, der größtenteils elektromagnetisch, also Poynting'scher Energiefluß ist. Aber diese Ablenkung des Energieflusses aus der Wellennormalen hat keinen Einfluß auf die Wellenfort-

pflanzung und deshalb überhaupt nur schwer beobachtbare Wirkungen.

Von Interesse ist vielmehr die Richtungsänderung des longitudinalen elektrochemischen Energieflusses, welche nur dadurch zustande kommen kann, daß sich die Wellenflächen des Strahles während des Fortschreitens desselben drehen, was die Krümmung der Strahllinien bewirkt.

117. Da die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ von ihrer Richtung im Felde und von der Stärke des Feldes nach dem vorigen Kapitel bekannt ist, läßt sich das Gesetz der Krümmung der Strahllinien berechnen. Diese Rechnung habe ich in der vorhergehenden Abhandlung[1] mitgeteilt und verweise hierauf. Bezeichne $\mathfrak{r}_1$ den Krümmungsradius der Strahllinie, $\mathfrak{r}_2$ den Krümmungsradius der Wellenfläche des Strahles an dem betrachteten Punkte des durchstrahlten Feldes, so ist:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{3}{=} k_1 \left(\frac{1}{\mathfrak{r}_2} \times \mathfrak{c}_0\right) \times \mathfrak{n} + k_1 (\mathfrak{c}_1 \times (\nabla ; \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{n})) \times \mathfrak{n}. \qquad (207)$$

Die Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}_1}$ der elektrischen Longitudinalstrahlen hängt also einerseits von der Krümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}_2}$ ihrer Wellenfläche, andrerseits von der Ungleichförmigkeit $\mathfrak{c}_0 ; \nabla$ des elektrostatischen Feldes ab. Diese beiden Einflüsse sind voneinander unabhängig und bestimmen zwei Komponenten der Strahlkrümmung $\frac{1}{\mathfrak{r}_1}$, die sich vektorisch addieren.

Wir werden nur Gelegenheit haben, folgende Fälle zu betrachten:

1. Longitudinalstrahlen, welche sich im starken, aber gleichförmigen Felde fortpflanzen und gekrümmte Wellenflächen haben. Die elektrostatische Ablenkung dieser Strahlen bestimmt sich durch:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{3}{=} k_1 \left(\frac{1}{\mathfrak{r}_2} \times \mathfrak{c}_0\right) \times \mathfrak{n}. \qquad (208)$$

---

[1] Diese Sitzungsberichte, CXVI (1907), p. 465 ff.

2. Longitudinalstrahlen mit ebenen Wellenflächen, welche sich im ungleichförmigen, in longitudinaler Richtung schwachen elektrostatischen Felde fortpflanzen. Für diese gilt:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{3}{=} \frac{1}{2} k_1 (\mathfrak{c}_1 \times (\nabla ; \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{u})) \times \mathfrak{u}. \tag{209}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ mußte deshalb beigefügt werden, weil für sehr schwache elektrostatische Felder sowohl, als auch in dem Falle, daß zwar nicht $\mathfrak{e}_0$, aber $\bar{\mathfrak{e}}_0$ sehr klein ist, daß sich also die Strahlen nahezu senkrecht zur Feldstärke fortpflanzen, nicht (198), sondern (204) gilt.

118. Elektrostatische Ablenkung divergenter Kathodenstrahlenbüschel im starken Felde. Die grundlegenden Versuche, mit welchen ich entgegen der damals allgemeinen Überzeugung die elektrostatische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen nachgewiesen habe, nehmen auch insofern eine Sonderstellung ein, als es die einzigen sind, welche mit einem im starken Felde fortschreitenden und deshalb (siehe l. c., p. 469) divergierenden Kathodenstrahle angestellt wurden, für welche also die Krümmung durch (208) bestimmt ist. Es berechnet sich, daß diese Strahlen durch eine transversale, von zwei außerhalb des Entladungsrohres aufgestellten geladenen Kondensatorplatten gegebene ablenkende Kraft so gekrümmt werden, daß ihr Radius $\mathfrak{r}_1$ der ablenkenden Kraft entgegengerichtet ist. Sie werden also von der positiven Platte abgestoßen oder von der negativen Platte angezogen. Dies ist tatsächlich der Sinn der von mir beobachteten Ablenkung.

Die von Thomson und Wien beobachteten Ablenkungen betreffen aber parallelstrahlige Longitudinalstrahlen, welche sich nicht in der Richtung einer merklichen elektrostatischen Kraft fortpflanzen. Die elektrostatische Ablenkung dieser Strahlen hat den umgekehrten Sinn, kann jedoch erst in Kapitel LXVII berechnet werden.

———————

Vierter Teil.

XLVII. Produkte der reellen Variablen der Strahlen.

119. Wir haben bisher nur Strahlen sehr kleiner Amplitude betrachtet und die Integration der Grundgleichungen (I), (II), (V) und (VI) unter Vernachlässigung aller Glieder, welche Produkte zweier Variablen des Strahles enthalten, durchgeführt.

Wir können diese Glieder aber nicht gänzlich außer acht lassen, da wichtige Wirkungen der Strahlen, und zwar besonders die Wärmewirkung, die mechanischen Wirkungen, die ladenden und entladenden Wirkungen, aber auch ihre elektrische und magnetische Ablenkbarkeit von Quadraten oder Produkten reeller Variablen des Strahles abhängen.

Es seien $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\mu}$ irgend zwei komplexe Variable des Strahles:

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)e^{i\varphi}, \quad \bar{\mu} = (\mu_1 + i\mu_2)e^{i\varphi}, \tag{210}$$

so haben die reellen Variablen desselben den Wert:

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)e^{i\varphi} + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2)e^{-i\varphi}, \tag{211}$$

$$(\mu) = \frac{1}{2}(\mu_1 + i\mu_2)e^{i\varphi} + \frac{1}{2}(\mu_1 - i\mu_2)e^{-i\varphi}. \tag{212}$$

Das Produkt derselben hat also die Form:

$$(\varepsilon \cdot \mu) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \mu_1 + \varepsilon_2 \cdot \mu_2) + (\alpha_1 + i\alpha_2)e^{2i\varphi} + (\alpha_1 - i\alpha_2)e^{-2i\varphi}, \tag{213}$$

worin:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \mu_1 - \varepsilon_2 \cdot \mu_2), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \mu_2 + \varepsilon_2 \cdot \mu_1).$$

Das Produkt zweier reeller Variablen einer Sinuswelle bildet also eine Sinuswelle von der doppelten Schwingungszahl und hat überdies einen konstanten (von Ort und Zeit unabhängigen) Anteil, dessen Wert:

$$(\varepsilon \cdot \mu)_m = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \cdot \mu_1 + \varepsilon_2 \cdot \mu_2) \tag{214}$$

sehr wichtig ist, weil er gleichzeitig den Mittelwert des variablen Produktes $\varepsilon \cdot \mu$ darstellt und nur die mittleren Wärmewirkungen, ladenden Wirkungen usw. des Strahles von Interesse sind.

120. Andrerseits erhält man einigen Aufschluß über den Charakter jenes mit den gegenwärtig vorhandenen mathematischen Methoden nicht berechenbaren exakten Integrals der Grundgleichungen meiner Theorie, welches in erster Annäherung einen Sinusstrahl darstellt. Strenggenommen kann ein solcher Strahl sich niemals als Integral ergeben, da diese Differentialgleichungen nicht linear sind, sondern Produkte der Variablen enthalten. Die zunächst vernachlässigten Glieder, welche von zweiter Ordnung klein sind, haben den Charakter der Produkte zweier Variablen des Sinusstrahles und bilden also Wellen mit doppelter Schwingungszahl. So könnte man zu noch genaueren Annäherungen fortschreiten. Die Sinusstrahlen meiner Theorie werden also von einer Reihe kohärenter Strahlen abnehmender Amplitude und nach der Reihe der ganzen Zahlen zunehmender Schwingungszahl begleitet, deren Variable Produkte der Variablen des Grundstrahles sind.

XLVIII. Amplituden der kohärenten chemischen Schwingungen.

121. In einem Gase, dessen Absorptionskonstanten c und x verschwindend klein sind, bestimmt sich die Amplitude der chemischen Schwingungen, welche im Licht sowohl als in Longitudinalstrahlen auftreten, nach (71) und (72) durch:

$$\left.\begin{aligned} D_1 \varepsilon_1 &= (-a_3 m p^2 - \varkappa p b_3 r)\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 - \varkappa p b_2 r\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1, \\ D_1 \varepsilon_2 &= (-\varkappa \alpha_3 m p^2 + p b_3 r)\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 + p b_2 r\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1, \\ D_1 \mu_1 &= (-b_3 c p^2 - \varkappa p a_3 s)\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 - b_2 e p^2\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1, \\ D_1 \mu_2 &= (-\varkappa b_3 c p^2 + p a_3 s)\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 - \varkappa b_2 e p^2\,\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1. \end{aligned}\right\} \quad (215)$$

Die kohärenten chemischen Schwingungen wachsen, wenn die Determinante D_1 abnimmt, also mit Annäherung der Schwingungszahl p des Strahles an die Eigenschwingungszahl p_0 der Gase, ferner mit abnehmender Fortpflanzungs-

geschwindigkeit des Strahles. In Kapitel XXVIII wurde bereits die starke chemische Wirksamkeit des ultravioletten Lichtes in festen und flüssigen Medien auf ihre relativ sehr intensiven chemischen Schwingungen zurückgeführt. Ähnlich erklärt sich die stark ionisierende Wirkung der α-Strahlen in Gasen, denn diese müssen von sehr starken chemischen Schwingungen begleitet sein, da sich bei Anwachsen der Schwingungszahl dieser Strahlen gleichzeitig die Determinante D_1 und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem Werte Null nähert.

XLIX. Energieinhalt der Longitudinalstrahlen.

122. Die potentielle elektrische Energie eines Longitudinalstrahles hat den variablen Wert:

$$E_1 = \frac{1}{2}\bar{\mathfrak{e}}\cdot\varepsilon_0\cdot\bar{\mathfrak{e}},$$

also nach § 119 den Mittelwert (pro Kubikzentimeter durchstrahlten Raumes):

$$E_{1m} = \frac{1}{4}\varepsilon_0\,\mathfrak{e}_1^2. \tag{216}$$

Die chemische Energie des Strahles hat den variablen Wert (14):

$$E_2 = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} : c : \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\bar{\mu} : m : \bar{\mu},$$

also den Mittelwert pro Kubikzentimeter:

$$E_{2m} = \frac{1}{4}c(\varepsilon_1 : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 : \varepsilon_2) + \frac{1}{4}m(\mu_1 : \mu_1 + \mu_2 : \mu_2). \tag{217}$$

Wir wollen diese chemische Energie des Strahles als Funktion der elektrischen Amplitude $\mathfrak{e}_1$ desselben darstellen, um ihre Größe mit der Größe der elektrischen Energie desselben Strahles vergleichen zu können.

Für einen wenig gedämpften Strahl ist nach (215):

$$\left.\begin{aligned} D_1\varepsilon_1 &= -a_3 m p^2 \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1, \\ D_1\varepsilon_2 &= pr(b_3\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 + b_2\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1), \\ D_1\mu_1 &= -p^2 c(b_3\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 + b_2\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1), \\ D_1\mu_2 &= +psa_3\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

Es ist also:

$$D_1^2 \varepsilon_1 : \varepsilon_1 = 3a_3^2 m^2 p^4 \mathfrak{n}^2 \mathfrak{c}_1^2,$$
$$D_1^2 \varepsilon_2 : \varepsilon_2 = p^2 r^2 (3b_3^2 + 2b_2 b_3 + b_2^2) \mathfrak{n}^2 \mathfrak{c}_1^2,$$
$$D_1^2 \mu_1 : \mu_1 = p^4 e^2 (3b_3^2 + 2b_2 b_3 + b_2^2) \mathfrak{n}^2 \mathfrak{c}_1^2,$$
$$D_1^2 \mu_2 : \mu_2 = 3p^2 s^2 a_3^2 \mathfrak{n}^2 \mathfrak{c}_1^2.$$

Berücksichtigt man nun, daß nach (84) und (93):

$$u_1 + u_2 = 3a_3^2 m + (3b_3^2 + 2b_2 b_3 + b_2^2) e,$$
$$p_0^2 = -\frac{rs}{em},$$

so ergibt sich für die chemische Energie aller Longitudinalstrahlen:

$$E_{2m} = \frac{1}{4}(u_1 + u_2)\frac{p^2(p^2 + p_0^2)}{D_1^2}\mathfrak{n}^2 \mathfrak{c}_1^2. \qquad (219)$$

123. Die chemische Energie der Strahlen ist natürlich in der Nähe der Eigenschwingungsdauer der Gase, wo D_1 Null wird, sehr groß, überdies aber dem Quadrate der reziproken Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{n}$ proportional, hat also für Kathodenstrahlen im starken elektrostatischen Felde, welche hohe Geschwindigkeit haben, einen kleinen Wert, und es bestimmt sich fast die ganze Energie dieser Strahlen durch (216), d. i. durch die Energie ihrer elektrischen Schwingungen. Die chemische Energie der Transversalstrahlen ist durch b_2^2 bestimmt, also sehr klein.

124. Bei Ausschluß eines elektrostatischen Feldes hat aber ein Kathodenstrahl nach (162) die Geschwindigkeit:

$$\mathfrak{c}^2 = \frac{u_1 + u_2}{\varepsilon_0 em} \cdot \frac{p^2}{p^2 - p_0^2}.$$

Führt man diese und den Wert

$$D_1 = em(p_0^2 - p^2) \qquad (220)$$

in (219) ein, so erhält man für die chemische Energie der Kathodenstrahlen:

$$E_{2m} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \mathfrak{c}_1^2 \frac{p^2 + p_0^2}{p^2 - p_0^2}. \qquad (221)$$

Von besonderem Interesse sind die sehr wenig gedämpften, also leichter zu beobachtenden Kathodenstrahlen sehr hoher Schwingungszahl. Verschwindet gegen diese hohe Schwingungszahl die Eigenschwingungsdauer des Gases, so folgt merkwürdigerweise aus (221):

$$E_{2m} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \mathfrak{c}_1^2. \qquad (222)$$

Es ist also die chemische Energie der Kathodenstrahlen hoher Schwingungszahl gerade ihrer elektrischen Energie (216) gleich, also die Hälfte ihrer ganzen Energie:

$$E_m = E_{1m} + E_{2m} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathfrak{c}_1^2. \qquad (223)$$

L. Energiefluß der Longitudinalstrahlen.

125. In einem ruhenden nichtleitenden und nicht absorptionsfähigen Medium kann keine andere als potentielle Energie auftreten und die Energiegleichung hat dann die Gestalt:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0.$$

Für ungedämpfte Strahlen und nur für diese gilt nach der Euler'schen Regel:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathfrak{c}_1 \cdot \nabla E = 0,$$

was nichts anderes aussagt, als daß der Zustand E sich unverändert mit der Wellengeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ fortpflanzt. Es folgt also:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{S} - \mathfrak{c}_1 E) = 0. \qquad (224)$$

Da hiernach die Welle des Vektors $(\mathfrak{S} - \mathfrak{c}_1 E)$ divergenzfrei ist, so ist sie transversal. Hätte dieser Vektor eine longitudinale Komponente, so müßte diese nach (224) konstant sein, dies wäre aber nur bei regelmäßigen langen Wellenzügen möglich, nicht aber bei intermittierenden und

abklingenden Wellenzügen, mit welchen man im allgemeinen zu tun hat. Es ist also:

$$\mathfrak{n}\cdot(\mathfrak{S}-\mathfrak{c}_1 E)=0,$$

worin $\mathfrak{S}$ der Energiefluß ist. Hieraus folgt:

$$\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{S}=E. \tag{225}$$

126. Die Longitudinalstrahlen haben keinen anderen Energiefluß als den elektrochemischen Energiefluß, welcher nach (29) den Wert hat:

$$\mathfrak{S}=(a\bar{\varepsilon}+b\bar{\mu})\cdot\mathfrak{e}=(a_3\bar{\varepsilon}_s+b_2\bar{\mu}_c+b_3\bar{\mu}_s)\cdot\mathfrak{e}. \tag{226}$$

Bei der Berechnung von $\bar{\varepsilon}_s$ und $\bar{\mu}_s$ hat man zu berücksichtigen, daß der Skalar der isotropen Dyade $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1$ gleich $3\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{c}_1$ ist. Es ergibt sich nach (218):

$$\mathfrak{S}_m=-\frac{1}{2}(3a_3^2m+(3b_3^2+2b_2b_3+b_2^2)e)\frac{p^2}{D_1}\mathfrak{n}\,\mathfrak{c}_1^2$$

und da nach (84):

$$u_1+u_2=3a_3^2m+(3b_3^2+2b_2b_3+b_2^2)e,$$

so erhält man für den mittleren Energiefluß aller ungedämpften Longitudinalstrahlen:

$$\mathfrak{S}_m=-\frac{1}{2}(u_1+u_2)\frac{p^2}{D_1}\mathfrak{n}\,\mathfrak{c}_1^2 \tag{227}$$

und speziell für die Kathodenstrahlen und β-Strahlen, deren Geschwindigkeit nach (162) durch

$$\mathfrak{c}_1^2=-(u_1+u_2)\frac{p^2}{D_1}$$

bestimmt ist:

$$\mathfrak{S}_m=\frac{1}{2}\mathfrak{c}_1\varepsilon_0\mathfrak{c}_1^2. \tag{228}$$

Für diese sehr wenig gedämpften Strahlen ist also die direkt aus dem Energieprinzip für ungedämpfte Strahlen folgende Beziehung (225) erfüllt. Es ergibt sich nämlich nach (228) und (223):

$$\mathfrak{S}_m=\mathfrak{c}_1 E_m.$$

LI. Wärmewirkung der Longitudinalstrahlen.

127. Die gesamte Wärmeproduktion in einem Medium, welches keine metallische Leitfähigkeit hat, hat nach (16) den Wert:

$$Q_2 = c\bar{\mathfrak{e}} : \bar{\mathfrak{e}} + x\bar{\mu} : \bar{\mu} + (r+s)\bar{\mathfrak{e}} : \bar{\mu}. \qquad (229)$$

Dieser ist in Gasen wesentlich positiv [da in diesen $(r+s) = 0$ ist], wenn die Absorptionskonstanten des Gases positiv sind, wie dies für Gase gewöhnlicher Temperatur stets der Fall ist.

Auch die Absorption der Longitudinalstrahlen in Gasen erzeugt also stets eine positive Erwärmung des Gases. Das gleiche gilt für die Absorption dieser Strahlen in festen und flüssigen Medien, denn das letzte Glied von (229) wird in diesen meist wegen der Kleinheit von r und s oder wegen der Phasenverschiebung von $\bar{\mathfrak{e}}$ und $\bar{\mu}$ verschwinden.

Um hiernach die Wärmewirkung beim Auftreffen der Strahlen auf eine völlig absorbierende feste Fläche zu berechnen, muß man erst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die kohärenten chemischen Schwingungen für alle in dem festen Medium fortschreitenden Longitudinalstrahlen berechnen und erhält dann die gesuchte Wärmewirkung aus (229) oder auch aus der berechneten Dämpfung der Strahlen und ihrem Energieinhalt.

128. Für ungedämpfte Kathoden- und β-Strahlen kann man aber die Wärmeproduktion, welche bei ihrer Absorption in einem festen Körper, welchen sie bestrahlen, auftritt, berechnen, wenn man nur ihre Fortpflanzung in dem Gase kennt, und zwar auf zwei verschiedene, aber nach (225) übereinstimmende Weisen: 1. aus dem Energieflusse $\mathfrak{S}_m$ dieser Strahlen, welcher gleich ist der Wärmeproduktion pro Quadratzentimeter bestrahlter Fläche und Sekunde in mechanischem Maße, 2. aus dem Energieinhalte E_m und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$, deren Produkt wieder diese Wärmeproduktion gibt.

Für gedämpfte Longitudinalstrahlen — und dies sind alle Anoden-, Kanal- und α-Strahlen sowie die Kathodenstrahlen

kleinerer Schwingungszahl — führt aber nur der zweite Weg zum richtigen Resultate. Man erkennt, daß die Wärmewirkung aller Strahlen beim Auftreffen auf eine absorbierende Fläche positiv sein muß, weil ihr Energiegehalt E_m nach (13) und (14) wesentlich positiv ist.

Nach (1) also aus dem Energieflusse dieser Strahlen kann man gar nichts schließen, weil für gedämpfte Strahlen (225) und (227) nicht gilt. Tatsächlich hätte der Energiefluß der Anoden-, Kanal- und α-Strahlen nach (227) die zur Strahlgeschwindigkeit entgegengesetzte Richtung, obwohl deren Dämpfung und Wärmeproduktion wesentlich positiv sind. Ein Widerspruch gegen das Energieprinzip kann aber bei meiner Theorie, die exakt auf das Energieprinzip gegründet ist, nicht auftreten.

129. Wir können nun die Amplitude der Longitudinalstrahlen, wenn ihre Wärmewirkung bekannt ist, in absolutem Maße bestimmen.

Ein starker Kathodenstrahl, welcher pro Sekunde und Quadratzentimeter bestrahlter Fläche die Wärmemenge:

$$\mathfrak{s}_m = 10^5 \text{ Erg}/cm^2 \text{ sec}$$

liefert, hat, wenn seine Geschwindigkeit

$$\mathfrak{c}_1 = 5 \cdot 10^9 \, cm/\text{sec}$$

ist, nach (228) die Amplitude:

$$\mathfrak{e}_1 = 0 \cdot 022 \text{ (C. G. S. elstat. Maß)} = 6 \cdot 6 \text{ Volt}/cm. \qquad (230)$$

Aus ihrem Energieinhalte, ihrer Wärmewirkung und Geschwindigkeit kann man auch die Amplituden der Kanalstrahlen, welche zwar kleiner, aber oft gar nicht unbeträchtlich sind, berechnen. Die α- und β-Strahlen haben sehr kleine Wärmewirkung und Amplituden, welche niemals den Wert $0 \cdot 01$ Volt/cm erreichen dürften.

LII. Mechanische Wirkungen der Longitudinalstrahlen.

130. Sämtliche ponderomotorische Wirkungen der Strahlen werden durch die Spannungsdyade Θ bestimmt, deren Wert durch (31) und (36) gegeben ist. Es kommen aber nur jene

Glieder derselben in Betracht, welche binäre Produkte der Variablen enthalten, denn nur diese haben in aufeinander folgenden halben Wellenlängen des Strahles gleiches Vorzeichen und heben sich im Mittel nicht auf, man kann also $\Theta_2 = E_2$ setzen.

Für Kathodenstrahlen ist nach (222) $E_{2m} = E_{1m}$ und deshalb sind auch die longitudinalen Kraftwirkungen der chemischen Spannungsdyade Θ_2 gleich jenen der elektromagnetischen Spannungsdyade Θ_1. Wir können uns also begnügen, die letzteren zu berechnen. Die mittlere Spannungsdyade ist:

$$\Theta_{1m} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\mathfrak{e}_1 ; \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_1 \,\dot{\times}\, \mathfrak{e}_1). \tag{231}$$

Die Flächenkraft, welche an einer das durchstrahlte Feld begrenzenden vollkommen absorbierenden Fläche wirkt, ist:

$$\Theta_{1m} \cdot \mathfrak{f} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\mathfrak{e}_1\, \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_1 \times (\mathfrak{f} \times \mathfrak{e}_1)). \tag{232}$$

Hierin ist $\mathfrak{f}$ der Flächenvektor der bestrahlten Fläche, welcher gegen das durchstrahlte Medium gerichtet ist. Ein senkrecht gegen eine Fläche auffallender Kathodenstrahl soll also auf dieselbe einen Zug, streifend aber einen Druck ausüben. Diese Kräfte sind aber unbeobachtbar klein. Selbst der starke Kathodenstrahl, dessen Amplitude nach (230) zu 0·022 C. G. S. bestimmt wurde, übt pro Quadratzentimeter bestrahlter Fläche nur eine Kraft $0 \cdot 95 \times 10^{-5}$ Dyne aus, welche weit überwogen wird durch die auf die Wärmewirkungen des Strahles zurückzuführenden radiometrischen Kräfte, durch welche sich der von Crookes entdeckte scheinbare Strahlungsdruck der Kathodenstrahlen erklärt. Tatsächlich gelang es Starke, diesen scheinbaren Strahlungsdruck durch geeignete Versuchsanordnung selbst bei starken Kathodenstrahlen bis auf 10^{-4} Dyne herabzusetzen, also fast zum Verschwinden zu bringen.

131. Hingegen dürfte die ponderomotorische Wirkung der Strahlung auf das durchstrahlte verdünnte Gas nicht in so hohem Grade durch störende Nebenwirkungen verdeckt

werden und diese ponderomotorische Wirkung ist der geringen Gasdichte wegen oft der Anlaß lebhafter, leicht beobachtbarer Strömungen des Gases.

Die Kraft, welche die Volumseinheit des durchstrahlten Mediums erfährt, ist gleich dem Mittelwerte des derivierten Vektors $\nabla \cdot \Theta$ der Spannungsdyade und dieser ist gleich dem derivierten Vektor $\nabla \cdot \Theta_m$ des Mittelwertes der Spannungsdyade. Die mittlere Spannungsdyade eines gedämpften Strahles hängt vom Ortsvektor $\mathfrak{r}$ ab, es ist:

$$\Theta_m = e^{-2p\varkappa \mathfrak{n}.\mathfrak{r}}\,\Theta_{m\,(\mathfrak{r}=0)}$$

und sonach die Kraft, welche auf die Volumseinheit des Mediums wirkt:

$$\nabla \cdot \Theta_m = -2p\varkappa\mathfrak{n}\cdot\Theta_m = -2p\varkappa\mathfrak{n}(E_{1m} + E_{2m}). \qquad (233)$$

In einem positiv gedämpften (im unelektrischen Felde fortschreitenden) Longitudinalstrahle hat also diese Kraft die entgegengesetzte Richtung wie die Strahlung und muß sich eine Gegenströmung in dem verdünnten Gase etablieren, welche aber meist sehr schwach sein wird, da die Dämpfung $\varkappa$ klein ist. Immerhin kann man manchmal in einem Kathodenstrahl, welcher die bestrahlte Glaswand hinreichend erhitzt, spektroskopisch das Auftreten der Natriumlinie nachweisen, was sich nur so erklären läßt, daß eine Strömung des verdünnten Gases von der bestrahlten Glasfläche innerhalb des Kathodenstrahles und entgegengesetzt zu seiner Fortpflanzungsrichtung stattfindet.

Wichtiger sind die Gasströmungen in dem starken Kathodengefälle, beziehungsweise Anodengefälle, in welchem die Kathodenstrahlen und Kanalstrahlen, beziehungsweise die Anodenstrahlen emittiert werden und deshalb negativ gedämpft sind (siehe § 113 und § 135). Dort hat nach (233) die von ihnen auf das durchstrahlte Medium ausgeübte Kraft dieselbe Richtung wie die Strahlung (wie $\mathfrak{n}$) und es müssen also die in der Emission begriffenen Strahlen im starken elektrischen Felde von einem gleichgerichteten Strome des verdünnten Gases begleitet werden. Derselbe dürfte für Kathodenstrahlen selten beobachtbar sein, weil diese hohe Schwingungs-

zahl und deshalb nach (200) geringe negative Dämpfung $\varkappa$ pro Wellenlänge haben. Die Kanalstrahlen und Anodenstrahlen haben aber kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeit und werden also deshalb von kräftigen Gasströmen begleitet.

Die Kanalstrahlen entspringen mit äußerst geringer Amplitude an der Grenzfläche des Kathodendunkelraumes und gehen mit stets wachsender Amplitude gegen die Kathode, der sie begleitende Gasstrom ist zunächst unsichtbar, sättigt sich aber an der Kathode mit Natriumdämpfen und dringt in Form deutlich sichtbarer, die blau lumineszierenden Kanalstrahlen begleitender gelbleuchtender Fackeln durch die Perforationen der Kathode hindurch.

Überaus günstig liegen für die Beobachtung dieses Gasstromes aber die Verhältnisse bei der Emission der Anodenstrahlen. Gehrcke und Reichenheim regen die von ihnen entdeckten Anodenstrahlen in der Wehnelt'schen Weise durch glühende Salze an, mit welchen die Anode bedeckt ist. Der sie begleitende Gasstrom muß sich von Anfang an mit leuchtenden Salzdämpfen beladen. Tatsächlich beschreiben die Beobachter die Anodenstrahlen als leuchtende Fackeln, deren Farbe und Spektrum durch das an der Anode glühende Salz bestimmt wird. Dieses Spektrum zeigt den Dopplereffekt, aber nicht deshalb, weil sich die Salzdämpfe bewegen, sondern nach Kapitel XXXV, weil sich die Anodenstrahlen in den Salzdämpfen fortpflanzen. Die Bewegung der Salzdämpfe in diesen Anodenfackeln dürfte doch viel zu langsam sein, um etwas zu diesem Dopplereffekt beizutragen.

LIII. Der kohärente Ladungsstrom der Longitudinalstrahlen.

132. Eine charakteristische Eigenheit der Kathodenstrahlen und anderer Longitudinalstrahlen bildet ihre ladende Wirkung und gerade diese schien vielen Physikern zugunsten der Elektronentheorie zu entscheiden. Auch mir schien es jahrelang ein hohes, ja kaum erreichbares Ziel für eine Undulationstheorie dieser Strahlen, diesen merkwürdigen kohärenten Ladungsstrom derselben zu erklären, und doch leistet dies nun meine elektrochemische Theorie dieser Strahlen in unmittelbarer und einfacher Weise.

Ein rein elektrischer Strahl könnte niemals ladende Wirkungen haben, auch dann nicht, wenn seine elektrischen Schwingungen longitudinal sind, obgleich in einem solchen longitudinale elektrische Ströme vorkommen, nämlich die Verschiebungsströme $\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}$. Diese haben aber, falls ε konstant ist, in aufeinanderfolgenden halben Wellenlängen entgegengesetztes Vorzeichen und heben sich im Integral über eine längere Zeit auf.

Anders bei meinen elektrochemischen Longitudinalstrahlen, in welchen die elektrischen Schwingungen von kohärenten Schwingungen der dielektrischen Dyade ε begleitet sind. Die elektrochemischen Verschiebungsströme

$$|\varepsilon| \cdot \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \cdot \mathfrak{e} = c_0 \operatorname{rot} \mathfrak{m} \tag{234}$$

haben in aufeinanderfolgenden halben Wellenlängen nicht entgegengesetzte Werte, ihr Mittelwert ist nicht Null und bildet den kohärenten Ladungsstrom dieser Strahlen. Es sind aber nur die Glieder zweiter Ordnung der elektromagnetischen Grundgleichungen, d. i. jene Glieder, welche Produkte zweier Variablen des Strahles darstellen, welche in allen aufeinanderfolgenden halben Wellenlängen gleiches Vorzeichen haben und den kohärenten Ladungstrom bestimmen. Die Glieder erster Ordnung heben sich im Mittel völlig weg. Es wurde deshalb in (234) gleich der chemische Strom $\nabla \cdot (a\bar{\mathfrak{s}} + b\bar{\mu})$ weggelassen, denn dieser stellt, so lange die Kuppelkonstanten a und b konstant bleiben (was aber bei den eigentlichen Entladungsvorgängen nicht immer der Fall sein dürfte), eine lineare Form der Strahlenvariablen $\mathfrak{s}$ und μ dar und hat in aufeinanderfolgenden halben Wellenlängen entgegengesetzte Werte, trägt also nichts zu dem kohärenten Ladungsstrom bei.

Die Glieder zweiter Ordnung des Verschiebungsstromes (234) bilden nach § 120 eine Sinuswelle von der doppelten Schwingungszahl, welche keine ladende Wirkung hat, haben aber außerdem einen konstanten, von Zeit und Ort unabhängigen Teil, der durch (214) bestimmt ist, und dieser ist der kohärente Ladungsstrom des Strahles. Um diesen zu

berechnen, berücksichtigen wir, daß die komplexen Amplituden der Strahlenvariablen folgende Werte haben:

Variable	Reeller Teil der Amplitude	Imaginärer Teil der Amplitude
$[\varepsilon]$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_{1c})$	$i\cdot\frac{1}{2}(\varepsilon_2+\varepsilon_{2c})$
$\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}$	0	$i\cdot(-p\mathfrak{e}_1)$
$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$	$p\varepsilon_2$	$i\cdot(-p\varepsilon_1)$
$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{e}_1$	0

Nach (214) hat also der Mittelwert des Verschiebungsstromes den Wert:

$$\left([\varepsilon]\cdot\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\cdot\mathfrak{e}\right)_m=-\frac{1}{4}p(\varepsilon_2+\varepsilon_{2c})\cdot\mathfrak{e}_1+\frac{1}{4}p\varepsilon_2\cdot\mathfrak{e}_1.$$

Es gilt dies für alle Strahlen, unabhängig von ihrer Schwingungsrichtung. Der konstante kohärente Ladungsstrom aller Strahlen in oder außerhalb eines starken elektrostatischen Feldes hat also der Richtung und Größe nach den Wert (in elektrischem Maße):

$$\mathfrak{L}\stackrel{3}{=}-\frac{1}{4}p\varepsilon_{2c}\cdot\mathfrak{e}_1. \tag{235}$$

Hierin ist ε_{2c} die konjugierte Dyade der Amplitude ε_2 der um eine Viertelwellenlänge gegen die elektrischen Schwingungen des Strahles verschobenen chemischen Welle.

133. In Gasen ist nach (215):

$$D_1\varepsilon_{2c}=(-\varkappa a_3 m p^2+p b_3 r)\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1+p b_2 r\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1, \tag{236}$$

also ist der kohärente Ladungstrom aller Strahlen in Gasen:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{4}\frac{p^2}{D_1}((\varkappa a_3 m p-b_3 r)\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_1-b_2 r\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_1^2) \tag{237}$$

und für Longitudinalstrahlen, wenn man außerdem das mit der jedenfalls äußerst kleinen Dämpfung pro Wellenlänge $\varkappa$ behaftete Glied vernachlässigt:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}\frac{p^2}{D_1}(b_2+b_3)r\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_1^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{(b_2+b_3)r}{em}\cdot\frac{p^2}{(p_0^2-p^2)}\cdot\mathfrak{n}\,\mathfrak{e}_1^2. \quad (238)$$

Der kohärente Ladungsstrom der Longitudinalstrahlen ist longitudinal gerichtet, dem Quadrate ihrer elektrischen Amplitude gerade und ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit verkehrt proportional, überdies von der Schwingungszahl p derselben abhängig. Bei Annäherung ihrer Schwingungszahl an die Eigenschwingungszahl p_0 des Gases erreicht der Ladungsstrom ungemein hohe Werte und bei Überschreitung der Eigenschwingungszahl kehrt er sein Vorzeichen um. Der Ladungsstrom der Anoden-, Kanal- und α-Strahlen hat deshalb das umgekehrte Vorzeichen als der Ladungsstrom der Kathoden- und β-Strahlen.

Aber auch das absolute Vorzeichen des Ladungsstromes dieser Strahlen ergibt sich aus (238), da wir über das Vorzeichen der Materialkonstanten $(b_2+b_3)\,r$ nach (203) bereits unterrichtet sind. Dieses Vorzeichen folgt dort aus der Tatsache, daß die Longitudinalstrahlen im starken elektrischen Felde emittiert (negativ gedämpft) werden und aus diesem Vorzeichen von $(b_2+b_3)r$, welches nach (203) negativ ist, folgt aus (238) in Übereinstimmung mit den Tatsachen, daß der Ladungsstrom der Kathoden- und β-Strahlen (deren Schwingungszahl größer ist als p_0) entgegengesetzte Richtung wie ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, während für Anoden-, Kanal- und α-Strahlen umgekehrt eine positiv ladende Wirkung folgt, weil für diese $(p_0^2-p^2)$ positiv ist.

LIV. Verhältnis der ladenden zu der Wärmewirkung der Longitudinalstrahlen.

134. Bezeichnen wir mit W die Wärmewirkung der Strahlen, d. i. die Wärme in mechanischem Maße, welche sie pro Quadratzentimeter bestrahlter Fläche und Zeiteinheit liefern.

Dieselbe bestimmt sich durch das Produkt der Strahlgeschwindigkeit und des mittleren Energieinhaltes des Strahles:

$$W = \mathfrak{c}_1 E_m = \mathfrak{c}_1 (E_{1m} + E_{2m}). \qquad (239)$$

Die *ladende Wirkung* des Strahles wird bestimmt durch seinen kohärenten Ladungsstrom $\mathfrak{L}$ und ist die Elektrizitätsmenge (im elektrischen Maße), welche pro Quadratzentimeter und Sekunde an die bestrahlte Fläche abgegeben wird. Diese ist nach (238) durch das Quadrat der Amplitude $\mathfrak{c}_1$ bestimmt, aber dies gilt auch für die Wärmewirkung, da sowohl die chemische Energie E_{2m} des Strahles als die elektromagnetische Energie E_{1m} desselben dem Quadrat der Amplitude proportional ist.

$$W = \mathfrak{c}_1 \frac{E_{1m} + E_{2m}}{E_{1m}} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathfrak{c}_1^2. \qquad (240)$$

Hieraus und aus (238) ergibt sich:

$$\phi = \mathfrak{c}_1^2 \frac{\mathfrak{L}}{W} = -\frac{(b_2 + b_3) r}{\varepsilon_0 e m} \cdot \frac{p^2}{p_0^2 - p^2} \cdot \frac{E_{1m}}{E_{1m} + E_{2m}} \cdot \qquad (241)$$

Es ist sonach das *Verhältnis der ladenden Wirkung* $\mathfrak{L}$ *eines Longitudinalstrahles zu seiner Wärmewirkung* W *dem Quadrate der Strahlgeschwindigkeit* $\mathfrak{c}_1$ *verkehrt proportional*. Dieser Satz, welcher sich als eine Folgerung ergibt, bildet für die Elektronentheorie dieser Strahlen die Grundannahme. Er ist vielfach und meiner Ansicht nach hinreichend experimentell bestätigt, doch wäre noch zu wünschen, daß umfangreichere direkte Messungen der ladenden und Wärmewirkung solcher Strahlen unter *gleichzeitiger* Messung ihrer Geschwindigkeit nach der Kaufmann'schen Methode, welche allein einwandfreie Werte liefert (vergl. § 158), vorgenommen würden, wodurch man dann auch verläßlichere Gesetzmäßigkeiten des Wertes ϕ für verschiedene Longitudinalstrahlen konstatieren könnte.

Das Verhältnis ϕ ist eine *charakteristische Konstante* der verschiedenen Gruppen der Longitudinalstrahlen, es ist nämlich nach (241) nur von ihrer Schwingungszahl und von *Materialkonstanten des durchstrahlten Gases* abhängig. Abgesehen von letzterer Abhängigkeit, spielt es in

meiner Undulationstheorie dieser Strahlen in mehrfacher Hinsicht dieselbe Rolle wie das Verhältnis der Ladung zur Masse eines Elektrons in der Elektronentheorie dieser Strahlen.

Dieses Verhältnis ψ muß für Anoden-, Kanal- und α-Strahlen nach obigem einen positiven, für Kathoden- und β-Strahlen einen negativen Wert haben, entsprechend dem Vorzeichen von $(p_0^2-p^2)$ für diese beiden Strahlengruppen. Ferner ist ψ proportional dem Verhältnis der elektromagnetischen Energie des Strahles zu seiner Gesamtenergie, d. i. der Summe der chemischen Energie und elektromagnetischen Energie desselben. Das Verhältnis ψ ist für Anoden-, Kanal- und α-Strahlen viel kleiner als für Kathoden- und β-Strahlen, weil es nach (241) dem Quadrate der Schwingungszahl proportional ist und weil die chemische Energie der erstgenannten langsamer schwingenden und sich langsamer fortpflanzenden Strahlen nach § 121 viel größer ist.

Das Verhältnis ψ der Kathodenstrahlen und β-Strahlen hoher Schwingungszahl ist von ihrer Schwingungszahl unabhängig, hat also für alle diese wenig gedämpften Strahlen denselben Wert. Es ist für diese Strahlen nach § 124:

$$\frac{E_{1m}}{E_{1m}+E_{2m}} \doteq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{p^2}{p_0^2-p^2} \doteq -1$$

und sonach hat ψ den konstanten Wert:

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{(b_2+b_3)r}{\varepsilon_0 e m}. \tag{242}$$

Dieser ist durch zahlreiche Messungen festgestellt worden. Es ist für wenig gedämpfte Kathodenstrahlen:

$$\psi = -10^{17} \text{ bis } 10^{18} \text{ (C. G. S. elstat.)} \tag{243}$$

und da nach (93) und § 114:

$$\frac{r}{\sqrt{em}} = p_0 = 1 \cdot 83 \times 10^{16},$$

so folgt:

$$\frac{(b_2+b_3)}{\sqrt{em}} \text{ annähernd } = -10^4 \text{ (C. G. S. elstat.)}. \tag{244}$$

LV. Beziehung der Emission der Longitudinalstrahlen zu ihrer ladenden Wirkung.

135. Der kohärente Ladungsstrom $\mathfrak{L}$ aller Longitudinalstrahlen, welche von einer Elektrode, also im starken elektrostatischen Felde ausgestrahlt werden, hat stets die Richtung der positiven Feldstärke $\mathfrak{e}_0$, weil er nach (133) für Anodenstrahlen gleiche, für Kathodenstrahlen entgegengesetzte Richtung wie die Strahlgeschwindigkeit hat. Deshalb wirken diese Elektrodenstrahlen auf das Feld, in welchem sie ausgestrahlt werden, immer entladend. Sie verkleinern die elektrostatische Energie dieses Feldes pro Zeit- und Volumseinheit um den Betrag [vergl. (238)]:

$$\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{e}_0 = -\frac{1}{4} \frac{p^2}{D_1} (b_2 + b_3) r \mathfrak{e}_1^2 \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0 . \tag{245}$$

Dieser Energieverlust kann aber, da das durchstrahlte verdünnte Gas als absolut nicht leitungsfähig und nicht absorptionsfähig vorausgesetzt werden darf, nicht durch eine Erwärmung dieses Mediums kompensiert werden. Die elektrostatische Energie des Feldes muß also durch die Longitudinalstrahlen entführt werden, sie muß sich direkt in erhöhte Strahlungsenergie umsetzen, d. h. die Amplitude des Strahles muß zunehmen, während derselbe das elektrostatische Feld durcheilt, der Strahl muß negative Dämpfung $\varkappa$ in diesem Felde haben, er muß im elektrostatischen Felde »emittiert« werden.

Es ist:

$$\mathfrak{e}_1^2 = \mathfrak{e}_{10}^2 e^{-2\varkappa p \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{r}}, \tag{246}$$

worin $\mathfrak{e}_{10}$ die Amplitude des Strahles für $\mathfrak{r} = 0$ ist. Der mittlere Energieinhalt E_m von Kathodenstrahlen ist nach (223) mit großer Annäherung doppelt so groß als ihre elektrische Energie, da die Energie ihrer chemischen Schwingungen gerade ihrer elektrischen Energie gleich ist. Es ist also:

$$E_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathfrak{e}_1^2 . \tag{247}$$

Dieser Energieinhalt des Strahles muß in einem mit ihm, also mit der Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ fortschreitenden Punkte pro Zeiteinheit um den Betrag $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{e}_0$ zunehmen, also ist:

$$\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{e}_0 = \frac{dE_m}{dt}. \tag{248}$$

In einem ruhenden Punkte des stationär durchstrahlten Feldes ist aber die Energie der Strahlung konstant. Es folgt also nach der Euler'schen Regel:

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathfrak{c}_1\cdot\nabla E_m = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\mathfrak{c}_1\cdot\nabla\mathfrak{c}_1^2. \tag{249}$$

Nach (246) ist:

$$\nabla\mathfrak{c}_1^2 = -2\varkappa p\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{c}_1^2.$$

Führt man dies in (248) ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{e}_0 = -\varepsilon_0\varkappa p\,\mathfrak{c}_1^2. \tag{250}$$

Vergleicht man dies mit (245), so erkennt man, daß:

$$\varkappa = \frac{p(b_2+b_3)r}{4\varepsilon_0 D_1}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_0 \tag{251}$$

sein muß. Aus der ladenden Wirkung $\mathfrak{L}$ der Strahlen und ihrem Energieinhalte folgt also der genaue Wert der negativen Dämpfung $\varkappa$, welche sie im elektrostatischen Felde erfahren müssen, damit das Energieprinzip erfüllt ist. Der so erhaltene Wert (251) der negativen Dämpfung $\varkappa$ ist aber genau derselbe, welchen wir auf gänzlich anderem Wege, nämlich durch direkte Integration der Grundgleichungen unter ausschließlicher Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung in § 112 [Gleichung (197)] erhalten haben. Da der Wert des Ladungsstromes $\mathfrak{L}$ der Strahlen, auf welchen wir nun die Berechnung der negativen Dämpfung derselben im starken Felde gestützt haben, in § 132 aus den bis dahin vernachlässigten Gliedern zweiter Ordnung der Grundgleichungen berechnet wurde, so ist diese Übereinstimmung wertvoll, da sie bestätigt, daß diese Theorie des kohärenten Ladungsstromes der Strahlen, so neuartig sie ist, doch auf solider Grundlage ruht.

Ferner sind wir jetzt über die Energieverwandlungen bei der Emission der Kathodenstrahlen und Anodenstrahlen im starken Kathodengefälle, beziehungsweise Anodengefälle vollkommen unterrichtet.

136. Auch auf die Kanalstrahlen läßt sich diese Betrachtung ohneweiters übertragen. Kanalstrahlen, d. i. zunächst nichts anderes als Strahlen, deren Schwingungszahl kleiner ist als die Eigenschwingungszahl des verdünnten Gases, dürften überall in der ganzen Entladungsröhre, allerdings nur mit äußerst geringer Energie, ausgesendet werden. Ob an der Grenzfläche des Kathodendunkelraumes die Bedingungen für ihr Entstehen günstiger sind, was nicht unwahrscheinlich ist, braucht nicht untersucht zu werden. Die von dort gegen die Kathode gehenden Strahlen kleiner Schwingungszahl sind aber vor allen anderen von dort ausgehenden Strahlen größerer Schwingungszahl oder anderer Richtung bevorzugt und bilden die Kanalstrahlen. Strahlen kleinerer Schwingungszahl werden nämlich, wenn sie in der Richtung der positiven Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ fortschreiten, nach (251) oder (197) negativ gedämpft, d. h. verstärkt oder emittiert.

137. Longitudinalstrahlen, welche im unelektrischen Felde fortschreiten, haben denselben Ladungsstrom, also ladende Wirkung, welche aber, so lange das statische Feld noch sehr schwach ist, ohne merklichen Energieaufwand stattfindet, zufolgedessen haben diese Strahlen auch keine elektrische Dämpfung, sondern nur ihre natürliche positive Dämpfung. Sie werden unter Wärmeproduktion von dem Medium absorbiert.

LVI. Antikathodenstrahlen.

138. Als Antikathodenstrahlen bezeichnen wir Longitudinalstrahlen von derselben kleinen Schwingungsdauer wie die Kathodenstrahlen, welche sich im elektrostatischen Felde in der Richtung der positiven Feldstärke fortpflanzen. Daß diese Kathodenstrahlen umgekehrter Fortpflanzungsrichtung möglich sind, wurde schon in § 115 nachgewiesen, für sie gelten die unteren Vorzeichen der Gleichung (205), welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt. Hiernach

haben aber diese Antikathodenstrahlen im starken Felde außerordentlich kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Wenn sie mit gleicher Amplitude auftreten würden wie ein normaler Kathodenstrahl, so wäre ihr Energieinhalt ganz derselbe, ihr Energietransport, also ihre Wärmewirkung W ist aber nach (239) außerdem der Fortpflanzungsgeschwindigkeit proportional und deshalb haben die Antikathodenstrahlen äußerst kleine Wärmewirkung, sie transportieren sehr wenig Energie.

Hierzu kommt noch, daß sie von ihrem Ursprungsort im Felde gegen die Kathode fortschreitend von den sie eventuell begleitenden Kanalstrahlen bald weit an Energieinhalt übertroffen werden, denn während die langsam schwingenden Kanalstrahlen auf diesem Wege nach § 136 negativ gedämpft, also fortschreitend verstärkt werden, erfahren die Antikathodenstrahlen nach (197) eine starke positive elektrische Dämpfung.

Dennoch müssen diese Strahlen nicht unwichtige Wirkungen haben. Ihr Auftreten ermöglicht es, daß sich auch im ungleichförmigen Felde und inhomogenen Medien durchdringende nicht diffuse Kathodenstrahlen ausbilden können. Es können an Diskontinuitätsflächen des Mediums oder des elektrostatischen Feldes auf keinen Fall die Grenzbedingungen erfüllt sein, wenn nicht außer dem durchdringenden Strahl ein reflektierter Strahl auftreten kann, die reflektierten Strahlen schreiten aber in der umgekehrten Richtung fort und haben gleiche Schwingungszahl wie der direkte Kathodenstrahl, sind also Antikathodenstrahlen. Gleichzeitig erkennt man aber, warum man diese notwendig vorhandenen reflektierten Strahlen für gewöhnlich gar nicht bemerkt. Die Ursache hiervon ist der äußerst geringe Energietransport, welchen diese Strahlen ihrer kleinen Fortpflanzungsgeschwindigkeit wegen haben.

Aber diese Strahlen erfüllen nicht bloß die Grenzbedingungen, sondern eine ihrer Wirkungen muß gerade wegen ihrer äußerst kleinen Fortpflanzungsgeschwindigkeit sehr ausgiebig sein, und zwar ihre ladende Wirkung. Der kohärente Ladungsstrom $\mathfrak{L}$ ist nach (238) der Fortpflanzungs-

geschwindigkeit verkehrt proportional, also gerade für diese reflektierten Kathodenstrahlen auch dann, wenn sie kleine Amplitude haben, sehr stark.

139. Außerdem dürften an solchen Diskontinuitätsflächen die Anregungsbedingungen für die Aussendung von Kanalstrahlen gegeben sein, welche gleiche Fortpflanzungsrichtung, aber den umgekehrten Ladungsstrom haben wie die Antikathodenstrahlen. Da auch der einfallende und der durchdringende Kathodenstrahl verschiedene Geschwindigkeit haben, muß sich eine solche Diskontinuitätsfläche des Feldes fortschreitend aufladen oder entladen, wodurch entweder die Diskontinuität der Geschwindigkeit des direkten Strahles stets verringert und schließlich aufgehoben wird, oder die Diskontinuität des Feldes fortschreitend verstärkt wird, wobei sich aber schließlich zufolge der stets stärkeren Reflexion von Antikathodenstrahlen oder stets stärkeren Aussendung von Kanalstrahlen ein stationärer Endzustand einstellen muß. Nach Erreichung desselben bewahrt die Diskontinuitätsfläche weiterhin ihre hohe Ladung, d. h. es fließt durch dieselbe ein kontinuierlicher Ladungsstrom.[1]

Wir begnügen uns, das wichtigste Beispiel der Fortpflanzung eines Kathodenstrahles im inhomogenen elektrischen Felde zu untersuchen, um das Auftreten stationär geladener Diskontinuitätsflächen mitten im homogenen Medium aufzuweisen.

LVII. Ausbildung des Kathodendunkelraumes.

140. Da wir nun die ladenden Wirkungen der Kathodenstrahlen kennen, so kann versucht werden, die Ausbildung des starken Potentialgefälles an der Kathode, welches doch nur

[1] Um diesen Vorgang exakt darzustellen, müßte man die Fortpflanzung der Longitudinalstrahlen in sehr inhomogenen elektrostatischen Feldern berechnen. Hierbei wäre zu berücksichtigen, daß die von der Inhomogenität $\nabla, \mathfrak{e}_0$ des Feldes herrührenden Anteile der elektrochemischen Dyaden $a\nabla, \mathfrak{e}_0$ und $b\nabla, \mathfrak{e}_0$ merkliche kohärente Schwingungen ausführen müssen, da die Kuppelkonstanten a und b sich jedenfalls, wenn auch in äußerst geringem Maße an den kohärenten chemischen Schwingungen des Strahles beteiligen.

eine Folge der ladenden Wirkung der Kathodenstrahlen sein kann, zu berechnen.

Wenn die Kathode negativ geladen ist, ohne daß noch Kathodenstrahlen angeregt werden, so ist ihr statisches Feld, weil die Kraftlinien desselben divergieren, in der Nähe der Kathode etwas stärker als in größerer Entfernung von derselben. Wenn man nun Kathodenstrahlen anregt, so verlaufen dieselben in der Nähe der Kathode in einem etwas stärkeren Felde, haben also nach (205) größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit und führen deshalb nach (238) einen schwächeren Ladungsstrom mit sich als in größerer Entfernung von der Kathode, wo sie ein etwas schwächeres Feld finden und einen stärkeren kohärenten Ladungsstrom haben.

Dieser Unterschied des Kathodenraumes und des kathodenfernen Feldes wird anfänglich sehr klein sein, aber er muß sich mit Notwendigkeit bei längerer Dauer der Strahlung bis ins Extreme verstärken.

Der Ladungsstrom hat negative Richtung, d. h. er transportiert in der Strahlrichtung negative Ladung. Da er in der Nähe der Kathode etwas schwächer ist als in größerer Entfernung von derselben, so muß sich die mittlere Schicht des Mediums positiv laden. Dies verstärkt aber den Unterschied der statischen Feldstärke vor und hinter der positiven Schicht, damit wird der Ladungsstrom im Kathodenraum noch schwächer, im kathodenfernen Felde noch stärker, so daß sich die Ladung der positiven Schicht stets weiter verstärkt. Dieser Vorgang geht weiter, bis das kathodenferne Feld fast ganz ausgeladen ist und durch die bekannte scharf entwickelte positive Grenzschicht mitten im verdünnten Gase von dem starken Felde im Kathodenraume getrennt ist, und findet erst sein Ende, wenn durch die entgegengesetzt ladende Wirkung der mit der Verschärfung der positiven Grenzschicht rasch intensiver werdenden Gegenstrahlung ein stationärer Ladungszustand dieser Schicht herbeigeführt wird, dem ein bestimmtes Strahlungsgleichgewicht entspricht.

Diese Gegenstrahlung besteht zum Teil aus den Kanalstrahlen, welche in dieser Grenzschichte angeregt werden, zum Teil aber auch aus Antikathodenstrahlen.

141. Die Lumineszenz des durchstrahlten Gases wird durch die kohärenten chemischen Schwingungen des Kathodenstrahles angeregt. Die Amplitude der chemischen Schwingungen ist aber bei gegebener Schwingungszahl und gegebener elektrischer Amplitude des Strahles nach (218) der reziproken Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{n}$ des Strahles proportional. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Kathodenstrahles in dem starken Kathodengefälle weit größer ist als außerhalb der positiven Grenzschicht in dem fast unelektrischen kathodenfernen Felde, müssen die chemischen Schwingungen des Strahles und damit die Lumineszenz des verdünnten Gases im kathodenfernen Felde viel größer sein. Der Kathodenraum bleibt dunkel und hebt sich scharf ab von dem stark lumineszierenden kathodenfernen Felde. Die Grenzfläche, welche das blaue Lumineszenzgebiet von dem Dunkelraume trennt, fällt bekanntlich mit der positiv geladenen Grenzschicht des Kathodengefälles zusammen.

LVIII. Emissionspotential, Ladungsstrom und Wärmewirkung.

142. Die Kathodenstrahlen oder Anodenstrahlen verlassen die Elektrode mit äußerst geringer Amplitude und sammeln ihren Energieinhalt erst in dem elektrischen Felde, in welchem sie negativ gedämpft sind und dem sie diese Energie zufolge ihrer entladenden Wirkung entziehen, wie in § 135 zur Evidenz nachgewiesen wurde. Der Ladungsstrom $\mathfrak{L}$, welcher einen solchen Strahl im inhomogenen elektrostatischen Felde begleitet, ist anfänglich keineswegs in der ganzen Erstreckung des Strahles konstant, doch wird er es bei längerer Dauer der Strahlung, wie in den vorhergehenden Kapiteln ausgeführt wurde, es wird unter der Mitwirkung der sich allmählich verstärkenden Gegenstrahlung ein stationärer Ladungszustand des durchstrahlten verdünnten Gases hergestellt.

Es sei $\mathfrak{L}_0$ der resultierende konstante Ladungsstrom des Strahles, derselbe setzt sich zusammen aus den kohärenten Ladungsströmen von Longitudinalstrahlen und bewirkt also nicht so wie ein Leitungsstrom eine Erwärmung des durchströmten Mediums. Deshalb muß der ganze Verlust an elektro

statischer Energie des Feldes sich nach § 135 in Strahlungsenergie des direkten Strahles umsetzen, da die Gegenstrahlung nach § 138 sehr wenig Energie transportiert. Die Wärmewirkung W des Strahles muß sich also bestimmen durch:

$$W = \mathfrak{L}_0 V. \qquad (252)$$

Hierin ist V das Emissionspotential, d. i. die Potentialdifferenz jenes Querschnittes des Strahles, in welchem man seine Wärmewirkung bestimmt gegen die Elektrodenoberfläche, wobei vorausgesetzt ist, daß der Strahl die Elektrode ohne merkliche Energie verläßt.

Alle drei durch die Gleichung (252) vereinigten Werte sind direkt meßbar, die Gültigkeit dieser Beziehung wurde von J. J. Thomson, Seitz u. a. experimentell nachgewiesen.

Aber diese Gleichung folgt aus meiner Theorie nicht geradezu unbedingt, sondern setzt die Erreichung des stationären Ladungszustandes des Feldes, also die Konstanz von $\mathfrak{L}_0$ voraus und so ist es ganz erklärlich, daß Ausnahmen stattfinden können, welche unter besonderen Bedingungen nach Seitz[1] bis zu Abweichungen von 20% ansteigen können.

LIX. Emissionspotential und Strahlgeschwindigkeit.

143. Es ist bekannt, daß mit erhöhtem Emissionspotential die Geschwindigkeit der emittierten, in das unelektrische Feld austretenden Kathodenstrahlen steigt. Nach meiner Theorie ist aber die Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ der Strahlen im unelektrischen Felde ausschließlich durch die Materialkonstanten des durchstrahlten Gases und durch die Schwingungsdauer der Strahlen bestimmt. Es handelt sich also um einen Einfluß der Emissionsbedingungen auf die ausgesendeten Schwingungszahlen, also um das Verschiebungsgesetz der Emission der Kathodenstrahlen. So wie bei steigender Temperatur das Maximum der Emission des Glutlichtes sich im Spektrum verschiebt, und zwar in dem Sinne, daß die chemische Energie der ausgesendeten Strahlen immer größer im Vergleich zu ihrer elektromagnetischen Energie wird, so verschiebt sich bei

[1] Ann. d. Phys., Bd. 8, p. 239 (1902).

steigendem Emissionspotential das Maximum der Emission im Spektrum der Kathodenstrahlen, und zwar zu den kleineren Schwingungszahlen, also wieder so, daß bei kräftigerer Emission die chemische Energie der ausgesendeten Strahlen im Vergleiche zu ihrer elektrischen Energie immer größer wird.

Um dieses Emissionsgesetz abzuleiten, gehen wir von der sehr wahrscheinlichen Annahme aus, daß die emittierte Strahlung, sobald sie einmal in das unelektrische Feld ausgetreten ist, nicht mehr von einer Gegenstrahlung überdeckt ist. Man wüßte tatsächlich nicht, woher eine solche Gegenstrahlung hier entspringen sollte, wenn man sich das unelektrische Feld, in dem der Strahl fortschreitet, unbegrenzt denkt. Dann muß der kohärente Ladungsstrom $\mathfrak{L}$ des Strahles gleich sein dem konstanten Ladungsstrom $\mathfrak{L}_0$ des Strahlungsgleichgewichtes im emittierenden elektrischen Felde. Dieser kohärente Ladungsstrom $\mathfrak{L}$ steht aber zu der Wärmewirkung W des Strahles in der allgemein gültigen Beziehung (241), wonach:

$$W\psi = \mathfrak{c}_1^2 \mathfrak{L} \tag{253}$$

ist. Aus (252) folgt also:

$$\mathfrak{c}_1^2 = \psi V. \tag{254}$$

Das Quadrat der Strahlgeschwindigkeit ist dem Emissionspotential proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist eben jenes charakteristische Verhältnis

$$\psi = \frac{(b_2+b_3)r}{\varepsilon_0 e m} \cdot \frac{p^2}{p_0^2-p^2} \cdot \frac{E_{1m}}{E_{1m}+E_{2m}} \tag{255}$$

der Strahlenart, dessen Wert für die verschiedenen Strahlengruppen in § 134 angegeben wurde.

Es erklären sich hierdurch auch die recht beweiskräftigen Versuche von Des Coudres und Lenard über die Beschleunigung, beziehungsweise Verzögerung der Kathodenstrahlen durch ein longitudinal wirkendes elektrostatisches Feld.

Eine direkte unabhängige Bestätigung der genauen Form von (254) müßte sich auf die Bestimmung der Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ nach der Kaufmann'schen Methode (§ 158) und auf

die Messung von ψ durch Bestimmung des Verhältnisses der ladenden zur Wärmewirkung des Strahles stützen, ist aber noch erschwert durch die große Inhomogenität der Strahlung.

LX. Größe des normalen Kathodengefälles.

144. Wenn das Emissionspotential sehr klein ist, so werden Strahlen sehr kleiner Geschwindigkeit emittiert, die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen im unelektrischen Felde wird aber nach (162) bestimmt durch:

$$\mathfrak{c}_1^2 = -\frac{u_1+u_2}{\varepsilon_0 e m} \cdot \frac{p^2}{p_0^2-p^2},$$

nimmt also ab, wenn die Schwingungszahl p des Strahles zunimmt. Bei kleinem Emissionspotential werden also Kathodenstrahlen sehr hoher Schwingungszahl emittiert. Für diese gilt aber mit hinreichender Annäherung:

$$\mathfrak{c}_1^2 = +\frac{u_1+u_2}{\varepsilon_0 e m}. \tag{256}$$

Aber auch das Verhältnis ψ dieser Strahlen ist nach (242) konstant und hat den Wert:

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\frac{(b_2+b_3)r}{\varepsilon_0 e m}. \tag{257}$$

Setzt man dies in die Emissionsgleichung (254) ein, so ergibt sich merkwürdigerweise:

$$V_0 = \frac{2(u_1+u_2)}{(b_2+b_3)r}. \tag{258}$$

Die Emission der Kathodenstrahlen kann erst bei dieser unteren Grenze des Emissionspotentials beginnen.

Man kann im allgemeinen das Emissionspotential V frei wählen und es bestimmt sich dann nach der Emissionsgleichung (254) die Schwingungszahl des Maximums der Strahlung. Wenn aber die ganze Strahlung noch hohe Schwingungszahlen hat, so fallen diese aus der Emissionsgleichung ganz heraus, woraus folgt, daß man das Emissions-

potential nicht mehr frei wählen kann, wenn dasselbe sehr klein ist, sondern daß es dann, damit die Strahlung auftreten kann, mindestens einen bestimmten, nur von den Materialkonstanten des durchstrahlten Gases abhängenden Wert haben muß.

Auch diese äußerste Konsequenz des Emissionsgesetzes (254) bestätigt sich. Wenn das Emissionspotential sehr klein ist, dann ist es nichts anderes als die Potentialdifferenz des Kathodendunkelraumes, denn schon nach dem Durchtritte durch die positiv geladene Grenzschicht dieses Raumes sind diese schwachen Strahlen im fast unelektrischen Felde und nahezu frei von einer Gegenstrahlung, also die Gleichungen (254) und (258) anwendbar.

Die Potentialdifferenz des Kathodendunkelraumes, welche man auch das Kathodengefälle nennt, muß für eine schwache Strahlung nach (258) einen von der Amplitude und Schwingungszahl der emittierten Strahlen unabhängigen, nur von den Materialkonstanten des durchstrahlten Gases abhängenden Wert haben. Dies ist tatsächlich der Fall, so lange die Strahlung so schwach ist, daß das negative Glimmlicht die Kathode noch nicht ganz bedeckt.

Allerdings beeinflußt nicht nur die chemische Natur des durchstrahlten Gases, sondern auch das Material der Kathode den Wert des normalen Kathodengefälles beträchtlich, aber es ist bekannt, daß die Kathode während der Strahlung okkludierte Gase entbindet, wodurch sich der Einfluß ihres Materials erklären mag, um so mehr als bekanntlich schon sehr geringe Verunreinigungen des durchstrahlten Gases, insbesondere durch Sauerstoff, einen großen Einfluß auf das Kathodengefälle haben.

Man gewinnt hierdurch auch einen Anhaltspunkt zur Bestimmung der unteren Grenze der Strahlgeschwindigkeit [siehe Gleichung (256)], die asymptotisch erreicht wird, wenn die Schwingungszahl der Kathodenstrahlen unbegrenzt steigt.

In einem Gase, in welchem das normale Kathodengefälle 1 C. G. S. (elektrisches Maß) beträgt und in welchem $\psi_0 = -5 \cdot 10^{17}$

ist, ergibt sich als die untere Grenze der Geschwindigkeit jener Kathodenstrahlen, deren Schwingungszahl größer ist als die Eigenschwingungszahl des Gases, nach (254):

$$\mathfrak{c}_1 = 7 \cdot 10^8 \, (cm/\text{sec}^{-1}) = 0{\cdot}023 \text{ der Lichtgeschwindigkeit}$$

und hieraus nach (256):

$$\frac{u_1 + u_2}{em} = 4 \cdot 10^{16}.$$

Es gibt aber eine zweite Gruppe von Kathodenstrahlen, deren Schwingungszahlen kleiner als jene des Lichtes sind und deren Geschwindigkeiten bis Null sinken können.

LXI. Der kohärente Ladungsstrom des Lichtes.

145. In § 111 wurde nachgewiesen, daß der einzige Einfluß, welchen ein starkes elektrostatisches Feld auf einen in einem Gase sich fortpflanzenden Lichtstrahl hat, darin besteht, daß dieser Lichtstrahl eine positive oder negative Dämpfung erfährt, welche der Größe und dem Vorzeichen nach der longitudinalen Komponente der Feldstärke $\mathfrak{e}_0$ proportional ist und keineswegs von der Absorptionsfähigkeit des Gases abhängt. Diese elektrische Dämpfung des Lichtes hat nach (193) den Wert:

$$\varkappa = \frac{b_2 r p}{4 \varepsilon_0 D_1} \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_0, \tag{259}$$

ist also durch ein ganz ähnliches Gesetz bestimmt wie die uns bereits wohlverständliche elektrische Dämpfung der Longitudinalstrahlen. Jedoch ist die elektrische Dämpfung des Lichtes außerordentlich klein, da sie durch die Kuppelkonstante b_2 bestimmt wird, welche die asymmetrischen Änderungen von ε bestimmt und also viel kleiner sein muß als die Kuppelkonstante b_3, welche die isotropen Änderungen von ε bestimmt und welcher die elektrische Dämpfung der Longitudinalstrahlen proportional ist. Das Vorzeichen beider Kuppelkonstanten ist in allen Gasen, soviel ich erkennen kann, dasselbe, es ist also nach (203) $b_2 r < 0$. Da die Dispersion der Gase nach (108) und (84) proportional b_2^2 ist, dürfte cet. par. die elektrische Dämpfung mit der Dispersion des Gases wachsen.

Da ferner die Determinante $D_1 = em(p_0^2 - p^2)$ für Licht positiv ist, ist die elektrische Dämpfung des Lichtes positiv, wenn dasselbe im stumpfen Winkel gegen die elektrostatische Feldstärke (gegen die positive Elektrode) fortschreitet, aber negativ bei umgekehrter Fortpflanzungsrichtung im Felde.

Da wir voraussetzen dürfen, daß das Gas keine merkliche Absorptionsfähigkeit hat, so kann in demselben keine Wärme produziert werden und es kann also die zufolge der elektrischen Dämpfung des Lichtes auftretende Änderung der Energie des Strahles nur durch eine Änderung der elektrostatischen Energie des Feldes aufgewogen werden. Das Licht muß also in Gasen ebenso wie die Longitudinalstrahlen einen kohärenten Ladungsstrom $\mathfrak{L}$ mit sich führen und es gilt (248) und (250):

$$\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{e}_0 = \frac{dE_m}{dt} = -\varepsilon_0 \varkappa p \mathfrak{e}_1^2. \qquad (260)$$

Führt man nun aber den Wert (259) der elektrischen Dämpfung des Lichtes ein, so erhält man aus (260) den Wert des kohärenten Ladungsstromes des Lichtes:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}\frac{p^2}{D_1} b_2 r \mathfrak{n} \mathfrak{e}_1^2. \qquad (261)$$

Dieser Wert stimmt genau überein mit dem in § 133 auf gänzlich anderem Wege berechneten Ladungsstrome (237) beliebiger Strahlen in Gasen. Für transversale Strahlen ist in (237) $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1 = 0$ zu setzen, wodurch diese Gleichung in (261) übergeht.

Die Größe des kohärenten Ladungsstromes des Lichtes hängt nicht ab von dem elektrostatischen Felde; jeder Lichtstrahl wird von dem Ladungsstrome (261) begleitet und dieser Strom hat stets die Richtung des Strahles. Jeder Lichtstrahl hat also eine nur von seiner Amplitude und Schwingungsdauer und den Materialkonstanten (besonders der Dispersionskonstante) des durchstrahlten Gases abhängende positiv ladende Wirkung.

Die ladende Wirkung des Lichtes nimmt nach (261) sehr rasch mit der Schwingungszahl desselben zu, ist also für ultraviolettes Licht am stärksten.

Hiermit mögen manche der geringen positiv ladenden Wirkungen des Lichtes erklärt sein, die man beobachtet hat. Die Entladung negativer Elektroden durch Licht ist aber weitaus stärker und kann deshalb nur zum kleinen Teile durch den kohärenten Ladungsstrom des Lichtes erklärt werden. Diese zweite entladende Wirkung des Lichtes läßt sich aber von der Wirkung des kohärenten Ladungsstromes sehr gut unterscheiden, wobei das tatsächliche Vorhandensein des geringen kohärenten Ladungsstromes des Lichtes in Dämpfen der Alkalimetalle evident wird. Die Erörterung dieser Beobachtungen verschieben wir auf das nächste Kapitel.

Nur eine absorbierende, nicht aber eine vollkommen reflektierende Fläche erfährt eine Ladungsänderung durch den kohärenten Ladungsstrom des einfallenden Lichtes, da bei vollkommener Reflexion der reflektierte Strahl einen ebenso großen Ladungsstrom von der bestrahlten Fläche wegführt.

Ein selbstleuchtender Körper muß sich zufolge des positiven, das ausgestrahlte Licht begleitenden Stromes negativ laden, vorausgesetzt, daß er nicht β-Strahlen emittiert. Jedenfalls kann die negative Ladung nicht ins Unbegrenzte ansteigen, da das entstandene negative Feld sehr bald hinreichend starke Kathodenstrahlen emittiert, welche an der Oberfläche des glühenden Körpers Anregung finden und im elektrostatischen Felde desselben ausstrahlend negativ gedämpft sind, so daß sie die hinreichende Intensität erhalten, um eine stationäre negative Ladung des leuchtenden Körpers herbeizuführen.

In großartigem Maßstabe muß dieser Vorgang bei selbstleuchtenden Himmelskörpern sich abspielen. Zwar ist die Dispersion des Weltäthers nahezu Null und also der kohärente Ladungsstrom des Sonnenlichtes im Weltraum mit ebenso großer Annäherung gleich Null, immerhin könnte die negative Ladung der Sonne damit erklärt werden, welche sich kenntlich macht durch die Abstoßung der Kometenschweife, welche vielleicht Kathodenstrahlen sind, die von den in § 131 berechneten Gasfackeln begleitet sind. Wichtiger ist die starke elektrische Doppelschicht, welche sich in der äußeren Sonnenatmosphäre bilden muß. In der Koronaschicht der Sonne dürften die Metalldämpfe dicht genug sein, um einen merklichen

kohärenten Ladungsstrom des dort sehr intensiven Sonnenlichtes zu bewirken. Es muß sich also die Sonnenoberfläche negativ laden, die äußere Oberfläche der Koronaschicht muß sich fast ebenso stark positiv laden. Dieses Feld wird wieder stationär gehalten durch die Kathodenstrahlen, welche von der Sonnenoberfläche emittiert und wieder von Gasfackeln begleitet werden müssen und als welche man die Strahlen der Sonnenkorona ansprechen könnte.

Auch auf die atmosphärische Elektrizität der Erde könnte der kohärente Ladungsstrom des Sonnenlichtes Einfluß haben.

LXII. Entladung durch polarisiertes Licht.

146. In einer meiner ersten Mitteilungen[1] habe ich das Entladungsgesetz aufgestellt: Schwingungen der elektrischen Kraft, welche in der Elektrodennormalen stattfinden, sind eine wesentliche Vorbedingung des Auftretens der Entladung und der Kathodenstrahlen. Ihre Wirksamkeit wächst mit ihrer Amplitude, mit ihrer Schwingungszahl und mit der Stärke des elektrostatischen Feldes an der Elektrode. Die entladende Wirkung des Lichtes hängt zusammen mit der Anregung von Kathodenstrahlen durch dasselbe und ist nur ein spezieller Fall der hier betrachteten allgemeineren Erscheinung. Auch durch Bestrahlung mit Hertz'schen Strahlen, ja auch durch Zuleitung von Drahtwellen zur Elektrode kann man die Entladung fördern.

Daß meine Auffassung dieser Erscheinungen richtig ist, wird dadurch bestätigt, daß sie sich als Grundlage meiner Theorie bewährt hat (vergl. diese Sitzber., CXVI, p. 392). Da mein Entladungsgesetz noch immer nicht Beachtung findet, gestatte ich mir, hier ein entscheidendes Experiment in Erinnerung zu bringen, welches vollkommen rein und sehr leicht anzustellen ist:

Man verzweigt den Strom einer gleichmäßig gedrehten Influenzmaschine und schaltet in die beiden Zuleitungen je eine Funkenstrecke von 1 *mm* Elektrodendistanz, in die beiden parallelgeschalteten Zweige aber die zu vergleichenden Funken-

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCVII, p. 765 (1888).

strecken, von welchen die eine eine negative Elektrode mit 1 *mm* Krümmungsradius und eine positive Elektrode von 10 *mm* Radius, die zweite Funkenstrecke aber umgekehrt eine positive Elektrode von 1 *mm* und eine negative Elektrode von 10 *mm* Krümmungsradius hat. Man stellt die Elektrodendistanzen so ein, daß sich der Funkenstrom einigermaßen gleichmäßig auf diese zwei nebeneinandergeschalteten Funkenstrecken verteilt. Man hat hier zwei verzweigte Drahtsysteme auf beiden Seiten dieser Funkenstrecken, in welchen elektrische Oszillationen sich etablieren, welche eben die anregenden elektrischen Schwingungen in den Elektrodennormalen liefern. Diese anregenden Schwingungen haben aber an den Oberflächen der stärker gekrümmten Elektroden größere Wirkung, weil dort die elektrostatische Feldstärke größer ist. Verlangsamt man nun die Oszillationen des einen Drahtsystems durch Anlegen einer kleinen Kapazität an irgend einem Punkte desselben, so wird hierdurch die Anregung jener der parallelgeschalteten Funkenstrecken in höherem Maße herabgesetzt, deren stärker gekrümmte Kugel an das mit der Kapazität belastete Drahtsystem angeschlossen ist. Der Funkenstrom verläßt diese Funkenstrecke vollkommen und geht ganz auf die andere Funkenstrecke über. Dieses Experiment ist so überzeugend, daß mein Entladungsgesetz unbestreitbar ist, so lange nicht eine andere Erklärung für dieses Experiment gefunden wird.

147. Auf Grund meines Entladungsgesetzes habe ich 1892 vorausgesagt,[1] daß nur jene Komponente der elektrischen Schwingungen eines polarisierten Lichtstrahles Einfluß auf die Entladung haben kann, welche in die Einfallsebene fällt. Ich gab Versuche über die entladende Wirkung polarisierten ultravioletten Lichtes, welche ich bereits begonnen hatte, auf, als die Nachricht eintraf, daß es Elster und Geitel (1894, Berl. Akad., 6) gelungen war, diesen von mir vorausgesagten Einfluß der Polarisationsrichtung nachzuweisen.

Diesen schönen experimentellen Erfolg verdanken Elster und Geitel bekanntlich der Anwendung von Alkalimetall-

[1] Vergl. Wied. Ann., *55*, p. 658.

elektroden, während ich bis dahin den Einfluß des Elektrodenmaterials nicht beachtet hatte.

Nach Elster und Geitel ist der lichtelektrische Strom J cet. par. dem Quadrate der Amplitude des Lichtes proportional und hängt nach dem Gesetz:

$$J = C\cos^2\alpha + B \tag{262}$$

von dem Azimut α der elektrischen Schwingungsebene des einfallenden Lichtes gegen die Einfallsebene ab. Wäre B gleich Null, so hätte also tatsächlich nur jene Komponente der elektrischen Schwingung des Lichtes Einfluß auf die Entladung, welche in die Elektrodennormale fällt.

Es ist eine Abweichung von meiner Voraussage vorhanden, welche bei variablem Azimut, aber konstantem Einfallswinkel den konstanten Wert B hat. Da diese Abweichung B desto größer ist, je kleiner der Einfallswinkel ist, schloß ich hieraus,[1] daß das Licht in verdünnten Gasen eine longitudinale Schwingungskomponente habe. Diese Annahme war sehr anregend, erwies sich aber als unzulässig. Das Licht hat nur in elektrisch doppelbrechenden Medien eine longitudinale Komponente (vergl. § 99).

148. Die neue Form meiner Theorie erklärt aber die Abweichung B von meinem Entladungsgesetz ohne jede willkürliche Annahme. Das in Gasen stets rein transversale Licht führt einen kohärenten positiven Ladungsstrom mit sich. Da es von der Elektrode nicht vollkommen reflektiert wird, so ist der Ladungsstrom des einfallenden Lichtes größer als der des reflektierten Lichtes und die Kathode wird entladen. Diese zweite Art der Entladung durch Licht ist proportional dem Kosinus des Einfallswinkels i, wenn man absieht von der Verschiedenheit des Reflexionsvermögens bei verschiedenem Einfallswinkel, also muß B dem $\cos i$ proportional sein. Das Quadrat der in die Elektrodennormale fallenden Komponente der elektrischen Schwingung des Strahles ist hingegen dem $\sin^2 i$ proportional. Tatsächlich ergibt sich aus

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIV, p. 790.

den Beobachtungen von Elster und Geitel, daß mit hinreichender Annäherung:

$$\frac{B}{C} = 0\cdot05 \cdot \frac{\cos i}{\sin^2 i}. \qquad (263)$$

Die folgende Tabelle gibt die für verschiedene Einfallswinkel beobachteten Konstanten C und B des Gesetzes (262), das beobachtete und das nach (263) berechnete Verhältnis $\frac{B}{C}$.

Einfallswinkel	70°	66°	40°	23°
C	146·4	140·0	154·2	68·7
B	3·2	4·0	7·1	28·1
$\frac{B}{C}$ beobachtet	0·022	0·028	0·046	0·410
$\frac{B}{C}$ berechnet	0·019	0·025	0·098	0·300

Die Übereinstimmung ist so gut, als man erwarten darf, da die Beobachtungen bei verschiedenem Einfallswinkel nicht auf Vergleichbarkeit eingerichtet waren, wie man aus dem unregelmäßigen Gang der Konstanten C und B ersieht.

149. Nur die kleine Wirkung B des kohärenten Ladungsstromes des Lichtes folgt exakt aus den Grundgleichungen meiner Theorie. Die von der Richtung der Lichtschwingungen abhängende Lichtwirkung, welche mein Entladungsgesetz ausspricht, dürfte mit der Anregung von Kathodenstrahlen durch das von der Alkalimetallelektrode absorbierte Licht zusammenhängen. Die Kuppelung der elektrischen Schwingungen des Lichtes und der ausgesendeten Kathodenstrahlen muß aber hier eine sehr direkte sein, wie man eben an dem großen Einflusse der Schwingungsrichtung des Lichtes erkennt, so daß dieser Vorgang unter allen anderen anregenden Wirkungen der Strahlen (Ionisierung durch Bestrahlung, Fluoreszenz etc.) am besten der weiteren theoretischen Untersuchung zugänglich sein dürfte.

Es ist hervorzuheben, daß meine Erklärung der Versuche von Elster und Geitel die einzige ist, welche existiert. Die theoretischen Auseinandersetzungen von Elster und Geitel selbst[1] enthalten den wertvollen Hinweis auf den Einfluß der Absorption durch das Kathodenmetall, ihre Auseinandersetzungen über den Einfluß der Schwingungsrichtung des Lichtes sind aber völlig wertlos.

LXIII. Auftreten transversaler Schwingungen in Longitudinalstrahlen.

149. Wenn ein transversales elektrostatisches Feld oder magnetostatisches Feld vorhanden ist oder bei schiefer Fortpflanzung gegen die statischen Feldstärken nehmen die Longitudinalstrahlen geringe elektrische und magnetische Transversalschwingungen an, welche wir bisher nicht berechnet haben, weil dieselben keinen Einfluß auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dämpfung dieser Strahlen haben. In erster Annäherung haben sie also keinen Einfluß, doch haben sie einen nicht unwichtigen Einfluß auf die in zweiter Annäherung zu berücksichtigenden Größen.

Die transversale elektrische Schwingung der Longitudinalstrahlen berechnet sich aus (172). Die reellen Glieder dieser Gleichung ergeben:

$$\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_1 = \frac{p^2}{2\varepsilon_0 D_1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{k}^2}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1\cdot \left(\frac{c_0}{\mu_0}\left(b_3 e + \frac{2\nu a_3 s}{p^2}\right)\mathfrak{m}_0 + a_3 m(\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_0)\right). \tag{264}$$

Der imaginäre Teil von (172) ergibt:

$$\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_2 = -\frac{p}{2\varepsilon_0 D_1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{k}^2}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1\cdot \left(\frac{c_0}{\mu_0}(a_3 s - 2\nu b_3 e)\,\mathfrak{m}_0 + b_3 r(\mathfrak{c}\times\mathfrak{e}_0)\right). \tag{265}$$

---

[1] Elster und Geitel, Wied. Ann., *61*, p. 461.

Hierin wurde der Einfachheit wegen angenommen, daß die elektrostatische und magnetostatische Feldstärke transversal sind, welchen Fall wir im folgenden stets untersuchen. Die transversalen elektrischen Schwingungen des Longitudinalstrahles sind also mit den longitudinalen nicht gleichphasig. Das Auftreten der transversalen elektrischen Schwingungen bewirkt aber auch das Auftreten transversaler magnetischer Schwingungen. Nach (165) ist:

$$\mu_0 D_1 \mathfrak{m}_1 - \frac{1}{2}(b_3 e p^2 + 2\nu a_3 s)\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 \mathfrak{m}_0 = c_0 D_1 \mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_1, \tag{266}$$

$$\mu_0 D_1 \mathfrak{m}_2 + \frac{1}{2}(a_3 s - 2\nu b_3 e) p\, \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1 \mathfrak{m}_0 = c_0 D_1 \mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_2. \tag{267}$$

Führt man die Werte (264) und (265) ein, so erhält man schließlich für die Amplituden der transversalen magnetischen Schwingungen der Longitudinalstrahlen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_1 = \frac{p^2}{2\varepsilon_0\mu_0 D_1}\cdot\frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1\,. \\ .\left(\left(b_3 e + \frac{2\nu a_3 s}{p^2}\right)\varepsilon_0 \mathfrak{m}_0 + a_3 m c_0(\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_0)\right), \end{aligned} \tag{268}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_2 = -\frac{p}{2\varepsilon_0\mu_0 D_1}\cdot\frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{c}^2-\mathfrak{t}^2}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1\,. \\ .((a_3 s - 2\nu b_3 e)\varepsilon_0 \mathfrak{m}_0 + b_3 r c_0(\mathfrak{n}\times\mathfrak{e}_0))\,. \end{aligned} \tag{269}$$

In diesen Gleichungen drückt sich der ganze Einfluß aus, welchen transversale statische Feldstärken $\mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{m}_0$ auf Longitudinalstrahlen haben.

LXIV. Der kohärente elektrische Wirbel der Longitudinalstrahlen im transversalen Felde.

150. Nach (268) und (269) bewirkt ein transversales Feld das Auftreten transversaler magnetischer Schwingungen des Longitudinalstrahles, welche die komplexe Amplitude $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_1 + i\,\mathfrak{m}_2$ haben und zusammen mit den kohärenten Schwingungen der diamagnetischen Dyade μ die elektromagnetische Grundgleichung (II) in erster Annäherung erfüllen.

Die magnetochemischen Verschiebungs- und Leitungsströme:

$$[\mu]\cdot\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot\mathfrak{m}+\nu\bar{\mu}\cdot\mathfrak{m}=-c_0 \operatorname{rot}\mathfrak{e} \qquad (270)$$

haben jedoch, wenn man auch jene Glieder berücksichtigt, welche Produkte der Variablen darstellen, also von zweiter Ordnung klein sind, in aufeinanderfolgenden halben Wellenlängen nicht genau entgegengesetzte Werte, ihr Mittelwert ist nicht Null, sondern bedingt das Auftreten eines konstanten kohärenten elektrischen Wirbels rot $\mathfrak{e}_0$, welcher die wichtigste Änderung darstellt, die der Longitudinalstrahl durch das transversale Feld erfährt.

Die Berechnung dieses konstanten kohärenten elektrischen Wirbels wird genau so geführt wie die Berechnung des konstanten kohärenten magnetischen Wirbels (§ 132), welcher die Longitudinalstrahlen als ihr Ladungsstrom stets begleitet. Wir berücksichtigen, daß die komplexen Amplituden der Strahlvariablen folgende Werte haben:

Variable	Reeller Teil der Amplitude	Imaginärer Teil der Amplitude
$[\bar{\mu}]$	$\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_{1c})$	$i\cdot\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_{2c})$
$\frac{\partial \mu}{\partial t}$	$p\mu_2$	$i\cdot(-p\mu_1)$
$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{m}_1$	$i\cdot\mathfrak{m}_2$
$\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t}$	$p\mathfrak{m}_2$	$i\cdot(-p\mathfrak{m}_1)$

Nach (214) hat also der konstante elektrische Wirbel der Longitudinalstrahlen den Wert:

$$c_0 \operatorname{rot}\mathfrak{e}_0=\frac{1}{4}p(\mu_{2c}\cdot\mathfrak{m}_1-\mu_{1c}\cdot\mathfrak{m}_2)-\frac{1}{2}\nu(\mu_1\cdot\mathfrak{m}_1+\mu_2\cdot\mathfrak{m}_2). \qquad (271)$$

Hierin sind μ_{1c} und μ_{2c} die konjugierten Dyaden der Amplituden μ_1 und μ_2 der chemischen Schwingungen, welche nach (218) den Wert haben:

$$D_1\mu_{1c}=-p^2 e(b_3\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1+b_2\mathfrak{n};\mathfrak{e}_1),$$
$$D_1\mu_{2c}=+psa_3\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{e}_1.$$

Da die magnetischen Schwingungen transversal sind, fällt das mit b_3 behaftete Glied bei der Multiplikation weg und man erhält:

$$\mu_{1c} \cdot \mathfrak{m}_2 = \frac{p^3}{2\varepsilon_0 \mu_0 D_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{t}^2} (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{e}_1)^2 .$$

$$.(\varepsilon_0 b_3 e(a_3 s - 2\nu b_3 e)\mathfrak{m}_0 + b_3^2 r e c_0 (\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_0)) \text{ etc.}$$

Setzen wir:

$$A = \frac{c_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{a_3^2 s m + b_3^2 r e}{4\nu\left(b_3^2 e^2 + a_3^2 \frac{s^2}{p^2}\right)}, \tag{272}$$

$$B = -\frac{1}{16} \frac{a_3 b_3^2 e^2 m \nu}{c_0 \varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{p^6}{D_1^3} \cdot \frac{\mathfrak{e}_1^2}{\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{t}^2}, \tag{273}$$

so ergibt sich schließlich:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{e}_0 = \frac{4\varepsilon_0}{a_3 m} \frac{D_1}{p^2} B(\mathfrak{m}_0 + A(\mathfrak{n} \times \mathfrak{e}_0)). \tag{274}$$

Dieser konstante elektrische Wirbel oder magnetische Verschiebungsstrom ist also transversal gerichtet, und zwar hat er die Richtung der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{m}_0$, wenn diese allein vorhanden ist, oder er ist senkrecht zu der transversalen elektrischen Feldstärke, wenn diese allein vorhanden ist. Der magnetische Verschiebungsstrom hat also überall in dem gleichmäßigen Strahle gleiche Dichte und fließt quer durch den Strahl hindurch, teilt sich dann und fließt außerhalb des Strahles auf gegenüberliegenden Seiten desselben wieder zurück. Diese zwei Kreisungen des magnetischen Stromes umschließen zwei Längshälften des Strahles, in welchen also kohärente longitudinale konstante elektrische Feldstärken auftreten, welche in diesen beiden Strahlhälften entgegengesetzte Richtung haben und zusammen eben den konstanten kohärenten elektrischen Wirbel des Strahles bilden, dessen Wert in (274) angegeben ist.

LXV. Elektrostatische und magnetische Ablenkung parallelstrahliger Longitudinalstrahlen.

151. Die Krümmung von Longitudinalstrahlen durch transversale ablenkende Kräfte bestimmt sich durch (209). Es ist hiernach:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} \overset{3}{=} \frac{1}{2} k_1 (\mathfrak{e}_1 \times (\nabla ; \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{n})) \times \mathfrak{n}. \tag{275}$$

Hierin ist $\mathfrak{r}_1$ der Krümmungsradius des Strahles und hat k_1 den Wert (199):

$$k_1 = \frac{a_3 m}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{p^2}{D_1}.$$

Eine andere Ursache der Ablenkung parallelstrahliger Longitudinalstrahlen als die in (275) angegebene gibt es nicht. Nur die Inhomogenität des elektrostatischen Feldes kann eine Krümmung dieser Strahlen bewirken.

Es scheint also zunächst, als würde meine Theorie die Ablenkung der Kathodenstrahlen durch ein gleichförmiges elektrostatisches Feld und durch eine magnetische Kraft, welche in (275) gar nicht auftritt, nicht erklären können, ja ich glaubte lange Zeit, daß man von einer Undulationstheorie überhaupt nicht erwarten könne, daß sie eine Krümmung parallelstrahliger, im gleichförmigen Felde fortschreitender Kathodenstrahlen erkläre. Und doch leistet meine Theorie dieses früher Undenkbare nun in exakter Weise.

152. Wenn auch das ablenkende elektrostatische Feld als gleichförmiges Feld gegeben wird, so bleibt es nicht gleichförmig, wenn es transversal von einem Longitudinalstrahle durchdrungen wird, sondern in dem durchstrahlten Gebiete tritt der konstante elektrische Wirbel auf, dessen Größe und Richtung durch (274) bestimmt ist. Und wenn auch das ablenkende magnetische Feld gar keine direkte Wirkung auf den Verlauf des Strahles hat, so bewirkt es doch nach (274) ebenfalls das Auftreten eines konstanten elektrischen Wirbels in dem durchstrahlten Raume und dieses ungleichförmige elektrostatische Feld ist nach (275) die Ursache der Krümmung des Longitudinalstrahles.

Die derivierte Dyade $\nabla ; \mathfrak{e}_0$ des elektrostatischen Feldes bestimmt sich durch diesen kohärenten elektrischen Wirbel des Strahles, da

$$\mathfrak{n} \cdot \nabla ; \mathfrak{e}_0 = 0$$

ist, durch:

$$\nabla ; \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{n} = (\nabla ; \mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_0 ; \nabla) \cdot \mathfrak{n}.$$

Es ist also:

$$\nabla ; \mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{n} = -(\mathrm{rot}\, \mathfrak{e}_0) \times \mathfrak{n} \tag{276}$$

und nach (275):

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} = k_1\, \mathfrak{n} \times \mathrm{rot}\, \mathfrak{e}_0 .$$

Führt man den Wert von rot $\mathfrak{e}_0$ aus (274) und den Wert k_1 ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} = B(\mathfrak{n} \times \mathfrak{m}_0 - A\, \mathfrak{n}^2\, \mathfrak{e}_0) . \tag{277}$$

Hierdurch ist die Krümmung $1/\mathfrak{r}_1$, welche parallelstrahlige Kathodenstrahlen, Kanal- und Anodenstrahlen, β- und α-Strahlen durch transversale elektrische und magnetische Felder erfahren, allgemein bestimmt.

Hierin ist A mit Annäherung eine Materialkonstante des Gases, in welchem sich die Strahlen fortpflanzen, B aber eine von der Schwingungsdauer und Amplitude des Longitudinalstrahles abhängende Konstante desselben.

Nach (272) hat A, wenn man annimmt, daß $r+s=0$ und $a_3^2 m$ weitaus kleiner als $b_3^2 e$ ist, den Wert:

$$A = \frac{c_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r}{4\nu e} . \tag{278}$$

In die durch (273) gegebene Strahlkonstante B können wir den Wert des für die verschiedenen Arten der Longitudinalstrahlen charakteristischen Verhältnisses ϕ einführen, welches in meiner Theorie annähernd dieselbe Rolle spielt wie das Verhältnis der Ladung zur Masse eines Elektrons in der

Elektronentheorie dieser Strahlen und dessen Definition und Wert durch (241) gegeben ist. Es ergibt sich:

$$B = \frac{C}{c_0} \psi, \tag{279}$$

worin:

$$C = \frac{1}{2} \frac{a_3 b_3 \nu}{\mu_0 m s} \cdot \frac{E_m}{\mathfrak{k}^2 - \mathfrak{c}^2} \cdot \frac{p^4}{(p_0^2 - p^2)^2}. \tag{280}$$

Die Strahlkonstante C hat die Dimension Null und ist positiv, wenn ν positiv ist, denn E_m bedeutet den gesamten Energieinhalt des Strahles und ferner ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ der Longitudinalstrahlen fast ausnahmslos kleiner als die Lichtgeschwindigkeit $\mathfrak{k}$.

Das Vorzeichen der elektrischen und magnetischen Ablenkung kehrt sich also um mit dem Vorzeichen des charakteristischen Verhältnisses ψ der verschiedenen Gruppen der Longitudinalstrahlen, also werden die Kathoden- und β-Strahlen ceteris paribus stets in entgegengesetztem Sinne abgelenkt wie die Anoden-, Kanal- und α-Strahlen.

LXVI. Magnetische Ablenkung der Longitudinalstrahlen.

153. Wenn die Ablenkung nur durch eine magnetische Kraft erfolgt, so bestimmt sich der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ des Longitudinalstrahles nach (277) und (279) durch:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_m} \overset{3}{=} \frac{C}{c_0} \psi \frac{1}{\mathfrak{c}} \times \mathfrak{m}_0. \tag{281}$$

Die ablenkende magnetische Feldstärke $\mathfrak{m}_0$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ und der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_1$ des Strahles sind also zueinander orthogonal. Auch das Vorzeichen der magnetischen Ablenkung ist durch (281) fest bestimmt, da die Konstante C wesentlich positiv ist, und stimmt mit dem beobachteten Vorzeichen dieser Ablenkung überein.

Z. B. für Kathoden- und β-Strahlen ist ψ negativ, also sind der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_m$, die magnetische Kraft $\mathfrak{m}_0$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ so gegeneinander orientiert

wie die elektrische Schwingung, magnetische Schwingung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes [vergl. z. B. (266)].

154. Die magnetische Ablenkung der Longitudinalstrahlen ist ferner ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ verkehrt proportional. Jedoch ist eine nur auf die magnetische Ablenkung gegründete Messung nur ausnahmsweise möglich und niemals vollständig verläßlich, weil der Wert $C\phi$ nur für die gewöhnlichen (ungedämpften) Kathodenstrahlen hoher Schwingungszahl (vergl. § 134) konstant ist. Es ist aber nach Kaufmann, Simon, Seitz u. a. innerhalb recht weiter Versuchsgrenzen die Strahlkonstante C für Kathodenstrahlen konstant, was von meinem Standpunkte aus einen weiteren Aufschluß über das Emissionsgesetz dieser Strahlen verspricht. Die Strahlkonstante C hängt nach meiner Theorie von der Energie E_m der Strahlen ab. Aus der Konstanz derselben folgt, daß jene Kathodenstrahlen, deren Schwingungszahl der Eigenschwingungszahl des Gases näher liegen und welche also stärkere chemische Schwingungen enthalten, ceteris paribus mit geringerer Energie ausgesendet werden. Auch in dieser Beziehung ist das Emissionsgesetz der Kathodenstrahlen jenem des Lichtes ähnlich (vergl. § 143).

Die β-Strahlen folgen jedoch diesem Kaufmann'schen Gesetze nicht, ihre magnetische Ablenkbarkeit und also ihre Energie ist beträchtlich kleiner als bei den durch ein elektrisches Feld emittierten Kathodenstrahlen gleicher Schwingungszahl.

155. Abgesehen von dem fraglichen Werte der jedenfalls positiven Strahlkonstanten C folgt aus meiner Theorie genau dasselbe Gesetz der magnetischen Ablenkung der Longitudinalstrahlen wie aus der Elektronentheorie. Es muß anerkannt werden, daß die Konstanz von C innerhalb weiter Grenzen ein bemerkenswerter Erfolg der Elektronentheorie ist, aber man darf darüber nicht vergessen, auf welchem Wege dieselbe zu dem Gesetze der magnetischen Ablenkung dieser Strahlen gelangt, sie mußte zur Erklärung ad hoc ein neues Kraftgesetz annehmen, das noch dazu mit einem der bewährtesten Prinzipien der Physik in Widerspruch steht. Es dürfte zugegeben werden, daß die Herleitung des Gesetzes (281)

auf Grund meiner Undulationstheorie ohne jede Zusatzannahme an sich weit höher zu schätzen ist. Ich bezweifle deshalb nicht, daß die Angaben meiner Theorie über den Wert der Strahlkonstanten C sich schließlich als zutreffender herausstellen werden als jene der Elektronentheorie.

LXVII. Elektrostatische Ablenkung parallelstrahliger Longitudinalstrahlen.

156. Nach meiner Theorie wird die elektrostatische Ablenkung der Longitudinalstrahlen durch ein Gesetz von ähnlicher Form wie ihre magnetische Ablenkung bestimmt, und zwar hängt wieder der Krümmungsradius $\mathfrak{r}_\mathfrak{e}$ des Strahles direkt von der ablenkenden elektrostatischen Kraft $\mathfrak{e}_0$ ab. Es ist nach (277):

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_\mathfrak{e}} \stackrel{3}{=} - \frac{CA}{c_0} \cdot \frac{\psi}{\mathfrak{c}^2} \mathfrak{e}_0 . \qquad (282)$$

Die elektrostatische Ablenkung ist also dem Quadrat der Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ verkehrt und dem charakteristischen Verhältnisse ψ des Longitudinalstrahles gerade proportional.

Meine Theorie führt also mit sehr großer Annäherung zu demselben Gesetze der elektrostatischen Ablenkung wie die Elektronentheorie. Der Unterschied ist zwar in theoretischer Beziehung außerordentlich groß, da die Elektronentheorie nicht den Krümmungsradius des Strahles, sondern die Beschleunigung der Elektronen als direkt abhängig von der elektrostatischen Kraft ansieht, aber in der Beobachtungspraxis macht das keinen großen Unterschied. Die Elektronenstrahlen bewegen sich in parabolischen Bahnen, aber der Krümmungsradius dieser Parabeln in ihrem Scheitel bestimmt sich genau durch ein Gesetz von der Form (282).

Andrerseits werden die Longitudinalstrahlen meiner Theorie im gleichförmigen elektrostatischen Felde sich keineswegs in Kreisen, sondern in parabelähnlichen Bahnen fortpflanzen, denn nur für den Scheitel dieser Bahnen, wo der Strahl sich senkrecht zu der elektrostatischen Feldstärke fortpflanzt, gilt (282). Bei stärkerer Ablenkung wird die trans-

versale Komponente der ablenkenden Kraft kleiner, also schon nach (282) die Krümmung der Strahllinie geringer, was die Bahn parabelähnlich macht. Überdies wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei stärkerer Ablenkung immer größer, weil eine longitudinale Komponente des ablenkenden Feldes in die Strahlrichtung fällt. Hierbei ist daran zu erinnern, daß wir bei der Berechnung von (264) und (265) eine longitudinale Wirkung vernachlässigt haben, die bei ausgiebigeren elektrostatischen Ablenkungen berücksichtigt werden müßte.

157. Meine Theorie erklärt also nicht nur die von J. J. Thomson und W. Wien entdeckten elektrostatischen Ablenkungen parallelstrahliger Longitudinalstrahlen, sondern auch die von mir früher entdeckten elektrostatischen Ablenkungen divergenter Kathodenstrahlen, welche die umgekehrte Richtung haben und einen entscheidenden Gegenbeweis gegen die Elektronentheorie liefern (vergl. Kapitel XLVI, § 118).

LXVIII. Verhältnis der elektrostatischen und magnetischen Ablenkung der Longitudinalstrahlen.

158. Die zuerst von Kaufmann angewendete Methode der gekreuzten Ablenkung der Longitudinalstrahlen durch gleichzeitig wirkende gleichgerichtete elektrostatische und magnetische Felder hat eine sehr große Wichtigkeit, weil hiebei der Einfluß der fraglichen Strahlkonstanten $C\psi$ wegfällt und deshalb nach dieser Methode einwandfreie sichere Messungen der Geschwindigkeit der Longitudinalstrahlen vorgenommen werden können.

Aus (281) und (282) erhält man:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_{\mathfrak{m}}} \times \mathfrak{r}_{\mathfrak{e}} \overset{3}{=} \frac{1}{A}\, \mathfrak{c}\, \frac{\mathfrak{m}_0}{\mathfrak{e}_0}. \tag{283}$$

Das Verhältnis der aufeinander senkrechten magnetischen und elektrostatischen Ablenkung durch gleichgerichtete magnetische Kräfte $\mathfrak{m}_0$ und elektrische Krafte $\mathfrak{e}_0$ ist also der Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{c}$ proportional und der Propor-

tionalitätsfaktor ist eine sehr einfach gebaute Materialkonstante des verdünnten Gases. Es ist nach (278):

$$A = \frac{c_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r}{4\nu e}. \tag{284}$$

Jedenfalls ergeben die Messungen nach der Kaufmannschen Methode richtige Relativwerte der Geschwindigkeit aller Longitudinalstrahlen und es ist also ausreichend, wenn noch die absolute Geschwindigkeit irgend eines Longitudinalstrahles direkt gemessen wird, wodurch man ein für allemal über den Wert der Materialkonstanten A unterrichtet ist.

Nun hat Wiechert die Geschwindigkeit von Kathodenstrahlen nach einer direkten Methode messen gelehrt. Allerdings wurden meines Wissens niemals die Geschwindigkeiten derselben Kathodenstrahlen gleichzeitig auch nach der Kaufmann'schen Methode bestimmt, was notwendig ist, wenn man auf größere Genauigkeit Anspruch machen will. Mit Annäherung ergab sich aber aus den Wiechert'schen Messungen zweifellos, daß:

$$r = -4\nu e, \quad \text{also} \quad A = -\frac{c_0}{\varepsilon_0}. \tag{285}$$

Immerhin wären umfangreichere gleichzeitige Messungen nach beiden Methoden von Geschwindigkeiten verschiedener Kathodenstrahlen in verdünnten Gasen auch bei etwas höherem Drucke von großem Interesse.

Neue Ephemeriden zur Aufsuchung des Halley'schen Kometen bei seiner bevorstehenden Wiederkehr

von

Dr. J. Holetschek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. April 1908.)

Vor zwei Jahren habe ich auf Grund der von Pontécoulant für die nächste Erscheinung des Halley'schen Kometen abgeleiteten Bahnelemente bezüglich der mutmaßlichen Zeit des Sichtbarwerdens des Kometen einige Rechnungen gemacht[1] und dabei unter anderem bemerkt, daß zwei dieser Bahnelemente in einem auffallenden Grade von den aus den früheren Erscheinungen bekannten Werten abweichen; die Periheldistanz q ist nämlich wesentlich größer und die Exzentrizität e wesentlich kleiner als in irgend einer der früheren Erscheinungen. Das mußte um so mehr befremden, als sich die durch die Störungen verursachten Änderungen dieser beiden Bahnelemente in sämtlichen Erscheinungen seit 1531 — aus noch früheren ist die Bahnbestimmung wenig sicher — stets in mäßigen Grenzen gehalten hatten. Da jedoch jene Rechnungen, wie schon angedeutet, nur zu einer ersten Orientierung dienen sollten, indem das Sichtbarwerden des Kometen damals noch in ziemlich weiter Ferne stand, ließ ich die

[1] Über die mutmaßliche Zeit der Wiederauffindung des Halley'schen Kometen bei seiner nächsten Erscheinung. Diese Sitzungsberichte, Bd. 115, IIa (1906).

großen Verschiedenheiten auf sich beruhen und habe die Bahnelemente so, wie sie angegeben waren, zur Rechnung verwendet.

Inzwischen ist diese ungewöhnliche Diskordanz von den Herren Crommelin und Cowell einer genaueren Nachforschung unterzogen worden (Monthly Notices, Vol. 67). Was zunächst die Periheldistanz betrifft, welche in den letzten genauer beobachteten Erscheinungen immer sehr nahe bei $q = 0\cdot58$ gewesen ist und jetzt mit einem Male $q = 0\cdot687$, also um ein volles Zehntel der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne größer sein soll, so wird man wohl der Vermutung von Crommelin (a. a. O., p. 139) beipflichten können, daß in den Rechnungen von Pontécoulant irgendwo bei Setzung des Dezimalpunktes ein Fehler passiert ist und daß der wirkliche Störungswert nur ungefähr ein Zehntel des von Pontécoulant angegebenen beträgt. Es ist daher gewiß viel weniger unrichtig, wenn man bei der Berechnung einer hypothetischen Ephemeride als Periheldistanz einfach die aus der letzten Erscheinung annimmt.

Bezüglich des Zeitpunktes des nächsten Periheldurchganges haben die von den genannten Herren durchgeführten Rechnungen ergeben, daß derselbe in der Hauptsache richtig ist, indem er auch nach der neuen Störungsrechnung in den Mai 1910 fällt (a. a. O., p. 174); eine Abweichung hat sich nur darin gezeigt, daß der Durchgang auf Grund der jetzigen Berechnung der Jupiter- und Saturnstörungen um neun, beziehungsweise zwei Tage früher erfolgt (a. a. O., p. 411, 520 und 521).

Die neue Ephemeridenrechnung braucht jedoch deshalb nicht mit einer geänderten Perihelzeit gemacht zu werden, weil man den Einfluß einer Änderung von der angegebenen Größe auf die geozentrischen Positionen hinreichend genau entnehmen kann, wenn so wie früher auch noch solche Positionen gerechnet werden, welche einer Änderung der Perihelzeit um eine bestimmte Anzahl Tage entsprechen.

Eine wesentliche Abweichung hat sich jedoch bei der Exzentrizität herausgestellt, indem die neu berechneten Jupiterstörungen, nämlich $-0\cdot000097$, nur etwa $^1/_{55}$ des früher

angegebenen Störungswertes, —0·005298, betragen, weshalb von den zwei genannten Herren die Vermutung ausgesprochen worden ist (a. a. O., p. 411), der von Pontécoulant begangene Fehler sei höchst wahrscheinlich durch Außerachtlassung des Faktors entstanden, der die Länge eines Bogens von 1° in Teilen des Radius darstellt; dasselbe hat sich auch bei den Störungen durch Saturn gezeigt (p. 519 bis 521). Auf Grund dieser neuen Störungsrechnungen wird nun auch die Exzentrizität nicht wesentlich anders, als sie sich aus den früheren Erscheinungen ergeben hat.

Demgemäß habe ich die Berechnung der Positionen des Kometen nunmehr mit den folgenden Bahnelementen durchgeführt:

$$T = 1910 \text{ Mai } 16\cdot45 \text{ m. Z. Paris}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi - \Omega &= 111^\circ\, 32'\, 19'' \\ \Omega &= 57 \quad 10 \quad 33 \\ i &= 162 \quad 13 \quad 9 \end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{Äquin.}\\ 1910 \text{ Mai } 16\cdot5\end{gathered}$$

$$\log q = 9\cdot768320$$

$$e = 0\cdot967322$$

Als Ephemeridentage sind, damit der Einfluß der Änderung der Elemente q und e auf die geozentrischen Positionen des Kometen genau ersichtlich wird, wieder dieselben, von 30 zu 30 Tagen fortschreitenden Zeitpunkte angenommen, welche schon bei der früheren Rechnung gewählt worden waren. Aus diesem Grunde sind auch die für die Opposition 1907/1908 gerechneten Positionen, obwohl sie gegenwärtig keine praktische Bedeutung mehr haben, vollständig mitgeteilt.

Außerdem ist aber für die der Opposition 1908/1909 nahe liegende Zeit, in welcher voraussichtlich am meisten und sorgfältigsten nach dem Kometen gesucht werden dürfte, die Rechnung auch noch für je zwei zwischenliegende Tage gemacht, so daß die Ephemeride in diesem Zeitraume von 10 zu 10 Tagen weitergeht.

der früheren Abhandlung mitgeteilten Änderungen benützt werden.[1]

Was die sehr wichtige Frage nach der mutmaßlichen Helligkeit des Kometen betrifft, so dürfte es trotz der beträchtlichen Unsicherheit, in der wir uns bezüglich der Helligkeit dieses Kometen bei sehr großen Distanzen gegenwärtig noch befinden, diesmal doch zweckdienlich sein, statt der in der vorigen Abhandlung gegebenen allgemeinen Andeutungen, wenn auch nur versuchsweise, bestimmte Zahlen anzusetzen.

Man muß zu diesem Zwecke an die Erscheinung im Jahre 1835 und hier hauptsächlich an die Helligkeitsverhältnisse vor dem Perihel anknüpfen. In dieser Zeit hat, wie man schon in der ersten Abhandlung findet, die Helligkeit des Kometen (H die beobachtete, H_1 die auf die Distanzeneinheit reduzierte) mit der Annäherung an die Sonne in der aus den nachstehenden Zahlen ersichtlichen Weise zugenommen, wozu nur noch bemerkt werden soll, daß die ersten zwei Helligkeitsangaben bloß durch Deutungen der von den Beobachtern angegebenen Sichtbarkeitsgrade entstanden sind.

1835	H	$\log r$	$\log \Delta$	$5 \log r\Delta$	H_1
August 5	12—13	0·29	0·39	+3·4	8·6—9·6
21	10·5	0·23	0·29	+2·6	7·9
27	10·0	0·21	0·24	+2·3	7·7
Sept. 23	5·7	0·09	9·89	—0·1	5·8
24	5·0	0·08	9·86	—0·3	5·3
Okt. 2	3·0	0·03	9·64	—1·6	4·6
15, 17	1·0	9·94	9·39	—3·3	4·3
18	1·0	9·93	9·47	—3·0	4·0

Der Periheldurchgang hat am 15. November 1835 stattgefunden, zu welcher Zeit aber der Komet nur noch bei sehr tiefem Stande in der Abenddämmerung gesehen werden konnte.

[1] Es sei hier bemerkt, daß in der vorigen Abhandlung auf der 3. Seite, Zeile 2 von unten, bei 1908 Dez. 31·5 in α irrtümlich 84° 58' zu lesen ist, während es, wie auf der 2. Seite richtig steht, 85° 58' heißen sollte. Daß es auf der 4. Seite derselben Abhandlung, Zeile 11 von oben, anstatt »Periheldistanz« richtig »Perihelzeit« heißen soll, ist schon an einer anderen Stelle bemerkt worden.

Aus der Zeit nach dem Perihel kann der Umstand verwertet werden, daß der Komet in München bis zum 17. Mai und in Breslau noch am 19. Mai 1836 beobachtet worden ist. Erlaubt man sich die Annahme, daß er in diesen Tagen nahe an der 12. Größe war, so ergibt sich, da zu dieser Zeit $\log r = 0 \cdot 47$, $\log \Delta = 0 \cdot 43$, also $5 \log r\Delta = 4 \cdot 5$ war, als reduzierte Helligkeit sehr nahe 7^m5. Dieser Wert ist bedeutender als die ersten aus der Zeit vor dem Perihel abgeleiteten, doch kann die Differenz, weil die Kometen nach der Sonnennähe im allgemeinen heller sind als vor derselben, immerhin reell sein.

Um nun eine Andeutung über die Helligkeit des Kometen bei den auch jetzt noch immer großen Distanzen machen zu können, hat man sich, wie schon gesagt, an die Helligkeiten vor dem Perihel zu halten und hier die geringste reduzierte Helligkeit zum Ausgange zu nehmen. Man wird dabei wieder die gewöhnliche Helligkeitsformel trotz ihrer bei Kometen hervortretenden Unzulänglichkeit anwenden können, zumal da die Erfahrungen gelehrt haben, daß die Abweichungen der Helligkeiten von dem Verhältnis $1 : r^2\Delta^2$ nur in der Sonnennähe sehr bedeutend, bei großen Radienvektoren dagegen wesentlich geringer sind; man muß sich aber, auch wenn man wirklich an die geringste Helligkeit vor dem Perihel (9^m6 oder etwas allgemeiner 9 bis 10^m) anschließt, vor Augen halten, daß ein so berechneter Helligkeitswert nur ein Grenzwert, und zwar bei wesentlich größeren Radienvektoren ein Maximalwert ist, also die tatsächliche Helligkeit des Kometen wahrscheinlich eine merklich geringere sein wird.

Wählt man nun, um ja nicht zu hoch zu greifen, als Ausgangshelligkeit $H_1 = 10^m0$, so hätte man für den Kometen im Maximum die folgenden Helligkeiten zu erwarten:

1907/1908	19^m2
1. November 1908	18·0
Ende 1908 und Anfang 1909	17·5
2. September 1909.............	16·0

usw.

Es ist daher begreiflich, daß Prof. M. Wolf in Heidelberg mit seinen photographischen Aufnahmen der Kometengegend im Winter 1907/8 den Kometen noch nicht erreicht, wohl aber dabei einen Planetoiden 18. Größe (1908 BN) gefunden hat.

Auch in der Opposition 1908/1909 sind die berechneten Helligkeiten, obwohl sie schon wesentlich günstiger geworden sind, für ein visuelles Aufsuchen noch wenig ermutigend. Was dagegen die Dauerphotographie leisten wird, kann gegenwärtig noch nicht gesagt werden; es sei jedoch daran erinnert, daß der Encke'sche Komet im Herbst 1904 photographisch schon sechs Wochen früher entdeckt worden ist, als er visuell beobachtet wurde, und daß der Halley'sche Komet, obwohl er unter den für das freie Auge sichtbar gewesenen Kometen nicht einer der allergrößten, sondern nur etwas über Mittelgröße ist, den Encke'schen jedenfalls sehr bedeutend übertrifft, indem sich als Maximalwert seiner reduzierten Helligkeit H_1 mindestens die 4. Größe (3^m5 bis 4^m0) ergeben hat, während sie beim Encke'schen kaum bedeutender als 6^m5 ist.

Nachschrift. In dem während des Druckes dieser Abhandlung eingelangten Märzheft der Monthly Notices (Vol. 68, Nr. 5) findet sich eine weitere Fortsetzung der verdienstvollen Arbeiten von Cowell und Crommelin, indem nunmehr die Störungen des Kometen von 1835 bis 1910 durch alle großen Planeten mit Ausnahme von Merkur und Mars berechnet sind. Der Zeitpunkt des nächsten Periheldurchganges ist zwar auch jetzt noch nicht völlig sichergestellt, scheint jedoch statt in den Mai mit größerer Berechtigung schon in den April 1910 verlegt werden zu dürfen, so daß also beim Suchen nach dem Kometen in dem Zeitraum 1908/9 zunächst auf die für T—30^d berechneten Positionen zu achten wäre.

Grau A. und Russ F., Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (II. Teil.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321–351.

Russ F. und **Grau A.,** Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (II. Teil.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321–351.

Luftverbrennung, Experimentaluntersuchungen über die — im elektrischen Flammenbogen. (II. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321—351.

Elektrischer Flammenbogen, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im —. (II. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321—351.

Grau A. und **Russ F.,** Experimentaluntersuchung über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (III. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Sauerstoff.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353—362.

Russ F. und **Grau A.,** Experimentaluntersuchung über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (III. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Sauerstoff.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353—362.

Luftverbrennung, Experimentaluntersuchung über die — im elektrischen Flammenbogen. (III. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353—362.

Elektrischer Flammenbogen, Experimentaluntersuchung über die Luftverbrennung im —. (III. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353—362.

I

Grau A. und Russ F., Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (II. Teil.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321–351.

Russ F. und Grau A., Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (II. Teil.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321–351.

Luftverbrennung, Experimentaluntersuchungen über die — im elektrischen Flammenbogen. (II. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321–351.

Elektrischer Flammenbogen, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im —. (II. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 321–351.

Grau A. und Russ F., Experimentaluntersuchung über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen (III. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Sauerstoff.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353–362.

Russ F. und Grau A., Experimentaluntersuchung über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (III. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Sauerstoff.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353–362.

Luftverbrennung, Experimentaluntersuchung über die — im elektrischen Flammenbogen. (III. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353–362.

Elektrischer Flammenbogen, Experimentaluntersuchung über die Luftverbrennung im —. (III. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 353–362.

Abt. IIa, März und April.

Grau A. und **Russ F.,** Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (IV. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Stickstoff.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363—371.

Russ F. und **Grau A.,** Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen Flammenbogen. (IV. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Stickstoff.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363—371.

Luftverbrennung, Experimentaluntersuchungen über die — im elektrischen Flammenbogen. (IV. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363—371.

Elektrischer Flammenbogen, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im —. (IV. Teil.)
Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363—371.

Lecher E., Konstanz der Thermoelemente bei langem Gebrauch.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 373—376.

Konstanz der Thermoelemente.
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 373—376.

Thermoelemente, Konstanz derselben.
Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 373—376.

Jaumann G., Elektromagnetische Theorie.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Dispersion, Theorie der —.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Grau A. und **Russ F.**, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im elektrischen **Flammenbogen**. (IV. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in **Stickstoff**.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363–371.

Russ F. und **Grau A.**, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im **elektrischen Flammenbogen**. (IV. Teil.) Das Verhalten des elektrischen Flammenbogens in Stickstoff.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363–371.

Luftverbrennung, Experimentaluntersuchungen über die — im elektrischen **Flammenbogen**. (IV. Teil.)

Grau A. und Russ F., **Sitz.** Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363–371.

Elektrischer Flammenbogen, Experimentaluntersuchungen über die Luftverbrennung im —. (IV. Teil.)

Grau A. und Russ F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 363–371.

Lecher E., Konstanz der Thermoelemente bei langem Gebrauch.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 373–376.

Konstanz der Thermoelemente.

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 373–376.

Thermoelemente, Konstanz derselben

Lecher E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 373–376.

Jaumann G., Elektromagnetische Theorie.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379–543.

Dispersion, Theorie der —.

Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379–543.

Natürliche Drehung der Polarisationsebene.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Fizeau'sches Phänomen, Theorie desselben.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Longitudinalstrahlen, elektrische.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 116 (1907), p. 379—543.

Chemische Schwingungen.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Chemischer Strom.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Holetschek J., Neue Ephemeriden zur Aufsuchung des Halley'schen Kometen bei seiner bevorstehenden Wiederkehr.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

Ephemeriden zur Aufsuchung des Halley'schen Kometen.
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

Halley'scher Komet, Ephemeriden zur Aufsuchung desselben.
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

Kometen, Ephemeriden zur Aufsuchung des Halley'schen —.
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

Natürliche Drehung der Polarisationsebene.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Fizeau'sches Phänomen, Theorie desselben
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543

Longitudinalstrahlen, elektrische.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 116 (1907), p. 379—543.

Chemische Schwingungen.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Chemischer Strom.
Jaumann G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 379—543.

Holetschek J., Neue Ephemeriden zur Aufsuchung des Halley'schen Kometen bei seiner bevorstehenden Wiederkehr.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

Ephemeriden zur Aufsuchung des Halley'schen Kometen.
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

Halley'scher Komet, Ephemeriden zur Aufsuchung desselben.
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

Kometen, Ephemeriden zur Aufsuchung des Halley'schen —.
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 545—552.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. V. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Die tägliche Variation der Windstärke auf den Berggipfeln in Südindien in ihrer Beziehung zu der täglichen Luftdruckschwankung

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. April 1908.)

Den eigentümlichen täglichen Gang der Windstärke auf den Berggipfeln mittlerer Breiten in Europa und Nordamerika kennen wir schon seit längerer Zeit. Aus den Tropen ist nur von einem Punkte der tägliche Gang der Windstärke (von mir) berechnet, aber nur ganz kursorisch an versteckter Stelle mitgeteilt worden,[1] so daß die Ergebnisse, wie es scheint, fast unbekannt geblieben sind (Dodabetta Pik). Beim Erscheinen des Jahrganges 1906 des »Annual Report of the Director, Kodaikánal and Madras Observatories« fand ich mich deshalb veranlaßt, die in diesen Reports veröffentlichten stündlichen Windgeschwindigkeiten am Kodaikánalobservatorium in 2343 *m* Seehöhe zu einer Berechnung des mittleren täglichen Ganges der Windstärke zu benützen. Mit dem Jahrgang 1906 lagen die Ergebnisse von sechs Jahren (1901 bis 1906) vor, so daß schon verläßliche Ergebnisse zu erwarten waren.

Eine einwurfsfreie volle Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke auf unseren Berggipfeln ist eigentlich noch nicht gegeben worden. In diesem Umstande lag für mich eine weitere Aufforderung zur Untersuchung des täglichen Ganges auf den Berggipfeln in Südindien, da die Ergebnisse möglicher-

---

[1] Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und der Richtung des Windes. Diese Sitzungsber., Bd. LXXIX, Jänner 1879, p. 66.

weise über die wahren Ursachen desselben einen Fingerzeig geben könnten. Im allgemeinen verlaufen ja in den Tropen die Erscheinungen regelmäßiger als bei uns und deren Ursachen liegen meist klarer zu Tage wie in mittleren und höheren Breiten.

Einleitung.

Das Sonnenobservatorium bei Kodaikánal, einer beliebten Sommerfrische Südindiens, liegt auf einem der höchsten Punkte der Palni Hills, nicht völlig auf dem Gipfel, aber hinlänglich frei nach allen Seiten, ziemlich genau in der Mitte zwischen der Bai und dem Arabischen Meere unter 10° 14′ N Br. und 77° 30′ E L. in 2343 *m* Seehöhe.

Außerdem liegen ältere Windregistrierungen (Richtung und Stärke) von der meteorologischen Station auf dem Dodabetta Pik in den Nilgirris in 2633 *m* Seehöhe vor. Diese habe ich seinerzeit schon teilweise verwertet an der oben zitierten Stelle. Ich habe damals nur die Jahrgänge 1848 bis 1850 benützt und nur die Mittelwerte für die zwei Hauptjahreszeiten des Nordost- und des Westmonsuns berechnet. Die Ergebnisse werden jenen vom Kodaikánalobservatorium für die (nahe) gleichen Perioden an die Seite gestellt und zu Mittelwerten vereinigt. Diese Rechnungen sind schon im Sommer 1907 abgeschlossen worden. Erst hinterher, in ganz letzter Zeit, habe ich mich entschlossen, auch das bisher nicht berechnete Jahr 1847 beizuziehen und Mittel für die 12 Monate zu berechnen, um der Tabelle für das Kodaikánalobservatorium eine gleiche auch für den Dodabetta Pik gegenüberstellen zu können. Fast alle Rechnungen wurden dann auch mit den neuen Mitteln wiederholt und so kommt es, daß in den nachfolgenden Tabellen zum Teile eine scheinbare Wiederholung einiger Ergebnisse aus den Dodabetta-Registrierungen zu finden ist.

Das meteorologische Observatorium auf dem Dodabetta Pik, dem höchsten Gipfel der Nilgirris (Neilgherry Hills), wurde von T. G. Taylor, Direktor des astronomischen Observatoriums zu Madras, mit den Mitteln der Ostindischen Kompagnie Ende 1846 errichtet, mit den nötigen (recht zahlreichen) Instrumenten ausgerüstet und begann Ende Jänner

1847 seine Tätigkeit. Ein Assistent des Madrasobservatoriums leitete die Station.

Die geographische Breite des »Meteorological Bungalow« wurde zu 11° 23′ N bestimmt, die Seehöhe zu 8640 feet über der See, rund 4000 feet über dem Tafellande von Mysore. Die direkte Entfernung von der Westküste (vom Arabischen Meere) beträgt 66 miles (106 *km*). Auf dem Dache der meteorologischen Hütte befand sich ein Osler'sches Anemometer, von Newman konstruiert, welches für jeden Moment der 24 Stunden zugleich den Winddruck in Pfunden pro englischen Quadratfuß und auch den Regen registrierte. Es funktionierte befriedigend, doch wurden Winddrucke unter $^1/_4$ Pfund kaum noch registriert. Das Maximum des Winddruckes, das noch registriert werden konnte, war 35 Pfund. Es scheint, daß im letzten Jahre 1850 die Winddruckplatte unempfindlicher geworden ist.

Die Ergebnisse der Beobachtungen sind in extenso veröffentlicht worden in der wenig bekannten Publikation: »Meteorological Observations made at the Met. Bungalow on Dodabetta 8640 feet above the level of the Sea in the years 1847/48 under the Direktion of T. G. Taylor Esq. F. R. S. undertaken at the Request of the Hon. the Court of Directors of the East India Compagny, and with the sanction and assistance of the Madras Government. Madras 1848. — Ditto: in the years 1848—1850. Under the Direction of the Late T. G. Taylor and of W. S. Jacob. Madras 1852.« Die recht interessanten Ergebnisse dieser Beobachtungen sind noch nicht ganz ausgenützt worden für die Meteorologie, namentlich nicht die stündlichen Beobachtungen von Luftdruck, Temperatur und Himmelsansicht, Bodentemperatur in 12 Zoll Tiefe (gelegentlich auch Beobachtungen mit Leslie's Photometer). Eine teilweise Diskussion dieser Beobachtungen (1847/48) findet sich in der noch jetzt sehr interessanten Abhandlung von Lieut. Col. W. H. Sykes: »Discussion of Met. Observ. taken in India etc.«, Phil. Trans. 1850.

Ich wiederhole hier, was mir Henry Blanford, der Chef des Meteorologischen Dienstes für Indien, auf meine Anfrage über die Lage der ehemaligen Beobachtungsstation auf dem Dodabetta (gesprochen »Dorabetta«, mit leicht klingendem *r*) mitgeteilt hat.

»Die Station befand sich auf dem höchsten Punkte des Dodabetta Pik, der, wie die anderen Höhen der Nilgirri, mit Gras bewachsen und völlig frei liegt. Es gibt keine felsigen Punkte und die Forste an den Abhängen beschränken sich auf die Einschnitte der Wasserläufe, welche die Drainage der Flanken des Berges bilden. Der Gipfel stellt deshalb eine kleine Ebene vor, leicht konvex und offen nach allen Richtungen. Es kann kaum eine bessere Position geben zur Bestimmung der täglichen Variation von Windrichtung und Windstärke.«

In ersterer Beziehung sind die Ergebnisse der Registrierungen leider noch nicht benützt worden.

Ich habe, wie schon bemerkt, das erstemal nur die Jahre 1848 bis 1850 berechnet, weil die stündlichen Mittelwerte des Winddruckes für das Jahr 1847 nicht angegeben sind. Diese Mittel wurden nun gerechnet und ich habe jetzt den täglichen Gang im Mittel von vier Jahren abgeleitet.

Für die Periode der Nordostwinde habe ich in den genannten drei Jahren die Monate Juni bis Oktober angenommen, mußte aber den Oktober 1850 ausschließen, in dem Südostwinde herrschten. Die mittlere Richtung von Juni bis Oktober war in diesen Jahren W 33° N, von November bis Mai N 70° E sehr übereinstimmend in den einzelnen Jahren.

In den neuen vierjährigen Mitteln habe ich als Periode des Westmonsuns die vier Monate Juni bis September wie bei Kodaikánal genommen, des besseren Vergleiches wegen und da der Oktober entschieden schon ein Übergangsmonat ist.

Es existierte bekanntlich noch ein drittes Gipfelobservatorium in Südindien, das von John Allan Broun gegründete Observatorium auf dem Agustia Pik an der Küste von Süd-Travancore, zwar nur in 1890 *m* Seehöhe, relativ aber vielleicht das höchste. Dieser höchste Punkt von Süd-Travancore fällt nach beiden Seiten steil ab, liegt 27 englische Meilen (43 *km*) von der Station Trevandum (an der Küste in 59 *m*) und fast ebenso weit von der Station Tinnavelly im Osten, in 51 *m*.

Die stündlichen Beobachtungen auf Agustia Pik sind in extenso veröffentlicht worden in Vol. VIII der Indian Meteorological Memoirs: »Hourly Met. observations recorded at the Agustia Observatory during the Period from January 1856 to

September 1858 and from June to December 1864.« In Vol. X der »Memoirs« findet man die eingehende Diskussion dieser stündlichen Beobachtungen von Sir John Eliot, die Windregistrierungen speziell auf p. 343 bis 352.

Die Windstärkeregistrierungen auf Agustia Pik sind nach Sir John Eliot leider nicht verwendbar. Der tägliche Gang der Windkomponenten findet sich dagegen aus den Häufigkeitszahlen berechnet vor in Indian Met. Memoirs, X, p. 347. Der jährliche Gang der Windkomponenten wird aus folgenden kurzen Angaben ersichtlich:

	Dezember bis Februar	März bis Mai	Juni bis September	Oktober bis November	Jahr
N Komponente	14	3	16	7	10·5
E »	79	−2	−86	6	−8·3
Mittlere Richtung....	N 80° E	N 31° W	N 80° W	N 43° E	N 38° W

Dezember bis Februar: 5% Kalmen, 64% E, 21% NE, bloß 10% andere Richtungen. Also stetiger NE.

Juni bis September ebenfalls stetiger Wind WNW (N 80° W), Monsun vom Arabischen Meere her, 4% Kalmen, 72% W, 21% NW. Rest nur 3%.

Der Südwestmonsun erreicht die Küste von Travancore in der letzten Woche des Mai und herrscht im Juli und August mit größter Strenge.

Sir John Eliot meint, daß der SW durch die Travancore Hills nach Süden abgelenkt wird und deshalb auf Agustia Pik als WNW auftritt. Aber auch auf Dodabetta Pik und bei dem Kodaikánalobservatorium herrscht Juni bis September ein Nordwestwind, der also allgemeine Ursachen haben muß.

In den Übergangsperioden ist die Windresultante fast Null und veränderlich nach den Jahren. Ost- und Westwinde und Kalmen wechseln ab.

Die drei Gipfelobservatorien Südindiens sind also:

Dodabetta Pik	11° 32′ N,	76° 50′ E,	2633 *m*,
Kodaikánalobservatorium ..	10° 40′ N,	77° 30′ E,	2343 *m*,
Agustia Pik	8° 37′ N,	77° 10′ E,	1890 *m*.

Die Registrierungen an letzterem sind, wie bemerkt, leider für den Zweck dieser Abhandlung nicht verwendbar.

Die Mittelwerte der meteorologischen Elemente für die genannten drei Observatorien habe ich berechnet und zusammengestellt in der Met. Zeitschrift, 1908, p. 29 bis 31.

Der tägliche Gang der Windstärke auf Dodabetta und Kodaikánal in den einzelnen Monaten.

(Siehe Tabelle I und II.)

In beiden Tabellen fällt sogleich die höchst bemerkenswerte Tatsache in die Augen, daß sogleich beim Eintritt des Westmonsuns die Epoche des Maximums der Windstärke von rund 10^h vormittags zurückspringt in die Nacht auf 4^h a. oder auf 10^h p. bis 2^h a. (Dodabetta).

Das Minimum der Windstärke, das weniger regelmäßig zu fixen Stunden eintritt, verschiebt sich gleicherweise von 5^h oder 6^h p. um mehrere Stunden zurück gegen Mittag. Diese Erscheinung erfolgt aber mit viel geringerer Regelmäßigkeit als die Verschiebung des Maximums mit dem Windwechsel. Im Mittel finden wir folgendes.

Eintritt des Tagesmaximums der Windstärke.

Kodaikánal:	Nordostmonsun	11^h a.,
	Westmonsun	4^h a.,

also ein Zurückspringen um 7 Stunden, und zwar mit größter Regelmäßigkeit;

Dodabetta:	Nordostmonsun	9^h a.,
	Westmonsun	$12^1/_2{}^h$ a.,

also desgleichen ein Zurückspringen um mehr als 8 Stunden, mit etwas geringerer Regelmäßigkeit (auch nur ein Mittel von 4 Jahren).

Diese Erscheinung ist sehr auffallend und es ist etwas Ähnliches auf unseren Berggipfeln unbekannt.

Ich habe in einer früheren Abhandlung nachgewiesen, daß so wie in der Niederung für alle Windrichtungen die größte Windstärke zu gleicher Zeit bald nach Mittag eintritt, dies auch auf unseren Berggipfeln der Fall ist, die Epoche des Maximums fällt aber auf den Berggipfeln auf die Nachtstunden.[1]

Südwinde und Westwinde erreichen das Maximum der Geschwindigkeit um 2^h a., Nord- und Ostwinde um 4^h a.; diese letzteren zeigen eine kleine halbtägige Periode der Stärke.[2]

Die Windregistrierungen auf dem Sonnblick, Säntis, Obir und auf Pikes Peak zeigen keinen merklichen Einfluß der Windrichtung auf die Epoche des Eintrittes des täglichen Maximums der Windstärke. Eine eingehendere Untersuchung darüber wäre aber erwünscht.

Ganz anders verhält es sich aber, wie aus den Tabellen I und II sogleich in die Augen springt, in dem Gebiete des Südwest- und Nordostmonsuns in Südindien. Beim Südwestmonsun (auf den südindischen Berggipfeln mehr als NW auftretend) vom Juni bis September tritt das Maximum zwischen Mitternacht und 4^h a. ein, während des Nordostmonsun zwischen 9^h und 11^h a.

Was mag die Ursache des Zurückspringens der Epoche des Maximums vom Vormittage auf die frühesten Morgenstunden sein?

---

[1] Hann, Über die tägliche Drehung der mittleren Windrichtung und über eine Oszillation der Luftmassen von halbtägiger Periode auf Berggipfeln von 2 bis 4 *km* Seehöhe. Diese Sitzungsber., Bd. CXI, Dezember 1902. Anhang: Der tägliche Gang der mittleren Windstärke bei verschiedenen Windrichtungen. — Auszug in Met. Zeitschrift, 1903, p. 509.

[2] Die Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke sind (Kilometer pro Stunde, $x = 0$ für Mitternacht):

N .... $1 \cdot 62 \sin (60° + x) + 0 \cdot 96 \sin (274° + 2x)$.

E .... $1 \cdot 30 \sin (39° + x) + 0 \cdot 78 \sin (282° + 2x)$.

S........... $1 \cdot 49 \sin (52° + x) + 0 \cdot 19 \sin (168° + 2x)$.

W .... $2 \cdot 08 \sin (67° + x) + 0 \cdot 22 \sin (30° + x)$.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit.

I. Kodaikánalobservatorium (2343 *m*), 1901 bis 1906.

Windgeschwindigkeit in englischen Meilen pro Stunde.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
1h a.	14·7	13·2	13·2	12·5	11·5	16·7	20·5	13·7	13·8	12·7	12·0	14·5	14·08
2	14·7	13·0	13·8	12·0	11·2	16·7	20·3	14·2	14·5	12·7	12·5	14·0	14·13
3	14·5	12·7	13·7	12·0	11·2	17·0	20·3	14·7	14·8	12·8	12·2	14·2	14·17
4	14·2	12·5	14·2	12·0	11·0	**17·2**	**20·7**	**14·8**	**14·8**	12·7	12·2	13·7	14·17
5	14·7	12·7	14·5	11·7	10·8	17·2	20·3	14·5	14·8	13·2	12·3	13·8	**14·21**
6	14·5	12·8	14·7	12·0	11·0	16·8	19·7	14·2	14·7	12·3	12·2	14·2	14·09
7	14·2	13·2	15·0	12·2	10·8	16·3	19·0	14·0	14·0	12·7	12·7	14·2	14·02
8	14·0	13·0	15·5	12·7	11·2	15·5	18·0	13·0	13·2	12·7	12·2	14·0	13·75*
9	14·2	13·5	16·7	13·8	12·2	15·7	17·3	13·0	13·2	13·3	12·2	14·3	14·12
10	14·5	14·7	17·0	14·8	12·3	15·7	17·7	12·7	13·7	**13·3**	**12·8**	14·3	14·46
11	**15·5**	**15·2**	**17·2**	**15·0**	**12·7**	16·0	17·0	12·5	12·8	13·0	12·8	**15·5**	**14·60**
Mittag	14·3	14·7	16·8	14·7	12·3	15·5	16·5	12·0	12·2	12·5	12·0	14·8	14·02

1h p.	13·7	13·5	15·0	13·2	12·2	15·0	16·7	11·8	11·8	12·0	11·7	14·2	13·40
2	13·3	12·0	13·5	12·0	11·7	14·7	16·5*	11·5	11·2	12·0	11·3	13·2	12·74
3	11·8	11·2	12·7	11·8	12·0	15·0	17·2	11·5	11·3	11·2	10·3	12·0	12·33
4	10·5	10·2	11·7	11·5	11·8	15·0	17·3	11·7	11·3	10·8	10·5	11·2	11·96
5	9·3	9·2	10·3	10·7	10·5	14·2*	17·2	11·2*	10·7	10·3	9·7	10·3*	11·97
6	9·2*	8·3	11·0	10·2	9·2	15·7	18·5	11·3	10·7*	10·0*	9·7*	11·0	11·23*
7	10·0	8·2*	9·2*	10·2*	9·2*	16·3	19·2	11·5	11·0	11·0	10·5	12·0	11·52
8	11·5	9·5	10·0	11·0	10·0	17·2	19·5	11·8	11·7	11·3	11·3	13·3	12·34
9	12·0	10·0	10·0	10·7	10·3	16·3	19·3	12·3	11·8	10·8	11·7	13·8	12·42
10	12·5	10·8	10·5	10·5	10·3	16·7	19·3	12·7	12·7	11·5	12·0	14·3	12·82
11	13·8	11·8	12·2	11·2	10·7	16·2	20·2	12·8	13·5	12·2	12·3	14·5	13·45
12	14·8	12·5	12·8	11·8	11·3	16·8	20·3	13·3	13·7	12·3	12·7	14·7	13·92
Mittel	13·2	12·0	13·4	12·1	11·1	16·1	18·7	12·8	12·8	12·1	11·7	13·6	13·33
Mittlere Windrichtung													
	ENE	ENE	E	E	NNE	NW	NW	NNW	NNW	NNE	NNE	NE	—

II. Dodabetta Pik (2633 *m*), Februar 1847 bis Dezember 1850.

Winddruck in englischen Pfunden pro englischem Quadratfuß.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dcz.	Jahr
Mitternacht	·19	·28	·44	·77	·88	5·33	3·35	2·40	4·07	·36	·41	·44	1·58
1h a.	·21	·31	·47	·73	·89	5·00	3·41	**2·41**	**4·32**	·38	·34	·48	1·58
2	·16	·27	·45	·75	·92	4·87	3·48	2·50	4·04	·34	·30	·43	1·54
3	·17	·32	·51	·83	·98	5·23	3·50	2·39	4·05	·36	·31	·40	1·59
4	·20	·28	·55	·87	·78	5·23	3·58	2·34	4·08	·31	·34	·53	1·59
5	·22	·33	·66	1·01	·86	4·77	3·57	2·43	4·07	·32	·40	·54	**1·60**
6	·21	·43	·66	1·14	·88	4·70	3·50	2·24	4·08	·31	·34	·56	1·59
7	·17	·37	·83	**1·21**	·95	4·70	3·36	2·30	3·98	·36	·35	·56	1·59
8	·22	·45	·96	1·16	**1·03**	4·83	3·30	2·09	3·69	**·42**	·41	**·56**	1·59
9	·28	**·56**	1·17	1·10	1·00	4·30	3·04	1·95	3·84	·44	**·46**	·61	1·56
10	·26	·50	**1·03**	·92	·76	4·03	2·99	1·59	3·07	·28	·42	·41	1·35
11	**·31**	·43	1·00	·95	·81	3·47	2·73	1·39	2·40	·22	·40	·38	1·21
Mittag	**·26**	·41	·84	·96	·57	3·50	2·32*	1·37*	2·14	·16*	·26	·35	1·10

1h p.	·28	·32	·67	·99	·59	3·13*	2·59	1·50	2·14	·17	·30	·30	1·08
2	·24	·26	·52	·56	·57	3·17	2·46	1·55	2·01*	·20	·26	·25*	1·00*
3	·21	·23	·37	·85	·47	3·30	2·78	1·71	2·13	·18	·19	·27	1·06
4	·15	·17	·22	·72	·38*	3·53	3·06	1·77	2·47	·16*	·22*	·28	1·09
5	·10	·09	·21*	·69*	·51	4·20	2·83	2·00	2·59	·29	·22	·27	1·17
6	·07*	·08*	·24	·80	·64	4·73	3·00	1·96	2·88	·29	·25	·32	1·27
7	·11	·11	·30	·83	·51	4·90	3·15	2·03	3·39	·31	·34	·32	1·36
8	·12	·16	·33	·84	·63	5·23	3·65	2·08	3·47	·37	·40	·38	1·47
9	·13	·24	·33	·84	·67	5·40	**3·67**	2·07	3·71	·33	·50	·43	1·53
10	·13	·20	·32	·75	·94	**5·73**	3·69	2·29	3·82	·36	**·51**	·41	**1·60**
11	·19	·23	·40	·78	·89	5·23	3·34	2·26	4·01	·32	·48	·42	1·55
Mittel	·19	·29	·56	·88	·75	4·52	3·18	2·03	3·35[1]	·30	·35	·41	1·40

[1] Die Windstärke für September ist hier etwas zu hoch, weil für den September 1847 ein zu hoher Mittelwert eingesetzt worden ist, es fehlten die Tage mit kleinen Windstärken. Auf den täglichen Gang hat dies aber keinen Einfluß.

Um die begleitenden Umstände dieser eigentümlichen Erscheinung überblicken und einen etwaigen Einfluß derselben auf letztere entdecken zu können, habe ich die folgende Tabelle zusammengestellt.

	Windrichtung	Stärke m/sec	Eintritt des Maxim.	Temperatur	Regen in Prozent	Bewölkung	Sonnenschein Stunden
Dodabetta Pik							
Jänner	EbN	2·8	11h a.	9·3	2	—	—
Februar	EbN	3·4	9 a.	9·8	1	—	—
März	EbN	3·7	10 a.	11·5	2	—	—
April	ENE	5·9	7 a.	12·2	7	—	—
Mai	NE	5·5	8 a.	13·4	8	—	—
Juni	WbN	13·4	10 p.	10·9	8	—	—
Juli	WNW	11·3	9 p.	10·8	15	—	—
August	WNW	10·2	2 a.	10·8	**16**	—	—
September	NWbN	10·6	1 a.	10·3	15	—	—
Oktober	NE	3·4	8 a.	10·7	11	—	—
November	ENE	3·7	9 a.	10·2	11	—	—
Dezember	E	4·0	8 a.	9·6	4	—	—
Jahr	—	6·5	{ 10h p. / 5 a.	8·4	100	—	—
Kodaikánal							
Jänner	ENE	5·7	11h a.	11·8	5	3·6	214
Februar	ENE	5·1	11 a.	12·9	3	3·8	209
März	E	5·6	11 a.	14·4	3	3·1	247
April	E	5·1	11 a.	15·4	6	4·8	205
Mai	NNE	4·6	11 a.	15·8	9	5·6	195
Juni	NW	7·3	4 a.	14·4	6	7·3	133
Juli	NW	8·2	4 a.	13·6	8	7·7	110
August	NNW	5·9	4 a.	13·7	11	7·3	121
September	NNW	5·7	4 a.	13·6	12	7·0	115
Oktober	NNE	5·0	10 a.	13·1	**16**	6·5	133
November	NNE	5·0	10½ a.	12·3	11	6·3	126
Dezember	NE	5·6	11 a.	11·9	10	4·8	174
Jahr	—	5·7	11h a.	13·6	100	5·7	1982

Die Periode des Südwestmonsuns unterscheidet sich auf den beiden Berggipfeln Südindiens eigentlich nur durch die größere Windstärke und größere Bewölkung von der vorausgehenden und der nachfolgenden Zeit. Die Regenmenge zeigt keinen schärferen Übergang oder besser Sprung, noch weniger die Temperatur. Man vergleiche namentlich die Mittelwerte für September und Oktober und man wird dabei außer dem Umspringen des Windes von NW nach NE kein Moment finden, auf welches man das plötzliche Vorrücken des Maximums der Windstärke von 1^h oder 4^h a. auf 8^h oder 10^h a. zurückführen könnte. Die Mittelwerte sind:

Dodabetta:

	Windstärke	Epoche des Maximums	Temperatur	Regen in Prozent[1]
Nordostmonsun,				
Jänner bis Mai........	4·3	9^h a.	11·2	4
Oktober bis Dezember..	3·7	8½ a.	10·2	9
Westmonsun,				
Juni bis September	11·2	12½ a.	10·7	13·5

Kodaikánal:

	Windstärke	Epoche des Maxim.	Temperatur	Regen in Proz.[1]	Bewölkung	Sonnenschein
Nordostmonsun,						
Jänner bis Mai	5·2	11^h a.	14·1	5	4·2	218
Oktober bis Dezember..	5·2	10½ a.	13·4	12	5·9	144
Westmonsun,						
Juni bis September	6·8	4 a.	13·8	9	7·3	120

[1] Pro Monat.

Ich sehe nicht ein, wie man auf eines dieser Elemente die Änderung im Eintritte des Windstärkemaximums zurückführen könnte. Wie sollte das einzige meteorologische Element, welches in der Periode des Westmonsuns größere Unterschiede gegen die vorausgegangene und die nachfolgende Zeit aufweisen kann, d. i. die größere Bewölkung, die Windstärke am Vormittage abschwächen, man müßte ja doch gerade das Gegenteil annehmen. Schwächere Insolation sollte ja umgekehrt die Windstärke zunehmen lassen, weil die aufsteigenden Luftbewegungen schwächer werden, welche sonst die horizontale Windkomponente verringern.

Beachten wir schließlich noch die Unterschiede in der Temperaturänderung mit der Höhe.

Temperaturabnahme pro 100 *m*.

	Nordostmonsun Jänner bis Mai	Westmonsun Juni bis Sept.	Nordostmonsun Oktob. bis Dez.
Dodabetta	0·666°	0·653°	0·620°
Kodaikánal ...	0·640	0·663	0·607

Man sieht, daß auch die Temperaturabnahme mit der Höhe mit der Änderung im Eintritte des täglichen Maximums der Windstärke nicht im Zusammenhange stehen kann.

Um die Unterschiede im täglichen Gange während des Nordost- und Südwestmonsuns genauer darzustellen, habe ich die folgenden Mittelwerte gebildet und auch durch Sinusreihen dargestellt. Die beobachteten Windgeschwindigkeiten mögen vorausgehen. Für den Dodabetta Pik habe ich, wie schon eingangs bemerkt, zwei Reihen von Werten: für die Periode 1848/50, für welche die Mittel für die Westwind-Periode aus Juni bis Oktober gebildet sind, und für die Periode 1847/50, für welche richtiger die Mittel von Juni bis September gerechnet wurden. Trotzdem wollte ich die ersteren nicht verwerfen, da ich schon weitere Rechnungen darauf gegründet hatte.

Meiner Reduktion des Druckes in englischen Pfunden auf den englischen Quadratfuß liegt die Relation zugrunde:

$$p = 0\cdot 005\, v^2,$$

v in englischen Meilen pro Stunde.

Man hat somit, um v in Meter pro Sekunde zu erhalten, die Gleichung:

$$v = \sqrt{40.p} \text{ rund.}$$[1]

Daß diese Relation ziemlich zutreffende mittlere Resultate gibt, zeigt das Ergebnis der Reduktion. Für die mittlere jährliche Windgeschwindigkeit auf dem Dodabetta Pik erhält man 6·6 *m*/sec, während das Anemometer auf dem Kodaikánalobservatorium 13·33 englische Meilen pro Stunde, d. i. 5·96 *m*/sec ergeben hat. Nun ist Dodabetta Pik höher und freier gelegen, daher eine größere Windstärke daselbst wahrscheinlich.

Auch die größere Verstärkung des Westmonsuns auf Dodabetta ist nach dessen Lage näher der Westküste zu erwarten, während auf Kodaikánal die Ostwinde etwas stärker auftreten.

Die Tabelle zeigt deutlicher noch das Zurückspringen des Maximums beim Eintritt des Westmonsuns auf die Nachtstunden, während die Perioden Oktober bis Jänner und Februar bis Mai auch auf Dodabetta Pik vollkommen übereinstimmen.

Man wird auch in den ersten Zahlen eine doppelte tägliche Periode angedeutet finden, besonders bei den Ostwinden Oktober bis Mai.

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Windstärke sind:

Dodabetta ($x = 0$ für Mitternacht, Zentimeter pro Sekunde).

Nordostmonsun:

I. 1848/50, Nov. bis Juni..... $78 \cdot 1 \sin (322 \cdot 0 + x) + 45 \cdot 5 \sin (145^\circ 0 + 2x)$.

II. 1847/50, Okt. bis Mai .... $56 \cdot 4 \sin (356 \cdot 7 + x) + 33 \cdot 5 \sin (164 \cdot 3 + 2x)$.

Westmonsun:

I. 1848/50, Mai bis Okt...... $100 \cdot 6 \sin (72 \cdot 2 + x) + 38 \cdot 9 \sin (230 \cdot 6 + 2x)$.

II. 1847/50, Juni bis Sept. .... $130 \cdot 0 \sin (68 \cdot 3 + x) + 47 \cdot 9 \sin (225 \cdot 9 + 2x)$.

Kodaikánal:

Nordostmonsun .... $64 \cdot 1 \sin (341 \cdot 6 + x) + 43 \cdot 9 \sin (97^\circ 1 + 2x)$.

Westmonsun .... $64 \cdot 6 \sin (41 \cdot 6 + x) + 3 \cdot 7 \sin (318 \cdot 0 + 2x)$.

---

[1] Genauer, Logarithmus des Faktors 1·6017.

III. Täglicher Gang der Windstärke auf den Berggipfeln Südindiens während der Herrschaft des Nordost- und des Südwestmonsuns.

	Dodabetta (2633 *m*) beobachtet 1848/50		Kodaikánal (2343 *m*) beobachtet 1901/06		Dodabetta (Anemometer Osler) 1847/50						Jahr
					Winddruck Pfund pro engl. Quadratfuß			Winddruck reduziert auf Meter pro Sek.			
	November bis Mai	Juni bis Oktober	Oktober bis Mai	Juni bis September	Okt. bis Jänner	Februar bis Mai	Juni bis Septemb.	Okt. bis Jänner	Februar bis Mai	Juni bis Septemb.	
	in Meter pro Sekunde										
Mitternacht	3·50	11·22	5·74	7·16	·35	·59	3·79	3·74	4·85	12·30	6·96
1h a.	3·54	11·25	**5·83**	7·22	·35	·60	3·78	3·74	4·90	12·29	6·98
2	3·54	11·26	5·81	7·34	·30	·60	3·72	3·46	4·90	12·20	6·85*
3	3·79	11·25	5·76	7·46	·31	·66	3·79	3·52	5·13	12·30	6·98
4	3·69	**11·50**	5·71*	**7·54**	·34	·62	**3·81**	3·69	4·98	**12·34**	7·00
5	4·00	11·00	5·79	7·46	·37	·71	3·71	3·84	5·32	12·17	7·11
6	4·03	10·83	5·79	7·30	·35	·78	3·63	3·74	5·58	12·04	7·12
7	4·47	10·99	5·86	7·08	·36	·84	3·58	3·79	5·79	11·96	7·18
8	4·76	10·70	5·88	6·67	·40	·90	3·48	4·00	6·00	11·82	**7·27**
9	**5·21**	10·66	6·16	6·62	**·45**	**·96**	3·28	**4·24**	**6·19**	11·45	7·29

10	4·93	10·20	6·35	6·68	·34	·80	2·92	3·69	5·65	10·80	6·71
11	4·84	9·51	6·53	6·52	·33	·80	2·50	3·63	5·65	9·98	6·42
Mittag	4·53	9·02	6·25	6·28	·26	·70	2·33	3·22	5·30	9·65	6·06
1^h p.	4·41	9·02*	5·89	6·17	·26	·64	2·34*	3·22	5·06	9·67	5·98
2	3·76 •	9·16	5·53	6·02*	·24	·48	2·30	3·10	4·38	9·59*	5·60
3	3·42	9·56	5·20	6·14	·21	·48	2·48	2·90	4·38	9·95	5·74*
4	3·01	9·85	4·93	6·17	·20*	·37	2·71	2·83*	3·85	10·41	5·70
5	2·87*	10·23	4·49	5·95	·22	·37*	2·90	2·96	3·85*	10·76	5·86
6	2·96	10·57	4·38*	6·28	·23	·44	3·14	3·03	4·19	11·20	6·14
7	3·05	10·79	4·49	6·49	·27	·44	3·37	3·29	4·19	11·61	6·36
8	3·42	11·09	4·92	6·73	·32	·49	3·61	3·58	4·43	12·01	6·67
9	3·61	11·26	4·99	6·67	·35	·52	3·71	3·74	4·56	12·17	6·82
10	3·65	11·44	5·16	6·86	·35	·55	3·88	3·74	4·69	12·46	6·96
11	3·42	11·02	5·51	7·01	·35	·57	3·71	3·74	4·78	12·17	6·90
Mittel	3·85	10·56	5·54	6·74	·31	·62	3·27	3·52	4·94	11·38	6·61

Die Gleichungen für den täglichen Gang der Windstärke während der entgegengesetzten Windrichtungen stimmen für beide Berggipfel hinreichend überein, daß man einen mittleren Gang berechnen kann. Man erhält (mit I) folgenden mittleren Gang:

Nordostmonsun... $70 \cdot 0 \sin(330 \cdot 8+x)+40 \cdot 8 \sin(121 \cdot 5+2x)$,

Südwestmonsun .. $79 \cdot 7 \sin(\ 60 \cdot 3+x)+19 \cdot 7 \sin(235 \cdot 8+2x)$.

Nach diesen Gleichungen sind die in Tabelle IV folgenden Abweichungen (in Zentimeter pro Sekunde) der Stundenmittel vom Tagesmittel der Windstärke berechnet worden.

Im Mittel der Registrierungen auf beiden Berggipfeln ergibt sich somit:

Periode des Nordostmonsuns.

Der tägliche Gang der Windstärke zeigt zwei Maxima und Minima:

Das Hauptmaximum tritt um 10^h vormittags ein, das Hauptminimum um 6^h abends.

Daneben bemerken wir schwache nächtliche Extreme um 1^h und um 3^h.

Periode des Westmonsuns.

Der tägliche Gang ist einfach:

Hauptmaximum um 4^h morgens, Hauptminimum um $1^1/_2{}^h$ nachmittags.

Der Eintritt des Maximums ist demnach um 6 Stunden zurückgesprungen, ähnlich jener des Minimums, dieser aber nur um $4^1/_2$ Stunden. Die tägliche Amplitude beträgt von Oktober bis Mai $1 \cdot 92$ *m*/sec, ist also sehr beträchtlich, von Juni bis September etwas weniger, $1 \cdot 65$ *m*/sec.

Der Abstand der Extreme beträgt in der ersten Periode (Oktober bis Mai) 8 Stunden, in der zweiten (Juni bis September) etwa $9^1/_2$ Stunden.

IV. Jahreszeitliche Ungleichheit im täglichen Gange der Windstärke auf den Berggipfeln Südindiens.

	Dodabetta (2633 *m*) berechnet 1848/50		Kodaikánal (2343 *m*) berechnet 1901/06		Mittel 2500 *m*	
	November bis Mai	Juni bis Oktober	Oktober bis Mai	Juni bis September	Oktober bis Mai	Juni bis Septemb.
	in Zentimeter pro Sekunde					
Mittern.	— 22	65	23	41	1	53
1^h a.	— 27	62	**31**	53	2	57
2	— 30*	62*	30	63	0	62
3	— 27	65	23	**67**	— 2	66
4	— 16	**68**	16	67	0	**68**
5	6	68	13*	61	9	65
6	36	61	17	51	26	56
7	68	44	29	37	48	40
8	96	16	46	19	71	17
9	115	— 21	63	1	89	—10
10	**117**	— 61	74	— 17	**96**	—39
11	103	— 98	**76**	— 32	90	—65
Mittag	74	—126	64	— 45	69	—85
1^h p.	34	—139*	39	— 55	37	—97*
2	— 8	—135	4	— 60	— 2	—97*
3	— 46	—114	— 34	— 62*	—42	—88
4	— 74	— 81	— 69	— 60	—72	—70
5	— 88*	— 41	— 94	— 54	—91	—48
6	— 87	— 1	—104*	— 46	—96*	—23
7	— 76	33	— 99	— 35	—87	— 1
8	— 58	57	— 79	— 22	—69	18
9	— 41	70	— 52	— 6	—46	32
10	— 27	**74**	— 22	9	—24	41
11	— 22	71	5	25	— 8	48
Mittel	54	68	46	41	45	52

Vergleichen wir noch die Jahresmittel des täglichen Ganges der Windstärke auf den beiden Berggipfeln untereinander und mit jenen für die europäischen Gipfelstationen. (Die Ableitung des Ganges auf letzteren wird später folgen.)

Jährlicher Gang der Windstärke.

(Zentimeter pro Sekunde.)

	Kodaikánal 1901/06	Dodabetta 1847/50	Südindien	Europa Nordamerika
Mitternacht	11	33	22	**37**
1h a.	35	30	32	34
2	52	29*	40	30
3	62	32	47	28
4	**62**	40	51	19
5	55	50	**58**	13
6	44	59	51	6
7	33	**63**	48	− 5
8	24	58	41	−18
9	18	43	30	−29
10	15	20	17	−39
11	14	−11	2	−43
Mittag	13	−44	−15	−44*
1h p.	8	−72	−32	−43
2	− 1	−91	−46	−39
3	−16	−98*	−57	−32
4	−34	−91	−62	−23
5	−53	−74	−63*	−10
6	−68	−48	−58	4
7	−76*	−21	−48	17
8	−75	4	−36	28
9	−63	22	−20	35
10	−43	33	− 5	36
11	−17	34	8	**37**
Mittel	37	46	37	27

Die Jahresgleichungen des täglichen Ganges sind:

Kodaikánal...... $56 \cdot 1 \sin(6^\circ 2 + x) + 25 \cdot 6 \sin(107^\circ 7 + 2x)$.

Dodabetta I..... $49 \cdot 0 \sin(14 \cdot 8 + x) + 32 \cdot 6 \sin(176 \cdot 6 + 2x)$.

» II..... $65 \cdot 8 \sin(35 \cdot 4 + x) + 33 \cdot 0 \sin(189 \cdot 4 + 2x)$.

($x = 0$ für Mitternacht, Zentimeter pro Sekunde.)

Bei Dodabetta wurde angenommen, da daselbst eine Druckplatte die Windstärke registriert hat, daß die Angaben für die angegebene Stunde selbst gelten.

Die Epochen der Extreme auf den beiden Berggipfeln liegen um drei bis vier Stunden auseinander und sonderbarerweise in der Art, daß der Zeitabstand vom Maximum zum Minimum auf dem Dodabetta nur 8 Stunden beträgt, dagegen auf Kodaikánal 15 Stunden, also fast doppelt so lang ist. Das Tagesmaximum der Windstärke tritt auf dem Dodabetta Pik um 3 Stunden später ein, das Tagesminimum um 4 Stunden früher.

Der mittlere tägliche Gang aus dem Gange auf den beiden Gipfeln ist daher etwas unsicher bestimmt. Die Gleichung desselben ist:

Indien..... $59 \cdot 2 \sin(18^\circ 0 + x) + 5 \cdot 9 \sin(146^\circ 1 + 2x)$.

Einige Berggipfel in Europa und Nordamerika liefern dagegen die Gleichung:

Europa.... $41^\circ 8 \sin(90 \cdot 8 + x) + 5 \cdot 1 \sin(257^\circ 6 + 2x)$.

Da das zweite Glied gegen das erste sehr klein ist, kann man kurz sagen:

Auf den südindischen Berggipfeln treten die täglichen Extreme der Windstärke um 4·9 Stunden, also rund um 5 Stunden später ein als bei uns.

Was mag die Ursache des Zurückgehens der Epoche der maximalen Windstärke vom Vormittag in die ersten Nachtstunden beim Einsetzen des Westmonsuns sein?

Früher schon habe ich gezeigt, daß in den den Eintritt des Westmonsuns begleitenden meteorologischen Erscheinungen kein Grund gefunden werden kann für die Verlegung der

Maximumepoche der Windstärke in die Nacht. Ich vermag deshalb keinen anderen Grund dafür zu finden als den, daß der Gradient für Westwinde in der Nacht größer ist als bei Tag.

Man könnte zunächst meinen, dafür folgendes anführen zu dürfen. Das nächtliche Minimum des Luftdruckes stellt sich über den Landflächen stärker ein als über mehr ozeanischen Gebieten. Nun haben in der Tat die hier in Betracht gezogenen südindischen Berggipfel nach Norden hin vor sich die breite, auch noch in der Regenzeit sich bei Tag stärker erwärmende, bei Nacht stärker abkühlende Landfläche des Dekkan. Nach Süden hin verschmälert sich die vorderindische Halbinsel rasch und wird dadurch mehr ozeanisch. Die Niederung nördlich von den Palani Hills, denen Kodaikánal angehört, erwärmt sich sehr stark bei Tag und kühlt nachts wieder stark ab; das gibt eine starke ganztägige Barometerschwankung auch auf den Bergen. Die Nilgirris haben diese Niederung allerdings im Osten vor sich, dagegen das relativ trockene Hochland von Mysore im Norden. Beobachtungen, aus welchen die Zunahme des nächtlichen Barometerminimums von Süden nach Norden in der Höhe in Südindien sich nachweisen ließe, fehlen natürlich.

Die Ostwinde müßten in weiterer Verfolgung dieser Anknüpfung des täglichen Ganges der Windstärke an den täglichen Barometergang in der Höhe, bei Nacht geschwächt werden, und wir finden in der Tat zur Zeit des Nordostmonsuns ein zweites nächtliches Minimum der Windstärke auf beiden Berggipfeln, namentlich auf Dodabetta Pik. Dagegen verspätet sich das Maximum der Windstärke bei Ostwinden weit in den Vormittag hinein (10^h a. Dodabetta, 11^h a. Kodaikánal). Das würde zugunsten obiger Annahme sprechen.

Das nachmittägige Minimum der Windstärke tritt beiläufig zur Zeit der höchsten mittleren Temperatur der Luftschichten unterhalb der indischen Berggipfel ein, also zur Zeit der stärksten Hebung der Flächen gleichen Druckes durch die steigende Temperatur; wie ja auch das Maximum der Windstärke nahezu mit der stärksten Senkung derselben zusammenfällt.

Um aber die möglichen Beziehungen zwischen dem täglichen Gange der Windstärke auf den Berggipfeln mit jenem

des Luftdruckes eingehender prüfen zu können, habe ich die nachfolgende Tabelle V zusammengestellt.

V. Vergleich des täglichen Ganges der Windstärke mit jenem des Luftdruckes.

	Dodabetta 1847/50			Täglicher Gang des Luftdruckes (Jahr)		Stündliche Änderungen	
	Oktob. bis Mai	Juni bis Sept.	Jahr	Dodabetta 561·7 *mm* 2634 *m*	Agustia Pik 611·9 *mm* 1890 *m*	Luft-druck $^1/_{100}$ *mm*	Wind-stärke *cm*/sec
Mittern.	**6**	87	33	12	18	−32	− 1
1[h] a.	3	83	30	− 21	−22	−33	− 3*
2	2*	83*	29*	− 55	−56	−34*	− 1
3	5	86	32	− 76	−74	−21	3
4	15	**90**	40	− 82*	−75*	− 6	8
5	30	**91**	50	− 65	−58	17	**10**
6	47	83	59	− 34	−25	31	9
7	64	62	**63**	10	15	**44**	4
8	**74**	27	58	52	57	42	− 5
9	**74**	− 18	43	84	86	32	−15
10	64	− 69	20	**102**	**95**	18	−23
11	42	−117	−11	85	79	−17	−31
Mittag	12	−155	−44	55	42	−30	−33*
1[h] p.	−20	−176*	−72	13	−02	−42*	−28
2	−49	−175	−91	−29	−42	−42	−19
3	−70	−153	−98*	−51	−69	−22	− 7
4	−80*	−114	−91	−62*	−78*	−11	7
5	−78	− 65	−74	−50	−67	12	17
6	−65	− 14	−48	−34	−39	16	26
7	−47	31	−21	− 6	− 2	28	**27**
8	−27	65	4	22	36	**28**	25
9	−10	85	22	46	62	24	18
10	2	**92**	33	**54**	**68**	8	11
11	**6**	91	**34**	44	51	−10	1
Mittel	37	96	46	48	51	25	14

Man sieht zunächst, daß allerdings das Nachmittagsminimum der Windstärke mit jenem des Luftdruckes ziemlich nahe zusammenfällt, ebenso wie das Vormittagsmaximum der Windstärke (allerdings erheblich) vor dem Maximum des Luftdruckes eintritt. Aber bei Nacht ist keine Übereinstimmung zu bemerken und eine einfache Beziehung scheint daher zu fehlen.

Eine viel bessere, ja fast überraschende Übereinstimmung finden wir bei den stündlichen Änderungen der beiden Elemente. Die Epochen der stärksten Abnahme und Zunahme treten bei beiden Elementen, Windstärke und Luftdruck, ziemlich gleichzeitig ein.

Um diesen Umstand genauer zu verfolgen, habe ich die Gleichungen für die stündlichen Änderungen berechnet.

Stündliche Änderung.

Luftdruck ...... $5\cdot6 \sin(359°6+x)+38\cdot2 \sin(227°5+2x)$.
Windstärke .... $17\cdot1 \sin(118\cdot2+x)+17\cdot3 \sin(264\cdot0+2x)$.

Amplituden: Luftdruck in Hundertelmillimeter, Windstärke in Zentimeter pro Sekunde.

In der doppelten täglichen Periode, dem Hauptgliede, stimmen die stündlichen Änderungen bis auf einen Phasenunterschied von wenig mehr als einer Stunde überein. Das ganztägige Glied ist aber recht verschieden, es ist relativ viel größer und der Phasenunterschied sehr groß, rund 16 Stunden.

Bei der halbtägigen Periode entspricht einer Luftdruckänderung von 1 Hundertelmillimeter eine Änderung der Windstärke um 0·45 *cm*/sec.

Berechnet man in ähnlicher Weise die stündliche Änderung der Windstärke im Jahresmittel für Kodaikánal, so zeigt sich zwar auch eine doppelte Periode, aber die Phasenzeiten sind recht verschieden von jenen der Luftdruckänderungen.[1]

Schließt man aber die Periode des stürmischen Südwestmonsuns aus, so erhält man folgende wirklich bemerkenswerte Erscheinung:

---

[1] Die Gleichung ist:

Kodaikánal (Jahr) .... $\Delta v = 15\cdot4 \sin(81\cdot8+x)+13\cdot2 \sin(102\cdot3+2x)$.

VI. Stündliche Änderung der Windstärke in den acht Monaten Oktober bis Mai.

	Dodabetta 1847/50	Kodaikánal	Mittel
Mitternacht	0	18	9
1h a.	− 3*	8	2
2	− 1	− 1	− 1
3	3	− 7	− 2*
4	10	− 7*	1
5	15	− 3	6
6	**17**	4	11
7	17	12	**14**
8	10	**17**	14
9	0	17	8
10	−10	11	0
11	−22	2	−10
Mittag	−30	−12	−21
1h p.	−32*	−25	−28
2	−29	−35	−32*
3	−21	−38*	−30
4	−10	−35	−22
5	2	−25	−10
6	13	−10	1
7	18	5	12
8	**20**	20	20
9	17	27	**22**
10	12	**30**	21
11	4	27	15
Mittel	13	16	13

Die doppelte tägliche Periode ist in den stündlichen Änderungen der Windstärke auf beiden Berggipfeln auf das entschiedenste ausgesprochen. Auf Kodaikánal stimmt die

doppelte tägliche Periode vollkommen mit dem täglichen Gange des Luftdruckes überein.

Maxima um $8^1/_2{}^h$ a. und 10^h p.
Minima » $3^1/_2{}^h$ a. » 3^h p.

Der tägliche Gang der Windstärke auf Kodaikánal ist viel sicherer bestimmt als jener für den Dodabetta Pik (Kodaikánalregistrierung der Windgeschwindigkeit, nicht des Winddruckes, dann sechsjährige Mittel statt bloß vierjährigen.)

Die Gleichungen des täglichen Ganges der stündlichen Änderungen der Windstärke sind:

Oktober bis Mai.

Kodaikánal...... $16 \cdot 7 \sin(64^\circ 1 + x) + 22 \cdot 7 \sin(172^\circ 1 + 2x)$.
Dodabetta....... $14 \cdot 6 \sin(79 \cdot 9 + x) + 18 \cdot 3 \sin(240 \cdot 5 + 2x)$.

In beiden Fällen ist die doppelte tägliche Periode größer als die ganztägige. Die Gleichung für Kodaikánal ist geradezu eine Gleichung des täglichen Barometerganges.[1] Die Phasenzeit des ganztägigen Gliedes ist allerdings jene in der Niederung, nicht jene auf einem Berggipfel, aber die halbtägige Periode gleicht ganz jener des Luftdruckes.

Im Mittel erhält man für die stündlichen Änderungen der Windstärke folgende Gleichung:

---

[1] Der tägliche Gang des Barometers auf Dodabetta und auf Agustia Pik (für Kodaikánal ist sie noch nicht bekannt) ist durch folgende Gleichungen gegeben:

Dodabetta..... $0 \cdot 217 \sin(276^\circ 6 + x) + 0 \cdot 734 \sin(152^\circ 6 + 2x)$.
Agustia Pik.... $0 \cdot 162 \sin(301 \cdot 2 + x) + 0 \cdot 795 \sin(156 \cdot 9 + 2x)$.

Die Phasenzeiten und Amplituden des täglichen Barometerganges auf dem Dodabetta Pik sind die gleichen in den zwei Perioden des Nordost- und des Südwestmonsuns:

	Erstes				Zweites			
	Minimum		Maximum		Minimum		Maximum	
Nov. bis Mai....	4^h a.	−0·85	10^h a.	1·03	4^h p.	−0·63	10^h p.	·55 *mm*
Juni » Okt....	»	−0·77	»	1·00	»	−0·63	»	·52 *mm*

Stündliche Änderung der Windstärke (Zentimeter pro Sekunde) auf den Berggipfeln Südindiens (Oktober bis Mai; Nordostmonsun).

$$15\cdot5 \sin(71^\circ 2 + x) + 12\cdot3 \sin(210^\circ 7 + 2x).$$

Stündliche Änderungen des Luftdruckes (Dodabetta).

$$5\cdot6 \sin(359\cdot6 + x) + 38\cdot2 \sin(227\cdot5 + 2x).$$

Die Phasenzeit des zweiten Gliedes (halbtägige Periode) stimmt bis auf eine halbe Stunde überein, um diesen Betrag verspätet sich der Eintritt der Phasenzeiten bei den Änderungen der Windstärke gegen jene des Luftdruckes.

Ich meine, daß man nach den vorstehenden Nachweisen kaum noch zu einem Zweifel berechtigt ist, daß zwischen dem täglichen Barometergange und den Änderungen der Windstärke auf den indischen Berggipfeln eine engere Beziehung besteht. Diese Beziehung wird aber erst völlig klar, wenn man die Periode der Ostwinde von jener der Westwinde unterscheidet. Im Mittel beider Perioden sind die charakteristischen Erscheinungen verwischt.

Die doppelten täglichen Luftdruckwellen umkreisen die Erde von Ost nach West in einem mittleren Abstande von rund 6 Stunden, d. i. 90 Längegraden (Maximum zum Minimum). Unter 11°4 Breite (Dodabetta) mißt ein Grad noch 109·14 *km*, es kommen demnach auf 90 Längengrade rund $88^1/_2$ mittlere Grade, nach welchen der Gradient gemessen wird.

Die Druckdifferenz zwischen Wellenkamm und Wellental beträgt auf Dodabetta Pik noch 1·47 *mm*. Der Luftdruckgradient von Ost nach West, der durch diese doppelten Wellenzüge entsteht, beträgt daher allerdings bloß 0·0166 *mm*.

Geht man aber von der bekannten Gleichung aus:

$$v = \frac{6\cdot36\Delta B}{\sin\varphi},$$

welche für 760 *mm* Luftdruck gilt, und reduziert sie auf die Breite von 11°4 und 562 *mm* Luftdruck, so erhält man:

$$v = 43\cdot55\Delta B \; m/\text{sec}.$$

Es gibt daher ein Gradient von bloß 0·0166 *mm* unter 11°4 Breite in dem Niveau des Dodabettagipfels noch eine Windgeschwindigkeit von etwas mehr als 72 *cm*/sec.

Die Möglichkeit einer Verstärkung und Abschwächung der Winde durch den Vorübergang der täglichen Luftdruckwellen ist also dadurch gegeben.

Der Einfluß derselben auf den täglichen Gang der Änderung der Windstärke muß aber dann für die Westwinde ein anderer sein als für die Ostwinde.

Bildet man die stündlichen Änderungen der Windstärke für die vier Monate des Westmonsuns für Dodabetta Pik und Kodaikánal, so bemerkt man in der Tat eine durchgreifende Änderung im täglichen Gange, die besonders beim Kodaikánal entschieden hervortritt, so daß an die Stelle des Vormittagsmaximums ein Minimum tritt, die Periode wird eine ganztägige, indem das Abendmaximum bleibt.

Die Gleichungen für die stündlichen Änderungen der Windstärke während der Periode des Südwestmonsuns (Juni bis September) sind:

Dodabetta...... $34 \cdot 0 \sin(209°2+x)+25 \cdot 6 \sin(303°9+2x)$.
Kodaikánal..... $16 \cdot 9 \sin(124 \cdot 1+x)+\ 2 \cdot 0 \sin(\ 33 \cdot 6+2x)$.

Sie sind also ziemlich verschieden und gestatten kaum weitergehende Schlüsse. Erlaubt man sich einen mittleren täglichen Gang aufzustellen und gibt dabei den (zu großen) Amplituden auf Dodabetta Pik bloß das halbe Gewicht, so erhält man die Gleichung:

$$12 \cdot 5 \sin(166°8+x)+6 \cdot 5 \sin(313°1+2x).$$

Die Windstärke des Südwestmonsuns wird durch den Eintritt des Vormittagsmaximums geschwächt, durch den Eintritt des Nachmittagsminimums verstärkt. Bei Dodabetta Pik zeigt sich der gleiche Einfluß auch beim Abendmaximum und beim Morgenminimum.

Mit größter, geradezu überraschender Entschiedenheit tritt aber dieser Einfluß zutage, wenn man die Differenzen der stündlichen Änderungen der Windstärke vom Nordostmonsun zum Südwestmonsun bildet.

VI. Einfluß des Südwestmonsuns auf die stündliche Änderung der Windstärke.

	Stündliche Änderung der Windstärke in den vier Monaten des Südwestmonsuns		Änderung gegen die Periode des Nordostmonsuns. Südwestmonsun — Nordostmonsun		Mittel
	Dodabetta	Kodaikánal	Dodabetta	Kodaikánal	
Mitternacht	— 4	16	— 4	— 2	— 3
1h a.	— 4*	12	— 1	4	2
2	0	10	**1**	**11**	**6**
3	3	4	0	11	5
4	4	0	— 6	7	0
5	1	— 6	—14	— 3	— 8
6	— 8	—10	—25	—14	—20
7	—21	—14	—38	—26	—32
8	—35	—18	—45	—35	—40
9	—45	—18*	—45*	—35*	—40*
10	—51*	—18	—41	—29	—35
11	—48	—15	—26	—17	—21
Mittag	—38	—13	— 8	1	— 4
1h p.	—21	—10	11	15	13
2	1	— 5	30	30	30
3	22	— 2	43	36	40
4	39	2	**49**	**37**	**43**
5	49	6	47	31	39
6	**51**	8	38	18	28
7	45	11	27	6	16
8	34	13	14	— 7	3
9	20	16	3	—11	— 4
10	7	**15**	— 5	—15*	—10*
11	— 1	16	— 5*	—11	— 8
Mittel	23	11	22	17	19

Der Grund davon ist wohl der, daß in diesen Differenzen gewisse anderweitige konstante und lokale Einflüsse eliminiert erscheinen, so daß der Einfluß der **westlichen Windrichtung** auf die stündlichen Änderungen der Windstärke voll zur Geltung kommt.

Diese Änderungen stellen mit größter Übereinstimmung den umgekehrten täglichen Luftdruckgang dar:

Erstes		Zweites	
Maximum	Minimum	Maximum	Minimum
$2^1/_2{}^h$ a.	9^h a.	4^h p.	10^h p.

Sehr bemerkenswert ist dabei, daß die Amplitude bei Tag sehr groß, bei Nacht klein ist. Die Gleichung dieser Kurve ist folgende:

Stündliche Änderung in den Windstärken beim Eintritt des Westmonsuns gegen jene bei Ostmonsun.

$$24\cdot 6 \sin(179^\circ 1 + x) + 23\cdot 2 \sin(350^\circ 1 + x).$$

Die ganztägige Periode hat ihr Minimum um 6^h morgens, das Maximum um 6^h abends.

Die halbtägige Periode hat ihr Maximum um $3^1/_2{}^h$ morgens und abends und ihr Minimum um $9^1/_2{}^h$ nachmittags und abends, also **gerade entgegengesetzt** der doppelten täglichen Barometerschwankung.

Das Herannahen des vormittägigen Barometermaximums vom Osten her schwächt die Westwinde, das Heranrücken des nachmittägigen Minimums verstärkt sie, dasselbe ist auch bei Nacht der Fall, nur in viel geringerem Maße. Die Ursache davon ist die Interferenz mit einer ganztägigen Welle, welche von der Natur der thermischen Druckwelle auf Berggipfeln zu sein scheint, aber in der Phasenzeit um $6^1/_2$ Stunden von ihr abweicht, um diesen Betrag **verspätet** eintritt (A_1 auf Dodabetta 276°6, hier 179°1). Es könnte doch eine Temperaturwelle sein, denn in der freien Atmosphäre in Luftschichten von 1000 bis 2000 *m* Mächtigkeit kann sich der Eintritt der Extreme

gegen jene an der Erdoberfläche wohl um 4 Stunden verspäten.[1] Aber der Einfluß derselben auf die Stärke der Westwinde sollte in Analogie mit dem Einfluß der doppelten täglichen Luftdruckwelle der entgegengesetzte von dem sein, den wir in der Tat beobachten. Es ist, als wenn diese Druckwelle von West nach Ost laufen würde, aber das ist doch nicht anzunehmen.

Die Amplituden der täglichen Änderungen der Windstärke vom Vormittag zum Nachmittag sind von der Größenordnung, wie sie zu erwarten ist als Effekt der Amplitude der Druckwelle zwischen 9 bis 10^h a. und 3 bis 4^h p.

Ich glaube, in dem Vorhergehenden nachgewiesen zu haben, daß die doppelte tägliche Luftdruckschwankung in den Änderungen der Windstärke auf den südindischen Berggipfeln ganz entschieden sich geltend macht.

Zum Schlusse dieses Abschnittes soll eine Tabelle folgen, welche den Eintritt des Südwestmonsuns auf dem Gipfel des Dodabetta Pik in, ich möchte sagen, drastischer Weise zur Darstellung bringt. Der »Ausbruch des Monsuns«, »the bursting of the monsoon«, sein regelmäßiges Eintreten mit dem Juni wird sehr deutlich vor Augen geführt in dem schroffen Übergang vom Mai zum Juni in Windrichtung und Windstärke. Vom Mai zum Juni springt die Windrichtung Jahr für Jahr um 230 bis 240° von Nordost nach West um und gleichzeitig steigt der mittlere Winddruck (englische Pfunde pro englischem Quadratfuß) von 0·8 auf 4·5 lbs., was den Ausdruck »the bursting of monsoon« gewiß rechtfertigt.

---

[1] Auf dem Straßburger Münsterturm und auf dem Eiffelturm verspätet sich der Eintritt der Extreme schon um 2 Stunden. Hann, Täglicher Temperaturgang auf dem Straßburger Münsterturm. Meteorolog. Zeitschrift, 1901, p. 211.

VII. Mittlere Windrichtungen und Windstärke auf dem Dodabetta Pik.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Azimut, von Nord über Süd nach West												
1848	71	77	77	68	30	279	287	303	335	340	40	59
1849	86	56	88	58	55	272	303	312	299	4	78	81
1850	67	116	80	65	46	286	283	256	330	143	67	114
Mittel	75	83	83	64	44	279	291	290	321	42	62	85
Name der Windrichtung												
1848	ENE	E b N	E b N	ENE	NE b N	W b N	WNW	NW b W	NNW	NNW	NE	NE b E
1849	E	NE b E	E	NE b E	NE b E	W	NW b W	NW	NW b W	N	E b N	E b N
1850	ENE	ESE	E b N	ENE	NE	W b N	W b N	W b S	NW b W	SE b S	ENE	ESE
Mittel	E b N	E b N	E b N	ENE	NE	W b N	WNW	WNW	NW b N	NE	ENE	E
Mittlere Windstärke (Libres [Avoir dupois] on square foot)												
1847	—	0·2	1·0	2·7	2·0	—	2·7	2·7	4·4	0·6	0·5	0·1
1848	0·5	0·7	0·4	0·6	0·5	6·5	4·3	2·6	1·2	0·2	0·5	0·3
1849	0·1	0·2	0·7	0·2	0·4	4·6	3·6	2·5	3·7	0·3	0·5	0·2
1850	0·1	0·1	0·2	0·1	0·1	2·5	2·3	(0·3)	1·8	0·1	0·1	0·1
Mittel	0·2	0·3	0·6	0·9	0·8	4·5	3·2	2·6	2·8	0·3	0·4	0·2

Ebenso entschieden ist der Windwechsel auf Kodaikánal. Ich will davon nur die Windrichtungen und Windstärken von Mai und Juni in den einzelnen Jahrgängen hier anführen.

Die Windrichtungen sind mit 0 bis 31 bezeichnet, in der üblichen Weise 0 Nord, 8 Ost, 16 Süd, 24 West.

Die Windstärken sind in englischen Meilen Windweg pro Tag angegeben.

VIII. Kodaikánal.

	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	Mittel
Windrichtung								
Mai.......	4	1	2	2	2	2	4	2·4
Juni......	27	28	30	29	27	27	26	27·7
Windstärke engl. Meilen pro Tag								
Mai......	148	283	218	282	241	292	286	250
Juni......	435	357	343	334[1]	552	398	357	397

Der Sprung in der Windstärke ist hier viel weniger ausgesprochen als auf Dodabetta Pik. Einer Anmerkung in dem Report 1900/01 ist zu entnehmen, daß die Windstärken auf Kodaikánal zu klein sind, weil das Anemometer nicht frei genug aufgestellt ist.

Die vorstehenden Ergebnisse über den täglichen Gang der Windstärke auf den Berggipfeln Südindiens haben mich veranlaßt, auch den täglichen Gang der Windstärke auf den Berggipfeln mittlerer Breiten in Europa und Nordamerika in aller Kürze einer erneuerten Untersuchung zu unterziehen.

---

[1] Juli: 618 englische Meilen.

Über die Änderung im täglichen Gange der Windstärke vom Winter zum Sommer auf den Berggipfeln in Europa und Nordamerika und über die Ursachen des täglichen Ganges überhaupt.

Die so bemerkenswerte jährliche Änderung im täglichen Gange der Windgeschwindigkeit auf den Berggipfeln in Südindien veranlaßte mich, selbe auch in den mittleren Breiten von Europa und Nordamerika aufzusuchen. Ich bildete deshalb die Differenzen des täglichen Ganges im Winter und im Sommer auf den Berggipfeln, von welchen mir die Ergebnisse von Registrierungen der Windgeschwindigkeit vorlagen. Dazu wurden benützt:

Blue Hill, Nordamerika, Mass.	42°	13′ N,	203 *m*.
Eiffelturm, Paris	48	50 N,	338
Ben Nevis, Schottland	56	48 N,	1443
Puy-de-Dôme, Südfrankreich	45	46 N,	1467
Bjelašnica, Bosnien	43	42 N,	2067
Obir, Kärnten	46	30 N,	2140
Säntis, Schweiz	47	15 N,	2500
Pic du Midi, Südfrankreich	42	56 N,	2859
Sonnblick, Salzburg	47	3 N,	3106
Pikes Pik, Colorado	38	50 N,	4300

Der tägliche Gang der Windstärke im Winter und Sommer lag schon berechnet vor für die Stationen Blue Hill, Eiffelturm, Ben Nevis, Obir, Säntis, Sonnblick, Pikes Pik.[1] Für den Puy-de-Dôme, die Bjelašnica, den Pic du Midi mußte der tägliche Gang erst berechnet werden. Außerdem berechnete ich je eine zweite neuere Reihe von Registrierungen für den Obir und für den Sonnblick. Es handelte sich dabei darum, inwieweit die Unterschiede des täglichen Ganges auf den Berggipfeln etwa auch von den benützten Jahrgängen der Registrierungen abhängig sein möchten. Die für den Obir aus 1886 bis 1890 und 1899

---

[1] Siehe meine Abhandlung: Die tägliche Periode der Windstärke auf dem Sonnblickgipfel und auf Berggipfeln überhaupt. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII, Juli 1894.

bis 1903 und für den Sonnblick aus 1888 bis 1893 und 1901 bis 1905 erhaltenen Resultate findet man in den folgenden Tabellen *A, B, C, D* nebeneinandergestellt.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse aus den älteren und den neueren Registrierungen sind vollkommen befriedigend, namentlich bei Obir, beim Sonnblick habe ich (mit Rücksicht auf die Temperatur) Winter und Frühling, dann Sommer und Herbst zusammengenommen; darauf ist wohl ein Teil der beim Sonnblick auftretenden größeren Unterschiede zwischen den beiden Beobachtungsreihen zurückzuführen.

Der tägliche Gang der Windstärke auf dem Puy de Dôme und auf dem Pic du Midi wird in den »Annales du Bureau Central Mét.« nur dreistündig mitgeteilt, für den Puy de Dôme in Meter pro Sekunde, für den Pic du Midi aber nach Graden der halben Beaufort-Scala. Letztere wurden auf Meter pro Sekunde reduziert und für beide Gipfel die Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke aufgestellt, mittels welchen dann die Abweichungen der Windstärke zu den einzelnen Tagesstunden vom Mittel berechnet werden konnten. Näheres darüber findet man später im Anhange.

Die Ergebnisse der Registrierungen der Windstärke auf der Bjelašnica werden in den Jahrbüchern des meteorologischen Dienstes im Okkupationsgebiet veröffentlicht. Die rohen Monatsmittel der stündlichen Windgeschwindigkeit findet man in der Meteorologischen Zeitschrift 1908.

In den folgenden vier Tabellen findet man zusammengestellt:

1. Den täglichen Gang der Windstärke im Winter,
2. denselben im Sommer,
3. im Mittel des ganzen Jahres,
4. die stündlichen Differenzen Sommer—Winter.

1. Der tägliche Gang der Windstärke im Winter hat relativ kleine Amplituden und verläuft recht verschieden auf den einzelnen Höhen. Charakteristisch für die unteren Höhen bis zu 3 *km* scheint zu sein: ein nächtliches Minimum etwa um 3^h morgens (Ben Nevis ausgenommen), ein Vormittagsmaximum zwischen 6^h und 11^h a. (Säntis ausgenommen), ein Nachmittagsminimum zwischen 1^h und 5^h ungefähr und ein zweites Maximum am Abend oder in der Nacht.

A. Täglicher Gang der Windstärke im Winter.

Zentimeter pro Sekunde.

	Blue Hill	Eiffelturm	Ben Nevis	Puy de Dôme	Bjelašnica	Obir		Säntis	Pic du Midi	Sonnblick		Pikes Pik
						1886/90	1899/1903			1888/93	1901/05	
	203	338	1443	1467	2067	2140		2500	2859	3100		4300
Mitternacht	— **1**	46	46	7	—19	0	6	—10	—45	20	25	39
1h a.	— 1	36	**52**	5	—36	—13	4	—14	—49	27	21	51
2	— 3	34*	50	4*	—48	—22	2	—17	—49*	**31**	15	60
3	— 7	40	43	5	—54*	—25*	2*	—18*	—46	29	7	**65**
4	—11	52	31	7	—50	—21	4	—17	—37	21	— 3	63
5	—14*	65	17	9	—38	—14	6	—15	—24	8	—15	54
6	—14*	**72**	6	**10**	—19	— 7	8	—14	— 7	— 7	—23	37
7	—11	68	— 3	9	1	0	**10**	—11	12	—21	—31	14
8	— 5	48	— 8	6	20	**1**	9	—10	31	—31	—35	—11
9	3	15	— 9	1	34	— 3	6	— 7	47	—37*	—37*	—35

10	12	— 28	— 9	— 6	**40**	—10	2	— 5	57	—35	—35	—55
11	19	— 73	— 9	—13	38	—18	— 5	— 2	**62**	—29	—29	—67
Mittag	23	—112	—10	—19	30	—25	—11	2	60	—18	—21	—71*
1ʰ p.	**23**	—137	—15	—22	19	—27*	—16	6	52	— 7	—13	—67
2	20	—142*	—22	—25*	9	—24	—18*	11	41	3	— 4	—57
3	13	—127	—30	—19	2	—15	—18	16	27	9	4	—43
4	5	— 94	—38	—13	— 1*	0	—15	19	14	**11**	11	—28
5	— 2	— 51	—42*	— 6	2	16	—10	**22**	2	9	16	—16
6	— 8	— 6	—41	2	9	27	— 4	**22**	— 8	5	19	— 5
7	—11	33	—34	8	15	42	2	19	—16	0	22	2
8	—12*	60	—21	12	**20**	**45**	7	15	—22	— 2*	24	8
9	— 9	**72**	— 3	**13**	18	42	10	9	—28	— 1	26	13
10	— 6	70	16	12	11	31	**10**	3	—34	4	**27**	20
11	— 3	59	33	10	— 3	16	9	— 4	—40	11	27	29
Mittel	10	64	24	10	22	18	8	12	34	16	20	38

B. Täglicher Gang der Windstärke im Sommer.

Zentimeter pro Sekunde.

	Blue Hill	Eiffelturm	Ben Nevis	Puy de Dôme	Bjelašnica	Obir		Säntis	Pic du Midi	Sonnblick		Pikes Pik
						1886/90	1899/1903			1888/93	1901/05	
	203	338	1443	1467	2067	2140		2500	2859	3100		4300
Mitternacht	**41**	138	52	32	72	**107**	75	66	**20**	39	25	75
1h a.	40	**148**	62	33	73	101	85	**69**	19	30	**26**	105
2	32	132	69	**34**	72	91	94	69	14	19	24	129
3	17	106	**70**	34	68	79	**100**	63	8	5	20	**143**
4	— 2	67	65	31	58	64	98	51	3	—10	14	140
5	—23	21	55	27	42	48	88	33	1*	—26	5	120
6	—41	— 28	40	18	21	29	68	9	3	—41	— 6	82
7	—52	— 71	24	7	— 4	5	38	—19	8	—54	—18	33
8	—56*	—104	6	— 8	— 32	— 20	1	—46	16	—63	—27	— 20
9	—52	—124	—10	—23	— 58	— 48	— 39	—70	22	—68*	—34	— 70

10	—41	—130*	—25	—38	— 80	— 76	77	—87	25	—66	—38*	—108
11	—25	—123	—38	—49	— 94	—101	—107	—95*	23	—59	—37	—131
Mittag	— 9	—108	—49	—55*	—100	—120	—126	—93	16	—46	—32	—136*
1h p.	4	— 89	—55	—55*	— 96	—129*	—131*	—83	3	—30	—25	—127
2	13	— 68	—58	—49	— 83	—128	—122	—64	—11	—11	—15	—106
3	16	— 50	—60*	—38	— 64	—113	—103	—43	—25	7	— 6	— 80
4	15	— 34	—57	—25	— 40	— 88	— 76	—20	—36	24	2	— 55
5	11	— 19	—52	—10	— 16	— 55	— 46	1	—41*	38	9	— 35
6	9	— 2	—44	4	8	— 15	— 17	19	—39	48	14	— 21
7	8*	17	—32	15	27	22	8	32	—31	54	16	— 12
8	11	41	—17	23	42	56	27	42	—18	56	18	— 4
9	19	68	0	28	54	81	43	49	— 4	55	20	7
10	28	96	18	31	62	98	54	56	8	52	22	24
11	37	121	36	32	68	106	65	61	17	47	23	47
Mittel	25	79	41	29	56	74	70	52	17	39	20	75

C. Täglicher Gang der Windstärke. Jahr.

Abweichungen vom Tagesmittel. — Zentimeter pro Sekunde.

	Blue Hill	Eiffelturm	Ben Nevis	Puy de Dôme	Bjelašnica	Obir		Säntis	Pic du Midi	Sonnblick		Pikes Pik
						1886/90	1899/1903			1888/93	1901/05	
	203	338	1443	1467	2067	2140		2500	2859	3100		4300
Mitternacht	**8**	100	65	27	28	42	45	26	0	15	**25**	98
1ʰ a.	3	84	**71**	26	20	38	**45**	22	—13	6	23	99
2	— 6	76	71	25	12	30	45	11	—26	0	19	100
3	— 9	75	63	24	6	26	43	10	—35	— 7	14	**114**
4	—15	63	23	22	0	25	43	5	—37*	—14	5	101
5	—20	57	12	17	— 4	20	41	— 4	—29	—21	— 5	81
6	—28	38	10	10	— 7	11	25	— 7	—14	—33	—15	60
7	—34*	6	4	2	— 9	— 1	3	—11	7	—43	—24	7
8	—25	— 49	— 5	— 9	—13	—13	—19	—20	28	—45*	—31	— 38
9	—11	— 90	—16	—20	—17	—28	—45	—31	45	—41	—36	— 79

10	— 3	—106	—21	—31	—22	—42	—59	—38	**54**	—38	—36*	—118
11	9	—112	—33	—39	—27	—54	—63	—38*	53	—25	—33	—142*
Mittag	26	—113*	—45	—43*	—31	—68	—69	—34	42	— 7	—27	—124
1^h p.	35	—112	—57	—43	—32*	—73*	—71*	—33	24	5	—18	—107
2	**40**	—107	—58	—38	—31	—65	—67	—32	3	14	—10	— 87
3	34	— 96	—58	—29	—25	—58	—55	—13	—15	15	— 1	— 64
4	16	— 69	—60*	—18	—15	—43	—29	2	—28	16	6	— 53
5	— 1	— 44	—54	— 6	— 3	—13	— 5	14	—32*	24	12	— 37
6	— 6*	— 8	—46	5	10	16	5	22	—28	29	17	— 6
7	— 3	30	—12	15	22	44	21	26	—18	**36**	19	5
8	— 2	76	22	21	31	55	39	28	— 5	34	22	24
9	— 2	97	33	25	36	**56**	41	**33**	5	30	23	46
10	— 1	106	40	27	**37**	49	43	32	**10**	29	24	54
11	0	**110**	50	**28**	34	48	43	28	8	23	**25**	69
Mittel	14	76	39	23	20	38	40	22	23	23	20	72

D. **Halbjährige Ungleichheit im täglichen Gange der Windstärke. Sommer—Winter.**

Abweichungen vom Tagesmittel. — Zentimeter pro Sekunde.

	Blue Hill	Eiffelturm	Ben Nevis	Puy de Dôme	Bjelašnica	Obir 1886/90	Obir 1899/1903	Säntis	Pic du Midi	Sonnblick 1888/93	Sonnblick 1901/05	Pikes Pik
	203	338	1443	1467	2067	2140		2500	2859	3100		4300
Mitternacht	31	92	6	25	91	107	69	76	65	19	0	36
1h a.	42	**107**	10	28	109	**114**	81	83	**68**	3	5	54
2	24	98	19	**29**	120	113	92	**86**	63	—12	9	69
3	5	66	27	28	**122**	104	**98**	81	54	—24	13	**78**
4	— 4	15	34	24	108	85	94	68	40	—31	17	77
5	—12	— 44	**38**	18	80	62	82	48	25	—34	**18**	66
6	—30	—100	34	8	40	36	60	23	10	—34*	17	45
7	—44	—139	27	— 3	— 5	5	28	— 8	— 4	—33	13	19
8	—48	—152*	14	—14	— 52	— 21	— 8	—36	—15	—32	8	— 9
9	—62*	—139	— 1	—24	— 92	— 45	— 45	—63	—25	—31	3	—35

10	—48	—102	—16	—32	—120	— 66	— 79	—82	—32	—31	— 3	—53
11	—40	— 50	—29	—36	—132*	— 83	—102	—93	—38	—30	— 8	—64
Mittag	—35	4	—39	—36*	—130	— 95	—115*	—95*	—44	—28	—11	—65*
1h p.	—16	48	—40*	—33	—115	—102	—115*	—89	—49	—23	—12*	—60
2	—12	74	—36	—27	— 92	—104*	—104	—75	—52	—14	—11	—49
3	15	77	—30	—19	— 66	— 98	— 85	—59	—53*	— 2	—10	—37
4	33	60	—19	—11	— 39	— 88	— 61	—39	—50	13	— 9	—27
5	23	32	—10	— 4	— 18	— 71	— 36	—21	—43	29	— 7	—19
6	6	4	— 3	3	— 1	— 42	— 13	— 3	—31	63	— 5	—16
7	1*	— 16	4	7	12	— 20	6	13	—15	54	— 6	—14
8	20	— 19*	4	12	22	11	20	27	4	58	— 7	—12
9	36	— 4	3	15	36	39	33	40	24	56	— 6	— 6
10	39	36	2	19	51	67	44	53	42	48	— 5	4
11	63	62	3	22	71	90	55	65	56	36	— 3	18
Mittel	29	62	19	20	72	69	64	55	38	30	9	39

Diese doppelte tägliche Periode der Windstärke erinnert wieder unwillkürlich an die doppelte tägliche Barometerschwankung. Sie erscheint recht gut ausgeprägt auf dem Eiffelturm, auf dem Puy de Dôme, auf dem Obir und auf der Bjelašnica, fehlt aber gänzlich auf dem Säntis, Sonnblick und auf Pikes Pik. Ein mittlerer Gang für den Winter kann deshalb nicht berechnet werden.

2. Der tägliche Gang der Windstärke im Sommer zeigt eine große Übereinstimmung an allen Stationen, mit Ausnahme des Pic du Midi, wo das Maximum nahezu mit dem Minimum aller anderen Stationen zusammenfällt. Alle anderen Berggipfel haben das Maximum der Windstärke bei Nacht (zwischen Mitternacht und 3^h a.) und das Minimum um Mittag herum zwischen 10^h a. und 1^h p. Man kann daher einen mittleren täglichen Gang für den Sommer rechnen, wenn man Pic du Midi ausschließt.

Die Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke sind folgende (wenn man die geringen Höhen von 200 *m* und 300 *m* [Blue Hill und Eiffelturm] ausschließt, auf welchen noch eine direkte Beeinflussung durch den täglichen Gang der Windstärke in der Niederung angenommen werden muß):

Die Konstanten des täglichen Ganges der Windstärke im Sommer (Zentimeter pro Sekunde).

Berg und Seehöhe	A_1	A_2	a_1	a_2
Ben Nevis, 1440 *m*	50°	17°	65	5
Puy de Dôme, 1470 *m*	88	272	44	11
Obir, 2140 *m*, I	79	202	115	18
II	75	281	109	25
Bjelašnica, 2070 *m*	78	263	86	14
Säntis, 2500 *m*	94	292	80	17
Sonnblick, 3100 *m*, I	136	331	62	7
II	117	348	30	8
Pikes Pik, 4300 *m*	64	316	118	44
Mittel (2470 *m*)	87	298	79	17

Täglicher Gang der Windstärke im Sommer:

$$79 \sin (87^\circ + x) + 17 \sin (298 + 2x).$$

Diese letzte Gleichung habe ich benützt, um den normalen täglichen Gang der Windstärke im Sommer aufzustellen. Die aus selben berechneten Stundenmittel werden später folgen. Die absoluten Werte der Amplituden sind nicht strenge vergleichbar, denn sie hängen zu sehr von der Lokalität und der Art der Aufstellung des Instrumentes und anderen Umständen ab. Nur dem Verhältnis $a_2 : a_1$ könnte eine reelle Bedeutung zuerkannt werden.[1]

3. Der tägliche Gang der Windstärke im Jahresmittel stimmt fast ganz überein mit jenem im Sommer. Die Stationen stimmen alle ganz überein, mit Ausnahme von Blue Hill (bloß 200 *m*) und Pic du Midi, auf welchen auch im Jahresmittel das Minimum bei Nacht und das Maximum um 10^h vormittags eintritt. Alle übrigen Berggipfel haben im wesentlichen den gleichen täglichen Gang, so daß man einen Mittelwert ableiten kann, den ich hier auf die gewöhnliche Art aus den Einzeldaten berechnet habe. Dieser gleichsam normale tägliche Gang der Windstärke im Jahresmittel folgt später, er unterscheidet sich kaum von jenem im Sommer.

Mehr der Kuriosität halber habe ich auch ein Mittel für die beiden abnormen Stationen Blue Hill und Pic du Midi gebildet und selbes dem normalen Gange nebenangestellt. Eine reelle Bedeutung kann dasselbe kaum beanspruchen.

4. Schließlich habe ich die jahreszeitliche Änderung des täglichen Ganges der Windstärke durch die Differenz Sommer—Winter dargestellt, d. i. also die halbjährige Ungleichheit im täglichen Gange.

Das am meisten Bemerkenswerte in dieser Tabelle ist, daß hier auch die abnormen Stationen Blue Hill und namentlich Pic du Midi mit den übrigen übereinstimmen!

---

[1] In meiner schon früher zitierten Abhandlung hatte ich aus weniger Stationen und einschließlich Eiffelturm gefunden:

$$84 \cdot 5 \sin (87 \cdot 8 + x) + 12 \cdot 4 \sin (328 \cdot 1 + 2x),$$

also fast übereinstimmend.

Ich konnte deshalb eine mittlere Differenzkurve Sommer—Winter aufstellen und hätte dazu alle Orte verwenden können. Es schien mir aber doch besser, die niedrigen, noch direkt von unten beeinflußten Punkte, Blue Hill, 200 *m*, und Eiffelturm, 300 *m*, vom Mittel auszuschließen und mit Ben Nevis, 1400 *m*, die Reihe der benützten Berggipfel zu beginnen. Hier, wie auch früher, habe ich Obir und Sonnblick das doppelte Gewicht dadurch gegeben, daß ich die fünfjährigen Mittel einzeln in die Summe einstellte (nicht bloß einmal als zehnjährige Mittel).

Der Gang der halbjährigen Ungleichheit Sommer—Winter stimmt vollkommen mit dem Gange der Windstärke im Sommermittel und nahezu vollkommen auch mit dem Gange im Jahresmittel überein. In allen drei Tageskurven fällt das Minimum auf den Mittag, das Maximum auf die Nachtstunden, bei der Sommer- und der Differenzkurve übereinstimmend auf 2^h a., bei der Jahreskurve auf 11^h p., d. i. 3 Stunden früher.

Die folgende Tabelle IX zeigt diese Verhältnisse.

Das Ergebnis dieser Zusammenstellungen ist demnach, daß der Sommertypus des täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln der mittleren Breiten in Europa und Nordamerika als Repräsentant des normalen täglichen Ganges überhaupt angesehen werden kann und daß eine ausgesprochene prinzipielle Änderung im täglichen Gange der Windstärke mit den Jahreszeiten nicht zu existieren scheint. Im Winter tritt die tägliche Periode nur gestört auf, sie repräsentiert keinen selbständigen Typus.

Die Ursachen des normalen täglichen Ganges der Windstärke auf den Berggipfeln.

Während man für die Höhe des Eiffelturms, 300 *m* über dem Erdboden, die wahrscheinliche Ursache der Verstärkung des Windes bei Nacht und der Abschwächung desselben bei Tag ungezwungen aus der Espy-Köppen'schen Theorie des täglichen Ganges der Windstärke in der Ebene nahe dem Boden hat ableiten können, unterliegt die Anwendung des gleichen Prinzips auf die Erklärung des täglichen Ganges der Windstärke auf den höheren Berggipfeln erheblichen Bedenken und Schwierigkeiten.

IX. Sommer—Winter:

Ben Nevis, Puy de Dôme, Bjelašnica, Obir, Säntis, Pic du Midi, Sonnblick, Pikes Pik (10).

Jahr:

A. Eiffelturm,[1] Ben Nevis, Puy de Dôme, Bjelašnica, Obir, Säntis, Sonnblick, Pikes Pik[1] (10).

B. Blue Hill, Pic du Midi (2).

	Sommer	Sommer—Winter	Jahresmittel	
			A	*B*
Mitternacht	63	49	37	0
1h a.	66	55	34	— 6
2	**67**	**59**	30	—15
3	64	58	28*	—22
4	56	52	19	—24*
5	41	40	13	—24
6	20	24	6	—20
7	— 5	4	— 5	—12
8	—33	—17	—18	2
9	—58	—39	—29	15
10	—79	—51	—39	25
11	—92	—61	—43	30
Mittag	—95*	—66*	—44*	**32**
1h p.	—88	—64	—43	29
2	—74	—56	—39	20
3	—53	—46	—32	9
4	—30	—33	—23	— 5
5	— 8	—20	—10	—14
6	12	— 7	4	—15*
7	28	4	17	—11
8	39	14	28	— 4
9	47	23	35	1
10	53	33	36	4
11	59	41	**37**	4
Mittel	51	38	27	14

Gleichungen des täglichen Ganges.

Sommer .... $79 \sin (87^\circ + x) + 17 \sin (298 + 2x)$.

Sommer—Winter ... $59 \cdot 4 \sin (75^\circ 7 + x) + 9 \cdot 8 \sin (310 \cdot 9 + 2x)$.

Jahr (*A*)........... $41 \cdot 8 \sin (90^\circ 8 + x) + 5 \cdot 1 \sin (257^\circ 6 + 2x)$.

---

[1] Eiffelturm und Pikes Pik mit halbem Gewichte, um sie mit den anderen vergleichbar zu machen.

Die aufsteigende Bewegung der Luft an den Berghängen um Mittag und Nachmittag, die man für die Abschwächung der Windstärke verantwortlich machen könnte, erreicht, wie der tägliche Gang der Bewölkung und Feuchtigkeit auf den Berggipfeln zeigt, ihr Maximum erst gegen 4^h p. und später, die größte Abschwächung der Windstärke tritt aber auf den Berggipfeln schon um Mittag, ja selbst vor Mittag ein. Die Windstärke flaut schon stark ab am frühen Morgen, zu einer Zeit (6 bis 7^h im Jahresmittel), wo die aufsteigende Luftbewegung an den Berghängen noch kaum begonnen haben kann.

Dieser Einwand behält seine Gültigkeit auch dann noch, wenn man annehmen wollte, was in der Tat naheliegt, daß der Berggipfel selbst beim täglichen Gange seiner Erwärmung auf das Anemometer ebenso einwirkt wie der Erdboden auf das Anemometer auf dem Eiffelturm. Auf dem Sonnblick, einer vergletscherten Bergkuppe, tritt das Minimum der Windstärke im Winter um 9^h, im Sommer etwa um $9^1/_2{}^h$ Morgens ein, dann steigt die Windstärke wieder bei wachsender Erwärmung und zunehmendem Aufsteigen der Luft an den Berghängen. Das widerspricht einer Erklärung nach dem Espy-Köppen'schen Satze des Luftaustausches zwischen dem Erdboden und den etwas höheren Schichten der Atmosphäre völlig.

Man kann ferner nicht gut annehmen, daß die Windstärke über den freien Berggipfeln mit der Höhe ebenso zunimmt, wie dies der Fall ist, wenn wir uns in der Niederung vom Erdboden zu 100 *m* und etwas darüber in die Atmosphäre erheben. Auch ist das Spiel der aufsteigenden und niedersinkenden Luftmengen über einem isolierten Berggipfel wohl kaum imstande, die Geschwindigkeit der allgemeinen Luftströmungen, die von der »freien Atmosphäre« herkommen, so wesentlich beeinflussen zu können. Man muß wohl annehmen, daß auch diese Luftströmungen selbst den gleichen oder ähnlichen Änderungen ihrer Stärke unterliegen, wie wir sie mit den Anemometern auf den Berggipfeln gemessen haben.

Aber was mag dann die Ursache dieses täglichen Ganges der Windstärke in jenen Höhen sein, bis zu welchen die direkt vom Erdboden am Nachmittage aufsteigenden Luftbewegungen wohl nicht gelangen können? Die Ballonfahrten und

Drachenaufstiege haben als obere Grenze derselben selbst im Sommer 1000 bis 1200 *m* über dem Erdboden so ziemlich festgestellt. An eine direkte Wirkung der von unten aufsteigenden Luftmassen auf die Schwächung oder Verstärkung der Luftbewegung auf den Berggipfeln ist demnach wohl nicht zu denken.

Wir wollen nun sehen, ob nicht die rascheste Zunahme und Abnahme der Lufttemperatur und das damit verbundene rascheste Steigen oder Sinken der Flächen gleichen Druckes mit den Extremen der Windstärke etwas zu tun hat. Die folgende Tabelle X soll darüber ein Urteil gestatten.

Beim Eiffelturm und Sonnblick sind sowohl die Änderungen der mittleren Temperatur der Luftsäule unterhalb, als auch jene an der Station oben selbst angegeben, bei Pikes Pik nur die erstere (Mittel: Pikes Pik und Colorado Springs); die Station Eiffelturm habe ich nur des Vergleiches wegen aufgenommen, sie kommt direkt bei der uns momentan beschäftigenden Frage nicht in Betracht, da wir hier noch Luftmischung von unten her annehmen müssen, welchen Vorgang für die Gipfel wir vorhin ablehnen zu sollen vermeinten.

Beim Sonnblick geht die rascheste Abnahme, wie die rascheste Zunahme der Windstärke der raschesten Temperaturzunahme und -abnahme um 3 bis 4 Stunden voraus, es können daher die letzteren nicht die Ursache der ersteren sein.

Bei Pikes Pik fällt die rascheste Abnahme der Windstärke mit der raschesten Temperaturzunahme der Luftsäule unterhalb zusammen, aber ein Einfluß der Abnahme der Temperatur auf die Zunahme der Windstärke ist nicht zu bemerken.

Auf dem Säntis und Obirgipfel fallen die Extreme der Abnahme und Zunahme (bei Temperatur umgekehrt zu nehmen) fast zusammen, die Extreme der Windstärkeänderungen gehen je um eine Stunde voraus den entgegengesetzten Extremen der Temperaturänderungen. Bei diesen beiden Orten habe ich aber nur die Temperatur beim Anemometer selbst genommen.

Eine ausgesprochene kausale Beziehung zwischen den Änderungen der Lufttemperatur und den Änderungen der Windstärke ist dieser Tabelle demnach nicht zu entnehmen.

X. Stündliche Änderungen von Windstärke und Temperatur im Sommer.

	Eiffelturm			Sonnblick			Pikes Pik		Säntis		Obir	
	Windgeschwindigkeit	Temperatur a^2	Temperatur b^3	Wind Zentimeter pro Sekunde	Temperatur Gipfel mit Kolm-Saigurn	Temperatur Gipfel allein	Wind	Temperatur Pikes Pik und Colorado Springs	Wind	Temperatur	Wind	Temperatur
Mitternacht[1]	17	— ·4	— ·4	— 8	—·20	—·11	28	— ·6	5	—·15	10	— ·24
1h a.	5	— ·5	— ·4	— 9	—·20	—·11	30	— ·5	3	—·12	10	— ·13
2	— 11	— ·4	— ·3	—11	—·15	—·11	24	— ·4	0	—·11	9	— ·12
3	— 26	— ·4	— ·4	—14	—·10	—·11	14	— ·3	— 6	—·04	6	— ·10
4	— 39	— ·3	— ·2	—15	—·10	—·05	— 3	— ·2	—12	·15	— 2	— ·05
5	— 46	0	·1	—16*	·15	·05	—20	— ·1	—18	·33	—10	·09
6	— 49*	·1	·6	—15	·55	·14	—42	·5	—24	·51	—20	·19
7	— 43	·3	·9	—13	·70	·22	—49	1·5	—28*	·58	—30	·45
8	— 33	·5	1·0	— 9	·75	·23	—53*	1·6	—27	·62	—37	·65
9	— 20	·7	1·0	— 5	·45	·26	—50	1·0	—24	·59	—40*	·68
10	— 6	·8	0·9	2	·45	·29	—38	1·0	—17	·53	—38	·71

11	7	**·9**	·9	7	·40	·24	—23	·8	— 8	·50	—30	·65
11h—Mittag	15	·6	·7	13	·25	·23	— 5	·7	2	·39	—19	·50
1h p.	19	·5	·4	16	·20	·19	9	·3	10	·15	— 5	·33
2	**21**	·3	·4	**19**	·05	·18	21	·2	19	—·05	9	·28
3	18	·2	— ·1	18	—·20	·00	**26**	— ·1	21	—·38	19	·00
4	16	·0	— ·2	17	—·20	·00	25	— ·2	**23**	—·70	27	— ·19
5	15*	— ·2	— ·4	14	—·55	—·12	20	— ·6	21	—·76*	**30**	— ·70
6	17	— ·5	— ·8	10	—·55*	—·22	14	— ·7	18	—·65	29	—1·32*
7	19	— ·5	—1·0*	6	—·55	—·26	9	—1·0*	13	—·56	25	— ·65
8	24	— ·6*	—0·9	2	—·45	—·36*	8*	— ·9	10	—·35	19	— ·45
9	27	— ·5	—0·7	— 1	—·30	—·24	11	— ·8	7	—·22	16	— ·29
10	**28**	— ·5	—0·6	— 3	—·25	—·19	17	— ·7	7	—·14	11	— ·18
11	25	— ·4	—0·5	— 5	—·20	—·15	23	— ·6	5	—·12	11	— ·25

[1] Mitternacht bezeichnet stets 11h p. bis Mitternacht usw.

[2] a = Eiffelturm Spitze.

[3] b = Mittel aus Eiffelturm und Parc S. Maur.

Bemerkenswert ist die doppelte tägliche Periode der stündlichen Änderungen der Windstärke auf Pikes Pik und auf dem Eiffelturm. Diese doppelte Periode ist gerade die umgekehrte des täglichen Barometerganges! Sie fehlt aber auf Obir, Säntis und Sonnblick. Trotzdem halte ich sie nicht für zufällig.

In der folgenden Tabelle XI gebe ich eine Übersicht über den täglichen Gang und über die mittleren stündlichen Änderungen von Luftdruck, Windstärke und Temperatur auf den hohen Berggipfeln im Sommer.

Auch diese Tabelle gibt keine entscheidenden Anhaltspunkte zur Beurteilung des Zusammenhanges der drei Elemente Windstärke, Luftdruck und Temperatur. Es fällt allerdings auf, daß um 8^h morgens die Abnahme der Windstärke ihr Maximum erreicht, zugleich mit der stärksten Zunahme des Luftdruckes und der Temperatur; ein ähnliches, aber weniger genaues Zusammentreffen finden wir zwischen 4^h und 6^h abends beim Maximum der Zunahme der Windstärke und dem Maximum der Abnahme des Luftdruckes und jenem der Temperatur. Bei den nächtlichen Extremen der stündlichen Änderungen fehlt aber eine ähnliche Übereinstimmung. Bei Tag aber scheint die rascheste Abnahme der Windstärke mit der raschesten Zunahme des Luftdruckes und der Temperatur und umgekehrt in Beziehung zu stehen.

Gleichungen der stündlichen Änderungen der drei meteorologischen Elemente.

Windstärke, *cm*/sec.:

$$22 \cdot 0 \sin (172^\circ 4 + x) + 8 \cdot 8 \sin (4^\circ 0 + 2x).$$

Temperatur, Hundertelgrade:

$$58 \cdot 2 \sin (319^\circ 8 + x) + 18 \cdot 1 \sin (141^\circ 7 + 2x).$$

Luftdruck, Hundertelmillimeter:

$$7 \cdot 3 \sin (282 \cdot 8 + x) + 10 \cdot 7 \sin (196 \cdot 5 + 2x).$$

XI. Der tägliche Gang und die stündlichen Änderungen von Windstärke, Luftdruck und Temperatur.

Stunde	Täglicher Gang des Luftdruckes Sommer Abweichungen Hundertelmillim.		Täglicher Gang der Windstärke	Stündliche Änderung		
				der Windstärke	des Luftdruckes	der Temperatur
	2000 *m*	3900 *m*	Zentimeter pro Sek.	Zentimet. pro Sek.	1/100-Millimet.	1/100-Grade
Mitternacht	14	1	63	4	—13	—27
1ʰ a.	— 2	—14	66	3	—15	—21
2	—18	—30	**67**	1	—16*	—19
3	—31	—45	64	— 3	—14	—14
4	—42	—53	56	— 8	— 9	— 4
5	—43*	—53*	41	—15	— 1	9
6	—37	—46	20	—21	7	33
7	—25	—36	— 5	—25	11	69
8	—13	—19	—33	—28*	**14**	**77**
9	— 1	— 4	—58	—25	13	64
10	10	10	—79	—21	13	63
11	19	22	—92	—13	11	55
Mittag	**22**	27	—95*	— 3	4	46
1ʰ p.	21	**33**	—88	7	2	24
2	16	31	—74	14	— 4	15
3	11	24	—53	21	— 5	—12
4	6	20	—30	**23**	— 6*	—27
5	1	12	— 8	22	— 6	—54
6	— 1*	12*	12	20	— 2	—72*
7	3	16	28	16	5	—62
8	13	24	39	11	7	—51
9	25	**30**	47	8	**10**	—39
10	**27**	29	53	6	1	—30
11	23	16	59	6	— 8	—28

Windstärke und Temperaturänderungen befolgen nach dem ersten, dem Hauptgliede, den entgegengesetzten

Gang, doch besteht ein Phasenunterschied von 2 Stunden. Es ist aber auf diesen Phasenunterschied kein Gewicht zu legen, da die stündlichen Änderungen der Temperatur nicht exakt genug bestimmt und nicht aus den gleichen Beobachtungsreihen abgeleitet worden sind wie jene der Windstärkeänderungen.

Eine Beziehung zwischen Windstärkeänderung und Luftdruckänderung ist in der ganztägigen Periode nicht ausgesprochen, scheint aber in der halbtägigen Periode mit entgegengesetzten Phasenzeiten vorhanden zu sein. Die berechnete Periode der Änderungen der Windstärke ist:

Mitt.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 a.
Luftdruck, Hundertelmillimeter											
-3·0	-7·7	-10·4*	-8·1	-7·4	-2·5	3·0	7·7	**10·4**	8·1	7·4	2·5
Windstärke *cm*/sec.											
0·6	4·9	7·9	**8·8**	7·3	3·9	-0·6	-4·9	-7·9	-8·8*	-7·3	-3·9

Der Gang der Änderungen ist demnach gerade der entgegengesetzte bei beiden Elementen und die Extreme der Luftdruckänderungen gehen jenen der Windstärkeänderungen um eine Stunde voraus.

Daß die täglichen Luftdruckwellen die Windstärke auf den Berggipfeln zu beeinflussen imstande sind, glaube ich früher für die südindischen Berggipfel nachgewiesen zu haben. In den höheren Breiten ist natürlich der Einfluß der täglichen Barometerschwankung auf die Windstärke ein viel geringerer, die Amplituden der täglichen Luftdruckschwankungen sind kleiner und die Gradienten, die gleichen Windstärken entsprechen, sind größer als in niedrigeren Breiten.

Nehmen wir eine Breite von 47° an und einen Luftdruck von 523 wie im Sommer auf dem Gipfel des Sonnblick, so gilt die bekannte Gleichung:

$$v = \frac{6\cdot 36\,\Delta B}{\sin\varphi}\cdot\frac{760}{b},\quad v = 12\cdot 7\,\Delta B\ m/\text{sec.}$$

Unter 47° Breite beträgt der Abstand zweier Längengrade 76·06 *km*; es kommen also auf 15° oder auf eine Stunde Zeitdifferenz nicht ganz 10·3 mittlere Erdgrade, nach welchen der Gradient gemessen wird. Die stündliche Änderung in der doppelten täglichen Barometerschwankung ist nach voriger Gleichung 0·107 *mm*; dies entspricht einem Gradienten von 0·0104 *mm*, welcher nach obiger Gleichung eine Windgeschwindigkeit von 13·2 *cm*/sec liefert (in Sonnblickhöhe). Die Größenordnung der Amplituden der Änderungen der Windstärke und der Änderung des Luftdruckes in der doppelten täglichen Periode entspricht demnach den dynamischen Gleichungen.

Die Luftdruckänderungen in der ganztägigen Periode sind in der Seehöhe des Sonnblick erheblich größer als die der halbtägigen Periode.[1] Ihre Phasenzeiten sind rund: Minimum: Mitternacht, Maximum: Mittag. Da auf dem Sonnblick wie in den gemäßigten Breiten überhaupt die Westwinde vorherrschen, so muß das von Osten herankommende nächtliche Barometerminimum die Westwinde verstärken, das um Mittag ankommende Barometermaximum dieselben abschwächen. Das ist in der Tat der Hauptsache nach der tägliche Gang der Windstärke auf den Berggipfeln in unseren Breiten.

Das ganztägige Glied der täglichen Periode der Windstärke im Sommer in etwa 2500 *m* ist:

$$\Delta v \sin (87° + x).$$

Das ganztägige Glied des täglichen Ganges der mittleren Temperatur der Luftschichten unterhalb kann angenommen werden zu

$$\Delta t \sin (230° + x),$$

hat also eine Phasendifferenz von 143°, d. i. rund $9^1/_2$ Stunden. Das Maximum der Temperatur tritt $2^1/_2$ Stunden später ein als das Minimum der Windstärke. Das halbtägige Glied der täglichen Periode der Windstärke ist im Mittel

$$\Delta v \sin (298 + 2x),$$

[1] $0·29 \sin (182{}^\circ\!0 + x)$.

während das halbtägige Glied der doppelten täglichen Barometerschwankung in diesen Höhen angenommen werden kann zu

$$\Delta b \sin(110^\circ + 2x).$$

Der Phasenunterschied beträgt hier fast genau 180° oder 6 Stunden, d. i. die halbe Periode; dem Maximum der Windstärke entspricht beim Luftdruck ein Minimum und umgekehrt.

Wir kommen also zu folgenden Schlüssen:

Die Haupterscheinung bei der täglichen Periode der Windstärke auf den Berggipfeln ist die ganztägige Periode mit einem Maximum in der Nacht und einem Minimum um Mittag. Ursache ist die tägliche Erwärmung der Luftschichten unterhalb; die Senkung der Flächen gleichen Druckes in der Nacht steigert die Windstärken, die Hebung derselben in den Vormittagsstunden bis über Mittag hinaus dämpft die Windgeschwindigkeiten.

Diese ganztägige Periode der Windstärke scheint, wie zu erwarten, stärkeren lokalen Einflüssen unterworfen zu sein, so daß ihre Beziehungen zu der ganztägigen thermischen Druckwelle oder zum täglichen Temperaturgang der Luft nicht genügend klar zutage treten.

Die kleinere doppelte tägliche Periode der Windstärke dagegen entspricht ziemlich genau der umgekehrten doppelten täglichen Luftdruckschwankung in der entsprechenden Höhe.

Ich komme also hier auf einem anderen Wege zu ähnlichen Schlüssen über die Beziehungen der Luftbewegungen auf den Berggipfeln zu der täglichen Barometerschwankung, wie ich sie früher schon bei einer Analyse der Perioden der Windkomponenten gefunden habe.[1]

Ich möchte noch aus dieser Abhandlung die Gleichungen für den täglichen Gang der Windstärke bei Ost- und Westwinden hier anführen. Amplituden *cm*/sec.

Ostwinde ...... $36 \sin(39^\circ 1 + x) + 22 \sin(281 \cdot 9 + 2x)$
Westwinde .... $58 \sin(67 \cdot 1 + x) + 6 \sin(30 \cdot 1 + 2x)$

[1] Über die tägliche Drehung der mittleren Windrichtung und über eine Oszillation der Luftmassen von halbtägiger Periode auf den Berggipfeln von 2 bis 4 *km* Seehöhe. Diese Sitzungsber., Bd. CXI, Dez. 1902, Auszug Met. Zeitschr., 1903, p. 501 u. s. w.

Die doppelte tägliche Periode, die allerdings bei den Westwinden sehr klein ist, zeigt einen großen Phasenunterschied, der, genauer bestimmt, vielleicht 180° betragen würde. Er ist ja wegen der kleinen Amplitude unsicher. Es würde sich wohl lohnen, die tägliche Periode der Windstärke bei den West- und Ostwinden genauer zu berechnen. Ich habe, da es mir nur auf eine Probe ankam, mit sehr kurzen Beobachtungsreihen gerechnet.

Anhang.

Der neu berechnete tägliche Gang der Windstärke auf dem Sonnblick, Obir, Bjelašnica, Puy de Dôme und Pic du Midi.

Sonnblick.

47° 3′ N, 12° 57′ E; 3104 *m*.

5 Jahre (1901 bis 1905).

Berechnete Werte.
(Meter pro Sekunde.)

	Sommer Herbst	Winter Frühling	Jahr
Mittn.	7·23	8·45	**7·84**
1ʰ a.	**7·24**	8·40	7·82
2	7·22	8·34	7·78
3	7·18	8·26	7·72
4	7·12	8·16	7·64
5	7·03	8·06	7·54
6	6·92	7·97	7·45
7	6·81	7·89	7·35
8	6·71	7·84	7·27
9	6·64	7·83*	7·24
10	6·60*	7·85	7·23*
11	6·61	7·91	7·26
Mittag	6·66	7·98	7·32
1ʰ p.	6·74	8·07	7·41
2	6·83	8·16	7·50
3	6·92	8·24	7·58
4	7·00	8·30	7·65
5	7·07	8·35	7·71
6	7·12	8·39	7·75
7	7·15	8·42	7·78
8	7·17	8·44	7·80
9	7·18	8·46	7·82
10	7·20	**8·47**	7·83
11	7·21	8·46	7·83
Mittel	6·98	8·20	7·59

Obir.

46° 30′ N, 14° 29′ E; 2140 *m*.

5 Jahre (1899 bis 1903).

Beobachtete Werte.
(Meter pro Sekunde.)

	Sommer	Winter	Jahr
Mittn.	5·28	6·00	5·68
1ʰ a.	5·31	5·97	5·64
2	5·50	5·97	5·70
3	**5·56**	5·97	**5·70**
4	5·53	5·97	5·66
5	5·58	6·03	5·70
6	5·47	6·00	5·66
7	5·08	6·08	5·50
8	4·58	5·97	5·28
9	4·03	6·11	5·06
10	3·69	5·89	4·80
11	3·47	5·86	4·66
Mittag	3·47	5·81	4·62
1ʰ p.	3·36*	5·89	4·56
2	3·47	5·72	4·54*
3	3·61	5·78*	4·58
4	3·83	5·72	4·70
5	4·00	5·86	4·96
6	4·33	5·94	5·20
7	4·58	5·97	5·30
8	4·89	5·94	5·46
9	5·11	6·11	5·64
10	5·33	**6·06**	5·66
11	5·28	6·00	5·68
Mittel	4·60	5·94	5·25

Bjelašnica.

43° 42' N, 18° 15' E; 2067 *m*.

7 Jahre.

Abweichungen berechnet.
(Zentimeter pro Sekunde.)

	Jahr	Sommer	Winter	Differenz
Mitternacht[1]	28	72	—19	91
1h a.	20	**73**	—36	109
2	12	72	—48	120
3	6	68	—54*	**122**
4	0	58	—50	108
5	— 4	42	—38	80
6	— 7	21	—19	40
7	— 9	— 4	1	— 5
8	—13	— 32	20	— 52
9	—17	— 58	34	— 92
10	—22	— 80	**40**	—120
11	—27	— 94	38	—132*
Mittag	—31	—100*	30	—130
1h p.	—32*	— 96	19	—115
2	—31	— 83	9	— 92
3	—25	— 64	2	— 66
4	—15	— 40	— 1*	— 39
5	— 3	— 16	2	— 18
6	10	8	9	— 1
7	22	27	15	12
8	31	42	**20**	22
9	36	54	18	36
10	**37**	62	11	51
11	34	68	— 3	71
Mittel	20	56	22	72

[1] Eigentlich $11^1/_2{}^h$ p., d. i. 11h bis Mitternacht.

Puy de Dôme.

45° 46′ N, 2° 58′ E; 1467 *m*.

Abweichungen berechnet.

(Zentimeter pro Sekunde.)

	Jahr	Sommer	Winter	Sommer—Winter
Mitternacht	27·1	32·4	7·2	25·2
1h a.	26·2	33·2	5·2	28·0
2	25·4	**33·6**	4·4*	**29·2**
3	24·0	33·5	5·2	28·3
4	21·5	31·5	7·0	24·5
5	17·2	26·8	9·0	17·8
6	10·5	18·4	**10·1**	8·3
7	1·6	6·6	9·3	— 2·7
8	— 9·1	— 7·8	6·2	—14·0
9	—20·4	—23·3	0·8	—24·1
10	—30·8	—37·6	— 5·8	—31·8
11	—38·8	—48·8	—12·9	—35·9
Mittag	—42·9*	—54·8	—18·8	—36·0*
1h p.	—42·6	—55·0	—22·2	—32·8
2	—37·8	—49·2	—22·4*	—26·8
3	—29·0	—38·5	—19·2	—19·3
4	—17·9	—24·7	—13·4	—11·3
5	— 5·8	— 9·8	— 6·0	— 3·8
6	5·3	4·0	1·5	2·5
7	14·8	15·2	7·7	7·5
8	21·5	23·4	11·8	11·6
9	25·4	28·3	**13·2**	15·1
10	27·2	30·8	12·2	18·6
11	**27·4**	31·8	9·9	21·9
Mittel	22·9	29·1	10·1	20·0

Pic du Midi.

42° 56′ N, 1′ W v. Greenw.; 2859 *m*.

Abweichungen berechnet.

(Zentimeter pro Sekunde.)

	Jahr	Sommer	Winter	Sommer—Winter
Mitternacht	— 0·4	**20·4**	—44·8	65·2
1h a.	—13·4	18·9	—48·6	**67·5**
2	—26·3	13·9	—49·3*	63·2
3	—35·3	7·7	—45·9	53·6
4	—36·8*	2·7	—37·4	40·1
5	—29·3	0·9*	—24·1	25·0
6	—13·8	3·0	— 7·0	10·0
7	7·0	8·5	12·3	— 3·8
8	28·2	15·6	30·9	—15·3
9	45·2	22·0	46·6	—24·6
10	**54·2**	**25·1**	57·4	—32·3
11	52·9	23·2	**61·7**	—38·5
Mittag	42·0	15·6	59·8	—44·2
1h p.	24·0	3·5	52·2	—48·7
2	3·3	—11·1	40·7	—51·8
3	—15·3	—25·3	27·3	—52·6*
4	—27·8	—35·9	13·8	—49·7
5	—31·9*	—40·9*	1·9	—42·8
6	—27·8	—39·0	— 8·0	—31·0
7	—17·6	—30·9	—15·9	—15·0
8	— 5·2	—18·4	—22·3	3·9
9	5·4	— 4·4	—28·0	23·6
10	**10·4**	8·1	—33·8	41·9
11	8·3	16·8	—39·5	56·3
Mittel	23·4	17·2	33·7	38

Die für diese Abhandlung neu berechneten Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke sind (Amplituden *cm*/sec, Zeit $x = 0$ für $11^{1}/_{2}{}^{h}$ p.):

Sonnblick, 1901 bis 1905.

Winter u. Frühling	$31\cdot4 \sin(132^{\circ}7+x)+5\cdot6 \sin(18^{\circ}8+2x)$
Sommer u. Herbst.	$30\cdot1 \sin(109\cdot2+x)+8\cdot0 \sin(333\cdot4+2x)$
Jahr	$30\cdot1 \sin(121\cdot2+x)+6\cdot3 \sin(351\cdot8+2x)$

Obir, 1899 bis 1903.

Winter	$10\cdot5 \sin(54^{\circ}4+x)+8\cdot4 \sin(196^{\circ}7+2x)$
Sommer	$109\cdot1 \sin(67\cdot0+x)+25\cdot5 \sin(266\cdot4+2x)$
Jahr	$45\cdot9 \sin(61\cdot5+x)+15\cdot4 \sin(235\cdot6+2x)$

Bjelašnica, 1898 bis 1905, $x = 0$ für $12^{1}/_{2}{}^{h}$ a.

Winter	$28\cdot5 \sin(240^{\circ}6+x)+26\cdot7 \sin(168^{\circ}3+2x)$
Frühling........	$39\cdot0 \sin(159\cdot9+x)+10\cdot0 \sin(190\cdot6+2x)$
Sommer	$86\cdot3 \sin(85\cdot4+x)+14\cdot4 \sin(277\cdot9+2x)$
Herbst	$45\cdot4 \sin(50\cdot9+x)+7\cdot6 \sin(137\cdot9+2x)$
Jahr	$30\cdot7 \sin(105\cdot4+x)+9\cdot8 \sin(189\cdot4+2x)$

Bemerkenswert sind hier die jahreszeitlichen Änderungen der Phasenzeiten und Amplituden, die für die ganztägige und halbtägige Periode fast entgegengesetzt verlaufen.

Der tägliche Gang der Windstärke auf dem Pic du Midi ist ganz abweichend von jenem auf den anderen Berggipfeln, ganz besonders wenn man ihn mit dem Gange der Windstärke auf dem Puy de Dôme vergleicht. Das Maximum der Windgeschwindigkeit tritt auf dem Pic du Midi im Winter wie im Sommer und Jahresmittel zwischen 10^{h} und 11^{h} vormittags ein, zu welcher Zeit auf den anderen Berggipfeln schon nahezu das Minimum der Windstärke erreicht wird. Der mittlere jährliche Gang erinnert an jenen in der Niederung: Windstärke über dem Mittel von 7^{h} a. m. bis 9^{h} p. m., Hauptminimum bei Nacht und am Abend, zweites kleines Maximum 10^{h} abends, wie das auch an manchen Orten der Niederung der Fall ist.

Die Erklärung dieser Anomalie auf dem Pic du Midi dürfte schwierig sein, jedenfalls kann sie nicht ohne genaue Kenntnis der Lokalverhältnisse versucht werden. Aber trotz des gänzlich verschiedenen täglichen Ganges der Windstärke im Winter wie im Sommer auf dem Pic gegenüber dem Puy de Dôme befolgt bemerkenswerter Weise der Unterschied Sommer—Winter den gleichen Gang (siehe Tabelle).

Hier mögen auch die Gleichungen für den täglichen Gang dieser Ungleichheit zwischen Winter und Sommer Platz finden:

Gleichung der Differenzkurven: Sommer—Winter.

Puy de Dôme .... $30{\cdot}8 \sin(84^\circ 6+x)+ 7{\cdot}3 \sin(309{\cdot}8+2x)$

Pic du Midi ...... $34{\cdot}4 \sin(61{\cdot}9+x)+22{\cdot}2 \sin(358{\cdot}7+2x)$

Es besteht nur ein relativ geringer Phasenunterschied.

Täglicher Gang der Windstärke.

Beobachtete Werte (Meter pro Sekunde).

	3^h a.	6	9	Mittag	3^h p.	6	9	Mittn.
Puy de Dôme (Sommet)								
Winter	6·38	6·37	6·31	6·11	6·10	6·30	6·45	6·33
Frühling ...	6·47	6·29	5·82	5·75	5·98	6·26	6·42	6·51
Sommer	5·47	5·54	4·79	4·88	5·05	5·39	5·83	5·60
Herbst	5·73	5·65	5·23	5·07	5·26	5·71	5·99	5·99
Jahr	6·01	5·96	5·54	5·45	5·60	5·91	6·17	6·11
Pic du Midi[1] (Observatorium)								
Winter	5·37	5·37	6·74	6·81	5·91	5·69	5·91	5·69
Sommer	4·22	4·14	4·43	4·29	3·86	3·86	4·00	4·43
Jahr	4·54	4·65	5·48	5·22	4·72	4·68	4·86	4·94

1 Halbe Beaufort-Scala auf Meter pro Sekunde reduziert.

Die Mittel für Puy de Dôme und Pic du Midi gelten für die gleiche fünfjährige Periode 1899 bis 1903 inklusive.

Gleichungen des täglichen Ganges der Windstärke.

(Amplituden in Zentimeter pro Sekunde.)

Puy de Dôme

Winter ...... $13 \cdot 7 \sin (71^\circ 7 + x) + 9 \cdot 1 \sin (219^\circ 6 + 2x)$.
Sommer ..... $44 \cdot 3 \sin (80 \cdot 6 + x) + 11 \cdot 5 \sin (257 \cdot 4 + 2x)$.
Jahr .... $35 \cdot 0 \sin (85 \cdot 7 + x) + 8 \cdot 4 \sin (252 \cdot 6 + 2x)$.

Pic du Midi (1899 bis 1903)

Winter ..... $52 \cdot 3 \sin (270^\circ 6 + x) + 11 \cdot 9 \sin (141^\circ 1 + 2x)$.
Sommer .... $21 \cdot 1 \sin (\;6 \cdot 3 + x) + 20 \cdot 0 \sin (116 \cdot 1 + 2x)$.
Jahr .... $22 \cdot 3 \sin (288 \cdot 3 + x) + 32 \cdot 7 \sin (140 \cdot 6 + 2x)$.

10 Jahre (1894 bis 1903)

Jahr .... $19 \cdot 1 \sin (295^\circ 7 + x) + 21 \cdot 9 \sin (162^\circ 4 + 2x)$.

Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

Die vorliegende Abhandlung bildet den Anfang der Publikationen, die das im Besitze der kaiserl. Akademie befindliche Radiummaterial betreffen. Bei dieser Gelegenheit erlaubt sich die unterzeichnete Kommission, auch an dieser Stelle für die vielseitige Förderung ihres Unternehmens, insbesondere seitens des hohen k. k. Ackerbauministeriums durch Überlassung der Rohmaterialien, seitens der Österreichischen Gasglühlicht- und Elektrizitätsgesellschaft, die bei der Aufbereitung derselben besonderes Entgegenkommen gezeigt hat durch Überlassung ihrer Fabrik in Atzgersdorf bei Wien, und der Herren Direktor L. Haitinger und Dr. K. Ulrich durch Leitung und Durchführung der umfangreichen chemischen Arbeiten ihren Dank auszusprechen.

Die Radium-Kommission
der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

I.

Bericht über die Verarbeitung von Uranpecherzrückständen

von

Ludwig Haitinger und **Karl Ulrich.**

Chemische Fabrik der Österreichischen Gasglühlicht- und Elektrizitätsgesellschaft.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. April 1908.)

Es wurden uns zur Verarbeitung übergeben 10.000 *kg* Rückstände der k. k. Uranfabrik in St. Joachimsthal, die, wie uns mitgeteilt ward, einer Menge von etwa 30.000 *kg* Uran-

pecherz mit einem Durchschnittsgehalt von 53·4% Uranoxyduloxyd entsprechen.

Der Feuchtigkeitsgehalt der Rückstände, als Gewichtsverlust beim Trocknen bei 105° C. ermittelt, variierte beträchtlich und betrug bei der Sendung vom 26. April 1904 (2500 *kg*) 18·4%, bei der Sendung vom 28. November 1904 (2500 *kg*) 14·6% und bei der Sendung vom 31. August 1905 (5000 *kg*) 10·3%; daraus berechnet sich für die Gesamtmenge ein Wassergewicht von 1340 *kg*. Die Verarbeitung der Rückstände bis zur Gewinnung des Rohchlorides dauerte über zwei Jahre, zumal orientierende Versuche zu Beginn ziemlich viel Zeit in Anspruch nahmen; denn wenn auch der eingeschlagene Weg dem von Debierne[1] angegebenen folgte, so war doch erst die Ermittlung der notwendigen Reaktionszeiten, Konzentrationen usw. nötig, wie es für die Organisierung eines fortlaufenden Betriebes erforderlich ist. Im folgenden soll der Prozeß beschrieben werden, wie er sich aus den bestehenden Raum- und Einrichtungsverhältnissen entwickelte. Er war für die jährliche Verarbeitung von 5000 *kg* Rückständen berechnet.

Die chemischen Operationen, denen die Rückstände bei der Verarbeitung unterworfen werden, bezwecken einerseits ein Aufschließen des Materials, andrerseits die Überführung des schwerlöslichen Radiumsulfates in eine säurelösliche Verbindung und die Lösung der letzteren; dementsprechend werden die Rückstände mit ätzenden, respektive kohlensauren Alkalien gekocht und mit geeigneten Säuren behandelt.

Die erste Operation ist vorteilhaft ein Kochen mit Ätznatron, und zwar wurden je 100 *kg* Rückstände mit einer Lösung von 50 *kg* Ätznatron in 200 *l* Wasser gekocht, einen Arbeitstag lang; eine größere Konzentration der Kochlauge bewirkte nur eine wenig verbesserte Ausnützung des Alkalis, wie durch Titration des freien Alkalis festgestellt werden konnte. Es wurden durchschnittlich beim ersten Kochen 40% des Alkalis in Natriumsulfat, zum Teil in Silikat umgewandelt. Die Kochlauge enthält auch Radium, jedoch in so geringer Menge, daß der Radiumgehalt der gesamten Natronkochlaugen, welche bei

[1] U. a. Chemical News, Vol. 88, No 2285, p. 136.

der Verarbeitung von 10.000 *kg* Rückständen erhalten wurden, nicht mehr betrug, als der Radiumgehalt von 10 *kg* Rückständen ausmacht (Messung von Mache). Infolgedessen wurden die Kochlaugen zum größten Teil verschüttet. Nach beendigtem Kochen setzen sich die Rückstände gut ab und die Lauge kann klar abgezogen werden. Es ist günstig, den Kesselinhalt ein- bis zweimal zu dekantieren, bevor man ihn zum weiteren Auswaschen in andere Gefäße überträgt; es waren dies Tonschalen, welche zwei Partien von je 100 *kg* faßten, mit einem Filtereinsatz versehen waren und mit einem Tubus an der tiefsten Stelle, in welchen mittels eines Kautschukstopfens ein entsprechend langes, enges Bleirohr eingesetzt war; da diese Schalen auf einem Podium 3 *m* hoch aufgestellt waren, so wirkte die Wassersäule im Bleirohr als Saugvorrichtung. Ein vollständiges Auswaschen der löslichen Schwefelsäure ist diesmal überflüssig, deshalb wurde auch nur so lange gewaschen, bis die Hauptmenge derselben entfernt war. Das derart vorbereitete Produkt wurde dann auf einem Wasserbade mit dem anderhalbfachen Gewicht roher Salzsäure 1:1 digeriert und nach Abziehen der sauren Flüssigkeit noch ein zweitesmal mit Wasser in der Wärme ausgezogen. Diese zweite, weniger saure Lauge diente zum Anrühren der Extraktionssäure für die nächste Arbeitspartie, so daß die Rückstände in diesem Stadium zweimal ausgezogen wurden und die Flüssigkeit zweimal verwendet werden konnte.

Bei längerem Stehen und Erkalten scheidet die Lauge einen weißen Körper ab, der, auf der photographischen Platte geprüft, keine Aktivität zeigt; er wurde jedoch gesammelt und aufbewahrt; er trägt die Bezeichnung »Gips+Chlorblei« *(F)*. Der Rohsalzsäureauszug enthält nur äußerst geringe Spuren von Radium, jedoch die Hauptmenge von Wismuth-Polonium und Actinium. Zur Anreicherung dieser beiden Körper und auch um das Ausgangsmaterial für deren Darstellung leichter aufbewahren zu können, wurden diese Auszüge mit Ammoniak gefällt. Polonium und Actinium befinden sich in der Fällung, welche »Hydrat« *(E)* bezeichnet wurde. Das Filtrat davon enthält keinen radioaktiven Körper und wurde weggegossen, das Hydrat ist aufbewahrt. Aus einem kleinen Teile desselben

sind die seltenen Erden *(N, O, P)* abgeschieden worden und aus diesen konnten sowohl nach dem von Demarçay[1] für die Trennung der seltenen Erden angegebenen Verfahren der Magnesiumdoppelnitratkrystallisation als auch nach dem Auerschen »Oxydverfahren« stark wirksame Actiniumpräparate erhalten werden.

Anschließend an das Ausziehen mit roher Salzsäure werden die Rückstände mit einer Sodalösung gekocht; es wurde die praktische schwefelsäurefreie Ammoniaksoda verwendet, und zwar pro 100 *kg* Rückstände 50 *kg* Soda, gelöst in 200 *l* Wasser. Bei diesem Prozeß wird schon ein großer Teil des Radiumsulfates in Carbonat umgesetzt; es war deshalb notwendig, einerseits die gekochten Rückstände so lange zu waschen, bis im Waschwasser keine Spur Schwefelsäure mehr nachweisbar war und andrerseits das Auslösen der Carbonate mit chemisch reiner Salzsäure vorzunehmen.

Das Kochen mit Soda und das Ausziehen der vollständig gewaschenen Rückstände mit Salzsäure wurde mit jeder Menge von Rückständen dreimal durchgeführt; erst dann waren sie an Radium nahezu erschöpft *(C)*; nach einer Messung von Mache enthielten sie nur mehr 2 $^0/_0$ vom ursprünglichen Radiumgehalt. Die Sodakochlaugen *(D)* sind wie die Ätznatronkochlaugen praktisch radiumfrei (Meyer).

Der untenstehende Auszug aus dem Betriebsbuch gibt beispielsweise die Reihenfolge und Zeitdauer der einzelnen Prozesse bei gleichzeitiger Verarbeitung von 2600 *kg* Rückständen. Es ist daraus ersichtlich, daß jedes Quantum ungefähr 6 Monate in Bearbeitung stand und daß das Waschen nach dem Kochen mit Soda die zeitraubendste Operation war, welche jedesmal 4 bis 6 Wochen dauerte.

[1] C. r. de l'Acad. des sciences, *130*, 1019.

Je 200 *kg* Rückstände	Partie Nr.		
	1	6	12
Kochen mit Ätznatron, waschen	27./I.	9./II.	28./II.
Ausziehen mit roher Salzsäure	16./II.	13./III.	9./IV.
Erstes Kochen mit Soda, waschen	5./III.	20./III.	17./IV.
Erstes Ausziehen mit reiner Salzsäure	20./IV.	5./V.	19./V.
Zweites Kochen mit Soda, waschen	24./IV.	9./V.	23./V.
Zweites Ausziehen mit reiner Salzsäure	30./V.	8./VI.	23./VI.
Drittes Kochen mit Soda, waschen	5./VI.	12./VI.	26./VI.
Drittes Ausziehen mit reiner Salzsäure	2./VII.	11./VII.	10./VIII.

Aus den reinsalzsauren Auszügen, welche die ganze Radiumausbeute enthalten, fällt man dasselbe zur weiteren Konzentration mit Schwefelsäure als Sulfat aus. Mit dem Radium zusammen fallen die alkalischen Erden, hauptsächlich Calcium, viel Blei, welches Radioblei enthält, und eine kleine Menge seltener Erden, welche Actinium führen und als Natriumdoppelsulfate in den Niederschlag gehen. Die ganze Fällung, das »Rohsulfat«, betrug für 100 *kg* Rückstände beim ersten Auszug 1 bis 2, beim zweiten und dritten $^1/_2$ bis 1 $^0/_0$ vom Gewicht der Rückstände. Die Überführung des Rohsulfates in eine zur weiteren Konzentration des Radiums geeignete Form, Chlorid oder Bromid, bedingt wiederum die Umwandlung der Sulfate in Carbonate. Die Umwandlung wurde durch mehrmaliges Kochen des Rohsulfates mit jedesmal neuen Mengen konzentrierter Sodalösung im mehrfachen Überschuß bewirkt, jedoch war die Umwandlung niemals eine vollständige; denn trennte man das Carbonat von seiner Kochlauge und wusch es vollständig aus, so war es niemals ganz in Salzsäure löslich; abgesehen von den großen Mengen von Bleichlorid, welche man nach Entfernung des radiumhaltigen Filtrates durch heißes Wasser in Lösung bringen konnte, bleibt immer ein kleiner Teil als »nicht umgesetzt« zurück; er wurde der nächsten Partie Rohsulfat zugesetzt. Das Bleichlorid wurde durch Umkrystallisieren möglichst vom Radium befreit und gesammelt, im ganzen 60 *kg* als Material für Radiobleigewinnung *(I)*.

Der im salzsauren Wasser leicht lösliche Anteil der Carbonate ex Rohsulfat, welcher das gesamte Radium enthält, wurde mit Schwefelwasserstoff von den geringen Mengen gelösten Bleies *(L)* befreit, dann zur Trockene eingedampft und aus dem Trockenrückstande wurde schließlich die Hauptmenge des vorhandenen Chlorcalciums durch konzentrierte Salzsäure, in welcher Radiumchlorid noch unlöslicher ist als Bariumchlorid, ausgezogen. Der restierende Körper, hauptsächlich neben Radium aus Bariumchlorid bestehend, das sogenannte Rohchlorid, enthält noch Strontium- und Calciumchlorid und nur geringe Mengen anderer Körper *(K)*, welche sich jedoch beim systematischen Krystallisieren in den letzten Mutterlaugen ansammeln. Vom Rohchlorid, welches das Material für die systematische Krystallisation bildet, wurden im ganzen 20 *kg*, feuchtes Salz gewonnen. Von den Körpern, welche sich im Rohchlorid vorfinden, ist das Radium selbst der am schwersten lösliche und die erste Fraktion ist demnach immer die an Radium reichste.

Zwei Gesichtspunkte waren bei der Durchführung dieser Arbeiten zu berücksichtigen; erstens möglichst viel Bariumchlorid, welches möglichst wenig Radium enthält, aus der Krystallisationsreihe auszuscheiden, und zweitens die erste Fraktion immer entsprechend groß zu halten. Das letztere kann man erreichen, wenn man die erste Fraktion, sobald sie der Menge nach nur mehr 1 oder 2% vom Gesamtgewicht der Fraktionen ausmacht, so lange abstellt, bis die zweite Fraktion annähernd gleichwertig geworden ist und mit der ersten vereinigt werden kann, was ungefähr nach vier bis fünf Reihen der Fall ist; leider fehlt es an einer Methode, die Aktivität der einzelnen Fraktionen rasch zu bestimmen, um den Verlauf der Krystallisation kontrollieren zu können.

Durch sukzessives Abscheiden der starken Fraktionen am oberen und der schwächsten am unteren Ende der Reihe wurden die Mittelfraktionen, welche zu Beginn die größten sind, immer kleiner, bis die ganze Menge des Radiumbariumgemenges in zwei Teile zerlegt war: einen Teil, ungefähr 2 *kg* im Gewicht, welcher nahezu das gesamte Radium enthielt, und einen zweiten von ungefähr 11 *kg* *(G)*, welcher nur sehr wenig

davon enthielt. Die 2 *kg* bilden das Material für die Darstellung von reinem Radium.

Die Krystallisationen wurden, um die Säuren des Schwefels, welche bei der Verbrennung von Leuchtgas sich bilden, auszuschließen, auf einem Dampfbad ausgeführt; das Trocknen der Präparate zur Atomgewichtsbestimmung geschah in einem mittels einer Berzeliuslampe geheizten Trockenschrank (120° C.).

Nach ungefähr 30 Reihen wurde die Krystallisation unterbrochen, die Glieder von 2 bis 10 in drei Gruppen (6, 7, 8) vereinigt und nur die erste Fraktion, ungefähr 9 *g*, weiter krystallisiert. Sie wurde noch vorher einer Reinigung durch Schwefelwasserstoff unterzogen, da die Anwesenheit von durch Schwefelwasserstoff fällbarem Körper bemerkt worden war; es handelte sich wahrscheinlich um Blei, welches aus den Glasgefäßen stammte. Das so gereinigte Produkt wurde von da ab nur mehr in Quarzschalen krystallisiert. Die Fraktion wurde gelöst, mit Salzsäure angesäuert und eingedampft; nach erfolgter Krystallisation wurde die Lauge abgegossen und abgestellt. Mit den Krystallen wurde derselbe Vorgang noch dreimal wiederholt und so schließlich eine Kopffraktion erhalten, bezeichnet »Kopf«, und vier Laugen, welche, mit der stärksten beginnend, die Bezeichnung haben: *M* III (Mutterlauge III), *M* II, *M* I und A. G. (wurde mit kleinen Resten der oberen Fraktionen vereinigt, war daher tatsächlich etwas radiumreicher als *M* I). Von den Fraktionen A. G., *M* III und »Kopf« wurden Atomgewichtsbestimmungen ausgeführt, von A. G. zwei, von den anderen je eine. Die angewendete Methode war die von T. W. Richards[1] für die Atomgewichtsbestimmung des Bariums angewendete, bei welcher das bis zur Gewichtskonstanz getrocknete wasserfreie Chlorid in Wasser gelöst wird und mit der wahrscheinlichen Menge genau gewogenen reinen Silbers, das in Salpetersäure gelöst ist, versetzt wird; nach dem Absetzen des lange geschüttelten Niederschlages läßt eine Probe der klaren überstehenden Flüssigkeit, einerseits mit Salzsäure, andrerseits mit äquivalenter Menge ganz verdünnter Silberlösung versetzt, aus der relativen Stärke der Opaleszenz

[1] Zeitschrift für anorganische Chemie, *3*, 441; *6*, 89.

erkennen, ob Chlorid oder Silber im Überschuß vorhanden ist. Durch sukzessives Zufügen des Fehlenden erreicht man den Endpunkt. Die beiden von A. G. ausgeführten Atomgewichtsbestimmungen stimmen überein, was für die Anwendbarkeit dieser Methode auf ein Radiumbariumgemenge spricht.

A. G.

1. 0·3165 *g* wasserfreies Chlorid erforderten 0·3191 *g* Silber, daraus folgt Atomgewicht = 143·2.
2. 0·3985 *g* wasserfreies Chlorid erforderten 0·4015 *g* Silber, daraus folgt Atomgewicht = 143·2.

M III.

0·3682 *g* wasserfreies Chlorid erforderten 0·3103 *g* Silber, daraus folgt Atomgewicht = 185·2.

»Kopf«.

0·5358 *g* wasserfreies Chlorid erforderten 0·3909 *g* Silber, daraus folgt Atomgewicht = 225.

Dieser mit dem von M. Curie gefundenen[1] übereinstimmende Wert würde auf ein sehr reines Präparat schließen lassen; auch die verhältnismäßig große Differenz zwischen »Kopf« und *M* III hat nichts Unmögliches an sich. Sie wird im Gegenteil durch Aktivitätsbestimmungen an den Präparaten bestätigt. Diese wurden von den Herren Dr. Stephan Meyer und Prof. Egon v. Schweidler ausgeführt und haben uns die beiden Herren, welche über ihre Untersuchungen demnächst ausführlich berichten werden, die folgenden Zahlen freundlichst mitgeteilt.

Setzt man die Aktivität der »Kopf«-Fraktion gleich $27 \cdot 2 \times 10^6$, so ist jene von *M* III $17 \cdot 0 \times 10^6$ und von A. G. $3 \cdot 1 \times 10^6$. Betrachtet man diese Zahlen als die Relativzahlen der in den Fraktionen enthaltenen Mengen Radiumchlorid und nimmt man an, daß außer diesem nur Bariumchlorid zugegen ist, berechnet unter Zugrundelegung eines Atomgewichtes von 225 (der für »Kopf« gefundenen Zahl) für Radium, das Durchschnittsatomgewicht, so erhält man:

---

[1] Indessen hat M. Curie die Atomgewichtsbestimmung wiederholt und einen ungefähr um eine Einheit höheren Wert gefunden.

	»Kopf«	*M* III	A. G.	
Aktivitätszahl	27·2	17·0	3·1	
entsprechend	100·0	62·5	11·4	Teilen $RaCl_2$ in 100 Teilen
und	0·0	37·5	88·6	Teilen $BaCl_2$ in 100 Teilen.
Dem $RaCl_2$ entsprechen	—	47·52	8·67	Teile Radium in 100 Teilen,
dem $BaCl_2$ entsprechen	—	24·74	58·44	Teile Barium in 100 Teilen,
somit in Summe	—	72·26	67·11	Teile Erdmetall in 100 Teilen.
Dem $RaCl_2$ entsprechen	—	14·98	2·73	Teile Chlor in 100 Teilen,
dem $BaCl_2$ entsprechen	—	12·76	30·16	Teile Chlor in 100 Teilen,
somit in Summe	—	27·74	32·89	Teile Chlor in 100 Teilen.
Atomgewicht aus der Relation $(RaBa)Cl_2$, aktinometrisch gefunden	—	**184·69**	**144·67**	
auf chemischem Wege gefunden	225	**185·2**	**148·2**	

Die Differenzen zwischen den chemisch und aktinometrisch gefundenen Atomgewichten sind ziemlich geringfügig und bestätigen die Voraussetzung, daß die Aktivität in der Tat an das Bariumhomologe geknüpft ist. Diese Voraussetzung, so wahrscheinlich sie auch scheint, bedarf immerhin eines strikten Beweises, denn die Vermutung ist gewiß statthaft, daß das bei der Fraktionierung des isomorphen Salzgemisches naturgemäß an den Kopf der Krystallisationsreihe gehende »Überbarium« nur mehr weniger zufällig von einem eben dahingehenden Etwas, dem die »Aktivität« zukommt, begleitet wird.[1]

---

[1] Aber auch dann, wenn durch weitere Untersuchungen an den Gliedern einer und derselben Fraktionsreihe die Übereinstimmung der Radiumbestimmung durch Atomgewicht und durch Aktivität auf schärfste bestätigt wird, erscheint es nicht ausgeschlossen, daß ein aus ganz anderen Materialien erzeugtes Ra-Ba-Salz eine solche Übereinstimmung nicht zeigt. Dieses wäre dann möglich, wenn in einem gegebenen Substanzgemisch die »Aktivität« sich in toto an ein vorhandenes »Überbarium« heftet (nicht im Sinne einer stöchiometrischen Verbindung) und sich dann parallel mit diesem in der Fraktionsreihe verteilt. H.

Der weitaus größte Teil des aus den Pecherzrückständen gewonnenen Rohbariums wurde in der früher geschilderten Weise als Chlorid fraktioniert. Ein kleiner Teil jedoch, nachdem durch einige Krystallisationen eine Anreicherung an Radium erzielt war, in Bromid verwandelt und in analoger Weise bearbeitet. Nur der »Kopf« dieser Reihe wurde aufbewahrt, während alle anderen Anteile wieder in Chlorid zurückverwandelt und der Hauptreihe einverleibt wurden. Dieser Bromidkopf im ursprünglichen Gewicht von etwa 0·5 *g* hat nach mehr als einjähriger Aufbewahrung sein Gewicht auf 0·389 *g* vermindert. Herr Brill im Laboratorium Ramsay's (laut privater brieflicher Mitteilung) hat mit diesem Präparat einige Versuche gemacht. Er fand, daß es nur wenig löslich in Wasser ist, beim Erhitzen 5·4% seines Gewichtes verliert, dagegen bei Umwandlung in wasserfreies Bromid durch Erhitzen im Bromwasserstoffstrom bis zur Gewichtskonstanz im Verhältnis von 38·21 zu 44·78 (also um 17·2%!) zunimmt. Es hat somit beim Aufbewahren einen erheblichen Teil seines Bromgehaltes verloren. Der aktinometrische Vergleich mit einem sehr reinen Radiumchlorid, das zu Atomgewichtsbestimmungen gedient hatte, ergab Herrn Brill unter Zugrundelegung von Ra = 225 ein Atomgewicht des im Bromid enthaltenen Erdmetalles von 196, während durch die direkte Bestimmung 190 gefunden wurde. Die Gesamtmenge der Bromidfraktion enthält aktinometrisch gemessen 179·2 *mg* Ra, was etwa 236 *mg* wasserfreiem Chlorid entsprechen würde. Der Umstand, daß sich Radiumbromid so leicht zersetzlich erweist, ist unseres Wissens nicht sehr bekannt und fordert gar sehr zur Vorsicht heraus, wenn es sich um ziffermäßige Bestimmung der physikalischen Konstanten, respektive seiner Wirksamkeit handelt.

Alle dargestellten Radiumbariumpräparate wurden dem II. physikalischen Institut der Universität Wien übergeben und von den Herren Dr. Meyer und Prof. v. Schweidler aktinometrisch gemessen. Die folgende Tabelle gibt deren Menge und relative Aktivität und aus dem Produkte beider Aufschluß über die Verteilung der gesamten gewonnenen Mengen Radiums in den einzelnen Fraktionen.

Signatur	Gewicht	Relative Aktivität nach Bestimmungen von St. Meyer und Schweidler	Produkt aus Gewicht und Aktivität
1. »Kopf«	1·05	27,200.000	28,560.000
2. *M* III.........	0·4	17,000.000	6,800.000
3. *M* II	1·06	6,100.000	6,466.000
4. *M* I..........	1·3	2,500.000	3,250.000
5. A. G..........	5·47	3,100.000	16,957.000
6. *E* = (II, III)....	243·0	60.400	14,677.200
7. *D* = (IV, V)...	556	3.040	1,690.240
8. *C* = (VI, VII)..	1.252	223	279.196
9. $BaCl_2$	10.918	182	1,987.046
			80,666.682

Dividiert man die Summe der Zahlen der letzten Kolumne durch die Aktivitätszahl der Kopffraktion, so erhält man rund 3, d. h. in den Fraktionen 1 bis 8 zusammengenommen ist etwa so viel Radium als in 3 *g* eines Radiumchlorides vom Reinheitsgrade der ersten Fraktion enthalten ist. Hiezu kommt noch die Bromidfraktion, die nach den Zahlen von Herrn Brill 0·236 *g* wasserfreiem Radiumchlorid entspricht.

Von der Gesamtverarbeitung restieren folgende radiumarme Produkte und Nebenprodukte:

A. 200 *kg* unverarbeitete Rückstände;
B. 60 *kg* Rückstände, teilweise verarbeitet;
C. 4500 *kg* Rückstände der Verarbeitung (mit Ätznatron, Salzsäure und Soda);
D. zirka 250 *kg* eingedampften Sodakochlaugenrückstand;
E. zirka 2400 *kg* »Hydrat« (sehr feucht);
F. zirka 130 *kg* »Gips + Chlorblei«;
G. zirka 30 *kg* Sulfide durch Schwefelwasserstoff ex Hydrat;
H. zirka 1000 *l* konzentriertes Filtrat von der Rohsulfatfällung;
I. zirka 58 *kg* Bleichlorid, davon 10 *kg* in Acetat umgewandelt;
K. zirka 60 *l* letzte Rohchloridlaugen, hauptsächlich Chlorcalcium, teils mit, teils ohne seltene Erden;

L. zirka 600 *g* Sulfide, durch Schwefelwasserstoff aus Rohchloridlösung gefällt;
M. zirka 30 *g* aus Rohchloridlösungen abgeschiedene Trübung, aus Schwefel, Kieselsäure und Sulfaten bestehend;
N. zirka 3 *kg* Magnesiumdoppelnitrate von seltenen Erden;
O. zirka 585 *g* Oxyde der seltenen Erden, actiniumhaltig;
P. mehrere kleine Fraktionen actiniumreicher seltener Erden;
Q. zirka 2 *kg* Urannitrat, dargestellt aus den Rückständen.

Über eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung und einige daraus abgeleitete Eigenschaften der rationalen ebenen Kurven 3. und 4. Ordnung

von

G. Majcen in Agram.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1908.)

Man kann bekanntlich — wie Herr R. Sturm es gezeigt hat[1] — eine lineare Kongruenz (mit reellen oder imaginären Achsen) auf eine Fläche 2. Ordnung (geradlinige, beziehungsweise Nichtregelfläche) eindeutig und ausnahmslos abbilden. Einem jeden Strahle der Kongruenz $[a_1, b_1]$ entspricht ein Punkt der Fläche F^2; einem Strahlenbüschel der Kongruenz, welcher seinen Mittelpunkt auf der einen Achse a_1 hat, entspricht auf F^2 eine Punktreihe auf einer Erzeugenden des einen Systems; einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt auf der Achse b_1 liegt, entspricht wieder eine Punktreihe auf einer Erzeugenden des zweiten Systems von F^2. Es entspricht also einem gemeinsamen Strahle zweier Strahlenbüschel verschiedener Systeme in $[a_1, b_1]$ der gemeinsame Punkt der beiden entsprechenden Punktreihen auf F^2. Schließlich entspricht einer Regelschar 2. Ordnung in $[a_1, b_1]$ ein Kegelschnitt auf F^2 und umgekehrt.

Ich habe dann weiter ausgeführt,[2] daß eine lineare Kongruenz $[a_1, b_1]$ und ein zu dieser projektiver Ebenenbündel

[1] Liniengeometrie, I. Bd., p. 131.

[2] Jahresb. d. d. Math.-Vereinigung, XIV, p. 438.

2. Ordnung $[F^2]$ in den Schnittpunkten entsprechender Elemente eine allgemeine Fläche 3. Ordnung erzeugen, daß die beiden Kongruenzachsen a_1, b_1 zwei Flächengeraden sind und daß es fünf Strahlen c_{ik} $(i = 1, k = 2, 3, 4, 5, 6)$ gibt, welche ganz in den ihnen entsprechenden Ebenen des Ebenenbündels liegen. Diese Flächengeraden bilden also ein Quintupel mit zwei schneidenden Geraden a_1, b_1.

1. Den Strahlenbüscheln der Kongruenz, welche ihre Mittelpunkte A'_i auf a_1 haben (a_1 und b_1 seien reell), entsprechen auf F^2 die Erzeugenden a'_i des einen Systems. Den einzelnen Strahlen a'_{ik} im Strahlenbüschel (A'_i, b_1) entsprechen Punkte A'_{ik} auf der Erzeugenden a_i. Der Büschel $[\alpha_i]$ der Ebenen um b_1 erzeugt mit der zu ihm projektiven Regelschar $[a_i]^2$ eine Raumkurve 3. Ordnung, welche die Achse b_1 zu einer zweipunktigen Sehne hat und für welche die Erzeugenden a'_i einpunktige Sehnen sind. Diese Raumkurve k^3_b liegt ganz auf der erzeugten Fläche F^3, denn der Schnittpunkt $(\alpha_i a'_i)$ einer Ebene α_i mit der entsprechenden Erzeugenden a'_i, welcher ein Kurvenpunkt ist, gehört auch der Fläche F^3 an, weil durch ihn ein Strahl des Büschels (A'_i, b_1) hindurchgeht, welcher in $(\alpha_i a'_i)$ eine von den Tangentialebenen der Fläche F^2 um a'_i — d. i. die ihm entsprechende Tangentialebene — trifft.

Auf dieselbe Weise gibt der Ebenenbüschel $[\beta_i]$ um a_1 und die zu diesem projektive Leitschar auf F^2 zur Entstehung einer zweiten Raumkurve 3. Ordnung k^3_a auf F^2 Anlaß. Diese Kurve hat wieder die Achse a_1 zu einer zweipunktigen Sehne, die Erzeugenden b'_i der Leitschar aber zu einpunktigen Sehnen; sie gehört ebenfalls der Fläche F^3 ganz an. Beide Kurven k^3_a und k^3_b repräsentieren den vollständigen Schnitt beider Flächen F^2 und F^3; weil sie sich zu den Erzeugenden der beiden Scharen auf F^2 entgegengesetzt verhalten, so haben sie fünf Punkte gemein.

Die Fläche F^2 berührt also F^3 in fünf Punkten S_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Ein jeder von den fünf durch S_i gehenden Kongruenzstrahlen s_i hat den betreffenden Punkt S_i zum entsprechenden Punkt auf F^2, denn er ist der gemeinsame Strahl in den beiden Büscheln der Kongruenz, deren Ebenen durch denselben Punkt S_i beider Raumkurven $k^3_{a,b}$ hindurchgehen.

Auf F^2 gibt es daher fünf solche Punkte C_{ik} ($i = 1$, $k = 2, 3, 4, 5, 6$), deren Tangentialebenen je eine Flächengerade c_{ik} (als den entsprechenden Kongruenzstrahl) enthalten, und solche fünf Punkte S_i, durch welche ihre entsprechenden Kongruenzstrahlen hindurchgehen.

Nimmt man eine zweipunktige Sehne a_1 der Kurve k_a^3 und eine zweipunktige Sehne b_1 der Kurve k_b^3 an, so daß a_1 und b_1 weder untereinander noch mit den Kurven k_b^3 und k_a^3 weitere gemeinschaftliche Punkte haben, so ist durch k_a^3, k_b^3, a_1 und b_1 eine Fläche dritter Ordnung bestimmt, weil diese Angaben mit 19 linearen Bestimmungsstücken übereinstimmen. Es folgt dann eine direkte Konstruktion der Punkte von F^3 aus der Entstehung beider Kurven k_a^3 und k_b^3. Eine beliebige, durch a_1 gelegte Ebene ξ_1 schneidet die Kurve k_a^3 noch in einem Punkte P_1, durch welchen eine zweipunktige Sehne p_1 von k_b^3 geht. Irgend eine durch b_1 gelegte Ebene ξ_2 trifft k_b^3 zum drittenmal im Punkte P_2, durch welchen eine zweipunktige Sehne p_2 an k_a^3 gezogen werden kann. Die Schnittlinie $(\xi_1 \xi_2)$ und die Ebene $(p_1 p_2)$ bestimmen einen Punkt der Fläche F^3.

Es seien p_1, p_2, p_3 drei (windschiefe) Strahlen der Kongruenz $[a_1, b_1]$ und P_1, P_2, P_3 drei irgend welche ihnen entsprechende Punkte auf F^2. Dem Kegelschnitt k, in welchem F^2 von der Ebene $(P_1 P_2 P_3)$ geschnitten wird, entspricht dann in $[a_1, b_1]$ notwendig die Regelschar $\varkappa$, welche durch $(p_1 p_2 p_3)$ bestimmt ist. Die Punktreihe auf k und die Schar auf $\varkappa$ sind dann in ein-eindeutiger Verwandtschaft, in welcher die p_i den P_i entsprechen, wenn nur noch angegeben wird, welche Erzeugendensysteme von F^2 und Strahlenbüschelsysteme in $[a_1, b_1]$ einander zugewiesen werden sollen. Dadurch ist aber auch einem jeden Punkte X' auf F^2 ein einziger Strahl x in $[a_1, b_1]$ zugewiesen.

Zieht man nämlich durch X' die Erzeugenden x'_1 und x'_2 beider Scharen von F^2, so schneidet eine jede von ihnen den Kegelschnitt k in einem Punkte X'_1, beziehungsweise X'_2, welchen auf der Regelschar $\varkappa$ zwei Strahlen x_1 und x_2 entsprechen. Wenn x'_1 dem ersten System von Erzeugenden auf F^2 angehört, so hat der Strahlenbüschel in $[a_1, b_1]$, zu welchem x_1 gehört, seinen Mittelpunkt im Schnittpunkt (a_1, x_1);

der Mittelpunkt des Strahlenbüschels von $[a_1, b_1]$ wieder, welcher die Erzeugende x_2 enthält, ist dann der Schnittpunkt (x_2, b_1). Der Verbindungsstrahl $x \equiv [(a_1, x_1), (b_1, x_2)]$ ist daher der dem Punkte X' auf F^2 entsprechende Strahl in $[a_1, b_1]$. Umgekehrt kann auf dieselbe Weise für einen Strahl y der Kongruenz der entsprechende Punkt Y' auf F^2 eindeutig bestimmt werden.

2. Weil ein jeder Kongruenzstrahl x die Fläche F^3 außer in den beiden Punkten auf a_1 und b_1 nur noch in einem dritten Punkte X trifft und weil diesem Strahle x nur eine Ebene ξ' im Bündel $[F^2]$ mit dem Berührungspunkt X' entspricht, so sind sämtliche Punkte X der Fläche F^3 in die Berührungspunkte X' entsprechender Ebenen ξ' auf die Fläche F^2 abgebildet.[1] Die fünf Punkte C_{ik} $(i = 1,\ k = 2, 3, 4, 5, 6)$ sind Hauptpunkte der Abbildung. Ein jeder dieser fünf Punkte ist das Bild je einer Flächengeraden des Quintupels c_{ik} $(i = 1,\ k = 2 \ldots 6)$. Die Abbildung der übrigen Flächengeraden ist sehr einfach. Wir beschäftigen uns etwas näher nur mit der Abbildung der beiden Flächengeraden a_1 und b_1, also mit den beiden Kongruenzachsen.

Weil eine jede von diesen Achsen die fünf Geraden des Quintupels c_{ik} schneidet, so werden die Linien auf F^2, in welche die Flächengeraden a_1 und b_1 abgebildet werden, die Hauptpunkte C_{ik} enthalten. Wir beweisen, daß diese Linien die beiden durch die fünf Punkte C_{ik} auf F^2 möglichen Raumkurven 3. Ordnung k^3 und c^3 sind.

Irgend eine durch die Kongruenzachse b_1 gelegte Ebene α_i trifft die andere Achse a_1 in einem Punkte A'_i. Den Strahlen a'_{ik} des Büschels (A'_i, α_i) entspricht auf F^2 die Punktreihe A'_{ik} auf der Erzeugenden a_i. Die einzelnen Punkte dieser Reihe A'_{ik} sind Bilder der dritten Schnittpunkte der Strahlen a'_{ik} mit der Fläche F^3. Weil aber diese Schnittpunkte auf einem Kegelschnitte liegen (für welchen b_1 die ergänzende Gerade ist), so sind die Erzeugenden a_i auf F^2 Bilder der Kegelschnitte von F^3, welche b_1 zur ergänzenden Geraden haben. Ein jeder

---

[1] »Rad« der südsl. Akademie der Wiss. u. Künste, math.-naturw. Kl., Agram 1905, Bd. 161, p. 62.

von diesen Kegelschnitten trifft b_1 in zwei Punkten B_i und B_i', die Achse a_1 aber in einem Punkte A_i'. Die Achse b_1 bildet sich also auf F^2 in eine Linie k^3 ab, welche die Punkte C_{ik} enthält und die Erzeugenden a_i der einen Schar in zwei, die der anderen Schar b_i nur in einem Punkte trifft.

Das Bild der Achse a_1 ist eine zweite kubische Raumkurve c^3, welche durch die C_{ik} hindurchgeht und die Erzeugenden der Schar b_i in je zwei, die der Schar a_i hingegen in je einem Punkte trifft.

Die Eigenschaften der auf F^2 liegenden Raumkurven können mittels dieser Abbildung auf verschiedene entsprechende Raumkurven und ebene Kurven der Fläche F^3 übertragen werden. Wir beschäftigen uns hier nur mit gewissen Raumkurven 4. Ordnung auf F^2, welche auf Grund der obigen Abbildung zu einigen Eigenschaften rationaler ebener Kurven 3. und 4. Ordnung hinführen.

3. Die Tangentialebene in einem allgemeinen Punkte R der Fläche F^3 sei ρ. Die Ebene ρ schneidet F^3 in einer Kurve 3. Ordnung r^3 mit Doppelpunkt in R. Diese Kurve r^3 wird auf F^2 in eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art mit Doppelpunkt abgebildet.

Da nämlich die beiden Geraden a_1 und b_1 die Kurve r^3 auf F^3 in je einem Punkte R_1 und R_2 treffen, so bestimmen r^3, a_1 und b_1 eine Regelfläche 4. Ordnung φ_4, für welche a_1 und b_1 Doppelgeraden sind. Eine jede durch b_1 gelegte Ebene α_i enthält zwei Erzeugende der Fläche φ^4 und diese Erzeugenden gehören als Strahlen dem Kongruenzstrahlenbüschel in der Ebene α_i. Beide Erzeugenden bilden sich also in zwei Punkte der dem Strahlenbüschel in α_i entsprechenden Erzeugenden a_i auf F^2 ab. Das Punktepaar, in welchem eine durch b_1 gelegte Ebene die Kurve r^3 noch trifft, bildet sich darnach in ein Punktepaar auf der entsprechenden Erzeugenden a_i von F^2 ab. Da die Kongruenzachse a_1 sich zur Kurve r^3 ganz so verhält wie b_1, so werden Punktepaare auf r^3, welche noch in Ebenen durch a_1 liegen, in Punktepaare auf den Erzeugenden b_i der anderen Schar von F^2 abgebildet. Die Kurve r^3 bildet sich also in eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art k^4 auf F^2 ab. Diese Kurve enthält die fünf Punkte C_{ik}, weil die Kurve r^3 auf F^3

mit einer jeden der fünf Geraden c_{ik} je einen Punkt gemein hat; sie besitzt einen Doppelpunkt R', und zwar im Bilde des Doppelpunktes R von r^3. Viele von den Eigenschaften, welche Chasles in seiner Abhandlung über Raumkurven 4. Ordnung I. Art[1] gegeben hat, sind dazu geeignet, um in der vorliegenden Abbildung auf die ebenen Kurven r^3 übertragen zu werden. Wir wählen insbesondere die folgende Eigenschaft (p. 321 der zitierten Abhandlung):

»Quand la courbe du quatrième ordre a un point double, elle n'est tangente qu'à deux directrices et à deux génératrices de l'hyperboloïde. Les quatre points de contact sont situés dans un même plan.«

Die oben betrachtete Raumkurve k^4 4. Ordnung mit Doppelpunkt R' berührt zwei Erzeugende des Systems a_i auf F^2 und ebenso zwei Erzeugende des Systems b_i. Die ersteren Berührungspunkte seien M_1', M_2', die letzteren N_1', N_2'. Der Punkt M_1' ist das Bild zweier unendlich nahen Punkte der Kurve r^3 auf F^3, nämlich derjenigen, in welchen die durch b_1 gelegte Ebene α_1 die Kurve r^3 berührt. Die den Punkten M_1' und M_2' entsprechenden Punkte M_1 und M_2 auf r^3 sind Berührungspunkte der durch b_1 an die ebene Kurve r^3 gelegten Berührungsebenen. Und auf dieselbe Weise werden die Punkte N_1' und N_2' als Bilder der Berührungspunkte N_1, N_2 auf r^3 erkannt, in welchen die durch a_1 gelegten Berührungsebenen diese Kurve r^3 berühren.

Nach dem Chasles'schen Satze liegen die vier Punkte M_1', M_2', N_1' und N_2' in einer Ebene, welche die Fläche F^2 in einem Kegelschnitte k^2 schneidet. Weil aber in der Abbildung einem Kegelschnitte von F^2 eine Regelfläche 2. Ordnung in der Kongruenz $[a_1, b_1]$ entspricht, so liegen die vier Kongruenzstrahlen durch M_1, M_2, N_1, N_2 auf einem Hyperboloid (welches auch die beiden Achsen a_1 und b_1 enthält).

---

[1] Propriétés des courbes à double courbure du quatrième ordre provenant de l'intersection de deux surfaces du second ordre. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris 1862, T. 54, p. 317, 418. (Die Abhandlung ist nicht ganz fehlerfrei).

Weil eine allgemeine Fläche 3. Ordnung durch eine ebene Kurve 3. Ordnung und durch zwei diese in je einem Punkte R_1, R_2 schneidende Geraden noch nicht bestimmt ist, so können wir allgemein sagen:

Werden auf einer ebenen Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt R zwei beliebige Punkte R_1 und R_2 gewählt und aus einem jeden von diesen die noch möglichen beiden Tangenten gezogen, welche in den Punkten N_1, N_2, beziehungsweise M_1, M_2 berühren (N_1, N_2, M_1, M_2 sind von $R_{1,2}$ verschieden), dann liegen die sechs Punkte $R_1, R_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ auf einem Kegelschnitte.

Dieser Satz schließt die Kurve 3. Ordnung mit Spitze sowie eine solche 6. Klasse aus, denn die abgebildete Raumkurve k^4 auf F^2 berührt nach Chasles'schen Sätzen im Falle einer Spitze nur eine Erzeugende einer jeden Schar und eine solche ohne Doppelpunkt je vier Erzeugende der einen und der anderen Schar.

Ist eine Spitze vorhanden, so sind die abzuleitenden Sätze nicht überall von Interesse. Den Fall wieder, daß die Kurve 3. Ordnung keinen Doppelpunkt hat, ziehen wir nicht näher in Betracht, denn es sind für diese Kurvengattung solche Sätze in den bekannten Schriften von Durège, Schröter, Salmon u. a. auf anderem Wege abgeleitet worden. Die hier für die rationalen Kurven 3. und 4. Ordnung folgenden Sätze hingegen scheinen bisher unbemerkt geblieben zu sein.[1]

4. Der folgende Satz von Chasles[2] läßt sich auf ebene Kurven 3. Ordnung mit Doppelpunkt leicht übertragen:

»La courbe du quatrième ordre à point double n'admet que six plans osculateurs passant par un même point. Et si ce point est pris sur la courbe, il n'existe que trois plans osculateurs: leurs trois points de contact sont dans un plan qui passe par le point de la courbe.«

---

[1] Vgl. etwa die bekannte Schrift über rationale Kurven 3. Ordnung von Weyr.

[2] Comptes rendus, l. c., p. 322.

Es sei auf F^2 eine Raumkurve 4. Ordnung k^4 mit Doppelpunkt gegeben, welche in der Abbildung einer ebenen Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt r^3 auf F^3 entspricht. Es sei P' irgend ein Punkt auf k^4, welcher dem Punkte P auf r^3 entspricht. Wir legen durch P' eine Oskulationsebene σ an k^4 mit dem Berührungspunkte S', welchem auf r^3 der Punkt S entspricht. Die Ebene σ schneidet F^2 in einem Kegelschnitte k_σ, welcher k^4 in S' oskuliert. Dem Kegelschnitte k_σ entspricht dann in der Kongruenz ein Hyperboloid $\varkappa_\sigma$, welches die Kurve r^3 im Punkte S oskuliert. Das Hyperboloid schneidet nämlich die Ebene der Kurve r^3 in einem Kegelschnitte k^2, welcher den Punkt P sowie die beiden Punkte R_1 und R_2 auf a_1 beziehungsweise b_1 enthält und die Kurve r^3 in S oskuliert. Weil von P' an k^4 noch zwei Oskulationsebenen gelegt werden können und weil man die Punkte R_1, R_2 und P auf r^3 irgendwo wählen kann, so haben wir den Satz:

Durch irgend welche drei Punkte auf einer Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt können drei Kegelschnitte gelegt werden, welche die Kurve in je einem weiteren Punkte oskulieren.

Der Schluß des Satzes von Chasles, wonach die drei Oskulationspunkte mit dem angenommenen Punkte auf k^4 in einer Ebene liegen, führt zu einer weiteren Eigenschaft der ebenen Kurve r^3. Da nämlich jene vier Punkte auf einem Kegelschnitte von F^2 liegen, so sind die vier entsprechenden Punkte der Kurve r^3 mit den beiden Achsen der Kongruenz a_1, b_1 auf einem Hyperboloid. Wir können also sagen:

Drei Punkte einer Kurve r^3 mit Doppelpunkt und die drei Punkte, in welchen drei durch die ersteren Punkte gelegte Kegelschnitte die Kurve oskulieren, liegen auf einem Kegelschnitte.

Hat die Kurve r^3 eine Spitze, dann hat auch die entsprechende Kurve k^4 auf F^2 eine Spitze. An diese kann aber nach Chasles durch einen ihrer Punkte nur eine Oskulationsebene gelegt werden. Für r^3 haben wir dann den Satz:

Durch drei Punkte einer Kurve 3. Ordnung mit Spitze kann ein Kegelschnitt gelegt werden, welcher die Kurve in einem weiteren Punkte oskuliert.

5. Aus den Sätzen, welche Chasles in einer seiner Abhandlungen[1] über Raumkurven auf einem Hyperboloid gab, geht hervor, daß an eine Raumkurve 4. Ordnung mit Doppelpunkt durch zwei ihrer Punkte zwei Berührungsebenen gelegt werden können.

Es sei wieder k^4 eine Raumkurve 4. Ordnung mit Doppelpunkt auf F^2 gegeben. Durch irgend welche zwei ihrer Punkte T_1' und T_2' können also zwei Berührungsebenen τ_1, τ_2 (mit den Berührungspunkten U_1' und U_2') gelegt werden. Die Ebene τ_1 schneidet F^2 in einem Kegelschnitte, welchem in $[a_1, b_1]$ ein Hyperboloid entspricht. Weil τ_1 die Kurve k^4 in T_1' und T_2' trifft und in U_1' berührt, so wird das entsprechende Hyperboloid die ebene Kurve r^3 in den entsprechenden Punkten T_1 und T_2 treffen und in U_1 berühren. Weil aber dieses Hyperboloid zugleich die Achsen a_1 und b_1 enthält, welche die Kurve r^3 in R_1, beziehungsweise R_2 treffen, so haben wir den Satz (wenn derselbe Vorgang für die Ebene τ_2 vorgenommen wird):

Durch vier getrennte Punkte einer ebenen Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt können zwei Kegelschnitte gelegt werden, welche die Kurve noch in je einem weiteren Punkte berühren.

Von den vier Punkten R_1, R_2; T_1, T_2 darf man jedoch nur zwei zusammenfallen lassen. Die Punkte R_1 und R_2 können nicht zusammenfallen, weil wir nicht mit einer Kongruenz zu tun haben, bei welcher die beiden Achsen zusammenfallen, denn in diesem Falle würde auch die Abbildung eine ganz andere sein.

Für eine Kurve 3. Ordnung ohne Doppelpunkt gilt bekanntlich der Satz,[2] daß es drei Kegelschnitte gibt, welche die

---

[1] Propriétés générales des courbes gauches tracées sur l'hyperboloïde. Comptes rendus, T. 53, p. 1079.

[2] Bei Schröter, Die Theorie der ebenen Kurven 3. O., p. 293.

Kurve in zwei gegebenen Punkten A und B und dann noch in einem weiteren (erst zu ermittelnden) Punkte berühren. Es gibt aber vier Kegelschnitte, welche eine solche Kurve 3. Ordnung in zwei getrennten gegebenen Punkten (R_1 und R_2) treffen und dann in einem gegebenen Punkte ($T_1 \equiv T_2$) und noch in einem weiteren (noch zu ermittelnden) Punkte berühren. Man kann dies leicht zeigen, wenn man eine Kurve 3. Ordnung ohne Doppelpunkt, welche auf F^3 angenommen wird, auf F^2 in eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art k^4 ohne Doppelpunkt abbildet. Durch zwei zusammenfallende Punkte $T_1' \equiv T_2'$ von k^4 können an diese vier Berührungsebenen gelegt werden. Durch Übertragung auf die ebene Kurve bekommt man dann die vier angegebenen Kegelschnitte.

Nach Chasles[1] kann man an eine Kurve 4. Ordnung k^4 mit Doppelpunkt durch eine ihrer Tangenten, welche in einem Punkte Q' mit stationärer Oskulationsebene berührt, nur eine Berührungsebene legen. Auf eine Kurve 3. Ordnung r^3 mit Doppelpunkt übertragen, lautet dieser Satz folgendermaßen:

Legt man durch zwei getrennte Punkte R_1 und R_2 einer Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt einen Kegelschnitt, welcher die Kurve in einem Punkte Q vierpunktig berührt, dann kann man durch R_1 und R_2 nur einen Kegelschnitt legen, welcher die Kurve im Punkte Q und dann noch in einem weiteren (erst zu ermittelnden) Punkte einfach berührt.

Hat die Kurve r^3 eine Spitze, so haben wir den Satz:

An eine Kurve 3. Ordnung mit Spitze kann durch vier ihrer getrennten Punkte nur ein Kegelschnitt gelegt werden, welcher die Kurve in einem weiteren Punkte einfach berührt.

Nach Chasles[2] ist die Zahl der stationären Ebenen einer Kurve k^4 mit Doppelpunkt vier. Auf F^2 gibt es daher vier Kegelschnitte, welche k^4 vierpunktig berühren. Die vier

---

[1] Comptes rendus, T. 53, p. 1079.

[2] Comptes rendus, T. 54, p. 323.

Berührungspunkte liegen in einer Ebene. In der Kongruenz $[a_1, b_1]$ können also vier Hyperboloide gefunden werden, welche r^3 vierpunktig berühren.

Ändert man die Punkte R_1 und R_2 auf r^3, so ändert sich auch die abgebildete Kurve k^4; die vier stationären Punkte nehmen also auf F^2, somit auch die entsprechenden vier Berührungspunkte auf r^3 eine neue Lage an. Wir können darum den Satz aussprechen:

Durch zwei getrennte Punkte R_1 und R_2 einer Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt können vier Kegelschnitte gelegt werden, deren jeder die r^3 noch vierpunktig berührt.

Die Punkte R_1, R_2 und die vier Berührungspunkte liegen auf einem Kegelschnitte.

Für den Fall einer Spitze haben wir den Satz:

Durch zwei getrennte Punkte einer Kurve 3. Ordnung mit Spitze kann nur ein Kegelschnitt gelegt werden, welcher die Kurve in einem weiteren Punkte vierpunktig berührt.

6. Legt man durch eine der fünf Geraden c_{ik} auf F^3 eine Ebene, welche die Fläche noch in einem Kegelschnitte k^2 schneidet, dann bildet sich dieser auf F^2 in eine Raumkurve 4. Ordnung I. Art k^4 ab, welche im entsprechenden Punkte der Gruppe C_{ik} einen Doppelpunkt hat. Da die Kurve k^4 zwei Erzeugende der einen und zwei der anderen Schar auf F^2 berührt, so haben wir einen Satz für Kegelschnitte, welcher als ein besonderer Fall desjenigen in Art. 3 aufgefaßt werden kann. Denn der Kegelschnitt und die Gerade R_1R_2 stellen eine degenerierte Kurve 3. Ordnung dar. Weil die beiden Punkte R_1 und R_2, in welchen die Achsen a_1 und b_1 die Ebene des Kegelschnittes treffen, nicht auf diesem liegen, so haben wir den Satz:

Irgend zwei Punkte (R_1 und R_2) und die vier Berührungspunkte der von jenen an einen Kegelschnitt kommenden Tangenten liegen auf einem neuen Kegelschnitte.

Weil dieser Kegelschnitt auch in zwei Gerade zerfallen kann, so ist der Satz über konjugierte Polaren eines Kegelschnittes nur ein besonderer Fall dieses Satzes.

Genau so wie für die Kurve 3. Ordnung r^3 mit Doppelpunkt können auch für einen Kegelschnitt k die folgenden Sätze abgeleitet werden:

Durch zwei Punkte R_1, R_2 außerhalb k und durch einen Punkt P auf k können drei Kegelschnitte gelegt werden, welche k in je einem Punkte S, T, V oskulieren. Die sechs Punkte R_1, R_2, P, S, T und V liegen auf einem neuen Kegelschnitte.

Durch zwei Punkte R_1, R_2 außerhalb k und durch zwei Punkte T_1, T_2 auf k können zwei Kegelschnitte gelegt werden, welche k noch in je einem Punkte U_1, U_2 berühren.

Durch zwei Punkte R_1, R_2 außerhalb k können vier Kegelschnitte gelegt werden, welche k noch in je einem Punkte vierpunktig berühren. R_1, R_2 und die vier Berührungspunkte liegen auf einem Kegelschnitte.

In diesen Sätzen können wieder die Punkte R_1 und R_2 i. A. nicht durch eine Tangente mit Berührungspunkt ersetzt werden.

7. Legt man durch zwei Punkte R_1 und R_2 des ersten Satzes im vorigen Artikel irgend zwei zueinander windschiefe Gerade r_1, r_2 und durch diese an den Kegelschnitt k die vier Berührungsebenen, welche ihn in den Punkten M_1, M_2, N_1, N_2 berühren, so liegen die durch diese vier Punkte an r_1 und r_2 gelegten Transversalen m_1, m_2, n_1, n_2 auf einem Hyperboloid. Es folgt dies direkt aus dem obigen Satze. Weil aber der Kegelschnitt k und die Geraden r_1, r_2 eine Regelfläche 4. Ordnung erzeugen, für welche r_1 und r_2 Doppelgeraden sind und für welche die Verbindungslinie R_1R_2 eine Doppelerzeugende ist, so können wir sagen:

Die vier Torsalgeraden einer Regelfläche 4. Ordnung mit zwei Doppelgeraden und einer Doppel-

erzeugenden (d. i. die 5. Art der Cremona'schen Einteilung[1]) liegen auf einem Hyperboloid.

Weil ferner eine jede Schnittkurve auf dieser Fläche die Torsalebenen auf den Torsalgeraden berührt, so haben wir den Satz:

Eine ebene Kurve 4. Ordnung mit drei getrennten Doppelpunkten hat die Eigenschaft, daß irgend zwei ihrer Doppelpunkte und die vier Berührungspunkte der aus jenen an die Kurve gezogenen Tangenten auf einem Kegelschnitte liegen.

So wie ein Kegelschnitt und eine Gerade, auf welcher die beiden Punkte R_1 und R_2 angenommen werden können, eine zerfallende Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt darstellen, ebenso ist wieder eine Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt und eine Gerade, welche zwei Punkte R_1 und R_2 dieser Kurve verbindet, eine degenerierte Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten. Nimmt man bei dieser die Punkte R_1 und R_2 als zwei ihrer festen Doppelpunkte, dann haben wir wieder (wie man auch auf anderem Wege strenger zeigen kann[2]) die folgenden Sätze:

Durch zwei Doppelpunkte und durch irgend einen Punkt einer ebenen Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten können drei Kegelschnitte gelegt werden, welche die Kurve noch in je einem weiteren Punkte dreipunktig berühren. Die ersteren drei Punkte und die drei Oskulationspunkte liegen auf einem Kegelschnitte.

Durch zwei Doppelpunkte und durch zwei (getrennte oder zusammenfallende) Punkte einer Kurve s^4 können zwei Kegelschnitte gelegt werden, welche die Kurve noch in je einem Punkte einfach berühren.

---

1 Sulle superficie gobbe di quarto grado. Mem. d. Acc. d. Scienze, Bologna, II, T. VIII, p. 241.

2 Die Sätze des Art. 6 können durch eine quadratische Transformation in die hier gegebenen Sätze für die Kurve 4. Ordnung mit drei Doppelpunkten übertragen werden, wenn R_1 und R_2 zu Hauptpunkten genommen werden.

Durch zwei Doppelpunkte einer Kurve s^4 können vier Kegelschnitte gelegt werden, welche die Kurve noch in je einem Punkte vierpunktig berühren. Die beiden Doppelpunkte liegen mit den vier Berührungspunkten auf einem Kegelschnitte.

Berührt ein durch zwei Doppelpunkte der Kurve s^4 gelegter Kegelschnitt die Kurve vierpunktig in einem Punkte Q, dann kann man durch die beiden Doppelpunkte nur einen Kegelschnitt legen, welcher s^4 in Q und noch in einem weiteren Punkte einfach berührt.

Die hier entwickelten Sätze für Kurven 3. und 4. Ordnung sollen in einer anderen Abhandlung zur analytischen Entwicklung weiterer Folgerungen benützt werden.

Spezielle Kummer'sche Konfigurationen im Maßpolytop

von

J. A. Barrau in Amsterdam.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Mai 1908.)

Die Existenz von Konfigurationen in Räumen R_n ($n = 2^p - 1$), welche der Kummer'schen Konfiguration (16_6) in R_3 analog sind, und der zugehörigen Gruppen und Varietäten ist vor nahezu 20 Jahren von Herrn W. Wirtinger nachgewiesen worden;[1] eine elementare Erzeugung dieser Konfigurationen und Gruppen und nähere Untersuchung sind vom Verfasser gegeben.[2]

Andrerseits hat Herr J. de Vries bemerkt, daß die Kantenmitten des Hexaeders mit den unendlich fernen Punkten der Hauptdiagonalen die Punkte einer Kummer'schen Konfiguration (16_6) spezieller Form bilden.[3] Es liegen nun die Fragen nahe, ob auch in den Maßpolytopen in Räumen von (2^p—1) Dimensionen spezielle Kummer'sche Konfigurationen vorkommen und ob vielleicht für andere Dimensionszahlen diese speziellen Konfigurationen existieren, wenn auch ein allgemeines Analogon der Kummer'schen Figur zu fehlen scheint.

Es ergibt sich für beide Fragen eine bejahende Antwort.

---

1 Göttinger Nachrichten, 1889, p. 474; Monatshefte für M. u. Ph., I, p. 113; Mathem. Annalen, 40, p. 74.

2 Proceedings Amsterdam, 1907/08, p. 263, 503.

3 Diese Sitzungsberichte, 100, p. 828; vgl. des Verfassers Dissertation (Amsterdam 1907), p. 74.

In R_3 werden die Punkte einer allgemeinen Konfiguration (16_6) in homogenen Koordinaten gegeben durch

a	b	c	d	+	+	+	+
b	a	d	c	+	—	+	—
c	d	a	b	+	+	—	—
d	c	b	a	+	—	—	+,

wo jeder Zahlenfolge jede der Zeichenanordnungen beizulegen ist.

Wählt man nun $a=0$, $b=c=d=1$, dann erscheint die spezielle Konfiguration des Herrn de Vries, man braucht nur das Koordinatensystem orthogonal-metrisch zu denken, um die Kantenmitten und Hauptdiagonalrichtungen eines Hexaeders zu erkennen.

Das Spezielle der Konfiguration liegt in der Eigenschaft, daß die 16 Punkte der Konfiguration, außer zu 6 in 16 Ebenen, noch zu 4 in 16 neuen Ebenen liegen, womit sie also eine Konfiguration (16_4) bilden; reziprok bilden die 16 Ebenen der Konfiguration mit 16 neuen Punkten eine Konfiguration (16_4).

Die 16 neuen Ebenen haben die Gleichungen:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;$$
$$x_1 \pm x_2 = 0;\ x_1 \pm x_3 = 0;\ x_1 \pm x_4 = 0;\ x_2 \pm x_3 = 0;\ x_2 \pm x_4 = 0;$$
$$x_3 \pm x_4 = 0.$$

Hebt man die vier erstgenannten aus, so bleibt noch eine Konfiguration $(16_3, 12_4)$ von Punkten und Ebenen übrig.

Auf analoge Weise werden die Punkte der allgemeinen Konfiguration (64_{28}) in R_7 gegeben durch:

Koordinaten:								Zeichen:							
a	b	c	d	e	f	g	h	+	+	+	+	+	+	+	+
b	a	d	c	f	e	h	g	+	—	+	—	+	—	+	—
c	d	a	b	g	h	e	f	+	+	—	—	+	+	—	—
d	c	b	a	h	g	f	e	+	—	—	+	+	—	—	+
e	f	g	h	a	b	c	d	+	+	+	+	—	—	—	—
f	e	h	g	b	a	d	c	+	—	+	—	—	+	—	+
g	h	e	f	c	d	a	b	+	+	—	—	—	—	+	+
h	g	f	e	d	c	b	a	+	—	—	+	—	+	+	—

Wählt man hier $a=0, b=c=d=e=f=g=h=1$, so erhält man ebenfalls eine spezielle Konfiguration (64_{28}), deren Punkte im orthogonal-metrischen Koordinatensystem aus 56 Kantenmitten und 8 Hauptdiagonalrichtungen des Maßpolytopes in R_7 bestehen.

Die 64 Punkte liegen zu 8 in den 8 R_6:

$$x_1=0;\ x_2=0;\ \ldots\ x_8=0.$$

Sie liegen aber zu 24 in den 56 R_6:

$$x_1 \pm x_2=0;\ x_1 \pm x_3=0;\ \ldots\ x_k \pm x_l=0 \ldots x_7 \pm x_8=0.$$

Denn das Schema der Zeichen hat die Eigenschaft, daß in zwei beliebig gewählten Kolonnen (wie in zwei Zeilen) die Hälfte der Zeichen übereinstimmend, die andere Hälfte verschieden ist; das Schema ist nach einer von Sylvester herrührenden Bezeichnung anallagmatisch. Da aber durch die Permutationsgruppe der Buchstaben jede der sechs anderen Koordinaten den Wert Null annehmen kann, genügen im ganzen jeder der 56 Gleichungen $6\times 4=24$ Punkte. Man hat also:

Die Punkte der speziellen Konfiguration (64_{28}) bilden mit 56 anderen R_6 eine Konfiguration $(64_{21}, 56_{24})$, und reziprok.

Fährt man nun auf die vom Verfasser (l. c.) angegebene Weise fort mit der »linearen« Bildung der regulären Vertauschungsgruppe und des zugehörigen anallagmatischen Zeichenschemas für $n=2^p-1$ und nimmt jedesmal eine der Koordinaten $=0$, die übrigen $=\pm 1$, so erhält man ganz analog:

Die Kummer-Wirtinger'schen Konfigurationen in $R_n (n=2^p-1)$ lassen sich in spezieller Form aus Kantenmitten und Hauptdiagonalrichtungen des Maßpolytopes herausheben; ihre 2^{2p} Punkte bilden dann mit $2^p(2^p-1)$ anderen R_{n-1} [und reziprok ihre $2^{2p} R_{n-1}$ mit $2^p(2^p-1)$ anderen Punkten] neue Konfigurationen mit der Notation:

$$\text{Konfiguration } \left\{2^{2p}_{(2^p-1)(2^{p-1}-1)},\ 2^p.(2^p-1)_{2^p.(2^{p-1}-1)}\right\}.$$

Hiermit ist die erste Frage beantwortet, es muß aber noch einiges dazu bemerkt werden.

In R_3 bilden die 16 Konfigurationspunkte zusammen alle Kantenmitten und Hauptdiagonalrichtungen und diese Punkte weisen unter sich keine anderen zu vier koplanäre Lagen auf als die (4+12) genannten.

In R_7 aber ist die Anzahl solcher Punkte 512, welche mit den 56 R_6 vom Gleichungstypus $x_k \pm x_l = 0$ eine

$$\text{Konfiguration } (512_{21}, 56_{192})$$

bilden. In dieser ist die Konfiguration $(64_{21}, 56_{24})$ eine Subkonfiguration (nach den Punkten).

Es sind auch die 56 genannten R_6 nicht die einzigen R_6, welche durch 24 Punkte der Konfiguration gehen; ein zweites System hat den Gleichungstypus:

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0,$$

wo die Zeichen aus dem Schema

$$\begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{matrix}$$

zu nehmen sind, während die in die Gleichung aufzunehmenden Koordinaten der Vertauschungsgruppe zu entlehnen sind. Diese besteht nämlich außer der Identität aus den Permutationen:

$$\begin{matrix} (x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_5 x_6)(x_7 x_8) \\ (x_1 x_3)(x_2 x_4)(x_5 x_7)(x_6 x_8) \\ (x_1 x_4)(x_2 x_3)(x_5 x_8)(x_6 x_7) \\ (x_1 x_5)(x_2 x_6)(x_3 x_7)(x_4 x_8) \\ (x_1 x_6)(x_2 x_5)(x_3 x_8)(x_4 x_7) \\ (x_1 x_7)(x_2 x_8)(x_3 x_5)(x_4 x_6) \\ (x_1 x_8)(x_2 x_7)(x_3 x_6)(x_4 x_5). \end{matrix}$$

Je vier aus zwei Transpositionspaaren einer Permutation entnommenen Koordinaten, mit den angegebenen Zeichen versehen, (und nur solche vier) haben die Eigenschaft, in den betreffenden Kolonnen des Zeichenschemas sechsmal anallagmatische Zeichen zu begegnen; da nun jede der übrigen Koordinaten gleich Null sein kann, genügen jedesmal $4 \times 6 = 24$

Punkte der Konfiguration einer solchen Gleichung. Die Anzahl solcher Gleichungen ist $7 \times \binom{4}{2} \times 4 = 168$, also:

Die 64 Konfigurationspunkte bilden mit den 168 R_6 des zweiten Systems eine

Konfiguration $(64_{63}, 168_{24})$.

Fügt man diese R_6 den 56 des ersten Systems zu, dann entsteht eine

Konfiguration $(64_{84}, 224_{24})$.

Für $n = 15$ erscheinen auf dieselbe Weise neben den eigentlichen Konfigurations-R_{14}, die 120 Konfigurationspunkte enthalten, drei Systeme von sekundären R_{14} mit den Gleichungstypen:

$$x_1 \pm x_2 = 0$$
$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0$$
$$x_1 \pm x_2 \pm \ldots\ldots \pm x_8 = 0,$$

welche respektive 112, 144 und 112 Konfigurationspunkte enthalten. Und im allgemeinen ist für $n = 2^p - 1$ die Anzahl der sekundären Systeme $(p - 1)$; die Gleichungen des $\varkappa^{\text{ten}}$ Systems enthalten $2^\varkappa$ Koordinaten, einer solchen Gleichung genügen $2^p.(2^\varkappa - 1).(2^{p-\varkappa} - 1)$ Punkte der Konfiguration. Diese Zahl ist symmetrisch gegen $\varkappa$ und $(p - \varkappa)$, es lassen sich also immer zwei solche Systeme zu einer Konfiguration zusammennehmen; ist p gerade, dann enthält jeder R_{n-1} des mittleren Systems $\left(\varkappa = \frac{1}{2} p\right)$ die Maximalzahl $2^p.(2^{\frac{p}{2}} - 1)^2$ Konfigurationspunkte.

Zur Beantwortung der zweiten Frage bemerken wir, daß, während die Existenz der allgemeinen Konfiguration von zwei zusammengehörenden Schemas (der Koordinatenvertauschungen und der Zeichen) abhängig war, zur Erzeugung der speziellen Konfiguration nur das anallagmatische Zeichenschema erfordert wird. Die zweite Frage richtet sich also nach der Möglichkeit solcher Schemas im allgemeinen und hat, so gestellt, eine allerdings nicht endgültige Lösung gefunden. Es zeigte sich,[1] daß:

[1] Anläßlich einer Untersuchung nach der Zerlegung von regulären Polytopen (Nieuw Archief voor Wiskunde, 2. Ser., VII, p. 250).

ein solches Schema nur für $n=4p-1$ möglich sein kann, aus einem Schema für $n=4p-1$ kann ein neues für $8p-1$ abgeleitet werden, so daß jede Zahl $N=8p+3$ eine ganze Reihe eröffnet;

die Reihen anfangend mit $N=3$, 11, 19, 27 und 35 wenigstens existieren.[1]

Denken wir nun ein Schema gegeben, z. B. für $N=11$:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
+ & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\
- & + & + & - & + & - & - & - & + & + & + & - \\
+ & - & + & + & - & + & - & - & - & + & + & - \\
+ & + & - & + & + & - & + & - & - & - & + & - \\
+ & + & + & - & + & + & - & + & - & - & - & - \\
- & + & + & + & - & + & + & - & + & - & - & - \\
- & - & + & + & + & - & + & + & - & + & - & - \\
- & - & - & + & + & + & - & + & + & - & + & - \\
+ & - & - & - & + & + & + & - & + & + & - & - \\
- & + & - & - & - & + & + & + & - & + & + & - \\
+ & - & + & - & - & - & + & + & + & - & + & - \\
+ & + & - & + & - & - & - & + & + & + & - & -
\end{array}
$$

und betrachten wir darin jede Zeile als die Zeichen homogener Koordinaten, welche alle den absoluten Wert 1 haben, bis auf eine [für welche der Reihe nach alle $(n+1)$ Koordinaten genommen werden], die gleich Null ist, dann sind $(n+1)^2$ Punkte bestimmt, welche in der metrischen Figur zu Kantenmitten und Diagonalrichtungen werden.

Verwendet man aber dieselben $(n+1)$ Zahlen jedesmal als Koeffizienten linearer Gleichungen, so bezeichnen diese $(n+1)^2$ R_{n-1}, welche mit den Punkten eine regelmäßige, zu sich selbst reziproke

$$\text{Konfiguration } \left\{(n+1)^2_{\frac{1}{2}n(n+1)}\right\}$$

bilden. Denn ein Punkt und ein R_{n-1} inzidieren, sobald die $(n-1)$ Koordinaten die für keines von beiden Null sind, anallagmatische Zeichenreihen haben. Dieser Umstand tritt aber ein, wenn die beiden Zeichenpaare, welche die Null enthalten,

---

[1] Wichtig ist die von Herrn W. A. Wythoff herrührende Bemerkung, daß, zuerst für $n=15$, Schemas von verschiedenem Typus vorkommen.

anallagmatisch sind, das ist, bei gegebenem R_{n-1}, für $\frac{1}{2}(n+1)$ Punkte in jeder der n übrigen Reihen und reziprok.

Auch diese Konfiguration hat die Eigenschaft, daß ihre Punkte mit $n(n+1)$ anderen R_{n-1} vom Gleichungstypus:

$$\varkappa_k \pm \varkappa_l = 0$$

[und reziprok ihre R_{n-1} mit $n(n+1)$ anderen Punkten] regelmäßig inzidieren zu einer

$$\text{Konfiguration} \left\{(n+1)^2_{\frac{1}{2}n(n-1)}, \; n(n+1)_{\frac{1}{2}(n+1)(n-1)}\right\},$$

sie ist also den speziellen Kummer'schen Konfigurationen völlig analog und geht für $n = 2^p-1$ (bei linearem Aufbau des Zeichenschemas) darin über.

Um auch die Analoga der weiteren sekundären Konfigurationsräume zu erkennen, haben wir uns ein Schema zu denken für $n = 2^{p-1}(N+1)-1$, linear aus einem für N gegebenen aufgebaut, die Gleichungstypen in:

$$(N+1);\; 2(N+1);\; \ldots\; 2^{\varkappa-1}(N+1);\; \ldots\; 2^{p-2}(N+1)$$

Koordinaten lassen sich dann analog bilden; sie bestimmen respektive ein 2tes, 3tes,... $\varkappa^{\text{tes}}$,... $(p-1)^{\text{tes}}$ System von R_{n-1}. Jedes R_{n-1} des $\varkappa^{\text{ten}}$ Systems enthält

$$\{2^{p-1}(N+1)-2^{\varkappa-1}(N+1)\}.\{2^{p-1}(N+1)-2^{p-\varkappa}\} =$$
$$= 2^{p-1}\{2^{\varkappa-1}(N+1)-1\}.\{2^{p-\varkappa}-1\}.(N+1)$$

Punkte der Konfiguration; es geht diese Zahl für $N=1$[1] wirklich in die früher gefundene

$$2^p(2^\varkappa-1)(2^{p-\varkappa}-1)$$

über, sie zeigt aber im allgemeinen Falle keine Symmetrie gegen $\varkappa$ und $(p-\varkappa)$.[2]

---

[1] Es läßt sich nämlich das einzige Zeichen + als Anfang der linearen Zusammensetzung für $n = 2^p-1$ aus $N=1$ betrachten.

[2] Außer den genannten Systemen gibt es zwar andere R_{n-1} vom Gleichungstypus $\varkappa_1 \pm \ldots \pm \varkappa_{2k} = 0$, welche Konfigurationspunkte enthalten; diese verhalten sich aber irregulär, wir nehmen sie darum nicht als Konfigurations-Elemente auf. In der Gesamtkonfiguration der Kantenmitten würden sie regulär sein.

Es können aus den in R_n erhaltenen Konfigurationen mehrere Konfigurationen in R_{n-1}, R_{n-2} usw. hergeleitet werden; wir verweisen in dieser Hinsicht nach unserer Untersuchung des Falles $n=7$ (l. c.), da die Methode nichts Neues bietet, die Resultate aber für größere n schnell kompliziert werden.

Eine neue Klasse von Konfigurationen in R_{n-1} möge hier noch angeführt werden.

Es liegen, wie wir sahen, die $(n+1)^2$ Punkte der Konfiguration noch zu $\frac{1}{2}(n+1)(n-1)$ in $n(n+1)$ sekundären R_{n-1} vom Gleichungstypus $x_k \pm x_l = 0$. Es ist aber einleuchtend, daß, wenn ein solcher R_{n-1} einen Konfigurationspunkt enthält, er auch die ganze durch den Punkt eindeutig bestimmte Kante oder Diagonale enthalten muß; man braucht nur die Null in den Koordinaten des Punktes durch ± 1 zu ersetzen.

Schneidet man nun die ganze Figur durch einen beliebigen R_{n-1}, so sind die Schnitte der Kanten Punkte, die Schnitte der R_{n-1} aber sind R_{n-2} und es entsteht eine

$$\text{Konfiguration } \left\{(n+1)^2_{\frac{1}{2}n(n-1)},\; n(n+1)_{\frac{1}{2}(n+1)(n-1)}\right\}$$

von Punkten und R_{n-2} in R_{n-1}.

Dasselbe gilt auch für die weiteren sekundären Systeme; wir haben also:

Die Konfigurationen von Punkten und sekundären Systemen von R_{n-1} in den Konfigurationen aus Kantenmitten des Maßpolytopes in R_n lassen sich alle in solche von Punkten und Systemen von R_{n-2} in R_{n-1} umwandeln.

Für $n=3$ entsteht bekanntlich die ebene, nach Hesse genannte Konfiguration $(16_3, 12_4)$, welche jetzt allgemein in Räumen von $(4p+2)$ Dimensionen ein Analogon findet. Es muß nur noch bemerkt werden, daß, während die 16 Punkte der ebenen Konfiguration die Schnitte aller Kanten (respektive Diagonalen) sind, die Konfiguration in R_{4p+2} nur ein Teil ist der Schnittkonfiguration aller Kanten; diese Schnittkonfiguration läßt sich natürlich für jeden Wert von n konstruieren.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVIII.

Über die Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre

von

Egon R. v. Schweidler.

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität Wien.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1908.)

Sowohl aus Messungen des Potentialgefälles in verschiedenen Höhen als auch aus den Resultaten von Zerstreuungsbeobachtungen und Ionenzählungen nach der Ebert'schen Methode hat sich ergeben, daß in den der Beobachtung zugänglichen Höhen normalerweise positive freie Ladungen vorhanden sind. Genauere quantitative Angaben für diese freien Ladungen sind von Wichtigkeit für verschiedene Hypothesen zur Erklärung der luftelektrischen Erscheinungen, z. B. für die Ebert'sche Theorie, welche annimmt, daß infolge der Ionenadsorption mehr positive als negative Ionen aus der stark ionisierten Bodenluft in die freie Atmosphäre gelangen.

Daß nun, abgesehen von solchen Prozessen wie die Adsorption, die der Atmosphäre Ionen des einen Vorzeichens in überwiegendem Maße zuführen oder entziehen, auch bei homogener Ionisierung durch die Wirkung des Erdfeldes allein in den untersten Schichten eine Änderung der Ionenverteilung und damit des Potentialgefälles stattfindet, ist bisher nicht genügend berücksichtigt worden.

Die folgende Darstellung gibt auf rein theoretischem Wege eine Ableitung der Verteilung von Feldintensität und Ionenzahl

in den untersten Schichten der Atmosphäre. Allerdings mußten einige vereinfachende Voraussetzungen gemacht werden, damit die Berechnung durchführbar sei.

Über einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene, deren Normale als X-Achse gewählt werde, befinde sich ein unendlich ausgedehnter homogener Gasraum, in dem durch die Wirkung eines konstanten Ionisators an jeder Stelle q Ionenpaare pro Zeit- und Volumeinheit erzeugt werden. Die Ladung der Ionen sei mit ε, der Wiedervereinigungskoeffizient mit α bezeichnet; die spezifische Geschwindigkeit soll für beide Ionengattungen den gleichen Wert c besitzen. Ohne Einfluß eines elektrischen Feldes würde sich dann im stationären Zustand ein räumlich konstanter Ionengehalt pro Volumseinheit herstellen, bei dem $N = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$ ist.

Nun soll auf der leitenden Ebene eine konstante positive Ladungsdichte und damit im Gase unmittelbar an der Ebene, also für $x = 0$, ein bestimmter Wert X_0 der elektrischen Feldintensität künstlich aufrecht erhalten werden. Durch die Wirkung des Feldes wird die Ionenverteilung geändert und hierdurch wieder das primäre elektrische Feld gestört. Es bezeichne X die Feldintensität, n_1 die Anzahl der positiven, n_2 die der negativen Ionen pro Volumseinheit; diese drei Größen sind im stationären Zustand als Funktionen von x zu betrachten und als solche definiert durch die folgenden drei Differentialgleichungen, von denen die erste der Poisson'schen Gleichung, die zweite und dritte den Kontinuitätsgleichungen für die Strömung der positiven und der negativen Ionen entspricht:

$$n_1 - n_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{dX}{dx}, \tag{1}$$

$$q - \alpha n_1 n_2 = + c \frac{d}{dx}(n_1 X), \tag{2}$$

$$q - \alpha n_1 n_2 = - c \frac{d}{dx}(n_2 X). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt durch Subtraktion und Integration:

$$(n_1 + n_2) X = \text{Const.} = K. \tag{4}$$

Hierbei ist K eine vorläufig unbekannte Integrationskonstante, deren physikalische Bedeutung dadurch gegeben ist, daß das Produkt $Kc\varepsilon$ die konstante Stromdichte des elektrischen Leitungsstromes im Gase darstellt.

Durch Addition von (2) und (3) und Einsetzen von (1) erhält man:

$$\frac{d^2}{dx^2}(X^2) = \frac{16\pi\varepsilon}{c}(q - \alpha n_1 n_2) \tag{5}$$

und ferner aus (1) und (4) durch Addition und Subtraktion:

$$n_1 = \frac{K}{2X} + \frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{dX}{dx}, \tag{6}$$

$$n_2 = \frac{K}{2X} - \frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{dX}{dx}. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich weiterhin:

$$n_1 n_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{K^2}{X^2} - \frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4X^2}\left[K^2 - \frac{1}{64\pi^2\varepsilon^2}\left(\frac{d(X^2)}{dx}\right)^2\right] \tag{8}$$

und aus (5) und (8):

$$\frac{d^2}{dx^2}(X^2) = \frac{16\pi\varepsilon}{c}\left[q - \frac{\alpha K^2}{4X^2} + \frac{\alpha}{64\pi^2\varepsilon^2}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\right] \tag{9a}$$

oder

$$X^2\frac{d^2}{dx^2}(X^2) = \frac{16\pi\varepsilon}{c}\left[qX^2 - \frac{\alpha K^2}{4} + \frac{\alpha}{64\pi^2\varepsilon^2}X^2\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\right]. \tag{9b}$$

Zur Vereinfachung werde $X^2 = y$, $\frac{dy}{dx} = y'$ etc. und $\frac{8\pi\varepsilon c}{\alpha} = \beta$ gesetzt. Die beiden letzten Gleichungen nehmen dann die Form an:

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy} = \frac{2\alpha\beta}{c^2}\left[q + \frac{\alpha}{4y}\left(\frac{y'^2}{64\pi^2\varepsilon^2} - K^2\right)\right], \tag{9c}$$

$$yy'' = \frac{2\alpha\beta}{c^2}\left[qy - \frac{\alpha K^2}{4} + \frac{\alpha}{256\pi^2\varepsilon^2}y'^2\right] =$$

$$= \frac{2\alpha\beta q}{c^2}y - \frac{\alpha^2\beta K^2}{2c^2} + \frac{1}{2\beta}y'^2. \quad (9d)$$

Durch Integration von (9c) erhält man endlich:

$$y'^2 = 64\pi^2\varepsilon^2 K^2 + \frac{32\pi\varepsilon q\beta}{c(\beta-1)}y + My^{\frac{1}{\beta}}, \quad (10)$$

wobei M eine neue Integrationskonstante bezeichnet.

Mit Gleichung (10) stockt die Integration; die beiden noch unbekannten Konstanten K und M und das Verhältnis der Werte $\frac{y_0(x=0)}{y_\infty(x=\infty)}$ können aber bestimmt werden aus Nebenbedingungen, die für $x=\infty$ und für $x=0$ gelten.

Für $x=\infty$ ist der Ionengehalt durch das Feld nicht gestört, da in jedes Volumelement infolge des Stromes ebensoviele Ionen zuwandern als ausgeschieden werden; es ist somit

$$n_1 = n_2 = N = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$$

und X sowie y sind konstant, also $y' = y'' = 0$. Man erhält daher aus (10):

$$64\pi^2\varepsilon^2 K^2 + \frac{32\pi\varepsilon q}{c}\,\frac{\beta}{\beta-1}y_\infty = -My_\infty^{\frac{1}{\beta}} \quad (11)$$

und aus (9):

$$y_\infty = \frac{\alpha}{4q}K^2, \quad (12)$$

somit also:

$$y_\infty^{\frac{\beta-1}{\beta}}\,\frac{\beta^2}{\beta-1} = -\frac{Mc}{32\pi\varepsilon q}. \quad (13)$$

Für $x=0$ ist $n_1 = 0$, da alle entstehenden Ionen fortwandern. Es ergibt sich also aus (8):

$$4n_1n_2 = 0 = \frac{1}{y_0}\left[K^2 - \frac{1}{64\pi^2\varepsilon^2}y_0'^2\right] \quad (14)$$

und durch Einsetzen von (14) in (10):

$$y_0^{\frac{\beta-1}{\beta}} \frac{\beta}{\beta-1} = -\frac{Mc}{32\pi\varepsilon q}. \tag{15}$$

Aus (13) und (15) erhält man also:

$$\frac{y_0}{y_\infty} = \beta^{\frac{\beta}{\beta-1}} = \eta^2 \tag{16}$$

oder

$$\frac{X_0}{X_\infty} = \beta^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} = \eta. \tag{16a}$$

Da X_0 gegeben ist, können hieraus X_∞ und aus (4) und (10) die Konstanten K und M bestimmt werden.

Die bisher abgeleiteten Gleichungen sind bereits von J. J. Thomson[1] angegeben worden. Man kann aus ihnen entnehmen, daß die Feldintensität von einem gegebenen Anfangswert X_0 mit wachsendem x asymptotisch sich einem Grenzwert $X_\infty = \frac{1}{\eta} \cdot X_0$ annähert, ohne den Verlauf der Funktion $X = f(x)$ explizite darstellen zu können.

Eine angenäherte Darstellung dieser Funktion erhält man nun, indem man $y = X^2$ in eine Potenzreihe entwickelt:

$$\begin{aligned} y &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots \\ &= A_0(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots). \end{aligned} \tag{17}$$

Bildet man hieraus die Werte von y', y'^2, y'', so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} y y'' = {} & A_0 A_2 + x[3A_0A_3 + A_1A_2] + x^2[6A_0A_4 + 3A_1A_3 + A_2^2] + \\ & + x^3[10A_0A_5 + 6A_1A_4 + 4A_2A_3] + \\ & + x^4[15A_0A_6 + 10A_1A_5 + 7A_2A_4 + 3A_3^2] + \ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Aus (5) folgt, da für $x = 0$: $n_1 = 0$, die Gleichung:

$$A_2 = -\frac{\alpha\beta q}{c^2}. \tag{19}$$

[1] J. J. Thomson, Conduction of Electricity throng Gases. Cambridge 1903, p. 64 bis 67.

Durch Einsetzen von (18) in (9*d*) lassen sich dann die übrigen Koeffizienten der Potenzreihe bestimmen, indem man auf beiden Seiten die Faktoren von x^k gleichsetzt.

Das Resultat ist:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\alpha\beta}{c}K, \\ A_2 &= +\frac{\alpha\beta}{c^2}q, \\ A_3 &= -\frac{\alpha^2\beta}{c^3}\frac{qK}{3A_0}, \\ A_4 &= +\frac{\alpha^2\beta}{c^4}\cdot\frac{q^2}{6A_0}\left(1+\frac{2}{\eta^2}-\frac{4\beta}{\eta^2}\right), \\ A_5 &= -\frac{\alpha^3\beta}{c^5}\cdot\frac{Kq}{15A_0^2}\cdot\frac{1}{\eta^2}(1+2\eta^2-5\beta+6\beta^2-3\beta\eta^2). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Die Darstellung von y durch diese Potenzreihe ist bei der numerischen Auswertung nur für kleine Werte von x brauchbar; bei zunehmendem x erhält man statt einer Annäherung an den bekannten Grenzwert y_∞ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ hinstrebende Werte, je nach dem Vorzeichen des letzten nicht vernachlässigten Gliedes. Man kann aber die Potenzreihe ersetzen durch eine Funktion:

$$u = A_0\left[\frac{1}{\eta^2}+\left(1-\frac{1}{\eta^2}\right)\frac{1}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\dots}\right], \quad (21)$$

die von vornherein für $x=\infty$ den richtigen Grenzwert $\frac{A_0}{\eta^2}$ annimmt und deren Konstanten b_k so zu bestimmen sind, daß für $x=0$:

$$u' = y', \quad u'' = y'', \quad u''' = y''' \text{ usw.}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert dann die Werte:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\eta^2}{\eta^2-1}\cdot a_1, \\ b_2 &= -\frac{\eta^2}{\eta^2-1}\cdot a_2+b_1^2, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} b_3 &= -\frac{\eta^2}{\eta^2-1}\cdot a_3 + 2b_1b_2 - b_1^3, \\ b_4 &= -\frac{\eta^2}{\eta^2-1}\cdot a_4 + 2b_1b_3 - 3b_1^2b_2 + b_2^2 + b_2^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Für eine numerische Auswertung sollen nun zwei Zahlenbeispiele gegeben werden, und zwar unter Einsetzung von Werten, die den empirisch gefundenen Mittelwerten für die freie Atmosphäre naheliegen, aber derart gewählt sind, daß nach Möglichkeit runde Zahlen zur Berechnung verwendet werden können. Außerdem sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Rechnung von der Annahme einer positiven Ladung der Ebene ausging und daß daher bei Anwendung der Resultate auf die normalen luftelektrischen Verhältnisse der Sinn der Feldrichtung umzukehren und die Werte der positiven und negativen Ionenzahlen zu vertauschen wären.

Es wird angenommen das Elementarquantum:

$$\varepsilon = 3\cdot 32 . 10^{-10} \text{ stat. Einh.}$$

(statt $3\cdot 4$ eingeführt, damit für β eine runde Zahl sich ergibt), der Wiedervereinigungskoeffizient:

$$\alpha = 1\cdot 00 . 10^{-6}$$

(beobachtet $1\cdot 09$ bis $1\cdot 43$),

$$c = 480 \text{ stat. Einh.}$$

$\left(\text{entsprechend } 1\cdot 6 \frac{cm/\text{sec}}{\text{Volt}/cm}\right)$. Hieraus erhält man:

$$\beta = 4\cdot 00, \quad \eta = 2\cdot 5198, \quad \frac{1}{\eta} = 0\cdot 39686, \quad \frac{1}{\eta^2} = 0\cdot 15748.$$

Der Wert von β und somit η, der das Verhältnis der Feldintensität unmittelbar an der Ebene (Boden) zu der in sehr großer Entfernung (Höhe) bestimmt, ist unabhängig von Ionisation und Feldintensität.

Da α und c bei wachsender Masse der Ionen im selben Sinne sich ändern, würden abweichende Annahmen über die

Natur der vorhandenen Ionen den Wert von β nur wenig ändern. Für gewöhnliche Molionen gilt $\beta = 3{\cdot}5$ bis $4{\cdot}0$, für Langevin-Ionen von zirka 1000mal kleinerer Beweglichkeit $\beta = 1{\cdot}4$; kleinere Änderungen der Beweglichkeit sind also fast ohne Einfluß auf den Wert von β. Unter den gemachten Annahmen ist $X_\infty = 0{\cdot}39686 X_0$.

Es werde ferner angenommen:

$$q = 1,$$

somit im stationären Zustand $N = 1000$, entsprechend einem Gehalt von $0{\cdot}332 \frac{\text{stat. Einh.}}{m^3}$, was ebenfalls den tatsächlich beobachteten Werten nahekommt. Die Berechnung wird durchgeführt:

1. für die Annahme $X_0 = 3.10^{-3}$ stat. Einh. ($= 90$ Volt/m) entsprechend den normalen kleinen Sommerwerten des Potentialgefälles;

2. für die Annahme $X_0 = 10^{-2}$ stat. Einh. ($= 300$ Volt/m), etwa winterlichen Verhältnissen entsprechend.

I.

$$X_0 = 3.10^{-3}, \quad A_0 = 9.10^{-6}, \quad X_\infty = 1{\cdot}1906.10^{-3},$$
$$K = 2{\cdot}3812.$$

Aus (20) und (22) erhält man:

$$a_1 = -2{\cdot}2049.10^{-3}, \qquad b_1 = +2{\cdot}6170.10^{-3},$$
$$a_2 = +1{\cdot}9290.10^{-6}, \qquad b_2 = +4{\cdot}5592.10^{-6},$$
$$a_3 = -0{\cdot}3544.10^{-9}, \qquad b_3 = +6{\cdot}3604.10^{-9},$$
$$a_4 = -0{\cdot}1860.10^{-12}, \qquad b_4 = +7{\cdot}5286.10^{-12}.$$

In der folgenden Tabelle 1 gibt die erste Kolumne die Höhe in Zentimeter, die zweite den Wert von $\frac{y}{y_0}$ aus der Potenzreihe berechnet, die dritte $\frac{u}{u_0}$ und die vierte $\frac{X}{X_0}$, berechnet aus $X = \sqrt{u}$.

Tabelle 1.

x	$\frac{y}{y_0}$	$\frac{u}{u_0}$	$\frac{X}{X_0}$
0	1·0000	1·0000	1·0000
100	0·7984	0·7985	0·8936
200	0·6331	0·6338	0·7961
300	0·5012	0·5045	0·7103
400	0·3992	0·4072	0·6381
500	0·3239	0·3370	0·5805
600	—	0·2859	0·5347
800	—	0·2257	0·4751
1000	0·1837	0·1957	0·4424
1200	—	0·1801	0·4243
2000	—0·1505	0·1629	0·4036
10000	—	0·1575	0·3969
∞	— ∞	0·1575	0·3969

Hieraus berechnet sich angenähert die Verteilung der positiven Ionenladung $n_1 \varepsilon$, der negativen $n_2 \varepsilon$ und der freien Ladung $(n_1 - n_2)\varepsilon$ unter Verwendung der Gleichungen (6) und (7) zu den in Tabelle 2 angegebenen Werten:

Tabelle 2.

x	$10^6 . n_1 \varepsilon$	$10^6 . n_2 \varepsilon$	Differenz
0— 100	0·0122	0·2662	0·2540
100— 200	0395	2723	2328
200— 300	0726	2774	2048
300— 400	1093	2817	1724
400— 500	1475	2849	1374
500— 600	1816	2910	1094
600— 800	2253	2965	0712
800—1000	2676	3066	0390
1000—1200	2931	3147	0216
∞	3320	3320	0000

II.

$$X_0 = 10^{-2}, \quad A_0 = 10^{-4}, \quad X_\infty = 3\cdot 9686 . 10^{-3},$$
$$K = 7\cdot 9372.$$

$$a_1 = -0\cdot 6614 . 10^{-3}, \qquad b_1 = 0\cdot 7850 . 10^{-3},$$
$$a_2 = +0\cdot 1736 . 10^{-6}, \qquad b_2 = 0\cdot 4102 . 10^{-6},$$
$$a_3 = -0\cdot 4572 . 10^{-11}, \qquad b_3 = 0\cdot 1557 . 10^{-9},$$
$$a_4 = -1\cdot 5125 . 10^{-15}, \qquad b_4 = 0\cdot 0360 . 10^{-12}.$$

Tabelle 3.

x	$\frac{y}{y_0}$	$\frac{u}{u_0}$	$\frac{X}{X_0}$
0	1·0000	1·0000	1·0000
100	0·9356	0·9356	0·9673
200	0·8746	0·8747	0·9353
300	0·8171	0·8173	0·9040
400	0·7629	0·7634	0·8737
500	0·7120	0·7130	0·8444
600	0·6645	0·6660	0·8161
800	0·5791	0·5819	0·7628
1000	0·5061	0·5105	0·7145
1200	—	0·4503	0·6710
2000	0·3108	0·2972	0·5452
3000	—	0·2324	0·4821
4000	—	0·1857	0·4309
5000	(+0·3425)	0·1722	0·4150
10000	(—7·8540)	0·1591	0·3989
∞	—∞	0·1575	0·3969

Hieraus analog wie früher die Verteilung der Ladungen:

Tabelle 4.

x	$10^6 . n_1 \varepsilon$	$10^6 . n_2 \varepsilon$	Differenz
0— 100	0·0039	0·2641	0·2602
100— 200	0111	2657	2546
200— 300	0187	2679	2492
300— 400	0276	2688	2412
400— 500	0367	2699	2332
500— 600	0461	2713	2252
600— 800	0607	2731	2124
800—1000	0821	2747	1926
1000—2000	1420	2764	1344
2000—3000	2315	2815	0500
3000—4000	2684	3090	0406
4000—5000	3051	3179	0128
∞	3320	3320	0000

Eine graphische Darstellung der in den Tabellen 1 bis 4 zusammengestellten Zahlenwerte enthalten die zwei Tafeln am Schlusse.

Die Voraussetzungen der hier durchgeführten Berechnung enthalten, wie schon erwähnt, vereinfachende Annahmen. Zunächst ist tatsächlich die Beweglichkeit positiver und negativer Ionen nicht gleich, sondern für letztere um etwa 25% größer. Hiervon abgesehen, können aber die übrigen Voraussetzungen (ebene leitende Fläche, ruhendes Gas, konstante Ionisation) unter Umständen realisiert sein, z. B. bei windstillem Wetter über einer ausgedehnten Wasserfläche, wenn die Atmosphäre mit radioaktiven Stoffen (Emanation und ihren Zerfallsprodukten) gleichmäßig durchmischt ist.

Das Resultat obiger Rechnung sagt aus, daß unter diesen Umständen durch die Wirkung des Erdfeldes in den untersten Schichten eine rapide Änderung der Feldintensität (Abnahme auf 40% des Wertes unmittelbar am Boden) und der Ionenzahlen auftritt, und daß die Höhe dieser Störungsschichte je

nach dem Werte des Potentialgefälles etwa 20 bis 100 *m* beträgt. Je größer das Potentialgefälle ist, um so höher ist die Störungsschichte. Wie aus dem Zusammenhang der Konstanten $a_1, a_2 \ldots$ mit der Ionisierungsstärke q folgt, würde bei konstantem Potentialgefälle mit wachsender Ionisierung die Höhe der Störungsschichte abnehmen.

Von den durch das Erdfeld bedingten Änderungen des Potentialgefälles und der Ionenzahlen zu unterscheiden und auf andere Ursachen zurückzuführen ist dann die relativ langsame Änderung in größeren Höhen, die aus Ballonbeobachtungen sich ergeben hat.

Der Widerspruch, auf den H. Gerdien[1] zuerst aufmerksam gemacht hat, zwischen den Werten der Raumdichte freier Elektrizität, die sich aus der Abnahme des Potentialgefälles mit der Höhe nach Ballonbeobachtungen berechnen, und jenen Werten, die aus Ionenzählungen mittels des Ebert'schen Aspirators und auch aus Potentialmessungen in geringer Höhe über dem Erdboden,[2] abgeleitet sind, ist damit prinzipiell aufgeklärt.

Bei vertikalen Bewegungskomponenten der Luft werden natürlich die quantitativen Verhältnisse durch die Konvektion gegenüber dem hier betrachteten idealen Grenzfall in unkontrollierbarer Weise modifiziert.

---

1 H. Gerdien, Physikal. Zeitschr., *6*, 647, 1905.

2 A. Daunderer, Physikal. Zeitschr., *8*, 281, 1907.

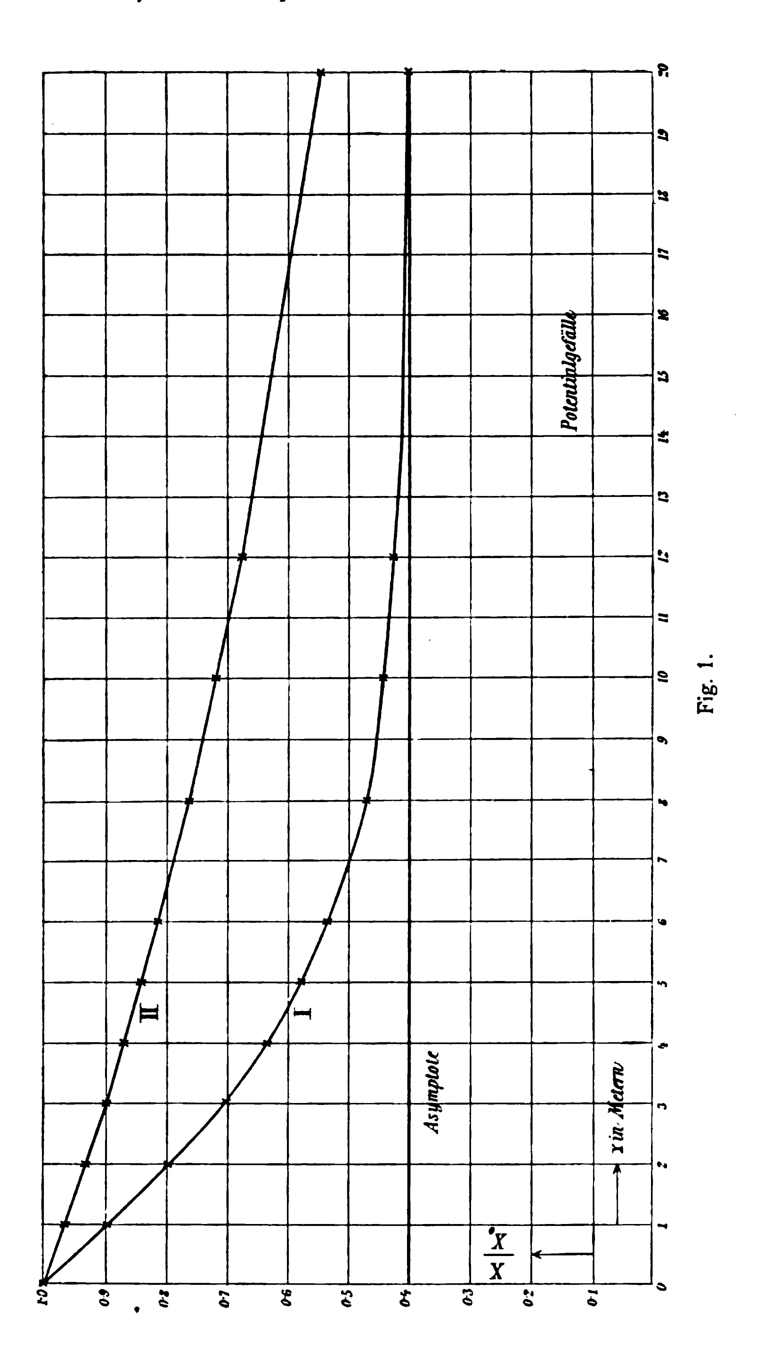
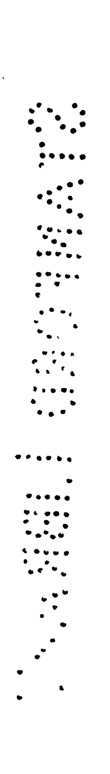

Potentialgefälle
Asymptote
x in Metern
I
II
$\frac{X}{X}$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
0·1
0·2
0·3
0·4
0·5
0·6
0·7
0·8
0·9
1·0

Fig. 1.



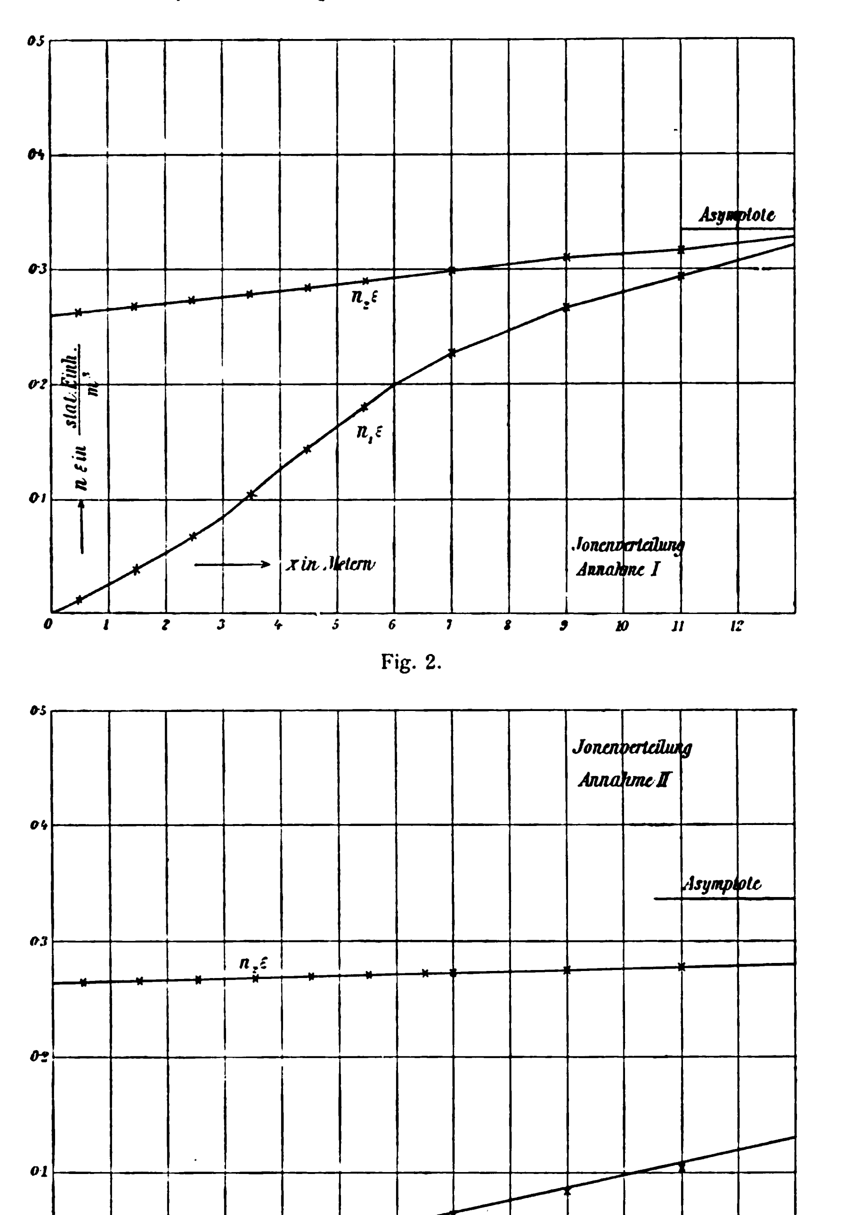

Asymptote
$n_2\varepsilon$
$n_1\varepsilon$
$n\,\varepsilon$ in $\frac{stat.Einh.}{m^3}$
x in Metern
Jonenverteilung
Annahme I
Jonenverteilung
Annahme II
Asymptote
$n_2\varepsilon$
$n_1\varepsilon$

Fig. 2.

Fig. 3.

Über die Beweglichkeit der Ionen in Dämpfen und ihre Beziehung zur Kondensation[1]

von

Dr. Karl Przibram.

Aus dem II. physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1908.)

Wird ein mit Dampf gesättigtes Gasvolumen der Wirkung eines Ionisators unterworfen und adiabatisch expandiert, so geben die Ionen Kondensationskerne für den Dampf ab und es hängt, wie C. T. R. Wilson[2] gezeigt hat, die Übersättigung, welche erforderlich ist, um den Dampf auf diesen Kernen niederzuschlagen, vom Vorzeichen der Ladung ab. So schlägt sich Wasserdampf bei vierfacher Übersättigung auf den negativ geladenen Kernen nieder, aber erst bei sechsfacher auch auf den positiven. Dieses Verhalten hat man auf verschiedene Arten zu erklären versucht. J. J. Thomson gibt in der ersten Auflage seines Buches: »Conduction of Electricity through Gases«[3] die folgende Auffassung: Da in Luft und anderen Gasen die negativen Ionen beweglicher, also kleiner sind als die positiven, so wäre gerade umgekehrt zu erwarten, daß die positiven Ionen die wirksameren Kerne abgeben. Doch gibt die Bestimmung der Beweglichkeit stets nur Mittelwerte; bei der Kondensation kommen aber zunächst die größten Ionen in Betracht und die negativen Ionen werden gerade infolge

---

1 Vergl. Akad. Anzeiger Nr. VII (1908).

2 Phil. Trans. A., 193, p. 289 (1899).

3 Cambridge, 1903, p. 154.

ihrer größeren Beweglichkeit sich leichter an etwa vorhandene größere Kerne anlegen, woraus sich der Beginn der Kondensation auf negativ geladenen Kernen erklärt. Diese Erklärung hat Thomson in der zweiten Auflage[1] durch eine andere ersetzt. Er untersucht den Einfluß einer elektrischen Doppelschichte auf die Wirksamkeit eines Kernes und findet, daß eine Doppelschichte an einem entstehenden Tropfen die Kondensation fördert, wenn sie innen die gleiche Ladung hat wie der Kern, im umgekehrten Falle aber die Kondensation erschwert. Die verschiedene Wirksamkeit der Ionen verschiedenen Vorzeichens erklärt sich dann aus der Orientierung der Doppelschichte zwischen Tropfen und Gas. Diese Erklärung hat vor der ersten den Vorzug, daß sie sich auch auf solche Substanzen anwenden läßt, die, wie ich[2] für Alkohol gezeigt habe, sich leichter auf den positiven Ionen niederschlagen. Doch bleibt zu zeigen, daß die Orientierung der Doppelschichte, die zur Erklärung der Kondensation bei verschiedenen Flüssigkeiten erforderlich ist, mit der aus anderen Erscheinungen (etwa der »Wasserfallelektrizität«) gefolgerten übereinstimmt. C. Barus[3] neigt einer dritten Auffassung zu. Nach seiner Ansicht bilden sich an den Elektroden, die bei den Wilson'schen Versuchen zur Trennung der beiden Ionenarten verwendet werden, wie in einer elektrolytischen Zersetzungszelle verschiedene chemische Produkte und die verschiedene Wirksamkeit der so gesonderten Kerne soll eben durch ihre chemische Verschiedenheit bedingt sein.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob man nicht bei der Erklärung der verschiedenen Wirksamkeit der beiden Ionenarten bei der Kondensation doch, ähnlich wie nach Thomson's erster Auffassung, mit der Größe der Ionen allein auskommt. Wilson hat gefunden, daß die zur Kondensation von Wasserdampf auf Ionen erforderliche Übersättigung vom Gase, das den Apparat füllt, so gut wie unabhängig ist, und

---

[1] Cambridge, 1906, p. 186.

[2] Diese Sitzungber., 115, p. 33 (1906).

[3] Smithsonian Contrib. Nr. 1373, p. 161 (1903). Eine Kritik dieser Ansicht siehe C. T. R. Wilson, Nature, 68, p. 548 bis 550 (1903), ferner C. Barus, Nature, 69, p. 103 (1903), C. T. R. Wilson, ebenda, p. 104.

er weist darauf hin,[1] daß diese Werte der Übersättigung möglicherweise den Ionen des Dampfes entsprechen, die bei diesen Versuchen ja stets zugegen sein müssen. Eine ähnliche Bemerkung findet sich auch bei C. Barus.[2] Beginnt die Kondensation wirklich auf den Dampfionen, dann ist sofort erklärlich, warum das Gas ohne Einfluß ist. Da für die Ionen von Dämpfen noch keine Messungen der Beweglichkeit vorlagen, bestand auch die Möglichkeit, daß in Wasserdampf die negativen Ionen tatsächlich größer sein könnten als die positiven, während bei den Alkoholen (ähnlich wie bei den meisten Gasen) das Umgekehrte der Fall wäre, woraus sich dann unmittelbar die verschiedene Wirksamkeit als Kondensationskerne ergäbe. Es war daher die Bestimmung der Ionenbeweglichkeit in diesen Dämpfen wünschenswert. Freilich kann, wenn die Kondensationswirkung der Ionen auch tatsächlich, wie im folgenden wahrscheinlich gemacht wird, durch ihre Größe bedingt ist, die Frage noch nicht als vollständig gelöst betrachtet werden; sie wird nur zurückgeführt auf die allgemeinere Frage nach der Ursache der verschiedenen Ionengrößen überhaupt.

Der erste Teil der Arbeit enthält die Messung der Ionenbeweglichkeiten in einer Reihe von Dämpfen, der zweite Teil die aus den gefundenen Zahlenwerten gezogenen Schlüsse.

I.

Bei der Wahl der Methode zur Messung der Beweglichkeit in Dämpfen waren folgende Gesichtspunkte maßgebend: Die größten Schwierigkeiten waren von seiten der Isolation zu erwarten; die Zahl der zu isolierenden Teile mußte daher so klein als möglich sein. Andrerseits konnte über beträchtliche Mengen der zu untersuchenden Dämpfe verfügt werden, so daß eine der Gasstrommethoden verwendet werden konnte. Es wurde die von H. Mache[3] angegebene Methode gewählt, die sich durch große Einfachheit auszeichnet. Das ionisierte Gas (Dampf) streicht durch ein langes geerdetes Metallrohr, in

---

[1] Phil. Trans. A., 192, p. 412 (1899).
[2] Carnegie Instit., Mai 1907, p. 121.
[3] Phys. Zeitschr., 4, p. 717 bis 721 (1903).

welchem ein axialer Draht, von der Wand isoliert, angebracht ist; zwischen Draht und Wand wird eine kleine konstante Spannung angelegt. Dadurch wird ein Teil der Ionen dem Gase entzogen, und zwar ein um so größerer Teil, je größer die Beweglichkeit ist. Der im Gase zurückbleibende Teil der Ionen wird dadurch gemessen, daß ein zweiter axialer Draht, an den das Gas dann weiter gelangt, auf ein hohes Potential geladen und mit einem Elektroskop verbunden wird, dessen Ladungsverlust ein Maß für den Ionengehalt abgibt. Je nachdem das Elektroskop negativ oder positiv geladen ist, findet man den Gehalt an positiven oder negativen Ionen und daraus ihre Beweglichkeit.

Bei dieser Anordnung erfordert nur die Zuleitung zum zweiten axialen Draht (Meßkondensator) vollkommene Isolierung. Die Isolierung des ersten Drahtes (Hilfskondensator) braucht nicht vollkommen zu sein, da er dauernd mit der Elektrizitätsquelle verbunden bleibt. Es genügt daher an dieser Stelle Glasisolation. Die Schwierigkeit der Isolierung im Meßkondensator wurde dadurch umgangen, daß die Zuleitung, die steif genug war, um den axialen Draht zu tragen, frei durch eine kleine Öffnung der Rohrwand hindurchgeführt wurde. Die einzige Isolation ist dann die innere Bernsteinisolation des Elektroskops, die mit dem Dampfe nicht mehr in Berührung kommt. Die geringe Zerstreuung an dem in Luft befindlichen Teile der Zuleitung kommt gegenüber der starken Ionisierung des Dampfstromes kaum in Betracht und kann, wenn nötig, durch eine kleine Korrektur berücksichtigt werden.

Der Wasserdampf wurde einem Autoklav von zirka 3 *l* Inhalt mit Gasheizung entnommen, die übrigen Dämpfe einem elektrisch geheizten Destillierapparat von 2·7 *l* Fassungsraum, Um Kondensation im Rohre zu vermeiden, wurde dieses von außen angeheizt, und zwar bei Wasserdampf durch eine Reihe kleiner Gasflammen, bei den anderen Dämpfen durch elektrische Heizmanschetten. Die Temperatur des Rohres wurde auf diese Weise stets ein wenig über dem Siedepunkt der betreffenden Substanz gehalten. Beim Eintritt in das Rohr *R* (Fig. 1) wird der Dampf durch α-Strahlen ionisiert. Zu diesem Zwecke wird ein mit Polonium beschlagener schmaler Platin-

blechstreifen P zusammengerollt in die Mündung des Rohres gesteckt, wo er sich ringsherum an die Wand anlegt. Die Gesamtlänge des Rohres R beträgt 114 *cm*, der innere Durchmesser 2·55 *cm*. Die axiale Elektrode E_1 des Hilfskondensators bildet ein Messingstab von 35·4 *cm* Länge und 0·5 *cm* im Durchmesser. Sein vorderes Ende ist 18 *cm* von der Rohrmündung entfernt. Der Stab wird von zwei Drähten D getragen, die durch Glaskapillaren C gezogen sind und als Zuleitung dienen. Die Kapillaren sind mittels Asbestdichtungen A in zwei kleinen Öffnungen der Rohrwand befestigt. Die konstante Spannung für den Hilfskondensator liefert eine Anzahl kleiner Akkumulatorzellen. Die Spannung kann durch passende Widerstände beliebig gewählt und an einem Millivoltmeter von Siemens & Halske gemessen werden.

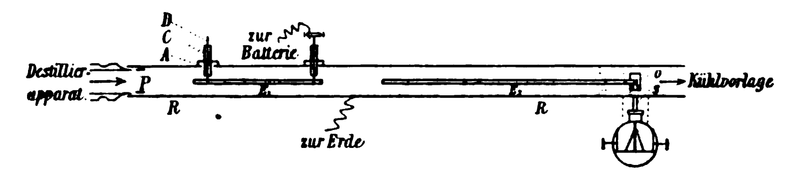


Fig. 1.

Die axiale Elektrode E_2 des Meßkondensators beginnt zirka 10 *cm* hinter der Hilfselektrode, ist 47 *cm* lang und 0·5 *cm* im Durchmesser. Sie besteht aus einem vorn verschlossenen Messingrohr, das am anderen Ende über einen rechtwinklig abgebogenen Messingstab S geschoben ist, der, wie schon geschildert, durch eine kleine seitliche Öffnung O der Rohrwand hindurchgeht und, abermals rechtwinklig abgebogen, auf ein Elektroskop aufgesetzt ist. Das Elektroskop ist ein nach Elster und Geitel abgeändertes Exner'sches mit innerer Bernsteinisolierung und Spiegel- und Lupenablesung. Es ist in eine mit Stanniol ausgekleidete Pappschachtel eingebaut, welche eine kleine Öffnung für die Lupe und eine für die Zuleitung aufweist. Die größeren für die Beleuchtung erforderlichen Öffnungen sind mit Drahtnetz bedeckt. Das freie Stück der Zuleitung ist noch mit einem Zylinder aus Drahtnetz umgeben. Die ganze Hülle, das Elektroskopgehäuse und das lange

Messingrohr sind geerdet. Nach Hindurchgang durch den Meßkondensator konnte der Wasserdampf frei entweichen; die anderen Dämpfe wurden in eine Kühlvorlage geleitet und kondensiert.

Der Vorgang bei der Messung ist der folgende: Nachdem der Dampf eine Weile durch das Rohr gestrichen ist und angenommen werden kann, daß die ganze Luft aus Kessel und Rohr verdrängt ist, wird zunächst bei geerdetem Hilfskondensator die Zerstreuung bei negativer und positiver Ladung mehrmals hintereinander bestimmt. Zu Beginn der Beobachtung zeigen die nacheinander angestellten Messungen einen systematischen Gang, ein Zeichen, daß noch kein stationärer Zustand erreicht ist. Dieser muß erst abgewartet werden. Dann werden verschiedene Spannungen an den Hilfskondensator angelegt und wieder mehrmals hintereinander die Zerstreuung für beide Vorzeichen gemessen. Die Messungen werden dann ebenso oft bei kommutierter Feldrichtung im Hilfskondensator wiederholt. Wie H. Mache bemerkt hat, ist der gefundene Wert der Zerstreuung nämlich abhängig von der Feldrichtung im Hilfskondensator. Den richtigen Wert erhält man erst durch Mittelbildung, worüber weiter unten noch gesprochen werden soll. Die gefundene Zerstreuungsgeschwindigkeit, die dem Ionengehalt proportional ist, wird dann als Funktion der Spannung am Hilfskondensator in ein Koordinatensystem eingetragen. Es zeigt sich, daß wenigstens für kleine Spannungen ein linearer Zusammenhang besteht, wie er für die Anwendbarkeit der Mache'schen Methode erforderlich ist. Durch Verlängerung der linearen Stücke bis zum Schnitte mit der Spannungsachse erhält man die Spannung Δv, welche angelegt werden müßte, um bei der gegebenen Geschwindigkeit $V\,cm^3$/sec des Dampfstromes alle Ionen des betreffenden Zeichens zu entfernen. Ist R der Radius des Rohres, r der Radius der axialen Elektrode des Hilfskondensators, l deren Länge, so ist die Beweglichkeit

$$u = \frac{V \ln \frac{R}{r}}{2\pi l \Delta v}.$$

Die Geschwindigkeit V des Dampfes in Sekundenkubikzentimetern wird aus der pro Zeiteinheit verdampfenden Flüssig-

keitsmenge und dem spezifischen Volum des Dampfes berechnet. Für gewöhnlich wurde die in den Apparat einzufüllende Flüssigkeit abgewogen und dann die Zeit von Beginn bis zum Schlusse des Überdestillierens gemessen. Bei Wasser wurde überdies noch von Zeit zu Zeit der Wasserstand an einem Wasserstandglas abgelesen und so angenäherte Konstanz der Verdampfungsgeschwindigkeit festgestellt.

Im folgenden ist eine Messungsreihe für Wasserdampf in extenso wiedergegeben.

v ist die Spannungsdifferenz des Hilfskondensators in Volt. Das vorgesetzte + oder — bedeutet das Vorzeichen der axialen Elektrode des Hilfskondensators. Die unter *v* gesetzten Zahlen sind die Zeiten in Sekunden, in denen ein Blättchen des Elektroskops um 5 Teilstriche zurückgeht (zirka 50 Volt Spannungsverlust), und zwar für + oder — Ladung. *Z* sind die Zerstreuungsgeschwindigkeiten in willkürlichem Maße: 100 dividiert durch die obigen Zahlen und vermindert bei positiver Ladung um 0·40, bei negativer um 0·46, der Korrektur wegen der Zerstreuung am freien Stücke der Zuleitung *S* (Fig. 1).

	$v = 0\cdot00$	$v = +1\cdot35$	$v = +3\cdot35$	$v = +4\cdot20$
	+34·5	+42·0	+58·0	+ 76·2
	—35·2	—43·3	—71·4	—100·0
	+34·8	+42·6	+58·8	+ 75·3
	—34·7	—42·9	—73·0	—102·2
	+35·4			
	—34·8	$v = -1\cdot35$	$v = -3\cdot35$	$v = -4\cdot20$
	+35·0	+41·0	+62·7	+ 80·1
	—34·0	—38·6	—54·7	— 64·1
		+40·0	+63·1	+ 81·5
		—38·2	—53·9	— 66·5
Mittel:	$+34\cdot9_{2}$	$+41\cdot4_{0}$	$+60\cdot6_{5}$	$+78\cdot2_{7}$
	$-34\cdot6_{7}$	$-40\cdot7_{5}$	$-63\cdot2_{5}$	$-83\cdot2_{0}$
Z:	$+13\cdot9_{2}$	$+11\cdot6_{7}$	$+7\cdot8_{4}$	$+5\cdot9_{8}$
	$+13\cdot9_{7}$	$-11\cdot8_{1}$	$-7\cdot4_{4}$	$-5\cdot5_{5}$

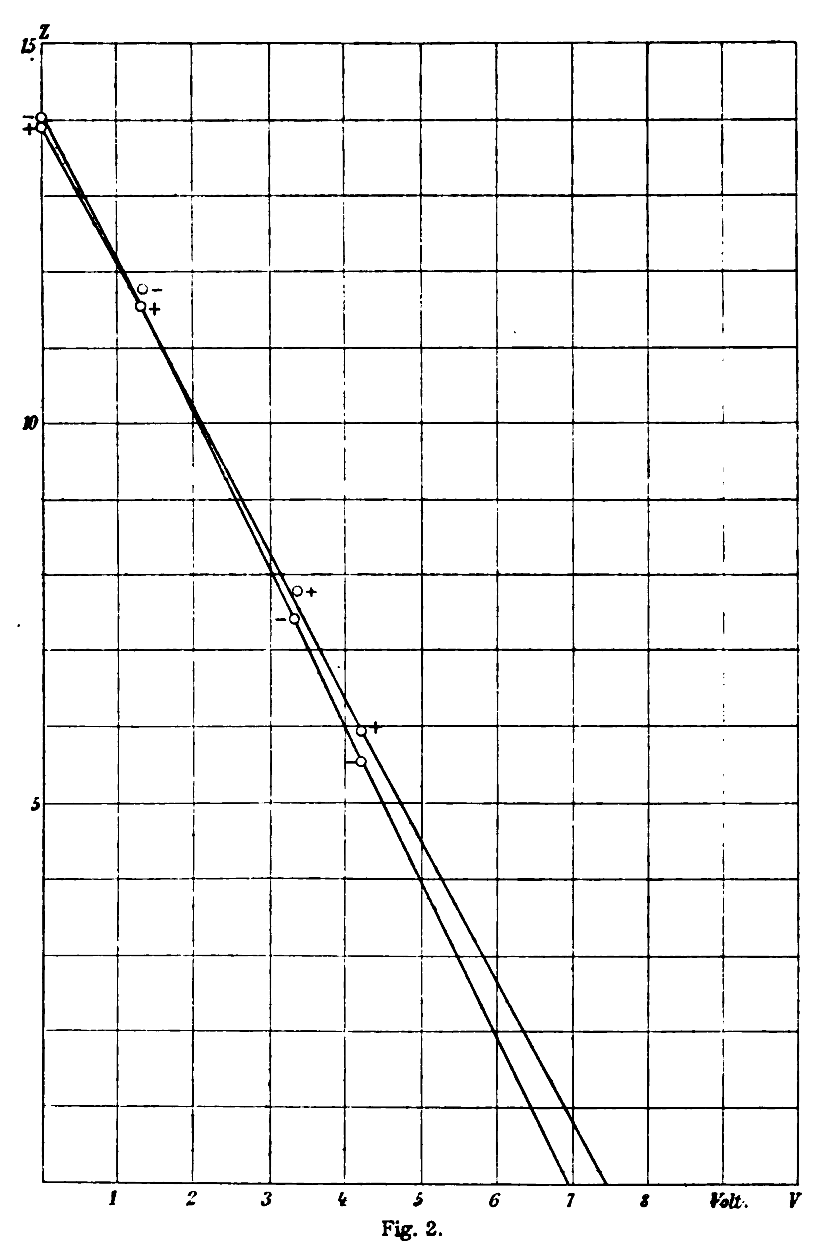


Fig. 2.

In Fig. 2 sind die Z als Funktion von v eingetragen. Der Schnitt mit der Abszissenachse ergibt für die positiven Ionen $\Delta \overset{+}{v} = 7{\cdot}0$ Volt, für die negativen Ionen $\Delta \overset{-}{v} = 7{\cdot}5$ Volt.

Die Mittelwerte aus 13 getrennten Bestimmungen sind $\Delta\overset{+}{v} = 7\cdot05$; $\Delta\overset{-}{v} = 7\cdot56$.

Der wahrscheinliche Fehler ist $\pm 0\cdot3$. Der Quotient $\Delta\overset{-}{v}/\Delta\overset{+}{v} = 1\cdot07_2$. Der wahrscheinliche Fehler dieses Quotienten ergibt sich zu $\pm 0\cdot01_2$, so daß der geringe Unterschied in den erforderlichen Spannungen und der sich daraus berechnenden Beweglichkeiten trotz der geringen Genauigkeit der absoluten Werte selbst ganz sichergestellt ist. Der Quotient der Beweglichkeiten ist auch unabhängig von den Fehlern bei der Geschwindigkeitsbestimmung. Diese Fehler können leicht ebenso groß sein wie die bei der Spannungsbestimmung gemachten, so daß das Endresultat wohl mit einer Unsicherheit von zirka $8^0/_0$ behaftet erscheint. Die Beweglichkeit der Wasserdampfionen berechnet sich folgendermaßen:

Die pro Sekunde verdampfte Wassermenge ergibt sich aus einer großen Zahl von Messungen zu $0\cdot45_8\,g$. Dies gibt, das spezifische Volumen[1] des Wasserdampfes bei 100° zu $1674\,cm^3$ angenommen, eine Geschwindigkeit von $758\cdot3\,cm^3$/sec. Nun ist $R = 1\cdot27\,cm$, $r = 0\cdot25\,cm$, $\ln\frac{R}{r} = 1\cdot625\,cm$, $l = 35\cdot4\,cm$. Diese Zahlen geben, unter Berücksichtigung der Werte von Δv in die Formel für u eingesetzt:

$$\overset{+}{u} = 0\cdot77_4\,cm/\text{sec}; \quad \overset{-}{u} = 0\cdot73_1\,cm/\text{sec}.$$[2]

Einer Erörterung bedarf noch die Abhängigkeit des Ionengehaltes von der Feldrichtung im Hilfskondensator, da ohne eine Erklärung dieser Erscheinung die Mittelbildung bedenklich erscheinen könnte. Wie die Mache'schen Messungen in Luft ergeben und wie es noch deutlicher obige Zahlen für Wasserdampf zeigen, besteht diese Abhängigkeit von der Feldrichtung darin, daß anscheinend mehr von den Ionen abgefangen werden,

---

[1] Alle hier verwendeten Zahlenwerte sind den Tabellen von Landolt und Börnstein oder dem Handbuch der Physik von Winkelmann entnommen.

[2] Diese verhältnismäßig großen Werte (die Beweglichkeit der Luftionen ist nur etwa doppelt so groß) sind wohl ein hinreichender Beweis dafür, daß man es hier nicht etwa mit gewöhnlichen, durch Kondensation gebildeten oder vom Dampfstrom mitgerissenen Wassertröpfchen zu tun hat.

die dasselbe Vorzeichen wie die innere Elektrode des Hilfskondensators haben. Dadurch wird für Luft für den Fall: Kondensator innen positiv, das Verhältnis $\overset{-}{u}/\overset{+}{u}$ kleiner als für den umgekehrten Fall. Und für Wasserdampf kehrt sich das Verhältnis sogar um; während für Kondensator innen positiv $\overset{+}{u}$ anscheinend größer ist, ist für Kondensator innen negativ $\overset{-}{u}$ etwas größer. Die Erklärung dieser Erscheinung liegt, glaube ich, in folgendem: Nehmen wir an, die Beweglichkeit beider Ionenarten sei gleich, $\overset{+}{u} = \overset{-}{u}$. Fig. 3 stelle einen Längsschnitt durch den Hilfskondensator vor. Die Ionen seien beim Eintritt in das Feld des Kondensators noch ganz gleichförmig über den Querschnitt verteilt und bewegen sich mit dem Dampfstrom geradlinig, parallel zur Achse. Durch das Feld werden sie ab-

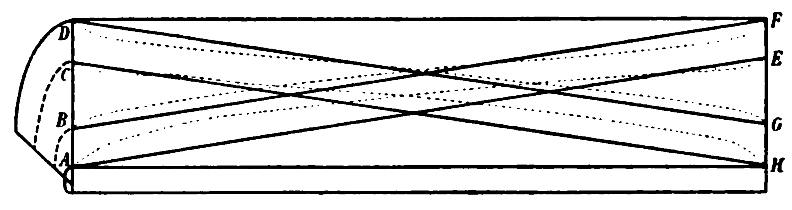


Fig. 3.

gelenkt. Vernachlässigen wir zunächst die Krümmung der Bahn. Ist die innere Elektrode positiv, dann sei *CH* die Bahn der negativen Ionen, die gerade noch abgefangen werden, *DG* die Bahn der negativen Ionen, die gerade an der Wand eintreten, Dann treten negative Ionen nur durch den ringförmigen Querschnitt *GH* aus. Ähnlich treten positive Ionen nur durch den ringförmigen Querschnitt *EF* aus. Nun entstammen aber die negativen Ionen in *GH* dem Ringe *CD*, die positiven in *EF* dem Ringe *AB*. Da wir hier am Anfang des Kondensators gleichförmige Verteilung der Ionen angenommen haben, so werden sich die bei *GH* und bei *EF* austretenden Ionenzahlen verhalten wie die Flächeninhalte der Ringe *CD* und *AB*. Bei positiver Ladung der inneren Elektrode ist daher die Zahl der austretenden negativen Ionen bei gleicher Beweglichkeit viel größer als die der positiven. Die Krümmung der Bahn ändert hieran nichts, da ja alles symmetrisch bleibt. Nun

ist allerdings die Ionenverteilung bei Eintritt in den Kondensator sicher nicht ganz gleichförmig, doch ergibt sich unter Annahme gleichförmiger Verteilung der Effekt unter Umständen drei- bis viermal so groß als der tatsächlich beobachtete, so daß die Wirkung ungleichförmiger Verteilung sowie die der Diffusion mehr als gedeckt sein dürfte. Für gleiche Beweglichkeit muß also die Methode für den Fall: innen +, scheinbar $\overset{+}{u} > \overset{-}{u}$ geben, für den Fall: innen —, das Gegenteil. Einen tatsächlichen Unterschied der beiden Beweglichkeiten ergibt erst die Mittelbildung aus den Beobachtungen mit beiden Feldrichtungen.

Zur Prüfung des Apparates wurde eine Messung in Luft vorgenommen. Es ergab sich $\overset{+}{u} = 1 \cdot 24$, $\overset{-}{u} = 1 \cdot 55$, in genügender Übereinstimmung mit früheren Messungen, z. B. Mache, l. c., $\overset{+}{u} = 1 \cdot 23_6$, $\overset{-}{u} = 1 \cdot 40_9$.

Methylalkohol. Spezifisches Volumen bei 66° 807·2 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . 0·434 g/sec, $V = 351 \cdot 1$ cm^3/sec,
Mittel aus neun Versuchen . . $\Delta\overset{+}{v} = 8 \cdot 0_0$, $\Delta\overset{-}{v} = 7 \cdot 9_1$,
daraus . . . . $\overset{+}{u} = 0 \cdot 32_1$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 32_5$.

Durch stärkeres Anheizen des Destillierapparates konnte die Verdampfungsgeschwindigkeit gesteigert werden auf

$$0 \cdot 863\, g/\text{sec}, \quad V = 696 \cdot 6\, cm^3/\text{sec}.$$

Mittel aus vier Versuchen . . . . $\Delta\overset{+}{v} = 19 \cdot 4_2$, $\Delta\overset{-}{v} = 18 \cdot 2_0$,
daraus . . . . $\overset{+}{u} = 0 \cdot 26_2$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 27_9$,
Gesamtmittel . . . . $\overset{+}{u} = 0 \cdot 29_1$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 30_2$.

Äthylalkohol. Spezifisches Volumen bei 79° 582·8 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . 0·59 g/sec, $V = 343 \cdot 8$ cm^3/sec,
Mittel aus fünf Versuchen . . . $\Delta\overset{+}{v} = 9 \cdot 1_0$. $\Delta\overset{-}{v} = 8 \cdot 5_1$,
$\overset{+}{u} = 0 \cdot 28_5$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 29_3$.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . $1 \cdot 20_8\ g/\mathrm{sec}$, $V = 702 \cdot 9\ cm^3/\mathrm{sec}$,
Mittel aus fünf Versuchen . . $\overset{+}{\Delta v} = 21 \cdot 1_6$, $\overset{-}{\Delta v} = 20 \cdot 3_6$,
$\overset{+}{u} = 0 \cdot 24_8$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 25_1$,
Gesamtmittel . . . . $\overset{+}{u} = 0 \cdot 26_4$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 27_2$.

Benzol. Spezifisches Volumen bei 80° 362 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . $1 \cdot 11\ g/\mathrm{sec}$, $V = 400 \cdot 5\ cm^3/\mathrm{sec}$,
Mittel aus zwei Versuchen . . $\overset{+}{\Delta v} = 17 \cdot 8$, $\overset{-}{\Delta v} = 12 \cdot 9$,
$\overset{+}{u} = 0 \cdot 16_4$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 22_6$.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . $1 \cdot 94\ g/\mathrm{sec}$, $V = 702 \cdot 3\ cm^3/\mathrm{sec}$,
Mittel aus drei Versuchen . . . $\overset{+}{\Delta v} = 24 \cdot 5$, $\overset{-}{\Delta v} = 25 \cdot 4$,
$\overset{+}{u} = 0 \cdot 19_8$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 21_1$,
Gesamtmittel . . . . $\overset{+}{u} = 0 \cdot 18_1$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 21_8$.

Aceton. Spezifisches Volumen bei 57° 401 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . $0 \cdot 71_9\ g/cm^3$, $V = 288 \cdot 3\ cm^3/\mathrm{sec}$,
Mittel aus vier Versuchen . . . $\overset{+}{\Delta v} = 19 \cdot 1$, $\overset{-}{\Delta v} = 17 \cdot 2$,
$\overset{+}{u} = 0 \cdot 11_0$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 12_2$.

Chloroform. Spezifisches Volumen bei 58° 242·6 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . $1 \cdot 54\ g/\mathrm{sec}$, $V = 373 \cdot 6\ cm^3/\mathrm{sec}$,
Mittel aus zwei Versuchen . . $\overset{+}{\Delta v} = 14 \cdot 0_8$, $\overset{-}{\Delta v} = 16 \cdot 0_5$,
$\overset{+}{u} = 0 \cdot 19_4$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 17_0$.

Verdampfungsgeschwindigkeit . . . . $3 \cdot 03\ g/\mathrm{sec}$, $V = 736 \cdot 8\ cm^3/\mathrm{sec}$,
$\overset{+}{\Delta v} = 29 \cdot 0$, $\overset{-}{\Delta v} = 34 \cdot 6$,
$\overset{+}{u} = 0 \cdot 18_5$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 15_5$.
Gesamtmittel . . . . $\overset{+}{u} = 0 \cdot 19_0$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 16_2$.

Hexan. Spezifisches Volumen bei 69° 307·5 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit .... 1·11 g/sec, $V = 340·7$ cm^3/sec,

Mittel aus zwei Versuchen .. $\Delta\overset{+}{v} = 15·8$, $\Delta\overset{-}{v} = 14·7$,

$\overset{+}{u} = 0·15_8$, $\overset{-}{u} = 0·16_9$.

Äthyläther. Spezifisches Volumen bei 35° 319 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit .... 1·18 g/sec, $V = 376·4$ cm^3/sec,

$\Delta\overset{+}{v} = 17·6$, $\Delta\overset{-}{v} = 16·8$,

$\overset{+}{u} = 0·15_6$, $\overset{-}{u} = 0·16_8$.

Methylacetat. Spezifisches Volumen bei 58° 340·2 cm^3.

Verdampfungsgeschwindigkeit .... 0·79$_7$ g/sec, $V = 271·1$ cm^3/sec,

$\Delta\overset{+}{v} = 13·6$, $\Delta\overset{-}{v} = 10·9$,

$\overset{+}{u} = 0·14_5$, $\overset{-}{u} = 0·18_2$.

Von Verunreinigungen kommt in erster Linie wohl Luft in Betracht, die teils nicht vollständig aus dem Kessel ausgetrieben, teils durch Undichtigkeiten der Rohrverbindungen eingedrungen sein könnte. In Wasserdampf wird sie den Unterschied der Beweglichkeiten verringern. Bei den Alkoholen ist ferner jedenfalls stets auch Wasserdampf zugegen. Doch dürfte seine Wirkung auf das Verhältnis der Beweglichkeiten durch gleichzeitig anwesende Spuren von Luft aufgehoben werden.

In der nachstehenden Tabelle sind die Beweglichkeiten in Sekundenzentimeter in einem Felde von 1 Volt/cm zusammengestellt.

Substanz	$\overset{+}{u}$	$\overset{-}{u}$
Wasser	0·774	0·731
Methylalkohol	0·291	0·302
Äthylalkohol	0·264	0·272
Benzol	0·181	0·218
Aceton	0·110	0·122
Chloroform	0·190	0·162
Hexan	0·158	0·169
Äthyläther	0·156	0·163
Methylacetat	0·145	0·182

II.

Es soll nun untersucht werden, inwieweit die gefundenen Werte der Beweglichkeiten der Dampfionen und ihre daraus berechneten Größen zur Erklärung der Kondensationswirkung ausreichen.

P. Lenard[1] hat folgende Beziehung zwischen Ionengröße und Beweglichkeit angegeben, die aus einer einfachen kinetischen Betrachtung folgt: $s^2 = \frac{eF}{\pi D W u}$.

Hier bedeutet s die Summe aus Ionenradius und Molekelradius, e die Ladung des Ions, F die elektrische Feldstärke, D die Dichte des Gases, W seine molekulare Geschwindigkeit und u die Geschwindigkeit des Ions im Felde F. Setzt man für u die Beweglichkeit in Sekundenzentimeter für 1 Volt/*cm*, so ist $F = \frac{1}{300}$ zu setzen. Diese Formel wird aus einer allgemeineren für den Fall abgeleitet, daß die Ionen groß sind im Verhältnis zu den Molekeln. Dies ist nun im allgemeinen nicht der Fall; für die untersuchten Dämpfe schwankt der Quotient aus Ionen- und Molekelradius zwischen 2 und 7. Doch ergibt sich für den Fall Ion = Molekel eine andere genäherte Formel:

[1] Ann. d. Phys., 3, p. 313, 314 (1900).

$\frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{eF}{\pi D W u}$, die nicht stark abweichende numerische Werte liefert. Es dürfte daher die Anwendung der ersten Formel hier statthaft sein. Diese Formel werde zunächst auf die Luftionen angewendet. Es ist bei Zimmertemperatur: $D = 0{\cdot}0012$, $W = 44700$, $\frac{eF}{\pi} = 3{\cdot}6.10^{-13}$, $\overset{+}{u} = 1{\cdot}36$, $\overset{-}{u} = 1{\cdot}87$.

Daraus ergibt sich: $\overset{+}{s} = 7{\cdot}0.10^{-8}\,cm$, $\overset{-}{s} = 5{\cdot}9.10^{-8}\,cm$.

Es muß, um die Ionenradien r berechnen zu können, über den Molekelradius ρ eine Annahme gemacht werden. Setzen wir den kleinsten gewöhnlich angenommenen Wert $0{\cdot}5.10^{-8}\,cm$ ein, so ist $\overset{+}{r} = 6{\cdot}5.10^{-8}$, $\overset{-}{r} = 5{\cdot}4.10^{-8}$.

Nach der von J. J. Thomson[1] abgeleiteten Beziehung läßt sich die Übersättigung eines Dampfes berechnen, welche erforderlich ist, damit ein Tröpfchen von Radius r sich behaupten kann, ohne sofort zu verdampfen. Es ist

$$RT \ln S = \left(\frac{2\alpha}{r} - \frac{e^2}{8\pi r^4}\right)\frac{1}{\sigma};$$

es bedeutet hier R die Gaskonstante für den Dampf, S die gesuchte Übersättigung, d. h. das Verhältnis der tatsächlich vorhandenen Dampfmenge (Partialdruck) zu der der tiefsten erreichten Temperatur entsprechenden maximalen Dampfmenge (Sättigungsdruck), α die Kapillaritätskonstante und σ die Dichte der Flüssigkeit. In Fig. 4 sind für einige Flüssigkeiten bei Zimmertemperatur die S als Funktionen von r aufgezeichnet. Betrachtet man die Luftionen, deren Radien oben berechnet wurden, als Anfangsgröße für Wassertröpfchen, so ergibt sich die Übersättigung, die zur Erhaltung und Vergrößerung dieser Tröpfchen erforderlich ist, für die positiven Ionen zu 4·9, für die negativen zu 5·6, es müßte daher die Kondensation früher auf den positiven Ionen beginnen, während nach Wilson die aus den Kondensationsversuchen sich ergebende Übersättigung 4 für die negativen und 6 für die positiven ist.

Dieselbe Berechnung werde jetzt für die Wasserdampfionen ausgeführt. Es ist bei 100°: $D = 0{\cdot}0006$, $W = 70200$,

---

[1] L. c., p. 180.

$\overset{+}{u} = 0 \cdot 774$, $\overset{-}{u} = 0 \cdot 730$. Daraus $\overset{+}{s} = 10 \cdot 5 . 10^{-8} cm$, $\overset{-}{s} = 10 \cdot 8 . . 10^{-8} cm$. Für den Molekelradius des Wasserdampfes nehmen wir den von G. Jäger[1] berechneten Wert $2 \cdot 5 . 10^{-8} cm$. Dann ist $\overset{+}{r} = 8 \cdot 0 . 10^{-8} cm$, $\overset{-}{r} = 8 \cdot 3 . 10^{-8} cm$.

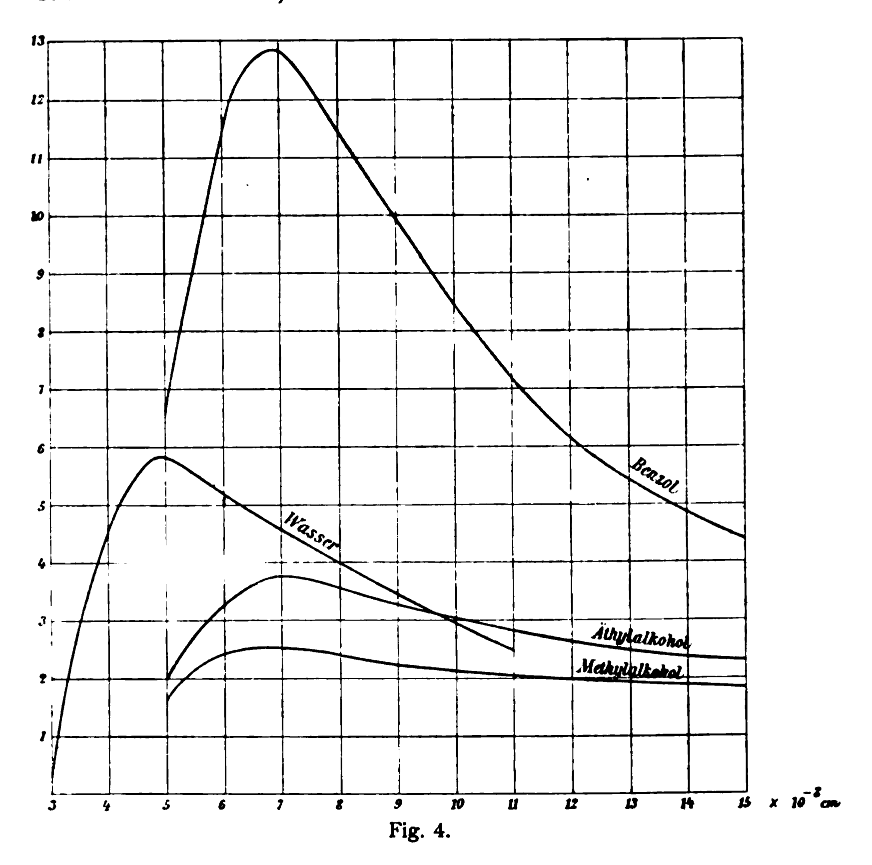


Fig. 4.

Beide Ionenarten sind also größer als die Luftionen und der Dampf wird sich daher in ionisierter Luft zuerst auf seinen eigenen Ionen niederschlagen. Es sind hier die negativen Ionen die größeren. Die zur Bildung von Tröpfchen auf diesen Kernen erforderlichen Übersättigungen sind $4 \cdot 3$ für die positiven, $4 \cdot 1$ für die negativen. Die positiven Ionen erfordern also in der Tat eine etwas größere Übersättigung und für die negativen

[1] Diese Sitzungsber., 100, p. 1233 (1891).

Ionen stimmt der aus der Größe abgeleitete Wert der Übersättigung überraschend gut mit dem Wilson'schen Werte überein. Der berechnete Unterschied der beiden Übersättigungen ist allerdings viel zu klein, um das tatsächliche Verhalten ganz zu erklären. Freilich könnte der aus den Kondensationsversuchen bestimmte Wert der Übersättigung für die positiven Ionen etwas zu groß sein, da stets auch einige negative Ionen zugegen sind, die infolge ihrer größeren Wirksamkeit den positiven Ionen das Wasser entziehen und so eine scheinbar größere Übersättigung notwendig machen, als der Größe der positiven Ionen eigentlich entspräche.

Es sind hier noch zwei Bedenken zu erheben. Erstens ist angenommen worden, daß die Größe der Ionen sich mit der Temperatur nicht wesentlich ändert, da der Ionenradius ja bei 100°, die Übersättigung aber bei weit tieferer Temperatur berechnet wurde. Nun hat P. Phillipps[1] gezeigt, daß die Beweglichkeit der Luftionen mit der Temperatur zunimmt, und zwar rascher, als bei gleichbleibender Ionengröße zu erwarten wäre; es nimmt also die Ionengröße mit wachsender Temperatur ab. Nach Phillipps ist bei $T = 285°$ $\overset{+}{u} = 1\cdot39$, $\overset{-}{u} = 1\cdot78_5$, bei $T = 383°$ aber $\overset{+}{u} = 1\cdot85$, $\overset{-}{u} = 2\cdot30$. Die Zunahme in diesem Intervall von 98° ist also etwa 30%. Nach der hier benutzten Formel von Lenard sollte sich u bei gleichbleibendem Radius mit $\sqrt{T}$ proportional ändern; dies gibt eine Änderung um 15%. 15% sind daher auf Rechnung einer Änderung von s^2 zu setzen. Man kann daher für den Ionenradius selbst eine Abnahme von etwa 4% bei 100° Temperaturzunahme rechnen. Wenn dies auch bei Wasserdampf gilt, so werden die aus der Beweglichkeit berechneten Werte der Ionenradien für Wasserdampf bei 0° $\overset{+}{r} = 8\cdot32$, $\overset{-}{r} = 8\cdot63$. Die Übersättigung für die negativen Ionen ergibt dann noch immer eine genügende Übereinstimmung und die für die positiven bleibt etwas größer.

Aus einigen Versuchen C. T. R. Wilson's[2] über die Abhängigkeit der Kondensation von der Temperatur geht hervor,

[1] Nature, 74, p. 627 (1906).

[2] Phil. Trans. A., 189, p. 265 (1897).

daß sich der Kernradius in dem kleinen Intervall von 12° nicht wesentlich ändert. Doch sind hier weitere Versuche angezeigt. Wilson[1] berechnet den Radius der negativen Kerne zu $8 \cdot 6 . 10^{-8}$ *cm*, ein Wert, der mit dem hier aus der Beweglichkeit berechneten Ionenradius überraschend gut übereinstimmt. C. Barus[2] schätzte diesen Kernradius zu $4 . 10^{-8}$ *cm*.

Eine weitere Unsicherheit wird durch eine neuere Arbeit von Townsend[3] in diese Überlegungen gebracht. Es ist angenommen worden, daß positive wie negative Ionen das Elementarquantum $3 \cdot 4 . 10^{-10}$ e. s. E. tragen. Nun zeigt Townsend, daß in Luft die positiven Ionen, wenigstens im Augenblick ihrer Bildung, die doppelte Ladung tragen. Allerdings weist Townsend selbst darauf hin, daß sich die eine Ladung sehr rasch durch Anlagerung eines negativen Ions neutralisieren wird, daß nämlich die Wiedervereinigung der doppeltgeladenen positiven Ionen mit den überzähligen negativen Ionen viel rascher erfolgen wird als die Wiedervereinigung zweier einwertiger Ionen. Nach kurzer Zeit sind dann auch die positiven Ionen einfach geladen. Daß für gewöhnlich die Ionen beider Zeichen gleiche Ladung haben, ist ja von J. J. Thomson[4] direkt nachgewiesen worden, indem er zeigte, daß die Tröpfchenzahl bei Expansionen über 1·31, bei der positive wie negative Ionen gefangen werden, gerade doppelt so groß ist wie bei kleineren Expansionen, bei denen nur die negativen Ionen gefangen werden. Es dürfte also auch bei den vorliegenden Messungen die Neutralisierung der überschüssigen Ladungen auf den positiven Ionen vor dem Eintritt in den Hilfskondensator ziemlich weit vorgeschritten sein. Immerhin besteht aber die Möglichkeit, daß man bei der Berechnung des Ionenradius aus der Beweglichkeit bei den positiven Ionen einen größeren Mittelwert für e einzusetzen hat. Dadurch wird der Ionenradius größer, die Übersättigung kleiner und der Unterschied zwischen beiden Ionenarten, der ohnedies zu klein ist, um das geringe Kondensationsvermögen der positiven Ionen quantitativ voll-

---

1 L. c., p. 306.

2 Sill. Journ., 22, p. 140 (1906).

3 Proc. Roy. Soc., A. 80, p. 207 bis 211 (1908).

4 L. c., p. 178.

ständig zu erklären, wird noch verringert. Hier müssen weitere Untersuchungen an verschiedenen Gasen sowie über die Geschwindigkeit der anfänglichen Wiedervereinigung abgewartet werden. Es sei hier darauf hingewiesen, daß dank der Eigenschaft des Alkoholdampfes, sich erst auf den positiven Ionen niederzuschlagen, sich die Methode von H. A. Wilson[1] zur Bestimmung der Ionenladung auch auf die positiven Ionen anwenden läßt. Einige Versuche,[2] die ich in dieser Richtung angestellt habe, scheinen zu zeigen, daß die Ladung der positiven Ionen gleich der der negativen ist; sie ergab sich nämlich gleich $3 \cdot 8 . 10^{-10}$ e. s. E. Die Versuche können jedoch bei der Verwendung einer Influenzmaschine in Ermanglung einer genügenden Hochspannungsbatterie nicht als sehr genau betrachtet werden, und sie wurden, da ihr Zweck, den Beweis zu vervollständigen, daß man es bei den Alkoholen tatsächlich mit reiner Ionenkondensation zu tun hat, durch die hinreichende Übereinstimmung erfüllt war, nicht weiter verfolgt. Im Hinblick auf die zitierte Townsend'sche Arbeit gewinnt die Methode vielleicht erhöhtes Interesse und ihre exakte Ausführung wäre angezeigt.

Die Dampfionen können in feuchter Luft nur für den Beginn der Kondensation maßgebend sein. Denn bei größeren Expansionen werden, wie aus den Thomson'schen Messungen der Ionenladung hervorgeht, alle Ionen, nicht nur die verhältnismäßig geringe Zahl der Dampfionen gefangen. Vielleicht geht bei wachsender Übersättigung erst eine Umwandlung der Luftionen in Wasserdampfionen vor sich. J. J. Thomson[3] hat die Frage aufgeworfen, ob in einem ionisierten Gase die Ladungen dauernd bei einem Molekelkomplex verbleiben oder ob die Ionen auch während ihres freien Bestandes fortwährend ihre Zusammensetzung ändern. Ist letzteres der Fall, so ist wohl denkbar, daß bei genügender Übersättigung alle Ladungen abgefangen werden, da die Dampfionen stets durch niedergeschlagene Tropfen dem Austausche entzogen werden und

---

[1] Phil. Mag., 5, p. 429 (1903).
[2] Phys. Zeitschr., 8, p. 561 bis 564 (1907).
[3] L. c., p. 29.

sich daher neue Dampfionen aus den Luftionen bilden werden, um den Gleichgewichtszustand zwischen den Ionenarten wiederherzustellen. Auf eine Modifikation der Luftionen durch Dämpfe lassen auch die Bestimmungen der Beweglichkeit in feuchten Gasen schließen. Die von J. Zeleny[1] gefundenen Abweichungen zwischen feuchten und trockenen Gasen sind zu groß, als daß sie durch die Anwesenheit der langsameren Dampfionen im Verhältnis der vorhandenen Mengen erklärt werden könnten. Man müßte annehmen, daß die Bildung der Dampfionen irgendwie begünstigt wird,[2] so daß stets beträchtlich mehr Dampfionen vorhanden wären, als der Dampfmenge entspräche.

Berechnung des Ionenradius für Methylalkohol (bei 66°).

$$D = 0\cdot00124,\quad W = 47300,\quad \overset{+}{u} = 0\cdot291,\quad \overset{-}{u} = 0\cdot302,$$
$$\rho^{*} = 1\cdot8.10^{-8}\, cm,$$
$$\overset{+}{s} = 14\cdot6.10^{-8},\quad \overset{-}{s} = 14\cdot2.10^{-8},$$
$$\overset{+}{r} = 12\cdot8.10^{-8},\quad \overset{-}{r} = 12\cdot4.10^{-8}.$$

Übersättigung bei Zimmertemperatur

$$\overset{+}{S} = 1\cdot9,\quad \overset{-}{S} = 2\cdot0,$$

während sich aus den Kondensationsversuchen[3] ergab $\overset{+}{S} = 2\cdot3$, $\overset{-}{S} = 2\cdot6$, in hinreichender Übereinstimmung.

Äthylalkohol (bei 78°).

$$D = 0\cdot0017,\quad W = 40130,\quad \overset{+}{u} = 0\cdot259,\quad \overset{-}{u} = 0\cdot271,$$
$$\rho^{*} = 2\cdot6.10^{-8}\, cm,$$
$$\overset{+}{s} = 14\cdot3.10^{-8},\quad \overset{-}{s} = 13\cdot9.10^{-8},$$
$$\overset{+}{r} = 11\cdot7.10^{-8},\quad \overset{-}{r} = 11\cdot3.10^{-8},$$
$$\overset{+}{S} = 2\cdot7,\quad \overset{-}{S} = 2\cdot8,$$

---

1 Phil. Trans. A., 195, p. 193 (1901).

2 Etwa infolge der hohen Dielektrizitätskonstante des Wassers; vergl. P. Langevin, Ann. d. Chim. et Phys. (7), 28, p. 331 (1903).

* Molekelradius nach G. Jäger, l. c.

3 Adolf-Lieben-Festschrift, p. 175 (1906).

während sich aus den Kondensationsversuchen[1] ergab $\overset{+}{S}=2\cdot 1$, $\overset{-}{S}=2\cdot 4$.

C. Barus[2] schätzt aus seinen Kondensationsversuchen den Kernradius für Alkoholdampf zu 10^{-7} *cm*, also sehr nahe den obigen Werten von *r*.

Von Interesse ist noch die Berechnung für Benzol. Benzoldampf zeigte bei einer Übersättigung[1] von 4·3 Kondensation, ohne daß eine Ladung sicher nachweisbar war.[3] Aus dem Folgenden ergibt sich nun, daß die Benzoldampfionen eine weit größere Übersättigung erfordern müßten, so daß man es hier wahrscheinlich nicht mit Ionenkondensation, sondern mit einem anderen Vorgange, etwa einer chemischen Zersetzung zu tun hat.

Benzol (bei 80°).

$$D=0\cdot 00278,\ W=33380,\ \overset{+}{u}=0\cdot 194,\ \overset{-}{u}=0\cdot 234,$$
$$\rho=4\cdot 6.10^{-8}\,cm,$$
$$\overset{+}{s}=14\cdot 4.10^{-8},\ \overset{-}{s}=13\cdot 5.10^{-8},$$
$$\overset{+}{r}=9\cdot 8.10^{-8},\ \overset{-}{r}=8\cdot 9.10^{-8},$$
$$\overset{+}{S}=8\cdot 5,\qquad \overset{-}{S}=10 \text{ statt } 4\cdot 3!$$

Für andere Substanzen, die im Expansionsapparat Kondensation zeigten, ließ sich die Übersättigung nicht berechnen, da Dampfdruckbeobachtungen bei niedrigen Temperaturen fehlen. Es läßt sich daher noch nicht sagen, ob die Ionengrößen für Aceton oder Chloroform der beobachteten Übersättigung entsprechen. Bei Aceton ist es fraglich, ob Ionenkondensation beobachtet wurde, da kein Einfluß eines elektrischen Feldes wahrgenommen werden konnte. Chloroform fügt sich, was das Verhältnis der Beweglichkeiten anbelangt, nicht in die hier dargelegten Anschauungen. Es sind die negativen Ionen hier die weniger beweglichen, größeren, während ich bei den Kondensationsversuchen[4] eine Bevorzugung der positiven beob-

---

[1] Adolf-Lieben-Festschrift, p. 175 (1906).
[2] L. c.
[3] Phys. Zeitschr., 8, p. 563 (1907).
[4] Diese Sitzungsber., 115, p. 37 (1906).

achten zu können glaubte. Die folgende Tabelle enthält die nach Jäger berechneten Molekelradien ρ, die aus den Beweglichkeiten berechneten Ionenradien r und die entsprechenden Übersättigungen S sowie in der letzten Kolumne die aus den Kondensationsversuchen folgenden Übersättigungen.

Substanz	$\rho \times 10^8 cm$	$r \times 10^8 cm$	S aus Ionenradius	S aus Kondensationsversuchen
Wasser	2·5	+8·0	+4·3	+6
		—8·3	—4·1	—4
Methylalkohol	1·8	+12·8	+1·9	+2·3
		—12·4	—2·0	—2·6
Äthylalkohol	2·6	+11·7	+2·7	+2·1
		—11·3	—2·8	—2·4
Benzol	4·6	+9·8	+8·5	4·3
		—8·9	—10	Ladung?
Aceton	3·5	+15·1	+3·4	
		—14·1	—3·8	
Chloroform	4·0	+9·8	+6	
		—10·9	—5·3	
Äther	3·8	+11·3		
		—11·0		
Methylacetat	4·5	+12·1		
		—10·3		
Hexan	3·8	+11·5		
		—11·1		

Einer Rechtfertigung bedarf noch die Wahl der Werte für den Molekelradius.[1] Es ist aber zunächst zu bemerken, daß man

[1] Jäger betrachtet zunächst sehr kleine Flüssigkeitströpfchen, die sich gleich den Gasmolekeln bewegen. Bei dem Zusammenstoß zweier Tröpfchen kann ein Zerstäuben in kleinere Tröpfchen stattfinden, wobei Arbeit gegen die Oberflächenkräfte geleistet werden muß. Die Zerkleinerung kann daher nur

den Molekelradius innerhalb beträchtlicher Grenzen variieren kann, ohne dadurch die Übereinstimmung der aus Ionengröße und aus den Kondensationsversuchen berechneten Übersättigungen mehr zu stören, als mit der Unsicherheit der Berechnung der Übersättigung selbst verträglich ist. Sodann liefern verschiedene andere Methoden, wie G. Jäger in der zitierten Arbeit angibt, sehr nahe übereinstimmende Werte für den Molekelradius und die Jäger'schen Werte bilden ein Mittel zwischen den größten aus innerer Reibung und Verdichtungskoeffizienten oder den Van der Waals'schen Konstanten berechneten und den kleinsten auf elektrischem oder optischem Wege gefundenen.

---

so lange fortgehen, bis die zur weiteren Zerlegung erforderliche Arbeit gleich wird der kinetischen Energie eines molekularen Stoßes. Diese kleinsten so gebildeten Tröpfchen identifiziert Jäger mit den Dampfmolekeln.

Man kann nun versuchen, auch den Ionenradius auf diese Weise zu berechnen, indem man auch noch die Vermehrung der elektrischen Energie bei der Verkleinerung eines geladenen Tröpfchens in Rechnung setzt. Man findet so, daß die Ionen tatsächlich etwas größer sein müssen als die Molekel, doch sind die so berechneten Werte stets kleiner als die aus der Beweglichkeit gefundenen; letztere sind von 1·5mal (für Benzol) bis zu dreimal (für Methylalkohol) so groß.

Obwohl gegen die vorliegende Arbeit ohnedies schon der Vorwurf erhoben werden könnte, daß aus wenigen unsicheren Zahlen zu weitgehende Schlüsse gezogen werden, sei noch die folgende Bemerkung gestattet; F. G. Donnau (Phil. Mag., 3, p. 305 bis 310 [1902]), der zuerst die Wilson'sche Methode auf verschiedene Dämpfe angewendet hat, wurde hiebei von der Vermutung geleitet, daß Substanzen, die als Lösungsmittel stark dissoziierend wirken und in denen man die Bildung größerer Molekelkomplexe annimmt, sich auch bei den Expansionsversuchen leichter kondensieren könnten. Das Resultat der Versuche ist in dieser Richtung nicht sehr überzeugend. Man kann nun aber die oben angegebenen Radien der Dampfionen mit dem Molekelradius vergleichen und gelangt so zu einem Maße für die Komplexbildung. Bildet man den Quotienten aus mittlerem Ionenradius und Molekelradius, so erhält man für Wasser 3·26, Methylalkohol 7·0, Äthylalkohol 4·42, Aceton 4·17, Methylacetat 2·49, Chloroform 2·59, Äther 2·93, Benzol 2·03, Hexan 2·98. Wie man sieht, ist der Quotient am größten für Methyl- und Äthylalkohol, Aceton und Wasser und diese Substanzen zeigen auch als Lösungsmittel das größte Dissoziationsvermögen. Für Wasser ist der Quotient allerdings kleiner, als seinem hohen Dissoziationsvermögen (und der parallel laufenden Dielektrizitätskonstante) entspräche; dagegen zeigen die organischen Substanzen im ganzen ein Wachsen des Quotienten mit der Dielektrizitätskonstante, das vielleicht nicht bloß zufällig ist.

Nimmt man umgekehrt als erwiesen an, daß die Kondensation tatsächlich auf den Dampfionen beginnt, so kann man versuchen, durch Herstellung besserer Übereinstimmung zwischen den aus der Ionengröße berechneten und den aus den Kondensationsversuchen bestimmten Übersättigungen den Molekelradius ρ zu finden. Es ergibt sich für Wasserdampf:

für positive Ionen: $\overset{+}{S} = 6$, daraus $\overset{+}{r} = 5.10^{-8}$ und, da $\overset{+}{s} = 10 \cdot 5.10^{-8}$, so ist $\rho = 5 \cdot 5.10^{-8}$;

für negative Ionen: $\overset{-}{S} = 4$, daraus $\overset{-}{r} = 8 \cdot 3.10^{-8}$ und, da $\overset{-}{s} = 10 \cdot 81.10^{-8}$, so ist $\rho = 2 \cdot 5.10^{-8}$;

für Methylalkohol: $\overset{+}{S} = 2 \cdot 3$, daraus $\overset{+}{r} = 8 \cdot 9.10^{-8}$ und, da $\overset{+}{s} = 14 \cdot 6.10^{-8}$, so ist $\rho = 5 \cdot 7.10^{-8}$;

$\overset{-}{S} = 2 \cdot 6$, daraus $\overset{-}{r} = 6 \cdot 8.10^{-8}$ und, da $\overset{-}{s} = 14 \cdot 2.10^{-8}$, so ist $\rho = 7 \cdot 4.10^{-8}$.

Der letzte Wert ist unwahrscheinlich, da dann das Ion etwas kleiner wäre als eine Molekel. Für Äthylalkohol läßt sich eine vollständige Übereinstimmung überhaupt nicht herstellen. Bei einer genügenden Verfeinerung der Messung der Beweglichkeiten und nach Aufklärung einiger Unsicherheiten dürfte sich aber eine ganz brauchbare Methode zur Bestimmung des Molekelradius ergeben.

Zusammenfassung.

I. Es wird die Beweglichkeit der Ionen in einer Reihe von Dämpfen bestimmt.

II. Die aus der Beweglichkeit berechnete Größe der Ionen stimmt für Wasser, Methyl- und Äthylalkohol nahezu mit den Werten überein, die sich aus den Kondensationsversuchen unter der Annahme, daß die Dämpfe sich zuerst auf den eigenen Ionen niederschlagen, ableiten lassen.

Über die Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichungen

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1908.)

Die Irreduktibilität der Gleichung für die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln

$$X = 0$$

in dem Bereich der rationalen Zahlen kann mit Mitteln bewiesen werden, welche insofern von Interesse sind, als sie ihrer Einfachheit und Allgemeinheit wegen auch bei anderen ähnlichen Gleichungen anwendbar bleiben.

Es sei $f(x)$ ein rationalzahliger Teiler von X von höherem als dem 0ten Grade mit dem Koeffizienten 1 bei der höchsten Potenz von x, P das Produkt der bis zu der Grenze $\nu 2^{\nu}$ vorkommenden Primzahlen, wo $\nu = \varphi(n)$ den Grad von X bezeichnet, r der größte zu n teilerfremde Teiler von P und a eine beliebige zu n teilerfremde Zahl. Ermittelt man eine positive Lösung m der Kongruenzen

$$y \equiv a \pmod{n}$$
$$y \equiv 1 \pmod{r},$$

so ist dieselbe zu n und r und daher auch zu P teilerfremd und kann infolgedessen nur Primfaktoren besitzen, welche über $\nu 2^{\nu}$ liegen.

Sind nun $\alpha, \beta, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0$$

und p ein Primfaktor von m, so wird, da f ganzzahlig ist,

$$0 = f(\alpha)^p \equiv f(\alpha^p) \pmod p$$
$$0 = f(\beta)^p \equiv f(\beta^p) \pmod p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hiernach sind die Größen

$$\frac{1}{p} f(\alpha^p),\ \frac{1}{p} f(\beta^p), \ldots$$

algebraisch ganz. Da sie aber die Gestalt

$$\frac{1}{p}(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)\ldots$$

haben, wo $\omega, \omega_1, \omega_2 \ldots$ n^{te} Einheitswurzeln bezeichnen, so sind ihre absoluten Beträge $\leqq \frac{1}{p} 2^\nu < \frac{1}{\nu}$. Ihre symmetrischen Grundfunktionen liegen demnach alle, vom Vorzeichen abgesehen, unter 1 und müssen infolgedessen als ganze Zahlen $= 0$ sein. Somit ist

$$f(\alpha^p) = 0 \qquad f(\beta^p) = 0 \ldots$$

Ist $m < p$, so ergibt sich, wenn von $\alpha^p, \beta^p, \ldots$ statt von $\alpha, \beta, \ldots$ ausgegangen wird, in derselben Weise für einen Primfaktor q von $\frac{m}{p}$

$$f(\alpha^{pq}) = 0,\ f(\beta^{pq}) = 0, \ldots$$

Die Fortsetzung dieser Schlüsse führt letzten Endes zu

$$f(\alpha^m) = f(\alpha^a) = 0.$$

Die Funktion $f(x)$ verschwindet demnach für alle primitiven n^{ten} Einheitswurzeln und muß mit X zusammenfallen.

Zur Berechnung der elektromagnetischen Masse des Elektrons

von

Dr. F. Hasenöhrl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. April 1908.)

Im folgenden soll eine einfache Ableitung des Betrages der Bewegungsgröße des stationär bewegten Elektrons kurz angegeben werden. Der eingeschlagene Weg geht von der Definition der elektromagnetischen Bewegungsgröße aus, vermeidet die Aufstellung und Integration der Feldgleichungen und schließt sich demnach eng an die von mir in einer früheren Arbeit verwendete Methode an.[1]

Die elektromagnetische Bewegungsgröße[2] ist gleich dem Raumintegral des (absoluten) Energieflusses $\mathfrak{S}$, dividiert durch c^2. Wir verwenden ein Bezugssystem, das mit dem Elektron starr verbunden ist, das sich also mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ bewegt. Bezeichnen wir den relativen Energiestrom mit $\mathfrak{S}'$, so ist der absolute Energiestrom:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{q} . w,$$

[1] F. Hasenöhrl, Zur Thermodynamik bewegter Systeme. Diese Sitzungsber., IIa. Abt., CXVI, p. 1391 (1907) und CXVII, p. 207 (1908).

[2] Bezüglich dieser und der folgenden Definitionen, sowie bezüglich der Bezeichnungsweise vgl. Enzyklopädie der math. Wiss., V, 2, Art. 14, und M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II, Leipzig 1905. — Die Größe $\mathfrak{S}'$ hat eine andere Bedeutung als der von Abraham »relative Strahlung« genannte Vektor $\mathfrak{S}'$.

wenn w die Energiedichte ist. Durch Integration über den ganzen Raum erhalten wir die Bewegungsgröße:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{s}\,dv = \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{s}'\,dv + \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{q}\,.W. \qquad (1)$$

Hierin ist W die gesamte vom Elektron mitgeführte Energie.

Der relative Energiestrom $\mathfrak{s}'$ kommt auf folgende Weise zustande. Der Sinn der in einem Punkte des Elektrons wirkenden elektromagnetischen Kraft stimmt entweder mit dem Sinne der Translation überein oder ist demselben entgegengesetzt. In dem Teile des Elektrons, wo das erstere der Fall ist, leistet die elektromagnetische Kraft Arbeit; es geht hier beständig elektromagnetische Energie als solche verloren. In dem anderen Teile des Elektrons wird gegen die elektromagnetische Kraft Arbeit geleistet und daher elektromagnetische Energie erzeugt. Der stationäre Zustand wird nun dadurch aufrecht erhalten, daß ein konstanter (relativer) Energiestrom von den letztgenannten Stellen zu den ersteren fließt.

Analytisch läßt sich dies durch die leicht verständliche Gleichung:

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{q}) + \operatorname{div}\mathfrak{s}' = 0 \qquad (2)$$

ausdrücken, welche unter Voraussetzung des stationären Zustandes sofort aus dem Energieprinzip folgt. Unter $\mathfrak{P}$ verstehen wir hier die elektromagnetische Kraft pro Volumseinheit. (Dieselbe wird meist durch $\rho\mathfrak{F}$ bezeichnet.) Aus Gleichung (2) allein läßt sich $\mathfrak{s}'$ nicht bestimmen, wohl aber das Raumintegral von $\mathfrak{s}'$, worauf es hier allein ankommt. Wenn nämlich das Raumintegral von div $\mathfrak{s}'$ gleich Null ist, was hier der Fall ist,[1] so gilt die Gleichung:[2]

---

[1] Es ist ja $\int \operatorname{div}\mathfrak{s}'\,dv = -\mathfrak{q}\int \mathfrak{P}\,dv = 0$, wenn eine kräftefreie Bewegung vorliegt. Die Möglichkeit der letzteren kann im Rahmen dieser Darstellung nicht bewiesen werden. Es ist ja hier von vornherein eine endliche, vom Elektron mitgeführte Energie vorausgesetzt.

[2] Siehe etwa A. Föppl, Geometrie der Wirbelfelder, Leipzig 1897, p. 14, Gl. (10).

$$\int \mathfrak{S}' dv = -\int \mathfrak{r} \operatorname{div} \mathfrak{S}' dv = \int \mathfrak{r}(\mathfrak{P}\mathfrak{q}) dv,$$

wo $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor bedeutet, der von einem beliebigen (mitbewegten) Punkt an das Raumelement dv gezogen ist. Wählen wir diesen Punkt zum Ursprung des (bewegten) Koordinatensystems, so sind die Komponenten von $\mathfrak{r}$ gleich den Koordinaten von dv. Die obige Vektorgleichung ist dann mit den Gleichungen:

$$\int \mathfrak{S}'_x dv = \int x(\mathfrak{P}\mathfrak{q}) dv$$

$$\int \mathfrak{S}'_y dv = \int y(\mathfrak{P}\mathfrak{q}) dv$$

$$\int \mathfrak{S}'_z dv = \int z(\mathfrak{P}\mathfrak{q}) dv$$

identisch.[1] Legen wir die X-Achse in die Richtung der Translation, so ist $(\mathfrak{P}\mathfrak{q}) = \mathfrak{P}_x \cdot |\mathfrak{q}| = \mathfrak{P}_x q$; nehmen wir ferner an, daß das Elektron eine Symmetrieachse hat, die der X-Achse parallel ist, so verschwinden die beiden letzten Integrale und wir erhalten nach (1):

$$\mathfrak{G}_x = \mathfrak{G} = \frac{1}{c^2} q W + \frac{1}{c^2} q \int x \mathfrak{P}_x dv \tag{3}$$

$$\mathfrak{G}_y = \mathfrak{G}_z = 0.$$

Das Integral $\int x \mathfrak{P}_x dv$ hat nun eine einfache physikalische Bedeutung; es ist proportional der Arbeit, die bei einer Deformation des Elektrons geleistet wird, welche darin besteht, daß jeder Punkt des Elektrons in der X-Richtung um ein Stück

---

[1] Im Falle eines bloß an der Oberfläche geladenen Elektrons lassen sich diese Gleichungen sehr anschaulich durch Konstruktion der Strömungslinien oder Strömungsröhren der Energie ableiten.

verschoben wird, das seiner x-Koordinate proportional ist. Das ist eine homogene Dehnung in der Translationsrichtung.[1]

Diese Arbeit läßt sich auch auf andere Weise berechnen. Betrachten wir zuerst eine beliebige Deformation, bei der jeder Punkt des Elektrons um die Strecke δs verschoben wird, so ist die Deformationsarbeit durch:

$$\int(\mathfrak{P}\,\delta s).dv = -\delta W + q\delta\mathfrak{G} = -\delta H$$
$$H = W - q\mathfrak{G}$$

gegeben. Es ist ja die Abnahme der elektromagnetischen Energie gleich der geleisteten Arbeit, welche in die Deformationsarbeit und die (behufs Aufrechterhaltung konstanter Geschwindigkeit nötige) Translationsarbeit zerfällt. Letztere ist der Abnahme der Bewegungsgröße proportional.

Wir supponieren nun eine (gedachte) »Anfangsgestalt« des Elektrons; $x^0 y^0 z^0$ seien die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Elektrons. Wir denken uns das Elektron in seiner wirklichen Gestalt durch homogene Dehnung aus der Anfangsgestalt hervorgegangen, so daß

$$x = x^0(1+\lambda); \quad y = y^0; \quad z = z^0$$

jetzt die Koordinaten des früher hervorgehobenen Punktes sind. (Die Ladung soll bei dieser Deformation an den Teilen des Elektrons fest haften, so daß entsprechende Raumteile dieselbe Ladung haben.) Wird nun λ um $\delta\lambda$ vergrößert, so ist für diese weitere Deformation:

$$\delta s = x^0.\delta\lambda = \frac{x}{1+\lambda}\cdot\delta\lambda;$$

---

[1] Betrachtet man einen Körper, der bloß einem normalen, konstanten Oberflächendruck unterworfen ist, so wird das Integral ein Oberflächenintegral; es ist dann $\mathfrak{P}_x = p\cos(nx)$ zu setzen. Somit wird

$$\int x\mathfrak{P}_x\,dv = \int x.p\cos(nx).df = p.V,$$

wenn V das Volumen des betrachteten Körpers ist. Man erhält dann

$$\mathfrak{G} = \frac{q}{c^2}(W+pV).$$

Vgl. F. Hasenöhrl, l. c., p. 1401.

daher:

$$\int (\mathfrak{P}\,\delta s)\,dv = \frac{\delta\lambda}{1+\lambda}\int x\mathfrak{P}_x dv = -\delta H.$$

Wir können demnach:

$$\int x\mathfrak{P}_x dv = -(1+\lambda)\frac{\partial H}{\partial\lambda}$$

setzen, wenn wir unter $\partial/\partial\lambda$ eine Differentiation bei konstantem q verstehen.

Setzen wir diesen Wert in (3) ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{G} = \frac{q}{c^2}\,W - \frac{q}{c^2}(1+\lambda)\frac{\partial H}{\partial\lambda}.$$

Nun lassen sich aber auch die Größen $\mathfrak{G}$ und W sofort durch H ausdrücken. Es ist nämlich:[1]

$$\mathfrak{G} = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad W = H - q\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{4}$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir für H eine partielle Differentialgleichung, die nach der Substitution $q = \beta c$ die Form:

$$(1-\beta^2)\frac{\partial H}{\partial\beta} + \beta H - \beta(1+\lambda)\frac{\partial H}{\partial\lambda} = 0$$

annimmt. Führen wir als neue Variable $\varkappa = \sqrt{1-\beta^2}$ ein, so erhalten wir:

$$\varkappa\frac{\partial H}{\partial\varkappa} + (1+\lambda)\frac{\partial H}{\partial\lambda} = H,$$

woraus

$$H = \varkappa f\left(\frac{1+\lambda}{\varkappa}\right)$$

---

[1] Vgl. F. Hasenöhrl, l. c., p. 1392. — Vgl. ferner M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II, p. 175, Gl. (111) und (111a). — Es ist nämlich die Größe H bis auf das Vorzeichen mit der von Herrn Abraham eingeführten Lagrange'schen Funktion L identisch. Dort ist L als Differenz der magnetischen und elektrischen Energie definiert, woraus sich erst nachträglich die hier verwendete Definition ergibt (vgl. l. c., p. 162, Gl. 103). — Die ursprüngliche Bedeutung der Größe L ist aus unserer Darstellung natürlich nicht ersichtlich.

folgt, worin f eine ganz beliebige Funktion ist. Für $\beta = 0$, $\varkappa = 1$ muß $H = W_0(1+\lambda)$ sein, wenn wir unter $W_0(1+\lambda)$ die Energie des ruhenden Elektrons in der durch den Wert von λ gegebenen Gestalt verstehen. Es ist also

$$H = \varkappa W_0\left(\frac{1+\lambda}{\varkappa}\right).$$

Da die zu Hilfe genommene Anfangsgestalt ganz willkürlich ist, können wir die wirkliche Gestalt des Elektrons durch den Wert $\lambda = 0$ festlegen; es ist dann

$$H = \sqrt{1-\beta^2}\, W_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$

worin $W_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ die Energie eines ruhenden Elektrons bedeutet, dessen Dimensionen in einer Richtung gegen die des bewegten Elektrons im Verhältnis $1:(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ verlängert sind.

Bei einem kugelförmigen Elektron mit Oberflächenladung etwa (Radius a, Ladung e) ist $W_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ die Energie eines ruhenden Ellipsoides mit den Achsen a, a, $\frac{a}{\sqrt{1-\beta^2}}$, auf dessen Oberfläche die Ladung e ebenso verteilt ist wie auf einem Leiter; man erhält dann

$$H = \frac{e^2}{2a}\,\frac{1-\beta^2}{2\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

in voller Übereinstimmung mit dem von Herrn Abraham[1] angegebenen Werte.

Aus dem Ausdruck für H lassen sich dann die Werte der Bewegungsgröße, der Energie und der scheinbaren Massen sofort mit Hilfe der Gleichungen (4) ableiten.

---

[1] M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II, p. 179, Gl. (113).

Über die stehenden Seespiegelschwankungen (Seiches) in Riva am Gardasee

von

Dr. **Albert Defant,**

Assistent an der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien.

(Mit 7 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1908.)

Einleitung.

Namentlich durch die Arbeiten von E. Chrystal und seiner Schüler sind in den letzten Jahren bedeutende Fortschritte in der Seichesforschung sowohl auf theoretischem, wie auf experimentell beobachtendem Gebiete gemacht worden. Die Du-Boys'sche Theorie der Seiches, welche fast alle morphologischen Verhältnisse der Seen nicht in Erwägung zieht, lieferte für kompliziertere Formen der Seebecken keine verläßlichen Werte und sogar für äußerlich einfache Seen ließ sie sich mit den Beobachtungen nicht vereinen. Durch die Chrystal'sche Theorie, welche den Einfluß der Bodenkonfiguration des Sees auf die Periodendauer der einzelnen Schwingungsformen und auf die Lage der Knotenlinien berücksichtigt, wurde die Seichesforschung in ganz andere Bahnen gelenkt und manche Anwendungen der allgemeinen Theorie auf Seen von auch nicht so einfach morphologischem Bau zeigten, welch gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erzielt werden kann. Über die Entwicklung der Seichesforschung in den letzten Jahren glaube ich jedoch hier keine nähere Darstellung geben zu sollen, um so mehr als vor kurzem W. Halbfass in seiner Abhandlung: »Über den heutigen Stand der

Seichesforschung«[1] eine vollständige und klare Darstellung ihrer Entwicklungsgeschichte bis auf die neueste Zeit gegeben hat, auf welche ich hier am besten verweisen zu können glaube.

Bereits im November 1902 wurde von der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik auf Anregung und mit Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien am Nordende des Gardasees, in Riva, ein Sarasin'scher Limnograph aufgestellt, welcher die auf italienischem Gebiet des Sees an manchen Orten beobachteten Seespiegelschwankungen (Seiches) ergänzen sollte. Die Apparate auf italienischem Gebiete[2] waren bereits seit dem Jahre 1898 in Tätigkeit, und zwar bis Oktober 1901 in Salò und dann am Südende des Gardasees, in Desenzano. Jedoch sind diese Beobachtungen, wie es scheint, sehr lückenhaft und reichen, trotzdem sie fast eine Periode von vier Jahren umfassen, kaum aus, ein klares und einigermaßen sicheres Bild der Seichesformen des Gardasees zu geben. Sehr zu bedauern ist, daß fast vollständig jene Beobachtungen fehlen, welche gleichzeitige Registrierungen der Seespiegelschwankungen in Riva am Nordende und in Desenzano am Südende liefern sollten.

Die Ausarbeitung der Limnographenaufzeichnungen von Riva wurde von der Direktion der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik dem damaligen Sekretär der Anstalt, Dr. J. Valentin, übertragen. Der Limnograph wurde in Riva anfangs November 1902 unmittelbar vor dem Hafeneingang in einer eigens zu diesem Zwecke erbauten Hütte aufgestellt. Der Schutzzylinder für den Schwimmer, welcher unten einen kurzen Rohransatz von 10 *cm* Durchmesser als Öffnung besaß, wurde so tief in das Wasser eingetaucht, daß die Öffnung beim tiefsten Wasserstand des Sees zirka 60 bis 80 *cm* unter dem Seespiegel blieb. Bedient wurde der Apparat von Ingenieur G. Chalderara in vorzüglicher Weise. Bis zum 17. Juli 1903 traten nur belanglose Störungen und Unterbrechungen ein, die sofort stets behoben wurden. Die Aufstellung des Apparates

---

[1] Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, Berlin 1907.

[2] Reale accademia dei Lincei, Vol. 14, 22. Jänner 1905.

kann als eine gute bezeichnet werden, nur war sie dem Wellenschlag etwas zu exponiert und so zeigen die Aufzeichnungen bei sonst ruhigem Wetter, an welchem der Seewind, dort Ora genannt, gegen $10^h 30^m$ vormittags mit ziemlicher Intensität auftritt, einen zittrigen, ja manchmal stark verwischten Gang. Der Apparat war trotz der ziemlich tief unter dem Seespiegel liegenden Öffnung des Schutzzylinders so empfindlich, daß in allen Aufzeichnungen auch die Ankunft und Abfahrt der am Gardasee regelmäßig verkehrenden Dampfer durch starkzittrige Bewegung angedeutet ist.

Am 27. Juli 1903 wurde der Limnograph durch Sturm vollständig ruiniert und daher außer Funktion gesetzt. Am 29. August 1903 wurde er sodann von Dr. J. Valentin nach Reparatur in dem Wassergraben, welcher die Kaserne »alla Rocca« umgibt und mit dem See in guter, freier Verbindung steht, neu aufgestellt, und zwar derart, daß er dem direkten Wellenschlag nicht mehr so ausgesetzt war wie früher. Außerdem wurde statt der früheren kreisförmigen Öffnung mit Rohransatz jetzt am Schutzzylinder eine seitliche, regulierbare Öffnung von 16 *cm* Höhe und 5 *cm* Breite angebracht. Somit war die Zuflußöffnung fast genau so groß wie bei der früheren Einrichtung; bedient wurde hier der Apparat von einem Rechnungsunteroffizier. Die Aufzeichnungen ließen jedoch viel zu wünschen übrig; der Apparat schrieb fast stets in Stufen, die Uhr funktionierte manchmal nicht, so daß schon die Registrierungen vom Jänner 1904 vielfach unbrauchbar sind. Die Monate Februar, März bis zum 13. April sind vollständig unbrauchbar und erst am 14. April 1904 wurde der Apparat durch Herrn Prof. Dr. W. Trabert wieder zum Funktionieren gebracht. Er schrieb dann eine Zeitlang ganz gut, geriet jedoch dann wieder ins Stocken und die Aufzeichnungen wurden immer mangelhafter. Im August 1904 wurde er sodann demontiert. Folgende kleine Skizze zeigt die Aufstellung des Apparates in Riva: L_1 war die erste, L_2 die zweite Aufstellung; man sieht deutlich die viel exponiertere Lage von L_1 gegenüber jener von L_2.

Zur Verfügung steht somit ein Registriermaterial von 18 Monaten. Bei den Registrierungen wurde die Zeitordinate so gewählt, daß 60 *mm* einer Stunde entsprechen; diese Papier-

geschwindigkeit wurde bis zum 31. August 1903 beibehalten. Vom 31. August bis zum 30. Dezember 1903 wurde eine größere Zeitordinate gewählt, und zwar derart, daß einer Minute 3 *mm* oder einer Stunde 18 *cm* entsprachen. Vom 31. Dezember 1903 an wurde sodann wieder die frühere Papiergeschwindigkeit benützt.

In der Sitzung vom 2. April 1903 überreichte Dr. J. Valentin der kaiserlichen Akademie einen vorläufigen Bericht: »Über die stehenden Seespiegelschwankungen (Seiches) in Riva am



Fig. 1.

Gardasee«, worin er die Resultate der damals bereits vorliegenden Registrierungen von vier Monaten mitteilt. Diese reichten bereits hin, um ein Bild der in Riva auftretenden Seespiegelschwankungen zu geben. Die Hauptresultate des Valentin'schen Berichtes möchte ich hier kurz erwähnen. Als mittlere Dauer einer Längsschwingung wurde die Zeit von 42·99 Minuten ermittelt. Neben dieser Uninodalschwingung kommen noch Schwingungen von zirka 30, 22·6, 15, 10 und 7 Minuten vor. Valentin erklärt die Schwingung von 22·6 Minuten für die Binodalschwingungen, während nach seiner Ansicht die Schwingungen von zirka 30 und 15 Minuten einer ganz besonderen Art von Bewegung des Wassers entsprechen. Nach seiner Ansicht ist bei den Schwingungen von zirka

30 Minuten in Riva ein Schwingungsbauch, am Südende des Sees aber gleichzeitig ein Knotenpunkt; in rund ein Drittel Entfernung vom Ende des Sees muß ein zweiter Knotenpunkt sein, bei welchem keine vertikale Bewegung der Wassermasse stattfinden soll. Nach der vereinfachten Merian'schen Formel ergibt sich bei einer mittleren Tiefe des Gardasees von 136·1 *m* und einer Länge des Sees von 52 *km* eine Schwingungsdauer von 47·45 Minuten, also eine bedeutend größere als der Beobachtung entspricht. Läßt man die östliche Bucht von Peschiera weg, so ergibt sich als mittlere Tiefe des übrigbleibenden Teiles des Sees 165·6 *m*; für diese Tiefe ergibt die Merian'sche Formel in vollkommener Übereinstimmung mit der Beobachtung (42·99) den Wert 43·01 Minuten.

Dies die Valentin'schen Resultate. Valentin war sich jedoch wohl selbst bewußt, daß diese Arten der Berechnung doch sehr viel Willkür enthalten und keineswegs allein hinreichend erscheinen, den Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung aufzuhellen und miteinander in Einklang zu bringen. Es war ihm jedoch nicht gegönnt, seine Untersuchungen, welche in den letzten Jahren während seiner Krankheit sehr gelitten hatten, fortzusetzen und zu vollenden. Im Februar 1907 erlag er bereits seinem Leiden.

Die Direktion der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik übergab mir nun das Registriermaterial mit der Aufforderung, es zu bearbeiten. Dieser Aufforderung nachkommend, erlaube ich mir, diese Arbeit mit ihren Ergebnissen der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu übergeben.

Bevor ich jedoch auf die Ergebnisse der Registrierungen zu sprechen komme, möchte ich hier noch in aller Kürze mancher morphologischer Eigenschaften des Gardasees Erwähnung tun, jedoch nur insoweit, als sie für unsere in Betracht kommenden Zwecke erforderlich sind.[1]

Die Hauptwanne des Gardasees ist ein in festes Gestein eingebettetes Becken; es zieht sich in fast gerader Richtung von Torbole und Riva nach Südwesten bis Desenzano. Am Südende teilt sich der See in zwei Buchten, die durch einen

[1] A. Penk, Geographische Abhandlungen. Band II, Heft 2.

unterseeischen Rücken, welcher sich von der Halbinsel Sermione bis zum Cap. S. Vigilio hinzieht, getrennt sind. Dieser unterseeische Rücken liegt im Mittel bloß 35 *m* unter dem Spiegel des Sees, an einer Stelle sogar nur 4 *m* darunter. Diese ganze östliche Bucht von Peschiera zeigt die auffallend geringe Tiefe von 77 *m*; der südliche Teil gegen Peschiera selbst zu ist jedoch noch viel seichter als der nördliche gegen Garda. Der Bau des Haupttroges ist sehr einfach. Die hohen, steilen Felsen fallen in gleicher Steilheit unter dem Seespiegel weiter und bilden so im Norden einen Trog von fast rechteckigem Querschnitt, da fast nirgends Uferterrassen bemerkbar sind. Auch am Nordende ist von einer Fortsetzung des Monte Brione im See nichts zu merken und dort fallen die Ufer ebenfalls ziemlich steil ab. Gegen Süden zu wird der See immer flacher und breiter, jedoch zeigen die Uferwände noch immer einen bedeutenden Neigungswinkel; erst nach der Bucht von Salò finden sich Uferbäuche, die aber auch nicht besonders breit sind.

Die Konstanten des Sees, die wir noch des öfteren brauchen werden, stelle ich hier übersichtlich zusammen:

Oberfläche des ganzen Sees..........	$369\cdot98$ *km*²,
Rauminhalt des ganzen Sees	$50\cdot346$ *km*³,
Größte Tiefe des Sees...............	346 *m*,
Mittlere Tiefe des ganzen Sees........	$136\cdot1$ *m*,
Länge des Sees (Riva—Desenzano) ...	$52\cdot2$ *km*,
Seehöhe	65 *m*.

Die Gestalt des Gardasees, die wir ebenfalls später benützen werden, gibt uns Fig. 2; sie sowie zum Teil die frühere kurze morphologische Darstellung des Sees ist E. Richter's »Seestudien I.« entnommen.

I. Die Reduktion und die Ergebnisse der Registrierungen.

1. Die Reduktionsmethoden.

Durch das gleichzeitige Auftreten von Schwingungen verschiedener Periodendauer zeichnet der Limnograph Interferenzkurven, die ein ziemlich verwickeltes Kurvenbild darstellen.

Die Reduktion dieser Interferenzkurven auf die einzelnen darin enthaltenen Perioden ist jedoch kein so einfaches Problem als man beim ersten Anblick anzunehmen geneigt ist. Es gehört namentlich beim Vorhandensein mehrerer superponierter Wellenzüge eine gewisse praktische Übung dazu, um die einzelnen Kurven zu entziffern. Besitzt man Aufzeichnungen von verschiedenen Orten, so kann man die Periodendauer der einzelnen Seichesformen am sichersten und genauesten an jenen Beobachtungsstellen gewinnen, an denen sich eine Knotenlinie der nächsten Oberschwingung befindet. Wenn man jedoch, wie in Riva am Gardasee, auf Limnogramme einer einzigen, an einem Ende des Sees gelegenen Station angewiesen ist, so kann die Schwingungsdauer der einzelnen Wellen nur durch Entzifferung des manchmal sehr verwickelten Kurvenbildes gewonnen werden.

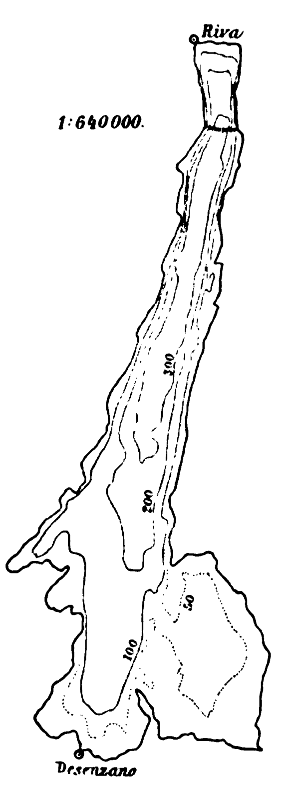


Fig. 2.

Bei der Superposition solcher Schwingungen gelten zunächst die physikalischen Gesetze der Interferenzerscheinungen und unter diesen speziell das Koexistenzprinzip der Schwingungen: Bei Superposition von Schwingungen verschiedener Periode behalten die einzelnen Komponenten ihre Periode bei; die resultierende Kurve stellt sich als die algebraische Summe der einzelnen Komponenten dar. Wie die Registrierungen des Limnographen von Riva zeigen, ist fast stets die Grundschwingung vorhanden, und zwar zeigt diese beinahe immer die größte Amplitude. Weitere Oberschwingungen besitzen eine kleinere Amplitude und vom Amplitudenverhältnis der einzelnen Schwingungen hängt in erster Linie die Gestalt der resultierenden Kurve ab. Tritt neben der Grundschwingung eine zweite

Schwingung mit sehr kleiner Amplitude auf, so zeigt sich beim Anblick der Kurve dies derart, daß die Maxima einen bald größeren, bald kleineren Abstand voneinander besitzen; die Kurve verliert ihr symmetrisches Aussehen. Auch in der Größe der Amplitude fallen Unregelmäßigkeiten auf, indem diese bald größer, bald kleiner als die Amplitude der reinen Schwingung ist.

Bei größerer Amplitude der Oberschwingungen zeigen sich die Maxima und Minima der einzelnen Wellen ebenfalls im Kurvenbild und diese erhält ein um so komplizierteres Aussehen, je mehr Oberschwingungen vorhanden sind.

Ich glaube, daß es nicht unnotwendig ist, im folgenden jene Methoden des näheren darzulegen, die angewendet wurden, um sichere und genaue Werte der Periodendauer der einzelnen Schwingungsformen zu erhalten.

Die ursprünglichste und einfachste Methode zur Ermittlung der Periode einer Komponente ist die, daß man als Länge der Periode den Abstand zweier zusammengehörigen Extreme nimmt. Superponieren sich nämlich Wellensysteme von verschiedener Periodenlänge, so werden aufeinanderfolgende zusammengehörige Maxima bald näher, bald weiter voneinander abstehen; aber als Werte eines solchen Intervalls von Maximum zu Maximum würden sich immer solche ergeben, die nicht allzu stark vom wahren Werte abweichen. Sie werden sich in einer bestimmten Folge um ihn herumgruppieren, so daß mit einiger Genauigkeit der wahre Wert einer Periode ermittelt werden kann. Daß dieser Methode große Mängel anhaften, ist wohl klar und sie darf nur insofern benützt werden, um einen ungefähren Wert einer Periode zu liefern. Sind Oberschwingungen nicht stark entwickelt, so kann man die Periode einer stets im Limnogramm deutlich sichtbaren Welle derart finden, daß man den Abstand zweier möglichst weit voneinander entfernten Extreme durch die Anzahl der dazwischenliegenden Perioden dividiert. Diese letztere Methode, die im folgenden sehr oft benützt wurde, liefert auch nur Werte, die noch um ein Beträchtliches vom wahren abweichen können; jedoch wird der Fehler, den man dabei begeht, um so kleiner sein, je größer die Anzahl der Extreme ist, welche zwischen den als Aus-

gangspunkte gewählten Extremen liegen. Der Fehler, welcher eventuell durch Nichtberücksichtigung möglicher Verschiebungen der Extreme durch sekundäre Komponenten auftreten kann, verteilt sich so auf eine große Anzahl von Wellen und wird dadurch für eine einzelne Welle sehr gering. Ein weiterer Mangel dieser Methode ist, daß bloß lange, ungestörte Seichesreihen benützt werden können und so nur ein kleiner Teil der Beobachtungen zur Periodenbestimmung ausgewertet werden kann.

Eine weitere, sich ziemlich gut bewährende Methode ist die Reduktion der Registrierungen an der Hand künstlich entworfener Interferenzkurven. Die früher angegebenen Methoden liefern ja für eine größere Anzahl von Beobachtungen ziemlich gute Mittelwerte, so daß man sich künstliche Interferenzkurven für verschiedene Amplituden und Phasenverschiebungen zeichnen kann. An der Hand solcher Kurven ist es dann öfters sehr leicht, die Periode einer Oberschwingung zu ermitteln. Besonders gut bewährte sich diese Methode an den Registrierungen von Riva bei den Superpositionen der Grundschwingung von zirka 43 Minuten und der ersten Oberschwingung von beiläufig 30 Minuten. Aus der Superposition dieser zwei Perioden, die sich fast wie 3:2 verhalten, ergibt sich nämlich eine Interferenzkurve, die sehr unsymmetrisch aussieht und die, falls die Oberwelle von 30 Minuten mit einigermaßen größerer Amplitude vorhanden ist, sich im Limnogramm durch ihr Aussehen sofort verrät. Da diese Schwingungen später für uns eine gewisse Rolle spielen, so gebe ich hier die künstlich entworfenen Interferenzkurven für zwei Wellen, die sich wie 3 : 2 verhalten, wieder, und zwar besitzen in der ersten Welle beide die gleiche Amplitude und dieselbe Phasenzeit; in der zweiten ist die Amplitude der kleineren Welle $^1/_2$mal, in der dritten $^1/_3$mal so groß wie die Amplitude der Hauptschwingung. In der zweiten und dritten Interferenzkurve beträgt der Phasenunterschied $^1/_4$ der Wellenlänge der kürzeren Welle (Fig. 3).

Ist eine Periode, sei es rechnerisch oder auf Reduktionswege, bereits genau bekannt, so kann man die Schwingungsdauer einer Oberschwingung errechnen, wenn man weiß, wie viel Schwingungen dieser unbekannten Welle auf eine

bestimmte Anzahl von Schwingungen der bereits bekannten Welle entfallen. Diese Zahl kann man durch den Anblick der

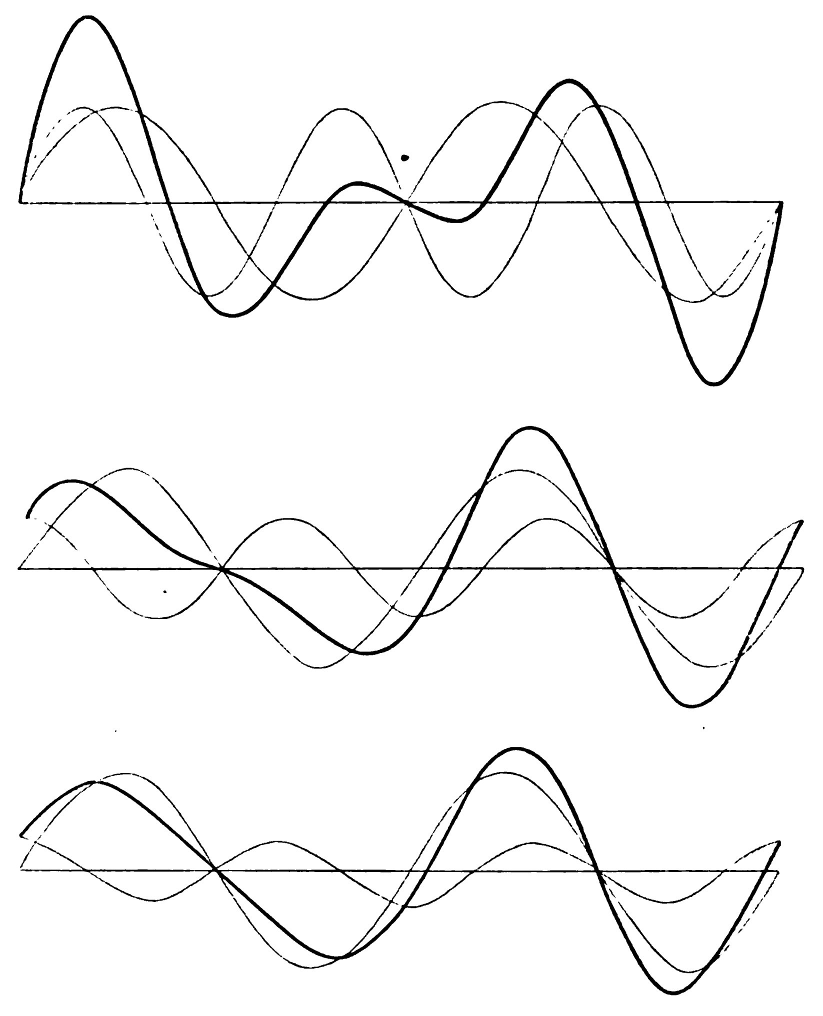


Fig. 3.

Superposition zweier solcher Wellenzüge sehr leicht aus symmetrischen Kurvenformen entnehmen; es kehrt nämlich nach einer bestimmten Zeit dieselbe Phase in den Schwingungen wieder, die, superponiert, das nämliche Kurvenbild geben wie

früher. Durch Abzählen der zu einer und jener zur anderen Schwingungsdauer gehörigen Maxima ergibt sich dann, wie viel Perioden der einen Welle auf die andere entfallen, und dadurch ist das Schwingungsverhältnis beider Wellen gegeben.

Die genauesten Werte für die einzelnen Komponenten einer Interferenzkurve liefert die sogenannte Restmethode. Dieselbe wurde von Chrystal bei den Aufzeichnungen der Seespiegelschwankungen des Loch Earn mit Erfolg angewendet und bereits früher habe ich sie in meiner Abhandlung: »Innsbrucker Föhnstudien II.« zur Kontrolle der nach anderen Methoden gefundenen Temperaturwellen benützt. Sie beruht auf Sätzen, die Nevander und Buys-Ballot zur Ermittlung von Perioden, denen eine Zahlenreihe unterworfen ist, aufgestellt haben. Das Prinzip dieser Verschiebungsmethode ist sehr einfach. Hätten wir z. B. eine einfache Sinuskurve gegeben, so ist es klar, daß, wenn wir eine Kopie dieser Kurve gegen die ursprüngliche Kurve um einen bestimmten Betrag verschieben, die Superposition beider Wellenzüge wieder eine Kurve ergibt, die dieselbe Periode besitzt wie die frühere. Verschieben wir jedoch weiter, so wird einmal ein Punkt kommen, bei welchem die Kurven sich durch Superposition gerade aufheben: ein Maximum entspricht einem Minimum und umgekehrt. Dies kann nur dann eintreten, wenn die Verschiebungsstrecke genau gleich der halben Schwingungsdauer der Sinuskurve ist.

Bei komplizierteren Kurven verhält es sich nun ganz ähnlich: ist eine solche Kurve durch Superposition mehrerer Wellenzüge von bestimmter Periodendauer entstanden, so können wir eine genaue Kopie dieser Kurve über die Originalkurve um einen Betrag verschieben, welcher gleich ist der halben Wellenlänge einer in der Kurve enthaltenen Periode. Addieren wir sodann die beiden gegeneinander verschobenen Interferenzkurven, so gibt die Superposition eine dritte Kurve, in welcher die Welle, um deren halbe Länge man die kopierte Kurve gegen die ursprüngliche verschoben hat, um so mehr verwischt erscheint, je richtiger man die Periodenlänge dieser Welle angenommen hat; in der Kurve bleiben bloß die anderen Perioden noch erhalten, welche dann wieder durch weitere Anwendung dieser Methode aus ihr eliminiert werden können.

Durch schrittweise Anwendung dieser Methode können so alle in einer Interferenzkurve enthaltenen Perioden ermittelt werden, vorausgesetzt, daß man einen ersten angenäherten Wert wenigstens einer vorhandenen Periode bereits kennt. Mathematisch läßt sich diese Methode einfach folgendermaßen darstellen.

Eine Interferenzkurve kann stets dargestellt werden durch eine Gleichung von der Form:

$$y = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t-\varphi_i) =$$

$$= A_1 \sin \frac{2\pi}{T_1}(t-\varphi_1) + A_2 \sin \frac{2\pi}{T_2}(t-\varphi_2) + \ldots$$

Bilden wir uns nun eine Kurve, indem wir diese um ein Stück α auf der Zeitachse t nach links verschieben, so lautet ihre Gleichung gegenüber demselben Koordinatenursprung wie früher:

$$y' = \sum_{1}^{n} {}_i A_i \sin \frac{2\pi}{T_i}(t-\varphi_i+\alpha) =$$

$$= A_1 \sin \frac{2\pi}{T_1}(t-\varphi_1+\alpha) + A_2 \sin \frac{2\pi}{T_2}(t-\varphi_2+\alpha) + \ldots$$

Superponieren wir nun diese zwei Interferenzkurven, so ergibt sich:

$$y+y' = \sum_{i=1}^{n} 2A_i \sin \frac{2\pi}{T_i}\left(t-\varphi_i+\frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\pi\alpha}{T_i} =$$

$$= 2A_1 \cos \frac{\pi\alpha}{T_1} \sin \frac{2\pi}{T_1}\left(t-\varphi_1+\frac{\alpha}{2}\right) +$$

$$+ 2A_2 \cos \frac{\pi\alpha}{T_2} \sin \frac{2\pi}{T_2}\left(t-\varphi_2+\frac{\alpha}{2}\right) + \ldots$$

Diese Kurve nennt Chrystal die »Restkurve in bezug auf die Größe α«. Sie enthält im allgemeinen alle Komponenten der ursprünglichen Kurve y. Wählen wir nun aber

$$\alpha = \frac{1}{2} T_1,$$

so wird beim ersten Gliede der Winkel $\frac{\pi\alpha}{T_1} = \frac{\pi}{2}$ und das erste Glied verschwindet, da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist. Die Restkurve in bezug auf $\frac{T_1}{2}$ erhält somit die Form:

$$y+y_1 = 2A_2 \cos\frac{\pi T_1}{2T_2} \sin\frac{2\pi}{T_2}(t-\varphi_2')+$$
$$+2A_3 \cos\frac{\pi T_1}{2T_3} \sin\frac{2\pi}{T_3}(t-\varphi_3')+\ldots$$

Die Kurve enthält die Komponente mit der Periode T_1 nicht mehr und bloß alle übrigen Perioden, die bereits früher in der Interferenzkurve enthalten waren.

Diese Methode hat sich praktisch an den Registrierungen der Limnogramme von Riva sehr gut bewährt und lieferte die genauesten Resultate. Einen angenäherten Wert einer in der Originalkurve enthaltenen Schwingung kann man stets nach den früheren Methoden mit einiger Übung sehr leicht ermitteln, während dann diese Methode durch sukzessive Anwendung unabhängig von diesem Werte die Periodendauer anderer in der Originalkurve enthaltener Wellen und manchmal sogar solcher, die man durch bloßen Anblick gar nicht als vorhanden vermuten würde, liefert. Man kann sogar den ersten bloß angenommenen Periodenwert nach folgender von Chrystal angegebener Reihenfolge von Anwendungen dieser Methode verbessern. Man wendet zuerst die Verschiebungsmethode in bezug auf den angenommenen Wert $T_1^{(1)}$ an; die Restkurve liefert sodann einen Wert $T_2^{(1)}$ für die zweite Welle, die in der Kurve enthalten ist. Sodann kehren wir zur Originalkurve zurück und wenden die Verschiebungsmethode in bezug auf diesen neugewonnenen Wert $T_2^{(1)}$ an.

Die Restkurve liefert sodann für die erste Welle einen genaueren Wert $T_1^{(2)}$, der sicher genauer ist als der bereits früher angenommene. Diesen Wert $T_1^{(2)}$ benützen wir nun wieder, um einen genaueren Wert $T_2^{(2)}$ aus der Originalkurve zu erhalten und so können wir die Methode sukzessive so lange fortsetzen, bis sich die Werte für T_1 und T_2 nicht mehr ändern. Diese Methode liefert wohl die sichersten und genauesten Werte; jedoch kann man sie bloß bei schön entwickelten Kurven anwenden, da sonst die Resultate ungenauer ausfallen können als mittels der anderen Methoden. Außerdem nimmt sie, auch wenn sie bloß zweimal angewendet wird, sehr viel

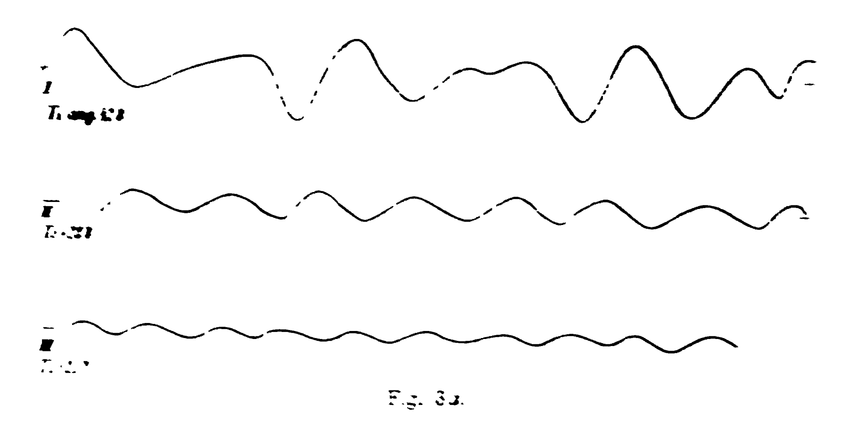


Fig. 32.

Zeit in Anspruch, so daß sie eher als Kontrollmethode angesehen werden kann als eine solche Methode, mit welcher man Jahre von Beobachtungen reduzieren soll. So wurde sie auch bei der Reduktion der Registrierungen von Riva nur dort benützt, wo wirklich schöne, besonders charakteristische Interferenzkurven sich zeigten und da wurde sie namentlich in jenen Fällen angewendet, in welchen eine sichere Ermittlung der Periodendauer der Welle von zirka 30 Minuten vorauszusehen war, da nämlich die Periode dieser Welle, trotzdem sie ziemlich oft auftrat, selten nach anderen Methoden genau ermittelt werden konnte. In nebenstehender Fig. 32 gebe ich ein Beispiel für die Anwendung der Restmethode auf die besonders hübschen Interferenzkurven vom 14. Februar 1908.

Kurve I stellt das Original dar; wendet man die Restmethode in bezug auf die Periode $T_1 = 42 \cdot 8$ Minuten an, so erhält man Kurve II, welche bereits beinahe einer reinen Welle entspricht; reduziert man jedoch diese Kurve nach $T_2 = 28 \cdot 8$ Minuten weiter, so bleibt noch eine Welle erhalten, welche eine Periode von 21·8 Minuten besitzt. Die Kurve I können wir uns somit als Superposition dreier Wellenzüge von 42·8, 28·8 und 21·8 Minuten Periodendauer vorstellen.

2. Die Ergebnisse der Registrierungen von Riva.

Hauptsächlich nach den im früheren dargelegten Methoden wurde das ganze zur Verfügung stehende Material der Limnographenaufzeichnungen von Riva bearbeitet. Bei den Wellen von längerer Dauer war das Ermitteln der wahren Schwingungsdauer nicht besonders schwer; anders verhält es sich bei Perioden höherer Nodalität, da diese, je höher die Knotenzahl der Welle ist, sich immer mehr einander nähern. Erschwert wird dies noch dadurch, daß bloß Registrierungen am Ende der Längsachse des Sees zur Verfügung standen. Man ist somit angewiesen, aus einer größeren Anzahl von Messungen Mittelwerte für einzelne Gruppenintervalle zu bilden und so angenähert gute Mittelwerte für Perioden höherer Nodalität zu ermitteln. Natürlich sind diese Mittelwerte um so genauer, je mehr Messungen ausgeführt wurden.

Die Registrierkurven zeigen, daß fast stets der See sich in schwingender Bewegung befindet. Nur wenige Stellen in den Diagrammen wurden gefunden, in denen man mit [illegible] feststellen konnte, daß der See in [illegible] war; es ist [illegible] das Vorhandensein der [illegible] der [illegible] Regel und das Fehlen derselben [illegible] zeichnet werden. [illegible] gung: [illegible] plitude [illegible]

Als eine [illegible] rungen [illegible] Wind setzt [illegible] tags [illegible] maximum [illegible]

gegen Abend zu einem angenehmen Seewind ab. Das Auftreten dieses regelmäßig wehenden Windes bewirkt vorerst, daß stets bei seinem Auftreten die Amplitude der Seiches zunimmt und manchmal fast das Doppelte des früheren Betrages erreicht. Andrerseits wird aber die Aufzeichnung mit zunehmender Intensität des Windes immer schlechter und öfters wird das ganze Kurvenbild total verwischt. Gewöhnlich muß man zufrieden sein, wenn man konstatieren kann, wie viel Wellen während dieser Störungszeit aufgetreten sind, um nicht eine Reihe von Perioden, die man zu vermessen bereits begonnen hat, zu beschließen.

Bei anderen Störungen, wie Stufen in den Kurven, Anschlagen des Apparates am oberen Ende, Trägheit des Schwimmers, wurde beim Reduzieren immer gewissenhaft darauf geachtet, daß nur jene Fälle benützt wurden, welche einigermaßen sichere und genaue Werte liefern konnten. Alle anderen wurden von der Vermessung ausgeschlossen und blieben unberücksichtigt. Dadurch beschränkte man sich willkürlich auf ein geringeres Material; dafür werden aber die gewonnenen Mittelwerte für die einzelnen Perioden mehr Sicherheit und Verläßlichkeit besitzen.

Im folgenden sind die Reduktionen in extenso Monat für Monat mitgeteilt, wobei stets die Störungstage weggelassen wurden.

In den folgenden Tabellen gibt die erste Kolonne den Tag des Monats, die zweite eine nähere Darstellung der Registrierkurve, die dritte enthält die Anzahl und die Werte der vermessenen Perioden, die vierte gibt unter *a* die maximale Amplitude der Seiches an jenem Tage in Millimeter an.

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
	November 1902		
5.	Anfang 12[h] mittags. $\varkappa_1+\varkappa_3$ starke Vibrationen, zeitweise Stufen.	$\varkappa_1(16) = 42\cdot9$.	—
6.	$\varkappa_1+\varkappa_3$ bis 4[h] 22[m] a., später eine Reihe $\varkappa_4$.	$\varkappa_1(23) = 42\cdot7$, $\varkappa_4(15) = 14\cdot7$.	17
22.	$\varkappa_1+\varkappa_3+\varkappa_6$ kleine Amplitude, zeitweise Stufen und Lücken.	$\varkappa_6(17) = 10\cdot4$.	—
23.	$\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3$ kleine Amplitude, Lücken.		—
24.	$\varkappa_1+\varkappa_3$, Amplitude zunehmend, Ora, dann $\varkappa_1+\varkappa_3+\varkappa_6$.	$\varkappa_3(22) = 22\cdot8$, $\varkappa_2(9) = 28\cdot7$.	—
25.	$\varkappa_1+\varkappa_2$, gut, dann $\varkappa_1+\varkappa_2$, später reine $\varkappa_1$.	$\varkappa_1(29) = 42\cdot4$, $\varkappa_2(6) = 28\cdot3$.	32
26.	$\varkappa_1$ mit Vibrationen, abnehmende Amplitude.	$\varkappa_1(31) = 42\cdot3$.	33
27.	$\varkappa_1+\varkappa_3$, weiter abnehmende Amplitude.	$\varkappa_1(29) = 42\cdot8$, $\varkappa_3(31) = 22\cdot6$ [25. November, 2[h] 46[m] a. bis 27. November, 7[h] 18[m] p. $\varkappa_1(90) = 43\cdot0$.	Abn. bis 7
28.	Deutliche $\varkappa_1+\varkappa_2$, Ora, $\varkappa_6$? später $\varkappa_2+\varkappa_3$, schlechte Zeichnung.	$\varkappa_1(16) = 42\cdot3$, $\varkappa_2(8) = 28\cdot6$.	—
29.	$\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3$, einzelne $\varkappa_6+7'$, dann reinere $\varkappa_1$.	$\varkappa_1(17) = 43\cdot0$.	—
30.	$\varkappa_1+\varkappa_4$, gut, später reine $\varkappa_1$.	$\varkappa_1(33) = 42\cdot7$.	—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
	Dezember 1902		
1.	$n_1 + n_4$? Niveau steigend, starke Ora, 0'.	$n_1(33) = 43 \cdot 2$.	–
2.	$n_1 + n_4$, gut, Amplitude zunehmend, Ora, $n_1 + n_3$, dann reine n_1.	$n_1(33) = 43 \cdot 0$, $n_4(27) = 14 \cdot 6$, $n_3(11) = 22 \cdot 0$.	30
3.	$n_1 + n_2$ geht über in n_1.	$n_1(33) = 42 \cdot 6$, R: ang. $42 \cdot 6$, $n_2 = 29 \cdot 4$.	41
4.	n_1 mit Vibrationen.	$n_1(33) = 42 \cdot 9$.	37
5.	n_1 schlechte Zeichnung, Oraunterbrechung.	$n_1(10) = 43 \cdot 1$, $n_1(9) = 43 \cdot 2$ [29. November, $11^h\,19^m$ a. bis 5. Dezember, $6^h\,14^m$ a.] $n_1(19) = 43 \cdot 0$.	28, 35
6.	n_1 schlechte Zeichnung, starke Ora, n_1 lauft weiter.	$n_1(10) = 42 \cdot 6$, $n_1(15) = 43 \cdot 1$.	—
7.	n_1 mit starker Vibration, starke Ora, später $n_1 + n_4$.	$n_1(30) = 43 \cdot 3$, $n_3(8) = 20 \cdot 6$.	—
8.	n_1, Amplitude abnehmend, teilweise Stufen, Ora, $n_1 + n_3$, später n_4.	$n_1(32) = 42 \cdot 9$, $n_3(12) = 21 \cdot 4$, $n_4(9) = 14 \cdot 3$.	·
9.	$n_1 + n_2 + n_3$, stellenweise Stufen, nachts Vibration, geht über in $n_1 + n_2$.	$n_1(33) = 42 \cdot 8$, $n_3(6) = 21 \cdot 4$, $n_2(9) = 28 \cdot 5$, $n_2(9) = 28 \cdot 5$. R: ang. $42 \cdot 8$, $n_2 = 28 \cdot 6$, $n_3 = 21 \cdot 6$.	
10.	$n_1 + n_2$, kleine Amplitude, später $n_4 + n_6$.	$n_2(9) = 28 \cdot 6$, $n_6(16) = 9 \cdot 1$, $n_4(9) = 15 \cdot 2$, $n_6(22) = 10 \cdot 0$ [6. Dezember, $2^h\,59^m$ p. bis 10. Dezember, $2^h\,54^m$ p. $n_1(117) = 43 \cdot 0$].	—
11.	Stufen, $n_1 + n_5$; n_6, n_5 kleine Amplitude.	$n_6(12) = 10 \cdot 7$, $n_6(12) = 10 \cdot 0$, $n_4(6) = 15 \cdot 3$.	

12.	n_2+n_6, später n_1+n_3, kleine Amplitude.	$n_6(15)=10\cdot3$, $n_4(10)=15\cdot2$, $n_6(17)=10\cdot4$, $n_6(23)=9\cdot6$, $n_2(5)=28\cdot2$.	
13.	n_1+n_6, später n_1+n_3.	$n_1(31)=43\cdot3$, $n_3(20)=21\cdot6$.	—
14.	n_1+n_2, Vibrationen.	$n_1(32)=43\cdot1$.	—
15.	n_1+n_2, vereinzelt n_3, kleine Amplitude abnehmend, abends wieder zunehmend.	$n_1(33)=43\cdot2$, $n_3(20)=21\cdot6$.	—
16.	n_1+n_2, später n_6+7', Ora.	$n_2(8)=28\cdot0$, $n(9)=7\cdot1$, $n(11)=7\cdot2$ [13. Dezember, $1^h\ 26^m$ a. bis 16. Dezember, $4^h\ 56^m$ a.] $n_1(105)=43\cdot1$.	—
17.	n_1+n_3+7', zunehmende Amplitude.	$n_1(27)=43\cdot5$, $n_3(13)=22\cdot5$, $n_4(8)=14\cdot3$, $n_6(7)=9\cdot7$.	—
18.	n_1+n_6, Stufen, zunehmende Amplitude, 4' Wellen, Ora, Niveau fallend.	$n_1(33)=42\cdot7$.	92
19.	Reinere n_1, später n_1+n_4, abends n_1+n_2, Nordföhn, Niveau fallend.	$n_1(33)=42\cdot6$, $n_4(13)=14\cdot5$, $n_5(8)=12\cdot6$, $n_2(6)=29\cdot1$ [17. Dezember, $4^h\ 9^m$ a. bis 20. Dezember, 1^h p. $n_1(113)=42\cdot9$].	—
20.	Niveau steigt, n_1+n_2, Unterbrechung, Nordföhn.	$n_1(18)=42\cdot8$, $n_2(14)=27\cdot8$.	—
21.	Unterbrechung, dann n_1+n_6, abends n_1+n_2, föhnig.	$n_1(20)=42\cdot6$, $n_2(11)=28\cdot3$.	28
22.	n_1, teilweise Lücken, windig, später reine n_1.	$n_1(33)=42\cdot6$, $n_2(6)=28\cdot4$.	—
23.	n_1 fast rein, Niveau steigend, starke Vibration, n_1+n_2, Nordwind$_3$.	$n_1(33)=42\cdot7$.	—
24.	Fast reine n_1, dann n_1+n_3, Wind nachgelassen, Amplitude abnehmend.	$n_1(33)=43\cdot0$, $n_3(16)=22\cdot3$.	—
25.	$n+n_2+n_4$, Vibration, 3' Wellen, n_1+n_2, Amplitude abnehmend, dann zunehmend.	$n_1(32)=43\cdot4$, $n_2(14)=28\cdot3$, $n_4(21)=14\cdot8$, $n_2(15)=28\cdot7$, $n_4(21)=14\cdot8$.	45

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
26.	Zuerst fast reine n_1, schwache Ora, n_1+n_4+7', gut.	$n_1(33) = 42\cdot6$, $n_6(6) = 9\cdot7$, $n(27) = 11\cdot1$ vielleicht n_5+n_6?	—
27.	n_1 wieder reiner, Stufen.	$n_1(33) = 43\cdot1$.	—
28.	n_1 mit Stufen, mittags Unterbrechung.	$n_1(15) = 43\cdot0$ [21. Dezember, $9^h 5^m$ a. bis 28. Dezember, $10^h 40^m$ a. $n_1(237) = 42\cdot9$].	zuletzt 20
29.	n_1+n_6, dann reinere n_1, abends Vibrationen, Amplitude zunehmend.	$n_1(20) = 43\cdot2$, $n_6(17) = 10\cdot3$.	—
30.	n_1+n_6, später stark dichrot., $n_2+n_3+n_4$, abends n_1+n_2.	$n_1(9) = 42\cdot8$, $n_2(9) = 28\cdot1$, $n_4(12) = 15\cdot0$.	—
31.	n_1+n_2 unrein. mittags Niveau steigend, schwache Ora, n_1+n_2 geht über in n_1.	$n_1(13) = 42\cdot8$, $n_2(19) = 28\cdot9$.	28
	Jänner 1903		
1.	n_1 fast rein, Vibrationen, später n_1+n_2.	$n_1(33) = 43\cdot1$, $n_2(10) = 29\cdot1$, R: ang. $43\cdot1$, $n_2 = 28\cdot4$, $n_3 = 22\cdot4$, $n_5 = 13\cdot3$.	—
2.	n_1+n_3 fast den ganzen Tag durch, abends $n_1+n_2+n_3$.	$n_3(17) = 22\cdot7$.	—
3.	$n_1+n_2+n_3$, später 7' Wellen, abends wieder reinere n_1 mit Stufen.	$n_1(12) = 43\cdot0$, $n_2(8) = 28\cdot1$, $n_4 = 16\cdot3$, $n_1(25) = 43\cdot1$, $n_2(14) = 28\cdot9$, $n_3(27) = 22\cdot3$, $n(25) = 7\cdot1$, $n(20) = 10\cdot1$, $n(15) = 12\cdot5$.	--

4	n_1 mit Stufen, später $n_1 + n_4$, dann mehr $n_1 + n_3$.	$n_1(14) = 15 \cdot 3$, $n_3(14) = 22 \cdot 4$.	37
5	n_1 etwas reiner, teilweise n_4.	$n_1(57)$ $43 \cdot 0$.	37
6	n_1 teilweise Stufen, dann schöne n_1.	$n_1(33) = 42 \cdot 9$.	32
7	n_1 rein, später vielleicht mit n_2.	$n_1(34) = 41 \cdot 8$.	32
8	n_1 rein, teilweise n_2 sichtbar, abends $n_1 + n_4$.	$n_1(34) = 42 \cdot 7$, $n_4(17) = 15 \cdot 5$.	30
9	$n_1 + n_4$, später reinere n_1	$n_1(34) = 43 \cdot 2$, $n_4(21) = 15 \cdot 4$, $n_5(19) = 13 \cdot 8$.	—
10	$n_1 + n_4$, Wellen von 10', Amplitude abnehmend.	$n_1(32) = 43 \cdot 4$, R: ang. $43 \cdot 4$, $n_3 = 22 \cdot 0$, $n_4 = 14 \cdot 2$.	Abnahme bis 12
11	$n_1 + n_3$ bis 3h p., dann $n_1 + n_2$ Amplitude zunehmend.	$n_1(32) = 43 \cdot 8$, $n_3(11) = 20 \cdot 1$, $n_3(12) = 20 \cdot 4$.	36
12	n_1 Niveau steigend, Wind.	$n_1(32) = 43 \cdot 2$, R: ang. $43 \cdot 2$, $n_2 = 29 \cdot 0$, ang. $29 \cdot 0$, $n_1 = 43 \cdot 1$.	49
13	$n_1 + n_2$, Wind, später deutliche $n_1 + n_2$.	$n_1(33) = 43 \cdot 4$, $n_2(9) = 28 \cdot 9$, $n_3(7) = 20 \cdot 7$.	—
14	n_1, dann $n_1 + n_2$, morgens Wind, abends $n_1 + n_2 + n_3$.	$n_1(10) = 43 \cdot 3$ [vom 4. Jänner, 7h 3m a. bis 14. Jänner, 7h 48m a. $n_1(336) = 42 \cdot 98$], $n_3(8) = 22 \cdot 6$, $n_2(8) = 28 \cdot 5$.	14
15	Teilweise Stufen, Wellen von 7·5', später $n_3 + n_4$.	$n(15) = 7 \cdot 5$, $n(10) = 18 \cdot 3$, $n_2(8) = 22 \cdot 6$.	—
16	n_1 mit Stufen, zunehmende Amplitude, starke Ora.	$n(11) = 7 \cdot 73$, $n_3(10) = 9 \cdot 9$, $n_1(17) = 43 \cdot 1$.	49
17	$n_1 + n_2$ gute Zeichnung.		—
18	$n_1 + n_2$ mit Lücken, zunehmende Amplitude, Niveau [illegible]	$n_1(33) = 42 \cdot 9$, R: ang. $43 \cdot 0$, $n_3 = 22 \cdot 7$.	16
19	n_1 später [illegible] eine n_2 mit kleiner Amplitude.	$n_1(19) = 43 \cdot 5$, $n_2(5) = 28 \cdot 3$ [vom 16. Jänner, 11h 46m a. bis 19. Jänner, 1h 47m p. $n_1(103) = 43 \cdot 1$].	7

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
20.	n_1+n_2, kleine Amplitude, aber deutlich.	$n_1(33) = 43\cdot0$, $n_2(10) = 28\cdot3$.	—
21.	$n_1+n_2+n_3$ Vibrationen.	$n_1(16) = 43\cdot0$, $n_1(12) = 43\cdot9$.	—
22.	n_2+n_3, Vibrationen, später n_2 mit kleiner Amplitude.	$n_2(17) = 29\cdot7$.	—
23.	Komplizierte Schwingungen, 10′, n_2+n_4 schwer zu bestimmen.	$n_4(5) = 14\cdot8$.	—
24.	n_2 fast rein, später mit n_3, 10′ und 7′.	$n_2(24) = 26\cdot7$.	—
25.	$n_1+n_2?+n_3$ zunehmende Amplitude.	$n_1(35) = 43\cdot0$, $n_3(16) = 20\cdot4$.	16
26.	$n_1+n_3?$, später sichere n_2, gute Zeichnung.	$n_1(33) = 42\cdot99$, $n_3(20) = 23\cdot0$, R: ang. $T_2 = 28\cdot6$ ergab $T_1 = 42\cdot6$ und $T? = 16\cdot6$.	35
27.	Fast reine n_1, Amplitude abnehmend.	$n_1(33) = 43\cdot1$.	32
28.	n_1+n_4, Amplitude abnehmend, zuletzt $a = 12$, Stufen.	$n_1(29) = 42\cdot9$ [24. Jänner, $10^h\ 55^m$ p. bis 28. Jänner, $8^h\ 44^m$ p. $n_1(131) = 43\cdot0$], $n_4(31) = 15\cdot4$.	—
29.	Zuerst n_1 unklar mit 10′ Schw., später n_1 deutlicher.		—
30.	$n_1+n_2+n_3$, Amplitude wieder abnehmend, $a_{min} = 7$, Stufen, Ora.	$n_1(37) = 43\cdot1$, $n(16) = 8\cdot8$, $n_2(5) = 29\cdot6$.	16
31.	Störung, $n_1+10'+7'$, kleine Amplitude, Stufen.		—
	Februar 1903.		
1.	$n_1+n_2+n_3+10'$, gute Zeichnung, aber kompliziert.	$n_2(17) = 28\cdot8$, $n_4(35) = 14\cdot0$.	—

2.	n_1+10', sehr gut, später n_1+n_4 reiner, abends Vibrationen, Amplitude zunehmend.	$n(28) = 9\cdot 9$, $n(17) = 13\cdot 6$, $n_1(13) = 43\cdot 1$.	—
3.	n_1, Vibrationen, Amplitude abnehmend bis $a = 9$.	$n_1(32) = 41\cdot 8$, $n_3(8) = 22\cdot 6$.	30
4.	Sehr kompliziert, $n_1+n_2+n_3+n_4$, sehr kleine Amplitude, später reinere n_2.	$n_2(9) = 29\cdot 0$.	—
5.	n_1+n_2, später n_1+n_4, dann zunehmende Amplitude.	$n_1(5) = 41\cdot 5$, $n_4(17) = 15\cdot 7$.	—
6.	n_1+n_2, sehr gut, Amplitude zunehmend.	$n_1(37) = 43\cdot 2$, R: $n_1 = 43\cdot 2$ ang., $n_2 = 28\cdot 7$.	20
7.	Abnehmende Amplitude bis $a = 8$, n_1 rein, dann n_4, später n_1, Stufen.	$n_1(12) = 41\cdot 7$, $n_4(16) = 16\cdot 0$.	—
8.	n_1 mit plurinodalen, kleine Amplitude und Stufen.		—
9.	Zuerst n_1 mit Stufen und Lücken, dann hübscher, Amplitude zunehmend.	$n_1(23) = 42\cdot 6$, $n_3(15) = 20\cdot 1$.	51
10.	n_1 große Amplitude, Stufen. reine n_1, Amplitude abnehmend.	$n_1(33) = 43\cdot 0$.	70
11.	n_1 fast rein, später n_1+n_2, Ora.	$n_1(33) = 43\cdot 0$.	—
12.	n_1 fast rein, Ora, Amplitude wieder zunehmend.	$n_1(33) = 43\cdot 0$, $n(7) = 11\cdot 3$.	47
13.	n_1+10', teilweise Stufen, später reinere n_1+n_2.	$n_1(33) = 42\cdot 5$, $n(27) = 9\cdot 1$.	—
14.	n_1+n_2, schön, Ora, n_1+n_2 hält an.	$n_1(20) = 43\cdot 1$, R: ang. $n_1 = 43\cdot 1$, $T_2 = 28\cdot 6$, $T_3 = 20\cdot 3$ [9. Jänner, $7^h\,47^m$ a. bis 14. Jänner, $2^h\,22^m$ p. $n_1(177) = 42\cdot 9$].	—
15.	n_1+10', Ora, Stufen, zunehmende Amplitude.	$n_1(29) = 42\cdot 5$, $n_4(15) = 15\cdot 6$.	—
16.	n_1 mit Stufen, starke Ora, Amplitude nimmt zu.	$n_1(11) = 42\cdot 8$.	49
17.	n_1+? schlechte Zeichnung.		—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
18.	n_1 mit Lücken, 10′.	$n_1(26) = 43\cdot3$.	—
19.	n_1 mit Stufen, später reiner.		—
20.	$n_1+n_2+n_3$, Vibrationen, kleine Stufen, 10′.	$n_1(34) = 42\cdot9$.	22
21.	n_1+n_3, Vibrationen, Niveau fallend, Amplitude nimmt zu, Niveau auch.	$n_1(19) = 43\cdot2$.	—
22.	n_1 rein, dann n_1+10', Vibrationen.	$n_1(4) = 41\cdot6$, $n(6) = 9\cdot1$.	—
23.	Starke Ora, Uhr funktioniert nicht, später wieder n_1.		—
24.	n_1 mit starken Vibrationen, 8 bis 11^h a. Niveaufall, Arco, 9 bis $10^h\,30^m$ a. Regen, NW_5, nachmittags Niveauanstieg.	$n_1(34) = 43\cdot0$.	36
25.	n_1 mit Stufen, Amplitude abnehmend, 7′ Wellen.	$n_1(27) = 43\cdot1$.	—
26.	n_1+n_3, Ora, Amplitude zunehmend, kleine Stufen.	$n_1(22) = 43\cdot5$, $n_3(11) = 22\cdot4$.	—
27.	n_1 mit Stufen, dann fast rein, später Ora und Vibrationen.	$n_1(33) = 42\cdot3$.	39
28.	n_1 Vibrationen halten an, 7′ Wellen schön.	$n_1(6) = 43\cdot5$, $n(45) = 7\cdot3$.	—
	März 1903		
1.	Dichrote n_1+n_4, mittags Ora, seit 5^h p. wieder n_1+n_3.	$n_1(14) = 43\cdot2$, $n_4(37) = 15\cdot4$, $n_1(8) = 43\cdot1$, $n_4(18) = 15\cdot0$.	25

2.	n_1 fast rein, jedoch kleine Stufen, Ora seit Mittag, starke Vibration, 10′, sehr nett.	$n_1(18) = 42\cdot5$, $n_1(15) = 43\cdot6$, $n(16) = 9\cdot7$.	—
3.	$n_1+n_2+n_3$, nicht besonders gute Zeichnung.	$n_2(13) = 28\cdot6$, $n_3(7) = 22\cdot0$, $n_3(5) = 22\cdot6$.	—
4.	$n_1+n_2?+n_3$, später reinere n_1.	$n_1(27) = 42\cdot8$, $n_3(11) = 19\cdot7$.	—
5.	n_1 fast rein, Amplitude abnehmend.	$n_1(32) = 42\cdot9$.	24
6.	n_1 fast rein, kleine Stufen, später n_1+n_2, Dampferwellen: 1·3′.	$n_1(33) = 43\cdot0$, $n_2(9) = 28\cdot6$ [4. März, $4^h 30^m$ a. bis 6. März, $11^h 54^m$ p. $n_1(94) = 43\cdot0$].	—
7.	Vibrationen, schlechte Zeichnung, später gute, n_1+n_2.	$n_2(9) = 28\cdot3$, $n_2(9) = 28\cdot7$.	—
8.	n_2, dann Unterbrechung, Vibrationen 1·3′.		—
9.	Schlechte Zeichnung, n_2, starke Ora, Vibrationen = 62 *mm*.	$n_2(6) = 29\cdot0$, $n_2(14) = 29\cdot5$.	—
10.	n_2, aber nicht gut ausgesprochen, kleine Amplitude, Ora.		—
11.	Morgens n_1 mit kleiner Amplitude, Ora stark, dann n_1+n_2.	$n_1(13) = 43\cdot4$, $n_2(11) = 27\cdot9$.	—
12.	n_1, vor der Ora n_1+n_2, Ora sehr stark.	$n_1(23) = 43\cdot0$.	15
13.	n_1 mit kleiner Amplitude, Stufen, später n_1+n_2.	$n_1(33) = 42\cdot8$, $n_2(9) = 28\cdot2$.	—
14.	n_1, Zeichnung nicht gut, später Ora und $n_1+n_2+n_3$.	$n_1(33) = 42\cdot7$, $n_3(8) = 21\cdot5$, $n_3(9) = 22\cdot3$.	—
15.	n_1 fast rein, Ora, $n_1+n_2+n_3$.	$n_1(32) = 42\cdot9$, $n_3(14) = 21\cdot2$.	—
16.	n_1, schön, später Ora, n_1+n_2.	$n_1(33) = 43\cdot1$ [12. März, $8^h 29^m$ a. bis 16. März, $10^h 20^m$ p. $n_1(155) = 43\cdot2$].	17
17.	Zeichnung schlecht, n_1+n_2.	$n_1(8) = 43\cdot6$, $n_2(9) = 28\cdot7$.	—
18.	Zeichnung noch immer schlecht, n_2+n_4 nicht schlecht markiert.	$n_2(8) = 28\cdot6$, $n_4(8) = 14\cdot9$.	—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
19.	Nicht gute Zeichnung, n_1+n_2 geht über in n_1, Ora sehr stark.	$n_1(28) = 43 \cdot 2$, $n_2(18) = 28 \cdot 9$, R: ang. $n_1 = 43 \cdot 2$ ergab $n_2 = 28 \cdot 6$.	—
20.	n_1+n_4, Ora, dann schlechte Zeichnung, später n_1+n_2.	$n_4(15) = 15 \cdot 4$.	—
21.	Fast ohne Schwankungen.		—
22.	n_1+n_2, beginnt mit kleiner Amplitude.	$n_1(31) = 43 \cdot 0$, $n_2(15) = 29 \cdot 1$.	8
23.	n_1+n_2, manchmal n_3, Ora, kleine Amplitude, steigendes Niveau.	$n_1(33) = 42 \cdot 7$, $n_2(18) = 28 \cdot 6$, R: ang. $n_1 = 42 \cdot 7$ ergab $n_2 = 28 \cdot 8$.	10
24.	n_1 fast rein, später n_1+n_2.	$n_1(28) = 42 \cdot 8$, $n_2(6) = 29 \cdot 0$, R: ang. $n_1 = 42 \cdot 8$ ergab $n_2 = 28 \cdot 4$ [22. März, $1^h\,47^m$ a. bis 24. März, $8^h\,13^m$ p. $n_1(93) = 42 \cdot 9$].	—
25.	n_1+n_3, wenige Oszillationen, aber deutlich, dann Ora, schlechte Zeichnung.	$n_3(5) = 21 \cdot 8$, $n_1(13) = 42 \cdot 8$.	—
26.	Anfang, Zeichnung schlecht, dann Ora, n_1+n_5.	$n_1(16) = 43 \cdot 5$, $n(7) = 9 \cdot 7$.	27
27.	Stufen, $n_1+?$, komplizierte Kurve.	$n(11) = 11 \cdot 8$, $n(9) = 13 \cdot 1$.	—
28.	$n_1+n_3+n_4$, große Amplitude, aber schwierig.	$n_1(32) = 42 \cdot 6$, $n_2(24) = 21 \cdot 3$.	30
29.	$n_1+?$ Stufen.		—
30.	Unterbrochen. Ora, später n_1+n_3 oder n_4?	$n_1(10) = 43 \cdot 1$.	—
31.	n_1+n_4? Sehr starke Ora, Auftreten von n_1+n_2.		—

April 1903

1.	n_1, teilweise schlechte Zeichnung, später dichrote Schwankungen, nachmittags Ora.	$n_1(32) = 42 \cdot 9$, $n_3(8) = 21 \cdot 5$.	10
2.	n_1, fast rein, starke Ora, Vibrationen = 32 *mm*, später n_1+n_2.	$n_1(33) = 42 \cdot 9$.	12
3.	n_1, fast rein, starke Ora, Vibrationen = 18 *mm*, später n_1+n_2.	$n_1(32) = 42 \cdot 8$, $n_2(9) = 28 \cdot 8$.	14
4.	n_1+n_2, gut, starke Ora, Vibrationen = 32 *mm*.	$n_1(32) = 42 \cdot 7$, $n_2(3) = 28 \cdot 4$.	24
5.	n_1, ziemlich rein, Stufen, Ora, dann n_1+n_5, undeutlich.	$n_1(33) = 42 \cdot 6$, $n(18) = 9 \cdot 5$.	35
6.	n_1, dann n_1+n_3 und später n_1+n_2.	$n_1(32) = 42 \cdot 8$, $n_3(8) = 21 \cdot 5$.	28
7.	n_1+n_3, abnehmende Amplitude, 10′, kleine Amplitude, Ora, n_1 noch deutlich.	$n_1(32) = 43 \cdot 3$, $n(13) = 9 \cdot 8$, $n(6) = 10 \cdot 1$, $n_3(5) = 20 \cdot 6$.	23
8.	Zunehmende Amplitude, Ora stark, n_1, öfters n_1+n_2.	$n_1(33) = 42 \cdot 9$, $n_2(5) = 27 \cdot 4$, $n_2(15) = 28 \cdot 7$.	32
9.	Wieder abnehmende Amplitude, $n_1+n_2+n_3$, Ora, n_1 bis $9^h\ 57^m$ p., dann n_3 fast rein.	$n_1(30) = 43 \cdot 0$, $n_3(7) = 21 \cdot 7$ [1. April, $1^h\ 6^m$ a. bis 9. April, $9^h\ 57^m$ p. $n_1(297) = 43 \cdot 0$].	31
10.	n_1+n_3, kleine Amplitude, Vibrationen, Wellen 2 bis 3′ deutlich, n_1+n_2, geht in n_1 über.	$n_3(10) = 21 \cdot 7$, $n_2(6) = 28 \cdot 8$.	12
11.	n_1+10′+3′, n_1 stets deutlich, Ora stark, zunehmende Amplitude, n_1+n_2.	$n_1(38) = 43 \cdot 2$.	19
12.	n_1, zuerst mit Stufen, dann reiner, Ora.	$n_1(33) = 42 \cdot 7$.	13
13.	n_1, bis $3^h\ 57^m$ p. durch starke Ora (90 *mm*) unterbrochen, zunehmende Amplitude.	[10. April, $8^h\ 7^m$ p. bis 13. April, $3^h\ 51^m$ p. $n_1(94) = 43 \cdot 2$].	—
14.	Sturm, $11^h\ 10^m$ a. Ora-Einsatz gut (72 *mm*).		—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
15.	n_1, beginnt mit kleiner Amplitude, 10', starke Ora (45 *mm*).	$n_1(33) = 42 \cdot 7$.	15
16.	Starke Ora, Unterbrechung, zuerst n_1+n_3, zuletzt n_1+n_2 bei Wind.	$n_2(5) = 20 \cdot 4$.	—
17.	Früh Niveaufall, n_1, mittags wieder Fall, starker Wind, 2 bis 3' Wellen.	$n_1(12) = 43 \cdot 5$.	31
18.	n_1 mit Vibrationen, fast rein.	$n_1(33) = 43 \cdot 0$.	28
19.	n_1, fast rein, später n_1+n_2, Amplitude abnehmend.	$n_1(33) = 42 \cdot 7$.	21
20.	n_1, vormittags starke Ora.	$n_1(22) = 42 \cdot 8$, [17. April, $3^h 25^m$ p. bis 20. April, $4^h 21^m$ p. $n_1(102) = 42 \cdot 9$].	—
21.	Stufen, Ora sehr stark (90 *mm*), n_1+n_2.	$n_2(5) = 28 \cdot 8$.	—
22.	Unterbrechung. n_1, seit 8^h p. 1·3' Wellen.	$n_1(21) = 42 \cdot 9$.	35
23.	$n_1+n_2+n_3$, 3' Wellen, gut.	$n_1(28) = 43 \cdot 0$, $n(10) = 2 \cdot 6$, $n(10) = 2 \cdot 4$, $n(25) = 9 \cdot 6$.	62
24.	Unterbrechung, Ora, Stufen, n_1 seit Mittag, n_1+n_2.	$n_1(12) = 42 \cdot 8$, $n_2(9) = 28 \cdot 8$.	—
25.	Stufen, n_1+10', Ora, abends n_1+n_2.	$n_1(24) = 42 \cdot 9$, *R*: ang. $n_1 = 42 \cdot 9$ ergab $n_2 = 28 \cdot 6$.	23
26.	n_1+n_4, aber gleich Unterbrechung. Ora (25 *mm*).	$n_4(4) = 14 \cdot 7$.	—
27.	Ora-Unterbrechung.		—
28.	n_1 wenig, Ora-Unterbrechung, schwache $n_1+n_3+n_4$.		—

29.	Unterbrechung. n_1+10', Ora, n_1+7', Amplitude zunehmend, n_1+n_3.	$n(10) = 10\cdot3$, $n(17) = 7\cdot4$, $n_3(7) = 21\cdot8$.	32
30.	n_1 mit Stufen, n_1+n_4 mit Ora.	$n_1(48) = 43\cdot2$.	27
	Mai 1903		
1.	n_1, Stufen, später n_1+10'.	$n_1(14) = 43\cdot7$, $n(6) = 10\cdot5$.	—
2.	n_1+n_2+10', Stufen, später n_1+3' Wellen.	$n_1(14) = 43\cdot1$, $n_2(9) = 28\cdot9$, $n(11) = 2\cdot9$, $n(8) = 2\cdot7$, $n(33) = 3\cdot0$.	—
3.	n_1+3', gut, später reinere n_1, Niveau steigend, n_1+n_2.	$n(56) = 3\cdot0$, $n_1(19) = 43\cdot1$.	18
4.	n_1, Amplitude zunehmend.	$n_1(32) = 43\cdot6$.	50
5.	Niveau steigend, n_1+n_2, mittags Unterbrechung, dann wieder $n_1+n_2+n_3$.	$n_1(15) = 43\cdot4$, $n_1(15) = 42\cdot5$.	—
6.	n_1 mit Stufen, n_1+9'.	$n_1(11) = 43\cdot3$, $n(9) = 9\cdot1$, $n(5) = 9\cdot1$.	—
7.	n_1 mit Stufen, deutliche n_1+9', Unterbrechung.	$n(10) = 8\cdot8$.	—
8.	Unterbrechung, dann n_1+9', Niveau steigend, n_1+n_3.	$n_1(22) = 42\cdot9$, $n_3(7) = 21\cdot8$.	46
9.	n_1 bis Mittag, Ora-Unterbrechung, schöner Einsatz.	$n_1(17) = 42\cdot6$.	22
10.	Vibrationen, n_1, teilweise Stufen, dann n_1+n_2, Oraeinsatz schön.	$n_2(12) = 29\cdot0$, $n_1(32) = 42\cdot8$.	—
11.	n_1, bis 9^h a. Stufen, Unterbrechung.	$n_1(12) = 42\cdot9$.	—
12.	Unterbrechung, dann n_1+10', Stufen.		—
13.	n_1+8', n_1 seit Mittag.	$n_1(15) = 43\cdot2$, $n(16) = 8\cdot8$.	—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
14.	n_1 mit Stufen bis 8^h p., bei Ora Anstieg und Vibration.	$n_1(28) = 42 \cdot 9$.	—
15.—16.	Unterbrechung, undeutlich und gestört.		—
17.	n_1, Ora, n_1+n_2? Oraeinsatz sehr gut, n_4!	$n_4(23) = 14 \cdot 3$.	—
18.	n_1+n_4, 8' Wellen, n_1 mit Stufen.	$n_1(19) = 42 \cdot 5$.	9
19.	n_1, teilweise Stufen, dann bei Ora zunehmende Amplitude, n_1+n_2.	$n_1(32) = 42 \cdot 8$.	17
20.	n_1, bis Mittag Ora-Unterbrechung, n_1+n_2 bei Ora-Auftritt.	$n_1(15) = 42 \cdot 3$.	—
21.—25.	Unterbrechung.		—
26.	Abends n_1+n_2.	$n_2(12) = 29 \cdot 2$.	—
27.	$n_1+n_2+n_3$, kleine Amplitude.		—
28.	n_1 mit Stufen, später n_1+n_2.	$n_2(6) = 29 \cdot 0$.	—
29.—31.	Schlechte Registrierung.		—
	Juni 1903		
1.	Unterbrechung, später n_1+n_3.	$n_3(4) = 22 \cdot 6$.	—
2.	n_1, kleine Amplitude, Oraeinsatz gut, 9'.		—
3.	$n_1+n_2+n_3$, nicht besonders gut.	$n_3(6) = 22 \cdot 1$, $n_3(7) = 22 \cdot 7$.	—

4.	n_1, Niveau steigend, Ora.	$n_1(32) = 43 \cdot 1$.	**100**
5.	n_1 mit Stufen, bei Ora Niveausteigerung, Amplitude abnehmend, n_1+n_2.	$n_1(32) = 42 \cdot 9$.	28
6.	n_1 bis 11^h a., Ora (65 *mm*), seit 6^h p. wieder n_1, deutliche n_1+n_2.	$n_1(15) = 42 \cdot 5$, $n_2(10) = 28 \cdot 3$, $n_1(7) = 43 \cdot 1$.	—
7.	n_1 bis 10^h a., Orablatt sehr schön (120 *mm*), deutliche n_1+n_2.	$n_1(14) = 42 \cdot 9$, $n_2(10) = 27 \cdot 8$, $n_2(9) = 28 \cdot 7$.	—
8.	$n_1+n_2+n_3$ ganz deutlich, später n_3 sehr gut.	$n_2(12) = 28 \cdot 9$, $n(7) = 10 \cdot 4$, $n_4(7) = 14 \cdot 6$, $n_3(10) = 21 \cdot 5$.	—
9.	n_1+n_2 sehr deutlich, 1·3′ Wellen.	$n_1(20) = 42 \cdot 8$, $n_2(37) = 29 \cdot 1$.	12
10.	Stufen n_1+n_4 deutlich, kleine Amplitude, Vibrationen.	$n_4(12) = 14 \cdot 7$.	—
11.—13.	Unterbrechung.		—
14.	n_1+n_3 schön, später teilweise Stufen.	$n_1(16) = 43 \cdot 0$, $n_3(12) = 22 \cdot 1$, $n_3(12) = 21 \cdot 9$.	—
15.	Unterbrechung. Ora sehr stark, nur wenige n_1+n_3.		—
16.	n_1+n_3+10', Unterbrechung, Ora (210 *mm*).	$n_3(6) = 22 \cdot 8$.	—
17.	Unterbrechung, Ora sehr schön (82 *mm*), n_1+n_4 gut.	$n_4(11) = 15 \cdot 7$.	—
18.	n_1+n_4, Ora stark.		—
19.	Stufen n_1+10', dann $n_1+7'+10'$, Ora, n_1+n_3.	$n(13) = 10 \cdot 1$, $n(21) = 8 \cdot 0$, $n_3(8) = 21 \cdot 1$.	—
20.	Stufen n_3, Oraeinsatz gut (106 *mm*).	$n_3(29) = 22 \cdot 5$, $n_3(12) = 22 \cdot 3$.	—
21.	n_1+n_3 mit wenigen Unterbrechungen.	$n_3(47) = 22 \cdot 3$.	—
22.	Stufen, n_1+n_3, teilweise Stufen.	$n_1(16) = 43 \cdot 2$.	—
23.	n_1 bis Mittag, n_1+n_4 leichte Ora, n_1+n_2.	$n_1(33) = 42 \cdot 8$, $n_4(18) = 14 \cdot 4$.	15

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
24.	Unterbrechung, dann leichte Ora, n_3 fast rein.	$n_3(23) = 22\cdot5$.	—
25.	n_1+n_3, Ora, dann wieder n_3 fast rein.	$n_3(16) = 22\cdot3$, $n_3(7) = 22\cdot3$.	8
26.	n_1+n_3, Nordwind, n_1, leichte Ora, kleine Amplitude.	$n_1(17) = 42\cdot4$.	—
27.	Unterbrechung, n_1 mit Stufen, große Papiergeschwindigkeit, 1 $m = 3$ mm, n_1+n_3 flach.	$n_1(10) = 42\cdot5$.	—
28.—30.	Sehr flache n_1, Ora stark, Reparatur.		—
	Juli 1903		
1.	Stufen, $n_1+n_2+n_3$, Ora.	$n_1(20) = 42\cdot7$, $n_3(23) = 21\cdot0$.	—
2.	Niveau steigend, Ora-Unterbrechung.		—
3.	Unterbrechung, Ora, n_4.	$n_4(7) = 15\cdot4$, $n_4(22) = 15\cdot4$.	—
4.	Unterbrechung, Stufen, wenige n_1+n_3.	$n_3(5) = 22\cdot2$, $n_3(8) = 20\cdot5$, $n_4(5) = 14\cdot7$, $n_3(15) = 22\cdot2$.	—
5.	n_3 fast rein, Schwebungen, n_3+n_4.	$n_3(30) = 22\cdot2$, $n_3(31) = 22\cdot4$.	—
6.	n_3, dann n_1+n_3, Schwebungen.	$n_3(10) = 21\cdot9$, $n_3(6) = 21\cdot5$, $n(6) = 10\cdot2$.	—
7.	Stufen, n_1+10', $1\cdot3'$, Denivelation: Ora? Abends n_1+n_2.	$n_1(27) = 42\cdot8$.	45
8.	n_1+n_2, später n_1, fast rein, abnehmende Amplitude.	$n_1(30) = 42\cdot6$.	30

9.	n_2+n_4, schöne Zeichnung, aber kompliziert. Schwebungen, 7′.	$n_2(11) = 27\cdot3$, $n_2(22) = 28\cdot9$.	—
10.	Stufen, n_1, anfangs schlecht, dann besser, abends n_1+n_3.	$n_1(16) = 43\cdot0$, $n_3(11) = 22\cdot1$.	14
11.	n_1 bis 5^h p., dann n_1+n_3, abnehmende Amplitude.	$n_1(23) = 43\cdot2$, $n_3(18) = 21\cdot4$.	13
12.	Kleine Amplitude, n_1+n_3, früh Wind, Niveauanstieg, n_1+n_4, Ora stark.	$n_4(18) = 15\cdot0$, $n_4(17) = 14\cdot9$, $n_3(4) = 22\cdot2$.	—
13.	Unterbrechung, n_1+n_3+7' schön, Ora stark, später n_1+n_2.	$n(30) = 7\cdot4$, $n_1(21) = 42\cdot8$.	20
14.	n_1, Amplitude abnehmend bis 9^h a., Unterbrechung, n_1+n_2, Amplitude zunehmend, n_1+n_2.	$n_1(12) = 43\cdot0$, $n_2(8) = 28\cdot1$.	—
15.	n_1, Amplitude abnehmend, Frühwind und Ora mäßig, n_1+n_2.	$n_1(33) = 42\cdot9$, $n_2(13) = 28\cdot0$.	—
16.	Stufen und Unterbrechung durch Ora, n_1+n_3+17' wenig.	$n(12) = 9\cdot9$.	—
17.	$n_1+n_2+n_3+n_4$, Ora sehr stark, Unterbrechung.	$n(14) = 13\cdot1$.	—
18.	Unterbrechung, Ora stark, n_1 wenig.		—
19.	Unterbrechung, n_4 schön, Amplitude zunehmend, 7′.	$n_4(10) = 15\cdot0$, $n(9) = 6\cdot8$, $n_4(9) = 14\cdot9$.	60
20.	n_1+7' oder 8′, Vibrationen, Ora sehr stark, n_1 lauft weiter.		45
21.	n_1+n_3, n_1 seit 7^h p., abends n_1+n_2.	$n_1(32) = 43\cdot0$.	—
22.	n_1+n_2 gut, Niveau steigend, Ora.	$n_1(40) = 42\cdot8$.	—
23.	n_1 mit Stufen, Ora-Unterbrechung, n_1+n_4 wenig, kleine Amplituden.	$n_1(18) = 43\cdot2$.	—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
24.	Unterbrechung, n_1+n_2 seit 9^h a., Amplitude abnehmend.	$n_1(20) = 42\cdot6$, $n_2(15) = 28\cdot1$.	—
25.	$n_1+n_2+n_3$ gut, später fast keine Schwankungen.	$n_1(12) = 43\cdot0$, $n_3(6) = 22\cdot0$.	—
26.	Fast keine Bewegung, kleine $n_1+n_2+n_3$, zunehmende Amplitude.		—
27.	Stufen, $n_1+n_2+n_3$, um 1^h p. Amplitude abnehmend, nach 3^h p. Zylinder fort.		—
28.	Abmontierung und Neuaufstellung.		—
	August 1903		
30.	n_1+n_2, bei verschiedenen Papiergeschwindigkeiten, Ora.	$n_1(20) = 42\cdot6$, $n_2(15) = 28\cdot1$.	—
31.	n_1, Amplitude abnehmend, Ora, **1 *m* = 3 *mm*.**		—
	September 1903		
1.	n_1, abnehmende Amplitude, Stufen, gerade Linie (1 *m* = 3 *mm*).		—
2.	Schwache n_1.	$n_1(15) = 42\cdot9$, $n_1(32) = 42\cdot9$, $n_1(17) = 43\cdot2$.	—
3.	Schwache n_1.		—

4.—8.	Fast stets gerade Linie, hie und da 3′ Wellen.		—
9.	Unterbrechung, schwache n_1+n_3, deutlich 3′ Wellen.	$n(29) = 2\cdot77$, $n(7) = 2\cdot94$.	—
10.	Fast gerade Linie.		—
11.	n_1, Amplitude wachsend, starker Wind.		—
12.	n_1+n_3, Amplitude zunehmend, 10′ Wellen.	$n(9) = 10\cdot2$.	70
13.	n_1+n_2, später n_2 überwiegend, sehr starke 3′.	$n(37) = 3\cdot21$, $n(48) = 3\cdot20$.	155
14.	n_1, dichrote Zeichnung, 3′ und 7′ Wellen.	$n(20) = 3\cdot00$, $n_1(17) = 43\cdot1$.	—
15.	n_1+n_2, sehr deutliche n_2.	$n_2(5) = 28\cdot4$, $n(35) = 3\cdot31$, $n(14) = 3\cdot23$.	—
16.—23.	Störung.		—
24.—26.	Gerade, Ora, 3′ Wellen.		—
27.	n_1, Ora, schöne Zeichnung.	$n_1(12) = 42\cdot8$.	—
28.—30.	Störung.		—
	Oktober 1903		
1.—8.	n_1 mit Stufen, teilweise Unterbrechungen.		—
9.	Seit 5^h p. n_1 mit zunehmender Amplitude, teilweise Stufen.	$n_1(9) = 43\cdot2$.	34
10.	n_1 mit kleinen Stufen, 3′ Wellen bei Ora deutlich.	$n(6) = 3\cdot00$, $n_1(32) = 42\cdot8$, $n(4) = 3\cdot43$, $n(3) = 3\cdot33$.	70
11.	n_1 mit kleinen Stufen und kleinen Unterbrechungen, 10′ deutlich.	$n_1(24) = 42\cdot9$.	—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
12.	n_1 seit 10[h] a. zuerst Unterbrechung, n_1+n_3+3'.	$n(11) = 3 \cdot 18$, $n_3(14) = 21 \cdot 7$, $n_1(19) = 43 \cdot 2$.	—
13.	n_1+n_3+3', stark dichrotisch, 10′ deutlich, zuletzt n_1 reiner.	$n_1(33) = 42 \cdot 9$.	75
14.	n_1, abnehmende Amplitude, zuletzt ganz flach.	$n_1(16) = 42 \cdot 8$.	—
15.—16.	n_1 sehr schwach, Ora.		—
17.	Wind, deutliche 3′, geht über in n_1, Ora, Niveau fallend, dann steigend.	$n_1(23) = 42 \cdot 9$, $n(18) = 3 \cdot 28$.	—
18.	n_1 mit kleinen Stufen bei NW-Föhn, schön, später Niveau steigend.	$n_1(33) = 43 \cdot 2$.	40
19.	n_1, dann Unterbrechung.	$n_1(11) = 43 \cdot 8$.	—
20.—27.	Unterbrechung wegen der Uhr.		—
28.	n_1, Amplitude abnehmend.	$n_1(30) = 43 \cdot 0$.	38
29.	n_1, Amplitude zunehmend, Niveau steigend, 3′ und Stufen.	$n_1(33) = 42 \cdot 2$, $n(7) = 3 \cdot 36$, $n(4) = 3 \cdot 37$.	80
30.	n_1, schön, aber am Papierrand, 3′ gut.	$n_1(32) = 42 \cdot 7$, $n(18) = 3 \cdot 26$, $n(15) = 3 \cdot 31$, $n(9) = 3 \cdot 25$.	80
31.	n_1+3', schön, Niveau steigend.	$n_1(33) = 43 \cdot 1$, $n(5) = 3 \cdot 33$.	92
November 1903			
1.	n_1, große Amplitude.	$n_1(32) = 42 \cdot 9$.	56

2.	n_1 mit Stufen, abnehmende Amplitude.	$n_1(33) = 42\cdot5$.	53
3.	n_1 sehr flach.	$n_1(13) = 43\cdot0$ [29. Oktober, $0^h\ 53^m$ a. bis 3. November, $9^h\ 48^m$ a. $n_1(180) = 43\cdot0$].	—
4.—10.	Nur flache n_1, sonst fast stets gerade Linie.		—
11.	Seit 3^h p. n_1 mit Stufen und 3' Wellen.	$n_1(12) = 43\cdot1$, $n(53) = 2\cdot88$.	—
12.—18.	Stellenweise n_1+n_3, jedoch nur wenig. Unterbrechung.		—
19.	n_1 mit Stufen, später n_1+n_3+3', schlechte Zeichnung.	$n_1(13) = 43\cdot4$.	32
20.	Wenige n_1, sonst fast stets Gerade.		—
21.	n_1 mit Stufen, Unterbrechung, 3' Wellen, Amplitude zunehmend.		—
22.	n_1+n_3+3', kleine Stufen. Unterbrechung.	$n_1(18) = 42\cdot9$, $n(9) = 2\cdot97$.	24
23.	Unterbrechung. n_1 seit 11^h a. flach mit Stufen.	$n_1(19) = 43\cdot0$.	22
24.—26.	Einzelne n_1 mit Stufen.		—
27.	n_1 mit Stufen.	$n_1(32) = 43\cdot1$.	43
28.	n_1+n_3? Abnehmende Amplitude.	$n_1(33) = 42\cdot8$.	31
29.	n_1 mit kleinen Stufen bis 5^h p.	$n_1(22) = 42\cdot6$.	43
30.	Unterbrechung.		—
Dezember 1903			
1.	n_1, Amplitude wachsend, kleine Stufen.	$n_1(7) = 42\cdot8$.	47
2.	n_1, fast rein, Amplitude abends abnehmend.	$n_1(32) = 42\cdot9$.	70

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
3.	n_1, weiter abnehmende Amplitude, nachmittags wieder zunehmend.	$n_1(33) = 42 \cdot 9$.	40
4.— 5.	n_1 sehr flach bis 5. $1^h 5^m$ a.	$n_1(32) = 43 \cdot 3$ [1. Dezember, $6^h 46^m$ p. bis 5. Dezember, $1^h 5^m$ a. $n_1(110) = 42 \cdot 7$].	22
6.— 7.	$n_1 + n_3$ mit Stufen, nicht gut.		—
8.—10.	Teilweise n_1 mit Stufen. Unterbrechung.		—
11.	Früh noch Störung, dann $n_1 + n_3 + 3'$ mit kleinen Stufen.	$n(4) = 3 \cdot 38$, $n(8) = 3 \cdot 17$, $n(8) = 3 \cdot 25$.	—
12.	n_1 bis 6^h p., 3' gut, Niveau steigend, Stufen.	$n_1(37) = 43 \cdot 1$, $n(23) = 3 \cdot 08$, $n(8) = 3 \cdot 14$, $n(24) = 2 \cdot 95$.	—
13.—15.	n_1 mit großen Unterbrechungen.		—
16.—17.	n_1 von $8^h 16^m$ a. bis 17. $2^h 58^m$ a. mit kleinen Stufen.	$n_1(26) = 43 \cdot 1$.	20
18.—30.	Teilweise n_1 schlecht, mit Stufen und Unterbrechungen.		—
31.	$n_1 + n_3$ mit Stufen, wieder **1** m = **1** mm.	$n_1(19) = 42 \cdot 8$.	19
	Jänner 1904		
1.— 2.	Wenige n_1 mit Stufen.		—
3.— 4.	n_1 mit Stufen.	$n_1(17) = 43 \cdot 2$.	—
5.—13.	Gerade Linie. Unterbrechung.		—

14.	n_1+n_3+3' schön.	$n_3(13)=21\cdot1$, $n_1(14)=43\cdot1$.	—
—	Vom 15. Jänner bis 13. April 1904 Unterbrechung.		—
April 1904			
14.	n_1+n_3+3' schön	$n_1(12)=43\cdot3$, $n_3(22)=22\cdot8$.	28
15.	n_1+n_3+10'.	$n_1(15)=42\cdot9$, $n_3(20)=22\cdot1$.	30
16.	n_1+n_3+9', kleine Unterbrechung.	$n_1(12)=42\cdot6$, $n_3(11)=20\cdot5$.	95
17.	Unterbrechung, $n_1+n_2+10'+3'$, Niveau steigend.	$n_1(14)=42\cdot6$.	38
18.	n_1 fast rein, Niveau steigend, schwache Ora, später n_1+n_2.	$n_1(32)=42\cdot9$, $n_2(12)=28\cdot6$.	37
19.	Niveau fallend, n_1+n_2+3', später deutlich n_2+n_3.	$n_2(12)=28\cdot7$, $n_3(7)=21\cdot4$.	—
20.	n_1+n_3 schwach, schwache Ora, 3' gut.		—
21.	n_1+n_3, Ora, wenige n_4.	$n_1(15)=43\cdot3$.	—
22.	n_1+n_3 gut, später n_1+n_2, deutlich schwache Ora.	$n_3(12)=21\cdot2$, $n_2(7)=29\cdot3$.	—
23.	n_1+n_3 gut.	$n_1(29)=42\cdot9$.	—
24.	n_1 mit Stufen, später n_1+n_2.	$n_1(25)=42\cdot8$.	—
25.	n_1+n_3 wenig, mit Stufen und 3' Wellen, Ora.	$n_3(12)=22\cdot1$.	—
26.	n_1 mit Stufen, Ora schwach, 3' sehr schön.		—
27.	n_1 mit Stufen, n_1+n_3+3', schön.	$n(84)=2\cdot80$, $n(40)=2\cdot82$.	—
28.	n_1+n_3+3', 3' schön.		—
29.—30.	Störung.		—

Tag	Nähere Darstellung des Kurvenbildes	Anzahl und Dauer der Perioden	Maximale Amplitude in Millimeter
Mai 1904			
1.—5.	Störung.		—
6.	n_1, stößt oben an.	$n_1(33) = 42 \cdot 4$.	13
7.	n_1, stößt oben an, n_1+n_3.	$n_1(32) = 42 \cdot 8$.	23
8.	n_1 mit Stufen bis 2' p., Amplitude abnehmend.	$n_1(12) = 43 \cdot 0$ [5. Mai, $1^h 59^m$ p. bis 8. Mai, $9^h 15^m$ a. $n_1(94) = 42 \cdot 9$].	—
9.	Unterbrochen.		—
10.	Bis 7^h p. unterbrochen, dann $n_1+7'+3'$.	$n(2) = 7 \cdot 2$.	—
11.	n_1+n_3, schwache Ora.	$n_1(32) = 42 \cdot 7$, $n_3(13) = 20 \cdot 5$.	16
12.	$n_1+n_2+n_3$, Ora, 3' Wellen.	$n_1(32) = 43 \cdot 1$, $n_3(13) = 22 \cdot 4$.	—
13.	Ora, n_2 gut, kleine Amplitude.	$n_2(7) = 29 \cdot 3$, $n_2(5) = 27 \cdot 0$.	—
14.	n_1 mit Stufen, Ora, 3' Wellen, n_1 mit kleiner Amplitude.	$n(20) = 2 \cdot 87$.	—
15.	Typische n_1+n_2, schwache Ora, 3' geht über in reinere n_1.	$n_2(12) = 28 \cdot 5$, $n_1(25) = 42 \cdot 8$.	33
16.	n_1 mit Stufen, dann gute n_1+n_3.	$n_1(33) = 42 \cdot 9$, $n_3(27) = 22 \cdot 4$.	—
18.—31.	Störung.		—
Juni 1904			
1.—21.	Störung.		—

22.—25.	Zeitweise n_1+n_3 bei Ora.		—
26.	n_1+n_3, deutliche Zeichnung, nachmittags Niveau fallend, n_1 seit $7^h\ 24^m$ p.		—
27.	n_1+n_3 mit Stufen, Niveau fallend, leichte Ora, abends Wind.	$n_1(24) = 43 \cdot 2$.	—
28.	n_1+n_3 mit Stufen.	$n_1(13) = 42 \cdot 7$.	—
29.—30.	Wenige n_1+n_3, Ora. Störung.		—
	Juli 1904		
1.	Unterbrechung.		—
2.	n_1+n_2 mit Stufen seit $6^h\ 29^m$ p.		—
3.	n_1 mit kleinen Stufen, schwache Ora, gut.	$n_1(33) = 42 \cdot 8$.	50
4.	n_1 bei schwacher Ora.	$n_1(32) = 42 \cdot 3$.	22
5.	n_1 bis $12^h\ 54^m$ p.	$n_1(19) = 43 \cdot 0$.	—
6.— 9.	Unterbrechung, einzelne n_1 bei schwacher Ora.		—
10.	n_1+n_2 Niveaufall, n_1 geht über in n_1+n_2.	$n_1(11) = 42 \cdot 6$.	—
11.	n_1+n_2 gut, Ora, n_2.	$n_2(8) = 28 \cdot 5$, $n_2(7) = 29 \cdot 0$.	—
12.—31.	Unterbrechung, zeitweise einzelne n_1, jedoch stets schlecht.		—

Die Grundschwingung des Gardasees besitzt nach den früher mitgeteilten Vermessungen des Registriermaterials eine mittlere Schwingungsdauer von **42·92** Minuten. Sie wurde im ganzen in 222 Serien von durchschnittlich 25 Perioden 5494 mal vermessen, woraus sich der Mittelwert von 42·92 Minuten ergab. Die längste durchschnittliche Dauer einer Schwingungsserie betrug 43·9 Minuten, während die kürzeste Periodendauer 41·5 Minuten war. Das arithmetische Mittel daraus gibt 42·70 Minuten, weicht somit bloß um 0·5% vom Mittelwert aller Schwingungsserien ab. Bei dieser ersten Grundschwingung ist die Ermittlung der wahren Schwingungsdauer sehr einfach. Sie kommt fast stets mit beträchtlicher Amplitude vor. Die mittlere Größe der Amplitude bewegte sich zwischen 30 und 40 *mm*. Die Maximalamplitude betrug 100 *mm* am 4. Juni 1903. Nach den mechanischen Gesetzen soll sie stets unabhängig von der Dauer der einzelnen Schwingung sein. Die Amplitude variiert während der einzelnen Schwingungen einer Serie manchmal bedeutend. Der gewöhnliche Fall ist, daß nach der Maximalamplitude der Ausschlag der Einzelschwingungen allmählich abflaut, bis entweder Stillstand eintritt oder eine neue Serie beginnt. Jedoch wurde öfter bemerkt, wie in einer Reihe plötzlich die Amplitude wieder zunimmt, nachdem vorher eine regelmäßige Abnahme der Amplitude zu konstatieren war. Im folgenden gebe ich eine Übersicht über lange Seichesreihen dieser Grundschwingung von zirka 43 Minuten, wobei jedoch nur solche aufgenommen wurden, bei denen wenigstens 90 Wellen in ununterbrochener Folge vorhanden waren. Das Mittel aus diesen Reihen beträgt 42·96 Minuten, stimmt somit mit dem Gesamtmittel aller vermessenen Wellen (42·92) sehr gut überein.

Datum						Anzahl der Schwingungen	Dauer in Minuten
1902:	25. XI.	$2^h\,46^m$ a.	bis	27. XI.	$7^h\,18^m$ p.	90	43·0
	29. XI.	$11^h\,19^m$ a.	»	5. XII.	$6^h\,14^m$ a.	194	43·0
	7. XII.	$2^h\,59^m$ p.	»	10. XII.	$2^h\,54^m$ a.	117	43·0
	13. XII.	$1^h\,26^m$ a.	»	16. XII.	$4^h\,56^m$ a.	105	43·1
	17. XII.	$4^h\,09^m$ a.	»	20. XII.	$1^h\,00^m$ p.	113	42·9
	21. XII.	$9^h\,05^m$ a.	»	28. XII.	$10^h\,40^m$ a.	237	42·9

	Datum					Anzahl der Schwingungen	Dauer in Minuten
1903:	4. I.	$7^h\,03^m$ a.	bis	14. I.	$7^h\,48^m$ a.	336	42·9
	16. I.	$11^h\,46^m$ a.	»	19. I.	$1^h\,47^m$ a.	103	43·1
	24. I.	$10^h\,55^m$ a.	»	28. I.	$8^h\,44^m$ p.	131	43·0
	9. II.	$7^h\,47^m$ a.	»	14. II.	$2^h\,22^m$ p.	177	42·9
	4. III.	$4^h\,30^m$ a.	»	6. III.	$11^h\,54^m$ p.	94	43·0
	12. III.	$8^h\,29^m$ a.	»	16. III.	$10^h\,20^m$ p.	155	43·2
	22. III.	$1^h\,47^m$ a.	»	24. III.	$8^h\,13^m$ p.	93	42·9
	1. IV.	$1^h\,06^m$ a.	»	9. IV.	$9^h\,57^m$ p.	297	43·0
	10. IV.	$8^h\,07^m$ p.	»	13. IV.	$3^h\,51^m$ p.	94	43·2
	17. IV.	$3^h\,25^m$ p.	»	20. IV.	$4^h\,21^m$ p.	102	42·9
	29. X.	$0^h\,53^m$ a.	»	3. XI.	$9^h\,48^m$ a.	108	43·0
	27. XI.	$0^h\,27^m$ a.	»	29, XI.	$4^h\,10^m$ p.	89	43·0
	1. XII.	$6^h\,46^m$ p.	»	5. XII.	$1^h\,05^m$ a.	110	42·7
1904:	1. V.	$1^h\,59^m$ p.	»	8. V.	$9^h\,13^m$ a.	94	42·9
	2. VII.	$6^h\,29^m$ p.	»	5. VII.	$12^h\,54^m$ p.	95	42·6
						Mittel. . 143	42·96

Die längste Reihe dauerte 11 Tage; im ganzen war es ein ununterbrochener Wellenzug von 336 Perioden in 240 Stunden und 45 Minuten.

Öfters wurden schön ausgebildete Schwingungen auf die Dauer der einzelnen Schwingung untersucht und hierbei fand sich eine mittlere Abweichung von 0·8 Minuten; das bedeutet in der Registrierung einen Unterschied von etwas weniger als 1 *mm*. Diese mittlere Abweichung liegt vollständig innerhalb der Fehlergrenze, die beim Vermessen der Registrierkurve auftreten kann.

Als erste Oberschwingung ergibt sich eine Welle von **28·58** Minuten. Die Reduktion dieser Welle war schwierig aus dem Grunde, weil sie nur dort deutlich vermessen werden konnte, wo ihre Amplitude gegenüber der Amplitude der Hauptschwingung nicht zu klein war. Wie bereits die dritte Kurve von Fig. 3 zeigt, ist, wenn sich die Amplituden der superponierenden Kurven wie 1 : 3 verhalten, das Bild der ersten Oberschwingung schon total verwischt und ihre Periodendauer kann dann nur durch Anwendung der Restmethode ermittelt werden.

Allein trat diese Welle äußerst selten auf und wenn sie rein auftrat, so waren es bloß einige wenige Wellen.

Die Anzahl der vermessenen Serien betrug 62 mit insgesamt 666 Wellen, so daß ungefähr 11 Schwingungen auf eine einzelne Serie entfallen. Die größte Periode besaß eine Schwingungsdauer von 29·7 Minuten, die kleinste eine solche von 27·0 Minuten.

Bei dieser Oberschwingung wurde, wie bereits erwähnt, am öftesten die Restmethode angewendet und folgende kleine Tabelle gibt eine Zusammenstellung der nach dieser Methode gewonnenen Werte; das Mittel aus allen stimmt sehr gut mit dem Mittelwert aller Serien überein.

Datum	Angenommene Hauptschwingung in Minuten	Gefundene erste Oberschwingung in Minuten
1902: 3. Dezember........	42·6	29·6
9. »	42·8	28·6
1903: 1. Jänner	43·1	28·4
12. »	43·2	29·0
14. »	42·8	28·0
26. »	42·6	28·6
6. Februar	43·2	28·7
14. «	43·1	28·7
19. März............	43·2	28·6
23. »	42·7	28·8
24. »	42·8	28·4
25. April............	42·9	28·6
6. Juni	42·5	28·3
	Mittel...	28·63

Als Mittelwert für die zweite Oberschwingung ergeben die früher mitgeteilten Tabellen eine Periode von **21·79 Minuten**. Dieser Wert wurde aus 76 Serien zu 1019 Wellen gewonnen. Die Ermittlung dieser Welle war bedeutend leichter als die der ersten Oberschwingung, da die Superposition einer Grundschwingung von zirka 43 Minuten und dieser Welle eine Interferenzkurve gibt, worin auch bei sehr kleiner Amplitude der Oberschwingung diese sich deutlich abhebt. Deshalb ist

auch diese Welle verhältnismäßig sehr oft vermessen worden, da schon durch den Anblick des Limnogramms sicher auf ihre Anwesenheit in der Interferenzkurve geschlossen werden konnte.

Als dritte Oberschwingung ergibt sich eine Welle von **14·95** Minuten. Auch diese Welle wurde noch ziemlich oft gemessen, nämlich 616mal in 39 Serien zu ungefähr 16 Wellen pro Serie.

Weitere Oberschwingungen wurden verhältnismäßig selten vermessen; in den gewonnenen Tabellen konnten jedoch mit ziemlicher Sicherheit noch weitere vier Oberschwingungen konstatiert werden. Ihr Vorhandensein ist durch die Anzahl der Fälle, aus denen die Schwingungsdauer ermittelt wurde, ziemlich sicher. Die Periodendauer dieser Oberschwingungen sind **12·07, 9·87, 8·80, 7·33** Minuten. Auffallend ist, daß die Wellen von 9·87 und 7·33 Minuten öfter vermessen wurden als die Wellen von 12·1 und 8·8 Minuten. Bei diesen Wellen handelt es sich jedoch auch nicht nur um einzelne kurze Wellenzüge, sondern es wurde besonders darauf geachtet, nur solche Serien zur Mittelbildung zu benutzen, die eine größere Anzahl von Perioden aufweisen und so einigermaßen richtige Resultate liefern.

Außer den erwähnten Schwingungen tritt noch eine Schwingung von zirka 3 Minuten auf; dieselbe zeigt sich besonders bei stark bewegter See. Solange beim Limnographen eine Zeitordinate von 1 *mm* pro Minute verwendet wurde, konnte diese Schwingung, die ziemlich oft auftritt, nicht besonders genau ermittelt werden. Erst als vom 31. August bis 30. Dezember 1903 3 *mm* einer Minute entsprachen, konnte ihre Schwingungsdauer sicher bestimmt werden. Ihr Auftreten scheint mit dem Auftreten der Ora in enger Verbindung zu stehen. Auffallend ist noch, daß ihre Amplitude sehr stark von der Intensität des Seewindes abhängt. Im ganzen wurden 671 Wellen in 32 Serien zu rund 21 Schwingungen vermessen. Der Mittelwert ergab eine Schwingung von **3·06** Minuten. Die längste vermessene Periode beträgt 3·38 Minuten, die kürzeste 2·77 Minuten. Es kann übrigens leicht möglich sein, daß es sich hier um zwei Wellen von verschiedener, aber sehr naher Schwingungsdauer

handelt, da sehr oft Schwebungen bemerkt wurden, welche mit der graphischen Darstellung der akustischen Schwebungen identisch sind.

In folgender Tabelle gebe ich noch übersichtlich zusammengestellt die Perioden der in Riva am Gardasee auftretenden Schwingungsformen.

Seichesformen in Riva am Gardasee.

Zahl der Schwingungen	Anzahl der vermessenen Wellen	Zahl der Serien	Durchschnittliche Wellenanzahl einer Serie	Größte vermessene Periode	Kleinste vermessene Periode	Mittel daraus	Mittelwert aller vermessenen Perioden
T_1	5494	222	24·8	43·9	41·5	42·70	42·92
T_2	666	62	10·7	29·7	27·0	28·35	28·58
T_3	1019	76	13·4	23·0	19·7	21·35	21·79
T_4	616	39	15·8	16·3	13·6	14·95	14·96
T_5	113	6	18·8	13·1	11·1	12·10	12·07
T_6	442	32	13·8	10·7	9·1	9·90	9·87
T_7	42	3	14·0	8·8	8·8	8·80	8·80
T_8	185	11	16·8	8·0	6·8	7·40	7·33
T?	671	32	20·9	3·38	2·77	3·07	3·06

Lassen wir die Schwingung von zirka 3 Minuten weg und bilden wir die Verhältnisse der einzelnen Schwingung zur Grundschwingung, so erhalten wir folgende Verhältniszahlen:

$\frac{T_1}{T_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{T_3}{T_1}$	$\frac{T_4}{T_1}$	$\frac{T_5}{T_1}$	$\frac{T_6}{T_1}$	$\frac{T_7}{T_1}$	$\frac{T_8}{T_1}$
1	0·6657	0·5076	0·3485	0·2905	0·2299	0·2050	0·1700

Diese Verhältniszahlen deuten bereits darauf hin, daß wir am Gardasee nicht einen einfach gebauten See vor uns haben; nach der Theorie von Du-Boys bleiben solche Schwingungsverhältnisse unaufgeklärt und nur die Chrystal'sche Theorie, welche eben die Bodenkonfiguration der Seen in Erwägung zieht, wird imstande sein, uns eine richtige Aufklärung dieser Tatsachen zu liefern.

II. Die Chrystal'sche Theorie der Seiches und ihre Anwendung auf den Gardasee.

1. Die Chrystal'sche Theorie.

Bevor wir auf die theoretischen Untersuchungen der Schwingungsformen des Gardasees übergehen, möchte ich einen kurzen Überblick über Chrystal's hydrodynamische Theorie der Seiches [1] geben, jedoch nur insoweit als es zum Verständnis späterer theoretischer Rechnungen notwendig ist. Der Zweck, den Chrystal bei seinen Untersuchungen verfolgte, war der, eine Theorie zu entwickeln, mittels welcher es möglich war, im voraus die Schwingungsdauer der einzelnen Seichesformen und die Lage der Knotenlinien solcher Seen zu berechnen, deren morphologischer Bau einigermaßen bekannt war. Die Du-Boys'sche Theorie hatte sowohl Chrystal sowie andere Beobachter bei manchen ihrer untersuchten Seen in Stich gelassen. Diese Theorie berücksichtigte weder die Querschnittsverhältnisse der Seen noch die von Punkt zu Punkt sich ändernde Breite derselben und beschränkte sich bloß, die Länge des Talweges in Rechnung zu ziehen. Chrystal wies nun darauf hin, daß wegen der Änderung der Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung die Schwingungsdauer der Seichesformen und damit verbunden auch die Lage der Knotenlinien wesentlich sowohl von den Breite- wie Tiefeverhältnissen der Seen abhängt und daß die Du-Boys'sche Theorie nur dort angenähert richtige Lösungen liefern kann,

---

[1] Transactions of the Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 41, Part III, Edinburg 1905, und ebendort, Vol. 41, Part III, Edinburg 1905.

wo nicht allzu große und rasche Änderungen in der Bodenkonfiguration eines Sees auftreten.

Wir legen unser Koordinatensystem derart, daß die x-Achse in der ungestörten Oberfläche des Sees liegt und womöglich die Richtung des Talweges des Sees angibt. Der Koordinatenursprung liege an einem Ende des Sees. Die y-Achse steht senkrecht dazu horizontal, die z-Achse vertikal nach oben. Wir betrachten sodann einen Punkt P mit der Koordinate x und wollen eine zur x-Achse senkrechte Querschnittsfläche des Sees mit $F(x)$ und die Breite des Sees an dieser Stelle mit $b(x)$ bezeichnen. Nehmen wir nun einen Querschnitt in der Entfernung dx vom Querschnitt $F(x)$, so ist das Volumen der Schicht S zwischen den zwei Querschnitten $F(x)$ und $F(x+dx)$ offenbar $F(x)dx$.

Erfährt diese Schicht $F(x)dx$ nun eine horizontale Verschiebung um das Stück ξ und eine vertikale Verlagerung um das Stück ζ, so geben die Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen der Hydrodynamik die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial (F(x)\xi)}{\partial x}\right], \tag{1}$$

$$\zeta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial}{\partial x}(F(x)\xi). \tag{2}$$

Wir definieren nun zwei neue Veränderliche, deren physikalische Bedeutung wir erst später geben:

$$u = F(x)\xi, \qquad v = \int b(x)dx,$$

so wird aus der Gleichung (1) die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\sigma(v)\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}, \tag{3}$$

wobei $\sigma(v) = F(x).b(x)$ ist, und aus Gleichung (2) folgt

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial v}. \tag{4}$$

Da die Seiche eine stehende Welle ist, so ist ξ und daher auch u eine periodische Funktion der Zeit. Diese periodische

Funktion, analysiert nach einfach harmonischen Gliedern, kann dargestellt werden durch die Reihe

$$u = \sum_{i=1}^{n} P_i \sin n_i(t-\tau_i), \tag{5}$$

worin P_i Funktionen bloß von v sind. Soll die Reihe (5) eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (3) sein, so muß (5) Gleichung (3) erfüllen und folgende Gleichung bestehen:

$$-n^2 P = g\sigma(v) \cdot \frac{d^2 P}{dv^2}.$$

Die mathematische Theorie der Seiches hängt somit wesentlich von der Integration dieser totalen Differentialgleichung ab, die auch in der Form

$$\frac{d^2 P}{dv^2} + \frac{n^2}{g\sigma(v)} P = 0 \tag{6}$$

geschrieben werden kann. Gleichung (6) ist die bekannte kanonische Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die physikalische Bedeutung der zwei neu eingeführten Veränderlichen v und σ ist folgende: $v = \int b(x)dx$ bedeutet die Oberfläche des Sees, gerechnet vom Koordinatenursprung aus bis zum Querschnitte $F(x)$; $\sigma(v)$ ist das Produkt aus $F(x)$, dem Querschnitte des Sees an der betreffenden Stelle, mit $b(x)$, der Oberflächenbreite, also $\sigma(v) = F(x).b(x)$.

v als Abszisse und σ als Ordinate in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eingetragen, gibt die Normalkurve des Sees, wie Chrystal sie bezeichnet hat.

Chrystal weist nun nach, daß die Berechnungen mit der Gleichung (6) ebenso durchgeführt werden können, wie wenn unser See konstante Breite, rechteckigen Querschnitt, jedoch die Normalkurve als Talweg besäße. Benützen wir nämlich Gleichung (6) für den speziellen Fall eines Sees von konstanter Breite und rechtwinkligem Querschnitte, so müssen wir $b(x) = b$ und $F(x) = bh(x)$ setzen, worin jetzt b als konstant

zu betrachten ist. Führen wir dies in Gleichung (6) ein und transformieren wir auf die Veränderliche x, so wird

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{n}{gh(x)} P = 0. \tag{7}$$

Wir sehen durch Vergleich der Gleichung (6) und (7), daß diese Gleichungen mathematisch keinen Unterschied aufweisen und somit kein Hindernis vorliegt, den allgemeinen Fall auf den speziellen, in welchem die Breite als konstant und die Querschnitte als rechteckig zu nehmen sind, überzuführen, wenn wir nur die Bedeutung der Variabeln und Konstanten dementsprechend umändern. Nehmen wir somit die Normalkurve $\sigma(v)$ als Talweg des betrachteten Sees, so können wir genau so rechnen, als ob wir einen See von konstanter Breite und rechteckigem Querschnitte, jedoch mit einem Talwege $\sigma(v)$ vor uns hätten. Die Funktion u ist an den Enden eines Sees stets gleich Null; so sind gleichzeitig ξ und ζ die horizontalen, beziehungsweise vertikalen Abweichungen von der Ruhelage gegeben durch die Gleichungen

$$u = F(x)\xi \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{du}{dv}.$$

Die weitere Aufgabe der mathematischen Theorie geht nun dahin, diese Normalkurve mathematisch fixierbaren Kurven anzuschließen. Chrystal hat für die verschiedensten Formen der Normalkurve die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bereits gegeben, beschränkte sich jedoch auf die wichtigsten und allgemeinsten Fälle, die nicht allzugroße Rechenarbeit erfordern. In den meisten Fällen läßt sich die Kurve aus zwei Parabelstücken, die ihre Äste entweder nach oben oder nach unten kehren, oder aus zwei Geraden zusammenstellen.

Näher auf die einzelnen Lösungen hier einzugehen, ist jedoch hier nicht der Platz und wir wollen nur die allgemeine Lösung für den Fall geben, daß die Normalkurven aus Stücken gerader Linien zusammengesetzt ist. Die allgemeine Lösung für diesen Fall brauchen wir zu unseren weiteren Untersuchungen über die Seichesformen des Gardasees.

Wählen wir den Koordinatenursprung für die Normalkurve an jener Stelle, an welcher die Ordinate h herrscht, so kann die Normalkurve, da sie aus einer Geraden besteht, dargestellt werden durch die Gleichung

$$h(x) = h\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

wobei a konstant, positiv oder negativ ist, je nachdem in der Richtung der zunehmenden x die Normalkurve ansteigt oder abfällt. Nach der früher dargelegten allgemeinen Theorie ist nun

$$\xi h\left(1 - \frac{x}{a}\right) = u = P \sin n(t - \tau)$$

und

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

wobei P die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{n^2}{gh\left(1 - \frac{x}{a}\right)} P = 0 \qquad (8)$$

erfüllen muß.

Setzen wir nun nach Chrystal

$$w = 2na\sqrt{\frac{1 - \frac{x}{a}}{gh}}$$

und

$$P = Rw,$$

so erhält die Gleichung (8) die Form:

$$\frac{d^2 R}{dw^2} + \frac{1}{w}\frac{dR}{dw} + \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) R = 0. \qquad (9)$$

Diese Gleichung (9) ist ein spezieller Fall der allgemeinen Bessel'schen Gleichung, deren allgemeine Lösung durch Zylinderfunktionen erster Ordnung gegeben werden kann.

Bezeichnen wir, wie allgemein üblich ist, mit $J_n(w)$ die Besselschen Funktionen und mit $Y_n(w)$ die Neumann'schen Funktionen, so ist das allgemeine Integral der Gleichung (9) gegeben durch

$$R = A J_1(w) + B Y_1(w).$$

A und B sind Konstante, die durch nähere Grenzbedingungen der Normalkurve in den einzelnen Fällen zu bestimmen sind. Durch Anwendung einiger Haupteigenschaften der Zylinderfunktionen wird dann

$$\xi w = \{A J_1(w) + B Y_1(w)\} \sin n(t-\tau),$$
$$\zeta = \frac{2a}{h}\{A J_0(w) + B Y_0(w)\} \sin n(t-\tau). \qquad (10)$$

Durch die zwei Gleichungen (10) ist somit das Problem gelöst, insofern man nur diese Gleichungen jetzt auf einzelne Normalkurven, die aus geraden Linien zusammengesetzt sind, anwenden kann.

2. Die Normalkurve des Gardasees.

Um die Chrystal'sche Theorie auf den Gardasee anzuwenden, ist vor allem notwendig, die Gestalt der Normalkurve des Gardasees zu besitzen. Die Tiefenverhältnisse des Sees sind genügend genau bekannt, so daß sofort aus der Tiefenkarte des Gardasees die Querschnittsflächen bestimmt werden können. Im österreichischen Teile des Sees sind die Lotungen von Dr. E. Richter vorgenommen worden und im Atlas der österreichischen Alpenseen niedergelegt. Für den weitaus größeren italienischen Anteil des Sees wurde die vom hydrographischen Amte der königl. italienischen Marine herausgegebene Karte des Sees, die im Maßstab 1:100.000 gezeichnet ist, benützt. Da in beiden Karten die Lotungsstellen genau angegeben sind und die entsprechende Tiefe des Sees dazugegeben ist, konnten die Querschnitte an ganz beliebigen Stellen vorgenommen werden. Von der Wiedergabe einer größeren Gardaseekarte müßte wohl hier abgesehen werden und ich verweise hier auf die in der Einleitung gegebene Skizze des Sees.

Zur Ermittlung der Normalkurve wurde die Entfernung Torbole—Desenzano in 35 — der Einfachheit halber — gleiche Teile geteilt; für jeden dieser 35 Punkte bestimmte man aus der Karte die Breite und den Querschnitt des Sees. Die Querschnitte wurden im vergrößerten Maßstab gezeichnet und mittels eines Planimeters die Fläche derselben ermittelt. Außerdem wurde noch die Oberfläche des Sees bis zu jedem Querschnitt mittels eines Planimeters vermessen, wobei als Ausgangspunkt für die Zählung sowohl der Querschnitte wie der Oberflächen stets das Nordende des Sees genommen wurde. Folgende Tabelle gibt die Resultate der Messungen, und zwar steht unter $F(x)$ die Fläche der einzelnen Querschnitte, unter $b(x)$ die Breite des Sees an der betreffenden Stelle, unter v die Oberfläche des Sees bis zu jenem Querschnitt. Außerdem wurde in der vierten Kolonne das Produkt $\sigma(v) = F(x).b(x)$ berechnet; in die fünfte Kolonne wurden noch diese Werte zu späteren Zwecken, nach der Formel $(a+2b+c):4$ ausgeglichen, aufgenommen. Die Einheiten, in denen die einzelnen Größen mitgeteilt sind, stehen am Kopfe jeder entsprechenden Kolonne.

Trägt man nun die Werte $v(x)$ für die Oberfläche des Sees als Abszissen und die Werte $\sigma(v)$ als Ordinaten (positiv nach abwärts) in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhalten wir die Normalkurve des Gardasees; dies ist in Fig. 4 gegeben: die Punkte geben die Originalwerte wieder, die kleinen Kreuze geben die ausgeglichenen Werte an. Versuchen wir nun, mathematisch fixierbare Kurven durch diese Punkte zu legen, so finden wir, daß man mit großer Annäherung mit geraden Linien auskommen kann. Namentlich der südliche Teil des Sees schließt sich fast genau an eine Gerade an; auch der erste Teil des Sees ist durch eine gerade Linie ziemlich gut wiedergegeben. Am ungenauesten wird der mittlere Teil der Normalkurve mittels einer Geraden dargestellt; hier jedoch treten im Seebecken auch gerade die größten und raschesten Änderungen auf, da hier die Bucht von Garda beginnt und daher der See plötzlich eine viel bedeutendere Breite erhält, als bei früheren Querschnitten der Fall ist.

Die Normalkurve des Gardasees.

Anzahl des Querschnittes	Entfernung v. Nordende *km*	$F(x)$ $10^6\ cm^2$	$b(x)$ $10^4 cm$	$v = \int b(x)\,dx$ $10^8\ cm^2$	$\sigma(v) = F(x).b(x)$ $10^{10}\ cm^3$	$\sigma(v)$ ausgeglichen $10^{12}\ cm^3$
0	0·00	0·00	0·0	0	0·0	0
1	0·20	581·25	34·0	44	19762·5	197
2	1·48	5781·25	30·0	500	173437·5	1282
3	2·93	5731·25	25·8	903	146467·3	1642
4	4·45	6800·00	28·0	1296	190400·0	1819
5	6·00	6987·50	28·7	1714	200541·3	2287
6	7·48	9081·25	35·6	2198	323292·5	2846
7	8·93	8443·75	34·5	2736	291309·4	2871
8	10·45	8168·75	29·7	3212	242611·9	2518
9	11·96	7625·00	30·3	3683	231037·5	2434
10	13·46	7583·75	34·4	4168	260881·0	2794
11	14·96	9381·25	38·9	4665	364930·6	3158
12	16·45	7643·75	35·7	5213	272881·9	3166
13	17·94	9243·75	38·5	5774	355884·5	3420
14	19·43	9218·75	41·6	6336	383500·0	4069
15	20·93	11293·75	44·7	6990	504830·6	4545
16	22·43	12150·00	48·3	7668	426845·0	5315
17	23·93	12668·75	52·7	8414	667643·1	6327
18	25·41	12943·75	56·4	9221	730027·5	7108
19	26·91	12181·25	58·7	10086	715626·4	7032
20	28·40	12193·75	54·0	10890	658162·5	6944
21	29·90	12556·25	59·4	11705	745841·3	7106
22	31·42	11843·75	58·5	12649	692859·4	7567
23	32·92	11437·50	78·3	13546	895556·3	9046
24	34·43	13687·50	82·9	14729	1134693·8	—
25	35·93	15131·25	133·9	16424	2026074·4	—
26	37·42	13993·75	164·4	18615	2400572·5	—
27	38·93	12606·25	149·4	20929	1883373·8	20226
28	40·44	12287·50	156·6	23176	1924222·5	17667
29	41·95	9950·05	134·2	25353	1335296·7	15018
30	43·46	10118·75	139·6	27456	1412577·5	12245
31	44·96	5362·50	137·6	29374	737880·0	9211
32	46·45	5581·25	142·7	31477	796454·4	6895
33	47·94	4087·50	104·6	33621	427552·5	4230
34	49·45	943·75	43·2	34764	40770·0	1272
35	50·65	0·00	0·0	36185	0·0	0

Diese Darstellung der Normalkurve kann somit trotz dieser kleinen Ungenauigkeit als für den Gardasee charakteristisch angesehen werden und stellt so mit großer Annäherung die

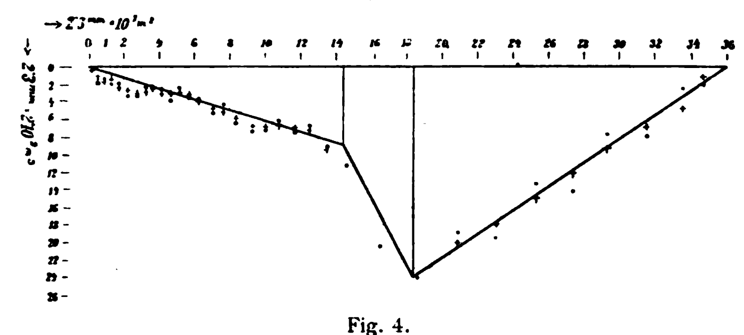


Fig. 4.

wirkliche Normalkurve vor. Die Normalkurve des Gardasees kann somit als ein Dreieck betrachtet werden, dessen eine Seite nach oben eingeknickt ist.

In dieser Form ist die Normalkurve auch der Chrystal'schen Theorie zugänglich, jedoch mußten hier die entsprechenden

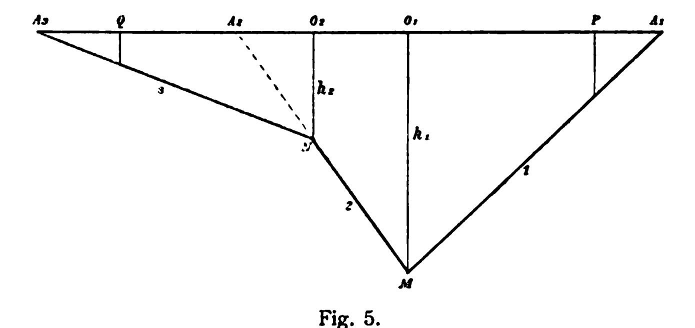


Fig. 5.

Ableitungen erst durchgeführt werden, da sie für solche komplizierte Normalkurven nicht gegeben worden sind. Wir gehen jetzt somit auf die theoretischen Entwicklungen für eine derartige Normalkurve über. Fig. 5 gibt uns die Form unserer Normalkurve wieder, auf die wir die früher im ersten Abschnitte abgeleiteten Beziehungen anwenden müssen.

In dieser Form können wir jedoch infolge später auszuführender Grenzbedingungen die Normalkurve nicht benutzen, sondern müssen vorerst einen allgemeineren Fall behandeln, aus dem dann ohneweiters der Fall, den wir gerade brauchen, folgt. Wir betrachten nämlich zuerst eine Normalkurve, wie Fig. 5 darstellt, bei welcher mittels vertikaler gerader Linien die Spitzen an den Enden A_1 und A_3 abgestumpft sind. Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein: Es sei dem absoluten Betrag nach:

$$O_1A_1 = a_1, \quad O_1A_2 = a_2, \quad O_2A_3 = a_3, \quad O_1M = h_1$$
$$O_1P = p, \quad O_1O_2 = r, \quad O_2Q = q, \quad O_2N = h_2.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung legen wir nun zwei rechtwinklige Koordinatensysteme in unsere Normalkurve. Der Ursprung des Koordinatensystems I liege in O_1; die x_1-Achse sei positiv in der Richtung nach A_1, die y_1-Achse positiv in der Richtung von h_1. Auf dieses Koordinatensystem I beziehen wir stets das Stück der Normalkurve rechts vom Punkte O_2. Der Punkt O_2 gehöre sowohl zum ersten wie zum zweiten System. Als Ursprung des Koordinatensystems II wählen wir den Punkt O_2 selbst. Seine Koordinaten in bezug auf das Koordinatensystem I sind $(-r, O)$; die positive x_2-Achse falle in die Richtung O_2O_1 und die positive y_2-Achse in die Richtung O_2N. Auf dieses zweite System beziehen wir stets das Stück der Normalkurve links von O_2. Dann lauten die Gleichungen der Geraden 1 und 2 (für das Koordinatensystem I):

$$h_1(x) = h_1\left(1 - \frac{x}{a_1}\right), \tag{11}$$

beziehungsweise

$$h_2(x) = h_1\left(1 + \frac{x}{a_2}\right). \tag{12}$$

Für die Gerade 3 gilt die Gleichung (II. Koordinatensystem):

$$h_3(x) = h_2\left(1 + \frac{x}{a_3}\right). \tag{13}$$

Unter den Größen a_2, r, h_1 und h_2 besteht nun noch die Bedingungsgleichung

$$a_2 = r\frac{h_1}{h_1 - h_2}.$$

Durch die Gleichungen (11), (12) und (13) ist nun die Normalkurve vollständig gegeben. Um nun die früher bewiesenen Gleichungen (10) auf diesen Fall anwenden zu können, führen wir folgende Beziehungen ein:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{2na_1}{\sqrt{gh_1}}\sqrt{1-\frac{x}{a_1}}, \quad \alpha_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad \beta_1 = \frac{2a_1}{\sqrt{gh_1}}\sqrt{1-\frac{p}{a_1}} \\
\omega_2 &= \frac{2na_2}{\sqrt{gh_1}}\sqrt{1+\frac{x}{a_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_1}}, \quad \beta_2 = \frac{2a_2}{\sqrt{gh_1}}\sqrt{1-\frac{r}{a_2}} \\
\omega_3 &= \frac{2na_3}{\sqrt{gh_2}}\sqrt{1+\frac{x}{a_3}}, \quad \alpha_3 = \frac{2a_3}{\sqrt{gh_2}}, \quad \beta_3 = \frac{2a_3}{\sqrt{gh_2}}\sqrt{1-\frac{q}{a_3}}
\end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

Die Gleichungen (10) reduzieren sich somit für unseren Fall auf folgende sechs Beziehungen und geben uns die horizontalen und vertikalen Verlagerungen eines Wasserteilchens. Die ersten vier Gleichungen beziehen sich auf das Koordinatensystem I, die letzten zwei auf das Koordinatensystem II.

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1\omega_1 &= \{A_1 J_1(\omega_1) + B_1 Y_1(\omega_1)\}\sin n(t-\tau) \\
\zeta_1 &= \frac{2a_1}{h_1}\{A_1 J_0(\omega_1) + B_1 Y_0(\omega_1)\}\sin n(t-\tau) \\
\xi_2\omega_2 &= \{A_2 J_1(\omega_2) + B_2 Y_1(\omega_2)\}\sin n(t-\tau) \\
\zeta_2 &= -\frac{2a_2}{h_1}\{A_2 J_0(\omega_2) + B_2 Y_0(\omega_2)\}\sin n(t-\tau) \\
\xi_3\omega_3 &= \{A_3 J_1(\omega_3) + B_3 Y_1(\omega_3)\}\sin n(t-\tau) \\
\zeta_3 &= -\frac{2a_3}{h_2}\{A_3 J_0(\omega_3) + Y_0(\omega_3)\}\sin n(t-\tau)
\end{aligned}\right\}. \quad (15)$$

In diesen Gleichungen sind nun die sieben Konstanten A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 und n durch die Grenzbedingungen unserer

Normalform zu bestimmen, jedoch kommt es nur auf die Verhältnisse $A_i : B_i$ an, haben somit einen willkürlichen Faktor zur Verfügung.

Die Grenzbedingungen, welche die Gleichungen (15) erfüllen müssen, sind folgende: Es muß, da ξ an beiden Enden des Sees in P und Q stets verschwinden soll, für

$$x_1 = p,\ \xi_1 = 0 \text{ und für } x_2 = -q,\ \xi_3 = 0 \tag{16}$$

sein.

Außerdem folgt für den Punkt O_1 aus Stetigkeitsgründen, daß für

$$x_1 = 0 \quad \xi_1 = \xi_2 \text{ und } \zeta_1 = \zeta_2 \tag{17}$$

sein muß.

Weiter aus demselben Grunde für den Punkt O_2 für

$$x_1 = -r \text{ und } x_2 = 0 \quad \xi_2 = \xi_3 \text{ und } \zeta_2 = \zeta_3. \tag{18}$$

Diese sechs Grenzbedingungen, welche die Gleichungen (15) erfüllen müssen, geben sechs Bedingungsgleichungen zur Ermittlung der Verhältnisse der Konstanten A_i und B_i und n. Der Weg zur Ermittlung dieser Konstanten ist nun folgender:

Aus der Grenzbedingung (16) folgen die Gleichungen:

$$A_1 J_1(n\beta_1) + B_1 Y_1(n\beta_1) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{B_1}{A_1} = -\frac{J_1(n\beta_1)}{Y_1(n\beta_1)} \tag{19}$$

$$A_3 J_1(n\beta_3) + A_3 Y_1(n\beta_3) = 0 \qquad \qquad \frac{B_3}{A_3} = -\frac{J_1(n\beta_3)}{Y_1(n\beta_3)}. \tag{20}$$

Die Grenzbedingungen (17) und (18) geben folgende weitere Gleichungen; dabei ist zu bemerken, daß $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}$ ist, was in denselben bereits berücksichtigt wurde.

$$\frac{A_1}{a_1}\,\frac{1}{Y_1(n\beta_1)}\left[Y_1(n\beta_1)J_1(n\alpha_1) - Y_1(n\alpha_1)J_1(n\beta_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_2}\left[A_2 J_1(n\alpha_2) + B_2 Y_1(n\alpha_2)\right] \tag{21}$$

$$A_1 a_1 \frac{1}{Y_1(n\beta_1)}[Y_1(n\beta_1)J_0(n\alpha_1)-Y_0(n\alpha_1)J_1(n\beta_1)] =$$
$$= -a_2[A_2 J_0(n\alpha_2)+B_2 Y_0(n\alpha_2)] \quad (22)$$

$$\frac{A_3}{\alpha_3}\frac{1}{Y_1(n\beta_3)}[Y_1(n\beta_3)J_1(n\alpha_3)-Y_1(n\alpha_3)J_1(n\beta_3)] =$$
$$= \frac{1}{\beta_2}[A_2 J_1(n\beta_2)+B_2 Y_1(n\beta_2) \quad (23)$$

$$\frac{a_3}{h_2} A_3 \frac{1}{Y_1(n\beta_3)}[Y_1(n\beta_3)J_0(n\alpha_3)-Y_0(n\alpha_3)J_1(n\beta_3)] =$$
$$= \frac{a_2}{h_1}[A_2 J_0(n\beta_2)+B_2 Y_0(n\beta_2)]. \quad (24)$$

Fassen wir nun diese Gleichungen zusammen und bezeichnen wir für die weitere Folge die Determinanten

$$J_1(n\alpha_i)Y_1(n\beta_i)-J_1(n\beta_i)Y_1(n\alpha_i) = P_1(\alpha_i,\beta_i) \quad i=1 \text{ und } 3$$
$$J_0(n\alpha_i)Y_1(n\beta_i)-J_1(n\beta_i)Y_0(n\alpha_i) = P_0(\alpha_i,\beta_i) \quad i=1 \text{ und } 3,$$

so erhalten wir folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a_2}{a_1}\frac{A_1}{Y_1(n\beta_1)}P_1(\beta_1,\alpha_1) &= A_2 J_1(n\alpha_2)+B_2 Y_1(n\alpha_2)\\
\frac{\beta_2}{\alpha_3}\frac{A_3}{Y_1(n\beta_3)}P_1(\beta_3,\alpha_3) &= A_2 J_1(n\beta_2)+B_2 Y_1(n\beta_2)\\
-\frac{a_1}{a_2}\frac{A_1}{Y_1(n\beta_1)}P_0(\beta_1,\alpha_1) &= A_2 J_0(n\alpha_2)+B_2 Y_0(n\alpha_2)\\
\frac{a_3}{a_2}\frac{h_1}{h_2}\frac{A_3}{Y_1(n\beta_3)}P_0(\beta_3,\alpha_3) &= A_2 J_0(n\beta_2)+B_2 Y_0(n\beta_2)
\end{aligned}\right\}. \quad (25)$$

Diese vier Gleichungen (25) können nun als vier homogene Gleichungen mit den Unbekannten A_i, B_i aufgefaßt werden und können somit nur existieren, falls die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet. Auf diese Art erhalten wir dann die Bestimmungsgleichung für die Schwingungszahl n. Diese Determinante der Koeffizienten lautet nun:

$$\begin{vmatrix} -\frac{a_2}{a_1}\frac{P_1(\beta_1\alpha_1)}{Y_1(n\beta_1)}; & 0 & ; J_1(n\alpha_2); & Y_1(n\alpha_2) \\ 0 & ; -\frac{\beta_2}{\alpha_3}\frac{P_1(\beta_3\alpha_3)}{Y_1(n\alpha_3)} & ; J_1(n\beta_2); & Y_1(n\beta_2) \\ \frac{a_2}{a_1}\frac{P_0(\beta_1\alpha_1)}{Y_1(n\beta_1)}; & 0 & ; J_0(n\alpha_2); & Y_0(n\alpha_2) \\ 0 & ; -\frac{a_3}{a_2}\frac{h_1}{h_2}\frac{P_0(\beta_3\alpha_3)}{Y_1(n\beta_3)}; & J_0(n\beta_2); & Y_0(n\beta_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Diese Determinante enthält, wie wir sehen, bloß die Unbekannte n, ist somit bereits die Bedingungsgleichung für die Schwingungszahlen. Die Wurzeln n_i dieser Gleichung geben uns die Schwingungsdauer der einzelnen Seiches mittels der Formel $T_i = \frac{2\pi}{n_i}$.

Die Gleichung (26) für die Schwingungsdauer gilt für die Normalkurve Fig. 5, bei welcher die Spitzen bei A_1 und A_3 abgestumpft sind. Gehen wir nun zu unserem Falle über, bei welchem die Normalkurve des Sees bei A_1 und A_3 spitz zuläuft, so bildet diese Form insoweit einen Spezialfall der früheren Darstellung, als wir diesen Fall in den früheren überführen können, wenn wir bloß $p = a_1$ und $q = a_3$ setzen. Dies bedeutet jedoch in unseren Gleichungen (14) nichts anderes als

$$\beta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \beta_3 = 0.$$

Weiter müssen wir noch folgende Beziehung in Erwägung ziehen:

$$\lim_{\beta_1=0} \frac{J_1(n\beta_1)}{Y_1(n\beta_1)} = 0.$$

Benutzen wir nun dies für die einzelnen Glieder der Determinante (26), so erhalten wir folgende Vereinfachungen:

$$\lim_{\beta_1=0} \frac{P_1(\beta_1, \alpha_1)}{Y_1(n\beta_1)} = J_1(n\alpha_1) \qquad \lim_{\beta_1=0} \frac{P_0(\beta_1, \alpha_1)}{Y_1(n\beta_1)} = J_0(n\alpha_1)$$

$$\lim_{\beta_1=0} \frac{P_1(\beta_3, \alpha_3)}{Y_1(n\beta_3)} = J_1(n\alpha_3) \qquad \lim_{\beta_1=0} \frac{P_0(\beta_3, \alpha_3)}{Y_1(n\beta_3)} = J_0(n\alpha_3).$$

Die Determinante (26) erhält sodann die Form:

$$\begin{vmatrix} -\frac{a_2}{a_1} J_1(n\alpha_1); & 0 & ; J_1(n\alpha_2); & Y_1(n\alpha_2) \\ 0 & ; -\frac{\beta_2}{\alpha_3} J_1(n\alpha_3) & ; J_1(n\beta_2); & Y_1(n\beta_2) \\ \frac{a_1}{a_2} J_0(n\alpha_1); & 0 & ; J_0(n\alpha_2); & Y_0(n\alpha_2) \\ 0 & ; -\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2} J_0(n\alpha_3); & J_0(n\beta_2); & Y_0(n\beta_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Entwickeln wir nun diese Determinante nach den Gliedern der ersten Spalte, transformieren die Unterdeterminanten auf weitere Unterdeterminanten zweiter Ordnung und bezeichnen dann die Determinanten

$$\left.\begin{aligned} J_0(n\beta_2)Y_0(n\alpha_2) - J_0(n\alpha_2)Y_0(n\beta_2) &= Q_0 \\ J_0(n\beta_2)Y_1(n\alpha_2) - J_1(n\alpha_2)Y_0(n\beta_2) &= Q_1 \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$\left.\begin{aligned} J_0(n\alpha_2)Y_1(n\beta_2) - J_1(n\beta_2)Y_0(n\alpha_2) &= R_0 \\ J_1(n\alpha_2)Y_1(n\beta_2) - J_1(n\beta_2)Y_1(n\alpha_2) &= R_1 \end{aligned}\right\}, \quad (29)$$

so erhalten wir schließlich als Gleichung zur Ermittlung der Schwingungsdauer der einzelnen Perioden die Beziehung:

$$\frac{a_2}{a_1} J_1(n\alpha_1)\left[\frac{\beta_2}{\alpha_3} J_1(n\alpha_3)Q_0 + \frac{a_3}{a_2}\,\frac{h_1}{h_2} J_0(n\alpha_3)R_0\right] +$$
$$\frac{a_1}{a_2} J_0(n\alpha_1)\left[\frac{\beta_2}{\alpha_3} J_1(n\alpha_3)Q_1 + \frac{a_3}{a_2}\,\frac{h_1}{h_2} J_0(n\alpha_3)R_1\right] = 0. \quad (30)$$

Hierin ist n nach Gleichungen (28) und (29) auch in den Größen Q_0, Q_1, R_0 und R_1 enthalten; zur Ermittlung der Schwingungsdauer n_i ergibt sich somit eine transzendente Gleichung in n. Die Nullstellen dieser Gleichung (30) geben uns die Werte der einzelnen Perioden aus der Beziehung $T_i = \frac{2\pi}{n_i}$.

Die weitere Entwicklung kann nur mehr mit numerischen Koeffizienten erfolgen und theoretisch ist somit das Problem, soweit es sich um die Ermittlung der Schwingungsperioden handelt, für eine derartige Normalkurve gelöst. Betreffs der Lage der Knotenpunkte kommen wir noch auf diese theoretische Entwicklung zurück. Wir können noch eine Probe an unserer Gleichung (30) anwenden, indem wir annehmen, die Seite 2 der Normalkurve falle mit der Seite 3 zusammen; dadurch erhält die Normalkurve die Dreiecksgestalt und für eine solche Normalkurve hat bereits Chrystal die theoretische Untersuchungen geliefert. Setzen wir

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_2}{a_3} \quad \text{und} \quad a_2 = a_3,$$

so ist dieser Übergang bereits mathematisch ausgedrückt; daraus folgt weiters dann $\beta_2 = \alpha_2$ und daraus $Q_0 = 0$ und $R_1 = 0$. Nehmen wir diese Bedingungen in Gleichung (30) auf, so reduziert sich diese auf die Form

$$a_3^2 J_1(n\alpha_1) J_0(n\alpha_3) + a_1^2 J_0(n\alpha_1) J_1(n\alpha_3) = 0, \tag{31}$$

welche vollständig mit der von Chrystal auf Seite 637 für eine solche Normalkurve gegebenen Periodengleichung (79) übereinstimmt.

Gehen wir nun über zur Berechnung der Konstanten A_i, B_i und betrachten wir die Gleichungen (19) und (20), so sehen wir sofort, daß für $\beta_1 = \beta_3 = 0$ sowohl B_1 wie B_3 verschwindet. Da es weiters bei A_1 und A_3 nicht auf eine Konstante ankommt, so können wir auf ihre Berechnung verzichten und berechnen nun bloß A_2 und B_2. Diese können wir aus den Gleichungen (21) und (22) sofort berechnen, wenn wir uns für n stets eine Wurzel der Gleichung (30) eingesetzt vorstellen; es ergeben sich dann die Gleichungen

$$A_2 = +A_1 \frac{a_2^2 J_1(n\alpha_1) Y_0(n\alpha_2) + a_1^2 J_0(n\alpha_1) Y_1(n\alpha_2)}{a_1 a_2 (J_1(n\alpha_2) Y_0(n\alpha_2) - J_0(n\alpha_2) Y_1(n\alpha_2))}$$

$$B_2 = -A_1 \frac{a_2^2 J_1(n\alpha_1) J_0(n\alpha_2) + a_1^2 J_0(n\alpha_1) J_1(n\alpha_2)}{a_1 a_2 \{J_1(n\alpha_2) Y_0(n\alpha_2) - J_0(n\alpha_2) Y_1(n\alpha_2)\}}$$

und somit A_2 und B_2 proportional A_1.

Die Bewegungsgleichungen (15) reduzieren sich so auf folgendes Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 \omega_1 &= A J_1(\omega_1) \sin n(t-\tau) \\
\zeta_1 &= \frac{2a_1}{h_1} A J_0(\omega_1) \sin n(t-\tau) \\
\xi_2 \omega_2 &= A J_1(\omega_2) \sin n(t-\tau) \\
\zeta_2 &= -\frac{2a_2}{h_1} A J_0(\omega_2) \sin n(t-\tau) \\
\xi_3 \omega_3 &= A J_1(\omega_3) \sin n(t-\tau) \\
\zeta_3 &= -\frac{2a_3}{h_2} J_0(\omega_3) \sin n(t-\tau)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Diese Gleichung (32) werden wir später benützen, um die Lage der Knotenlinien im Gardasee zu berechnen, und gehen nunmehr über zur numerischen Berechnung der Schwingungsdauer der einzelnen Wellen.

3. Berechnung der Schwingungsdauer der Seiches.

Durch Gleichung (30) ist uns die Möglichkeit gegeben, die Schwingungsdauer der einzelnen Seichesformen des Gardasees zu berechnen. Wir müssen nun die Nullstellen dieser Gleichung zu berechnen suchen. Die Methode, die hier angewendet wurde, ist die gewöhnliche Methode zur Bestimmung von Wurzeln transzendenter Gleichungen. Man trachtet die Nullstelle zwischen einem negativen und einem positiven Werte einzuschließen und sucht nach der Newton'schen Methode sodann durch fortwährende Annäherung an die Nullstelle diese bis zur gewünschten Genauigkeit zu ermitteln.

Aus der Normalkurve des Gardasees ergeben sich folgende Konstante, welche wir zur Auflösung der Gleichung (30) benötigen; als Einheit wurde für alle folgenden Größen stets $10^6 m^2$, beziehungsweise $10^6 m^3$ gewählt.

$a_1 = 178 \qquad \log a_1 = 2 \cdot 25042$

$a_2 = 64 \qquad \log a_2 = 1 \cdot 80618$

$a_3 = 145 \qquad \log a_3 = 2 \cdot 16137$

$$r = 27 \qquad \log r = 1 \cdot 43136$$
$$h_2 = 8490 \qquad \log h_2 = 3 \cdot 92891$$
$$h_1 = 23500 \qquad \log h_1 = 4 \cdot 37107.$$

Aus diesen Größen ergaben sich nun nach den Formeln (14) für α_1, α_2, α_3 und β_2 folgende Werte:

$$\log \alpha_1 = 2 \cdot 87017 \qquad \log \alpha_3 = 3 \cdot 00020$$
$$\log \alpha_2 = 2 \cdot 42593 \qquad \log \beta_2 = 2 \cdot 23854.$$

Die Koeffizienten in der Gleichung (30) besitzen sodann folgende Zahlenwerte:

$$\log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0 \cdot 55576 - 1 \qquad \log \frac{\beta_2}{\alpha_3} = 0 \cdot 23834 - 1$$

$$\log \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = 0 \cdot 79735 \qquad \log \frac{a_1}{a_2} = 0 \cdot 44424.$$

Da wir bereits im voraus wissen, daß eine Nullstelle der Gleichung (30) ungefähr bei einem Werte $n = \frac{2\pi}{T_1}$ sein soll und wir für T_1 den Wert von zirka 43 Minuten = 2580 Sekunden einsetzen können, so ergibt sich daraus die Größenordnung von n_1, bei welcher wir die erste Wurzel der Gleichung zu erwarten haben; es ergibt sich $n = 0 \cdot 002435$.

Wir wählen somit

$$n = 0 \cdot 0024$$

und suchen nun, welchen Wert die linke Seite der Gleichung (30) besitzt, falls wir für n diese Zahl einsetzen. Wir können voraussagen, daß die Kurve, welche die linke Seite der Gleichung gleich y gesetzt darstellt, von negativ unendlich sich zuerst der Nullachse nähert, da für $\lim n = 0$:

$$J_0 = 1, \quad J_1 = 0, \quad Y_0 = -\infty, \quad Y_1 = -\infty$$

und weiters

$$\lim_{n=0} y_\infty = -\infty$$

wird.

Setzen wir nun $n = 0\cdot0024$, so wird:

$$n\alpha_1 = 1\cdot78,\quad n\alpha_2 = 0\cdot64,\quad n\alpha_3 = 2\cdot41,\quad n\beta_2 = 0\cdot42.$$

Aus den Tafeln der Bessel'schen Funktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$, welche E. Meissel[1] für das Intervall $x = 0\cdot0$ bis $x = 15\cdot5$ berechnet hat und aus den Tafeln der Neumannschen Funktionen für $Y_0(x)$ und $Y_1(x)$, die B. A. Smith[2] für das Intervall $x = 0\cdot0$ bis $x = 10\cdot2$ gegeben hat, ergeben sich nun folgende Werte für die in Gleichung (30) vorkommenden Größen:

$$\begin{aligned}
J_1(2\cdot41) &= +0\cdot5180, & J_1(0\cdot42) &= +0\cdot2054,\\
J_0(2\cdot41) &= -0\cdot0027, & J_0(0\cdot42) &= +0\cdot9564,\\
J_1(1\cdot78) &= +0\cdot5811, & Y_1(0\cdot64) &= -1\cdot8380,\\
J_0(1\cdot78) &= +0\cdot3516, & Y_0(0\cdot64) &= -0\cdot3032,\\
J_1(0\cdot64) &= +0\cdot3039, & Y_1(0\cdot42) &= -2\cdot6584,\\
J_0(0\cdot64) &= +0\cdot9002, & Y_0(0\cdot42) &= -0\cdot7863.
\end{aligned}$$

Die Größen Q_0, R_1, Q_1, R_0 nehmen sodann folgende Werte an:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= +0\cdot4178, & Q_1 &= -1\cdot5189,\\
R_0 &= -2\cdot3308, & R_1 &= -0\cdot4304.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun diese Werte in Gleichung (30) ein und rechnen wir das Resultat, so erhalten wir

$$y_{24} = -0\cdot1098.$$

Da für kleinere Werte von n alle vorkommenden Größen absolut größer und somit das Resultat auch negativ größer ausfallen muß, können wir annehmen, daß für $n = 0\cdot0024$ noch nicht die Nullachse erreicht wurde; wir sehen jedoch, daß $n = 0\cdot0024$ bereits einen Wert liefert, welcher der Null nicht allzufern liegen kann.

Wir wählen nun $n = 0\cdot0025$ und versuchen jetzt den Wert y_{25} zu berechnen. Die näheren Detailrechnungen, wie

---

[1] Abhandl. der kgl. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1888.

[2] The messenger of mathematics, Bd. 26, 1896/1897, p. 99 ff.

früher, hier mitzuteilen, finde ich für überflüssig und möchte bloß folgende Werte angeben; $n = 0 \cdot 0025$ gibt:

$$n\alpha_1 = 1 \cdot 85, \quad n\alpha_2 = 0 \cdot 67, \quad n\alpha_3 = 2 \cdot 51, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 43,$$

weiter:

$$Q_0 = +0 \cdot 4393, \quad R_0 = -2 \cdot 2680,$$
$$Q_1 = -1 \cdot 4426, \quad R_1 = -0 \cdot 4541$$

und schließlich

$$y_{25} = +0 \cdot 1909.$$

Zwischen $n = 0 \cdot 0024$ und $n = 0 \cdot 0025$ muß somit die erste Nullstelle der Gleichung (30) liegen.

Wir berechnen nun den Wert der linken Seite der Gleichung (30) für $n = 0 \cdot 00245$. Man erhält dafür:

$$n\alpha_1 = 1 \cdot 82, \quad n\alpha_2 = 0 \cdot 65, \quad n\alpha_3 = 2 \cdot 45, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 42,$$

$$Q_0 = 0 \cdot 4329, \quad R_0 = -2 \cdot 3273,$$
$$Q_1 = -1 \cdot 5009, \quad R_1 = -0 \cdot 4448$$

und schließlich

$$n = 0 \cdot 00245, \quad y_{24 \cdot 5} = +0 \cdot 0171.$$

Wählen wir nun $n = 0 \cdot 00244$, so wird jetzt

$$n\alpha_1 = 1 \cdot 81, \quad n\alpha_2 = 0 \cdot 65, \quad n\alpha_3 = 2 \cdot 44, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 42$$

und

$$n = 0 \cdot 00244, \quad y_{24 \cdot 4} = -0 \cdot 01328.$$

Es liegt daher die erste Nullstelle n_1 zwischen

$$0 \cdot 00244 < n_1 < 0 \cdot 00245.$$

Trägt man sich diese Werte y graphisch auf und verbindet sie mit einer Geraden, so finden wir, daß die erste Nullstelle beim Werte $n_1 = 0 \cdot 002445$ eintritt. Mit diesem Werte berechnen wir nun die Schwingungsdauer der Grundwelle aus der Formel $T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$; es ergibt sich $T_1 = 2569 \cdot 85$ Sekunden oder

$$T_1 = \mathbf{42 \cdot 83} \text{ Minuten.}$$

Nehmen wir nun $n = 0 \cdot 0032$, so ist jetzt

$$n\alpha_1 = 2 \cdot 37, \quad n\alpha_2 = 0 \cdot 85, \quad n\alpha_3 = 3 \cdot 20, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 55,$$

$$Q_0 = +0 \cdot 4287, \quad R_0 = -1 \cdot 7477,$$
$$Q_1 = -1 \cdot 1155, \quad R_1 = -0 \cdot 4426.$$

Gleichung (30) gibt dann

$$n = 0 \cdot 0032, \quad y_{32} = +0 \cdot 71042.$$

Die Abweichung von der Nullachse ist somit ziemlich bedeutend; wir wählen daher $n = 0 \cdot 0034$; dafür ergibt sich

$$n\alpha_1 = 2 \cdot 52, \quad n\alpha_2 = 0 \cdot 91, \quad n\alpha_3 = 3 \cdot 40, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 59,$$

$$Q_0 = +0 \cdot 4259, \quad R_0 = -1 \cdot 6198,$$
$$Q_1 = -1 \cdot 0342, \quad R_1 = -0 \cdot 4396$$

und schließlich

$$n = 0 \cdot 0034, \quad y_{34} = +0 \cdot 5005.$$

Wir befinden uns somit bereits im absteigenden Aste der Kurve; für $n = 0 \cdot 0036$ wird

$$n\alpha_1 = 2 \cdot 67, \quad n\alpha_2 = 0 \cdot 96, \quad n\alpha_3 = 3 \cdot 60, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 62.$$

$$Q_0 = +0 \cdot 4287, \quad R_0 = -1 \cdot 5325,$$
$$Q_1 = -0 \cdot 9711, \quad R_1 = -0 \cdot 4428$$

und zum Schlusse

$$y_{36} = +0 \cdot 2265.$$

$n = 0 \cdot 0041$ gibt nun

$$n\alpha_1 = 3 \cdot 04, \quad n\alpha_2 = 1 \cdot 09, \quad n\alpha_3 = 4 \cdot 10, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 71,$$

$$Q_0 = +0 \cdot 4183, \quad R_0 = -1 \cdot 3206,$$
$$Q_1 = -0 \cdot 8431, \quad R_1 = -0 \cdot 4314$$

und $n = 0 \cdot 0041$:

$$y_{41} = -0 \cdot 4134.$$

Es liegt somit eine Nullstelle zwischen $n = 0 \cdot 0036$ und $n = 0 \cdot 0041$. Wählen wir $n = 0 \cdot 0037$, so ist

$$n\alpha_1 = 2 \cdot 74, \quad n\alpha_2 = 0 \cdot 99, \quad n\alpha_3 = 3 \cdot 70, \quad n\beta_2 = 0 \cdot 64,$$

$$Q_0 = +0\cdot 4274, \quad R_0 = -1\cdot 4801,$$
$$Q_1 = -0\cdot 9400, \quad R_1 = -0\cdot 4411$$

und

$$y_{37} = +0\cdot 0851.$$

Dagegen gibt $\varkappa = 0\cdot 0038$:

$$\varkappa\alpha_1 = 2\cdot 82, \quad \varkappa\alpha_2 = 1\cdot 00, \quad \varkappa\alpha_3 = 3\cdot 80, \quad \varkappa\beta_2 = 0\cdot 64,$$

$$Q_0 = +0\cdot 4366, \quad R_0 = -1\cdot 4755,$$
$$Q_1 = -0\cdot 9253, \quad R_1 = -0\cdot 4534$$

und

$$y_{38} = -0\cdot 0741.$$

Die Nullstelle erhalten wir für $0\cdot 0037 < \varkappa < 0\cdot 038$.

Trägt man die Werte y in ein Koordinatensystem ein und verbindet sie mit einer Geraden, so erhalten wir als Nullkoordinate den Wert

$$\varkappa_2 = 0\cdot 00374.$$

Diese **zweite** Nullstelle gibt als Schwingungsdauer der ersten Oberwelle den Wert $T_2 = \frac{2\pi}{\varkappa_2} = 1680\cdot 0$ Sekunden oder

$$T_2 = \mathbf{28\cdot 00} \text{ Minuten.}$$

So wurden weitere Punkte der Kurve für verschiedene Werte von $\varkappa$ ermittelt, deren volle Wiedergabe hier keinen Zweck hätte, so ergab sich:

$$\text{für } \varkappa = 0\cdot 0041 \ldots \quad y_{41} = -0\cdot 4230.$$
$$\text{» } \varkappa = 0\cdot 0044 \ldots \quad y_{44} = -0\cdot 7206.$$
$$\text{» } \varkappa = 0\cdot 0049 \ldots \quad y_{49} = -0\cdot 1831.$$
$$\text{» } \varkappa = 0\cdot 0053 \ldots \quad y_{53} = +0\cdot 1783.$$

Zwischen den zwei letzten Werten liegt somit die dritte Nullstelle; linear interpoliert, ergibt sich diese bei einem Werte $\varkappa_3 = 0\cdot 00519$. Die Schwingungsdauer der zweiten Oberwelle ist dann $T_3 = \frac{2\pi}{\varkappa_3} = 1210\cdot 6$ Sekunden oder

$$T_3 = \mathbf{20\cdot 18} \text{ Minuten.}$$

Die vierte Nullstelle liegt weiters zwischen den Werten

$$n = 0\cdot0069 \quad \text{und} \quad n = 0\cdot0071.$$

Dafür wird nämlich

$$y_{69} = +0\cdot1864,$$
$$y_{71} = -0\cdot0330.$$

Der Nullwert tritt somit ein bei $n = 0\cdot00706$; die Schwingungsdauer der dritten Oberwelle beträgt somit

$$T_4 = \frac{2\pi}{n_4} = 88\cdot98 \text{ Sekunden oder}$$

$$T_4 = \mathbf{14\cdot83} \text{ Minuten.}$$

Weitere Nullstellen wurden nicht berechnet, doch konnte man aus den Maximis und Minimis der Funktionen J_0, J_1; Y_0 und Y_1 leicht entnehmen, daß weitere Nullstellen für eine Schwingungsdauer von zirka 12 und 10 Minuten eintreten. Trägt man die korrespondierenden Werte von n_i und y_i in ein Koordinatensystem ein und legt durch die Punkte eine Kurve, so gibt diese den Verlauf der Funktion y und gleichzeitig auch die Nullstellen der Gleichung (30). Fig. 6 stellt diese Kurve dar.

Als theoretische Schwingungsdauer der einzelnen Seichesformen des Gardasees erhalten wir somit nach der Chrystalschen Theorie die Perioden von

$$T_1 = 42\cdot83 \text{ Minuten.}$$
$$T_2 = 28\cdot00 \quad \text{»}$$
$$T_3 = 20\cdot18 \quad \text{»}$$
$$T_4 = 14\cdot83 \quad \text{»}$$

Als theoretische Schwingungsverhältnisse dieser Wellen ergeben sich folgende:

$\frac{T_1}{T_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{T_3}{T_1}$	$\frac{T_4}{T_1}$
1	0·6538	0·4712	0·3462

Zum Vergleich möchte ich hier noch jene Verhältniszahlen der einzelnen Perioden zur Grundperiode mitteilen, die Chrystal für ein gleichschenkeliges Dreieck als Normalkurve

erhalten hat; sie lassen sich nämlich theoretisch berechnen, ohne daß bestimmte Dimensionen des Dreiecks als Normalkurve gegeben sind. Sie sind folgende:

$\frac{T_1}{T_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{T_3}{T_1}$	$\frac{T_4}{T_1}$	$\frac{T_5}{T_1}$	$\frac{T_6}{T_1}$
1	0·6276	0·4357	0·3428	0·2779	0·2365

$\frac{T_7}{T_1}$	$\frac{T_8}{T_1}$
0·2040	0·1805

Diese Verhältniszahlen besitzen eine gewisse Ähnlichkeit mit unseren berechneten und wir sehen besonders deutlich,

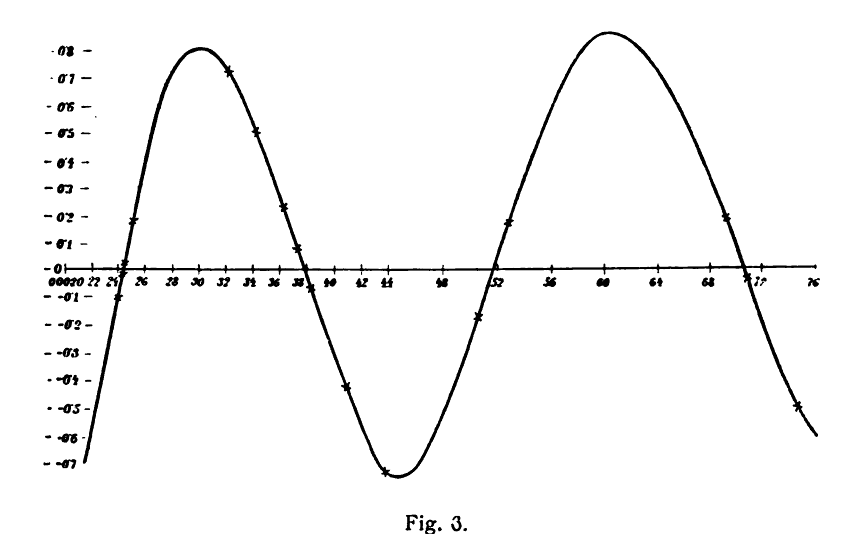


Fig. 3.

daß der Unterschied der zwei Normalkurven sich bloß wesentlich in den ersten Oberwellen bemerkbar macht und späterhin sich abschwächt. Benützen wir von der vierten Oberwelle an diese Verhältniszahlen zur Berechnung der Schwingungsdauer

der oberen Wellen, so werden wir keinen großen Fehler begehen, der übrigens desto kleiner wird, je höhere Wellen wir berechnen. Natürlich müssen wir für $T_1 = 42 \cdot 83$ Minuten setzen. Wir erhalten sodann als Schwingungsdauer der plurinodalen Perioden

$$T_5 = 11 \cdot 9 \text{ Minuten.}$$
$$T_6 = 10 \cdot 1 \quad »$$
$$T_7 = 8 \cdot 75 \quad »$$
$$T_8 = 7 \cdot 6 \quad »$$

Nachdem wir nun die Schwingungsdauer der Seichesformen nach der Chrystal'schen Theorie berechnet haben, erübrigt noch, um einen Vergleich zwischen der Chrystal'schen und Du-Boys'schen Theorie ziehen zu können, die Schwingungsdauer der einzelnen Perioden auch nach der Du-Boys-schen Formel zu berechnen.

Wählen wir auch hier die Normalkurve als Talweg des Sees, so müssen wir die Du-Boys'sche Formel darauf anwenden. Sie lautet:

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{g}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \tag{33}$$

wobei l die Entfernung $A_3 A_1$ ist (Fig. 5). Das Koordinatensystem verlegen wir diesmal in A_3. Die Gleichungen der Geraden werden sodann folgendermaßen lauten:

Für die Gerade 3 gilt $h = \frac{h_2}{a_3} x,$

» » » 2 » $h = \frac{h_1}{a_2} x + h_1 \left(\frac{a_2 - b}{a_2} \right),$

» » » 1 » $h = -\frac{h_1}{a_1} x + h_1 \left(\frac{a_1 + b}{a_1} \right),$

wobei wir die Länge $A_3 O = b$ gesetzt haben. Gleichung (33) erhält sodann die Form:

$$T_1 = \frac{2}{\sqrt{g}}\left[\int_0^{a_3} \frac{dx}{\sqrt{\frac{h_2}{a_3}x}} + \int_{a_3}^{b} \frac{dx}{\sqrt{\frac{h_1}{a_2}x + \frac{h_1(a_2-b)}{a_2}}} + \right.$$

$$\left. + \int_b^{b+a_1} \frac{dx}{\sqrt{-\frac{h_1}{a_1}x + h_1\left(\frac{a_1+b}{a_1}\right)}}\right].$$

Führen wir die Integration aus, so wird

$$T_1 = \frac{4}{\sqrt{g}}\left[\frac{a_3}{\sqrt{h_2}} + \frac{a_2}{\sqrt{h_1}}\left\{1 - \sqrt{\frac{a_3+a_2-b}{a_2}}\right\} + \frac{a_1}{\sqrt{g}}\right].$$

Beachten wir nun die Gleichungen (14) und wenden wir sie hier an, so erhält die Du-Boys'sche Formel für diese Normalkurve die einfache Form

$$T_1 = 2(\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2).$$

Die Berechnung der Schwingungsdauer T_1 gestaltet sich somit, da wir die numerischen Werte von α_1, α_2, α_3, β_2 bereits besitzen, sehr einfach; es ergibt sich:

$$T_1 = 3671\cdot 0 \text{ Sekunden} = \mathbf{61\cdot 18} \text{ Minuten.}$$

Da sich nun nach der Du-Boys'schen Theorie die einzelnen Perioden wie die geraden Zahlen verhalten, so erhalten wir für den Gardasee nach der Du-Boys'schen Theorie folgende Seichesformen:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
61·18	30·59	20·39	15·29	12·2	10·2	8·7	7·6

Dagegen nach der Chrystal'schen Theorie:

42·28	28·00	20·13	14·83	11·9	10·1	8·75	7·6

Der Unterschied ist somit in der Grundschwingung und in den ersten Oberwellen bedeutend; so weicht z. B. die Grundschwingung nach der Du-Boys'schen Theorie um fast 45% von der nach der Chrystal'schen Theorie berechneten ab. Es gibt somit die Du-Boys'sche Theorie in unserem Falle viel

größere Werte für die Schwingungen unseres Sees als die aus der Chrystal'schen Theorie gefolgerten.

4. Vergleich der Beobachtungsergebnisse und der Resultate der Theorie.

Die Beobachtungsergebnisse, wie sie im zweiten Abschnitt dieser Abhandlung mitgeteilt sind, können wir nun mit den Ergebnissen sowohl der Chrystal'schen, wie der Du-Boys'schen Theorie vergleichen. Nachfolgende Tabelle gibt in übersichtlicher Weise die Zusammenstellung der beobachteten und theoretischen Werte.

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Chrystalscher Theorie kann als vollständig betrachtet werden. Die Werte der Du-Boys'schen Theorie weichen bedeutend von den Beobachtungsresultaten ab und zeigen deutlich, welchen Einfluß die Bodenkonfiguration des Sees auf die Schwingungsdauer der einzelnen Seiches besitzt. Namentlich die Grundschwingung und die ersten Oberwellen werden von der Bodengestaltung des Sees, von seinem Tiefe- und Breiteverhältnis beeinflußt und an unserem See derart, daß wir eine bedeutend größere Schwingungsdauer für die ersten Seiches erhalten, als der Wirklichkeit entspricht.

Die einzelnen Werte der Chrystal'schen Theorie stimmen fast vollständig mit den beobachteten überein und die Abweichungen der theoretischen Werte von den beobachteten beträgt nicht mehr als $2^0/_0$. Nur die zweite Oberwelle T_3 zeigt eine Abweichung von $8^0/_0$, indem theoretisch sich ein etwas kleinerer Wert ergibt als die Beobachtungen zeigen. Warum gerade diese Oberwelle von der Theorie etwas abweicht, während alle anderen fast genau dieselben Werte geben, läßt sich nicht leicht einsehen, da sich an der Theorie nichts ändern läßt, andrerseits aber der beobachtete Wert wegen der ziemlich häufig vermessenen Welle als sicher feststehend anzunehmen ist. Die Abweichung zeigt sich besonders deutlich bei den Verhältnissen der Schwingungsdauer $\frac{T_i}{T_1}$.

In Minuten	Beobachteter Wert	Theoretischer Wert		$\frac{T_i}{T_1}$ beobachtet	$\frac{T_i}{T_1}$ erste theoretische Annäherung	$\frac{T_i}{T_1}$ berechnet aus der Normalkurve	$\frac{T_i}{T_1}$ nach Du-Boys
		nach Chrystal	nach Du-Boys				
T_1	42·92	42·83	61·18	1	1	1	1
T_2	28·58	28·00	30·59	0·6657	0·6276	0·6538	0·5000
T_3	21·79	20·10	20·39	0·5076	0·4357	0·4693	0·3333
T_4	14·95	14·83	15·29	0·3485	0·3428	0·3462	0·2500
T_5	12·07	11·9	12·2	0·2905	0·2779	—	0·2000
T_6	9·87	10·1	10·2	0·2299	0·2365	—	0·1666
T_7	8·80	8·75	8·7	0·2050	0·2040	—	0·1428
T_8	7·33	7·6	7·6	0·1700	0·1805	—	0·1250

Weiters ersehen wir aus der Theorie, daß die Valentin'sche Erklärung für die Periode von 28·58 Minuten nicht aufrecht zu erhalten ist; diese Welle ergibt sich als die zweiknotige Welle des Gardasees, während die Welle von zirka 22 Minuten nicht die binodale, sondern die dreiknotige Seiche ist. Schwingungen von der Form, wie Valentin sie in seiner vorläufigen Mitteilung erklärt, existieren am Gardasee und höchstwahrscheinlich an anderen Seen wohl auch nicht, weil nicht einzusehen ist, warum ein und dasselbe Ende des Sees für eine Schwingungsart sogenannt frei, für eine zweite jedoch als gebunden zu betrachten ist.

Auch als transversale Welle des Sees, wie E. Teglio aus den Beobachtungen von Desenzano schließen zu können glaubte, kann sie nicht betrachtet werden, da solche des südlichen Seebeckens sich wegen der Entfernung von Riva wohl gar nicht bemerkbar machen würden und solche des nördlichen Teiles des Sees eine theoretische Schwingungsdauer von höchstens 3·1 Minuten besitzen können. Da übrigens in Riva sehr häufig Schwingungen von im Mittel 3·06 Minuten Dauer vermessen wurden, so ist wohl sicher anzunehmen, daß diese Welle die transversale Schwingung des nördlichen Gardaseeteiles ist; die Welle von zirka 28 Minuten ist, wie aus der Chrystal'schen Theorie unzweideutig folgt, die binodale Schwingung des Sees.

Wir erhalten somit zusammenfassend folgendes:

In vollständiger Übereinstimmung mit Chrystal's hydrodynamischer Theorie der Seiches ergeben sich für den Gardasee folgende Seichesformen:

Eine einknotige Hauptschwingung mit.		42·92	Minuten	Dauer.
Eine zweiknotige Schwingung mit		28·58	»	»
Eine dreiknotige	» »	21·79	»	»
Eine vierknotige	» »	14·83	»	»

Außerdem noch der Reihe nach plurinodale Seiches mit einer Schwingungsdauer von 12·07, 9·87, 8·80, 7·33 Minuten.

Die oft auftretende Seiche von zirka 3 Minuten Dauer kann als transversale Schwingung des nördlichen Teiles des Gardasees betrachtet werden.

5. Die Lage der Knotenlinien.

Zur vollständigen Untersuchung der Seespiegelschwankungen eines Sees gehört neben der Bestimmung der Schwingungsdauer der einzelnen Seiches noch die Ermittlung der Lage der Knotenlinien der einzelnen Seiches. Zu diesem Zwecke ist es jedoch vor allem erforderlich, von mannigfachen Orten des Sees gleichzeitige Beobachtungen zu besitzen. Da uns aber nur Registrierungen aus einem einzigen Orte zur Verfügung standen, so war es nicht möglich, experimentell die Lage der Knotenlinien der einzelnen Wellen zu ermitteln; da indes von Seite der »Società fisica italiana«, soviel mir bekannt ist, die Untersuchungen am Gardasee noch fortgeführt werden, und zwar an verschiedenen Orten zugleich, so wird nach Bearbeitung des ganzen Materials es möglich sein, die Lage der Knotenlinien auch für den Gardasee mit einiger Sicherheit festzulegen. Obwohl jedoch keine Beobachtungen noch vorliegen und daher theoretische Ergebnisse an der Hand der Beobachtungen nicht geprüft werden können, sei es mir gestattet, noch im folgenden nach der Chrystal'schen Theorie die Lage der Knotenlinien zu bestimmen.

Die Knotenlinien sind solche Stellen im See, an denen keine vertikale Bewegung der Wassermassen vorhanden ist. Die Bedingungsgleichungen für solche Punkte folgen somit direkt aus den Gleichungen (32) der früher dargelegten Untersuchungen, indem wir die Voraussetzung erfüllen, daß ζ für solche Punkte verschwinden soll. Es ergibt sich sodann die Lage der Knotenlinien aus den Bedingungsgleichungen (34)

Für das Stück OA_1 der Normalkurve aus der Gleichung $J_0(\omega_1) = 0$.
Für das Stück OA_2 der Normalkurve aus der Gleichung $J_0(\omega_2) = 0$.
Für das Stück $A_2 A_3$ der Normalkurve aus der Gleichung $J_0(\omega_3) = 0$. (34)

Bezeichnen wir nun die Wurzeln von $J_0(x) = 0$ mit $j_1, j_3, j_5, \ldots j_{2n-1}$ und mit ${}_r x_\nu$ die Entfernung (von O aus) des ν^{ten} Knotenpunktes (gezählt in der Richtung von A_1 nach O), so ist infolge der Gleichungen (14) und der Gleichungen (34):

$$\left.\begin{array}{ll} n_\nu \alpha_1 \sqrt{1 - \frac{{}_r x_\nu}{a_1}} = j_{2r-1} & j_{2r-1} < n_\nu \alpha_1 \\ n_\nu \alpha_2 \sqrt{1 - \frac{{}_r x_\nu}{a_2}} = j_{2r-1} & j_{2r-1} < n_\nu \alpha_2 \\ n_\nu \alpha_3 \sqrt{1 - \frac{{}_r x_\nu}{a_3}} = j_{2r-1} & j_{2r-1} < n_\nu \alpha_3 \end{array}\right\} \quad (35)$$

Zur Berechnung von ${}_r x_\nu$ benötigen wir vor allem somit die Wurzeln j_{2r-1} der Gleichung $J_0(x) = 0$.

Dieselben sind, soweit wir sie brauchen, folgende:

$$j_1 = 2 \cdot 405 \quad j_3 = 5 \cdot 520 \quad j_5 = 8 \cdot 654.$$

Somit gilt für die einknotige Welle: $n_1 = 0 \cdot 002445$

$$\begin{array}{ll} \log n_1 \alpha_1 = 0 \cdot 25845 & \\ \log n_1 \alpha_2 = 0 \cdot 81421 - 1 & \text{und} \quad \log j_1 = 0 \cdot 38112 \\ \log n_1 \alpha_3 = 0 \cdot 38848. & \end{array}$$

Da $n_1 \alpha_1$ sowohl wie $n_1 \alpha_2$ kleiner als j_1 sind, so gibt es keinen Knotenpunkt in den Teilen der Normalkurve OA_1 und OA_2; dagegen ist für das Stück $A_2 A_3$ $j_1 < n_1 \alpha_1$; also folgt aus der dritten Gleichung (35)

$${}_1 x_1 = 0 \cdot 2322\, a_3 \quad \text{oder} \quad {}_1 x_1 = 33 \cdot 67$$

vom Punkte A_2 nach dem Punkte A_3 gezählt. Vom Punkte A_3 aus gezählt liegt somit, da $A_3 A_2 = 145$ ist, die Knotenlinie der einknotigen Welle bei der Koordinate $v = 111 \cdot 3$, das ist zwischen dem 20. und 21. Querschnitt unserer Normalkurve (siehe Tabelle auf p. 750).

Für die zweiknotige Welle ist $n_2 = 0 \cdot 00374$, also

$$\begin{array}{ll} \log n_2 \alpha_1 = 0 \cdot 44304 & \\ \log n_2 \alpha_2 = 0 \cdot 99880 - 1 & \text{und} \quad \log j_1 = 0 \cdot 38112 \\ \log n_2 \alpha_3 = 0 \cdot 57307. & \end{array}$$

Daher liegt ein Knotenpunkt in $\overline{OA_1}$ und ein zweiter in $\overline{A_2 A_3}$. Aus den Gleichungen (35) erhält man sodann ${}_2x_1 = 44 \cdot 17$ vom Punkte O nach rechts für den ersten und ${}_2x_2 = 85 \cdot 08$ vom Punkte A_2 nach links für den zweiten Knotenpunkt. Also liegt der rechte Knotenpunkt bei einer Abszisse $v = 226$, d. i. zwischen dem 27. und 28. Querschnitt; dagegen hat der linke eine Koordinate $v = 60$, liegt somit in der Mitte zwischen dem 13. und 14. Querschnitt.

Für die dreiknotige Welle ist $n_3 = 0 \cdot 00520$ und wir erhalten mit ähnlichen Rechnungen wie für die früheren Punkte folgende Lage der Knotenlinien:

erste Knotenlinie bei $v = 31$ zwischen dem 7. und 8. Querschnitt,
zweite Knotenlinie bei $v = 163$ zwischen dem 24. und 25. Querschnitt,
dritte Knotenlinie bei $v = 291$ zwischen dem 30. und 31. Querschnitt.

Fur die vierknotige Welle ist $n_4 = 0 \cdot 00706$; die Rechnungen ergeben

die erste Knotenlinie bei $v = 17$ zwischen dem 4. und 5. Querschnitt,
die zweite Knotenlinie bei $v = 87$ zwischen dem 17. und 18. Querschnitt,
die dritte Knotenlinie bei $v = 180$ zwischen dem 25. und 26. Querschnitt,
die vierte Knotenlinie bei $v = 326$ zwischen dem 32. und 33. Querschnitt.

Um nun einen Überblick über die Lage der Knotenlinien für die einzelnen Seiches zu bekommen, kann man sich die nunmehr berechnete Lage in eine Karte des Gardasees eintragen. Anschaulicher und einfacher läßt sich dies darstellen, wenn man folgendermaßen verfährt. Man bezeichnet die Mitte der Normalkurve mit 0, das rechte Ende mit +1, das linke mit —1 und rechnet die Abweichung der einzelnen Knotenpunkte von

der Mitte der Normalkurve. Führt man dies aus, so erhält man für die einzelnen Seichesformen des Gardasees folgende Verteilung der Knotenlinien:

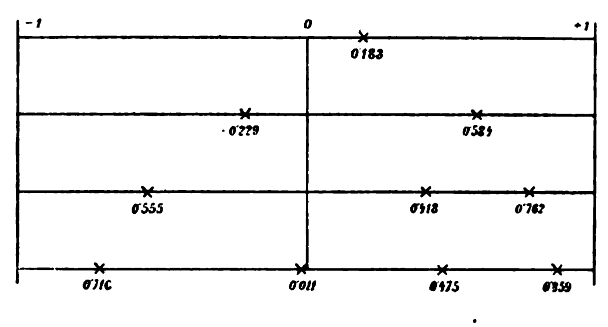


Fig. 7.

Daraus ersehen wir, daß die Knotenlinie der uninodalen Seiche nicht in die Mitte des Sees fällt, sondern gegen Süden zu beträchtlich verschoben erscheint, und zwar fällt sie nicht im mindesten zusammen mit der tiefsten Stelle des Sees, sondern erscheint stark gegen die tiefste Stelle der Normalkurve zu verschoben zu sein; im See selbst finden wir aus der Theorie diese Knotenlinie ungefähr 2·3 *km* nördlich der Dörfer Toscolano und Torri. Auch die Lage der Knotenpunkte der binodalen Seiche ist etwas unsymmetrisch; der erste Knotenpunkt ist vom Nordende des Sees zirka 18·7 *km* entfernt, der zweite dagegen vom Südende bloß 10·7 *km*; so liegt der erste Knotenpunkt bei der Verbindungslinie Punta Forbesicle und dem Dorfe Castello di Brenzone, die zweite Knotenlinie etwas nördlich von der Verbindungslinie Punta Belvedere und dem Dorfe Lazise.

Am stärksten gestört erscheinen die drei Knotenlinien der zweiten Oberschwingung. Die mittlere Knotenlinie fällt nämlich zusammen mit der tiefsten Stelle der Normalkurve und liegt ungefähr 10·7 *km* südlich von der Mitte des Sees, während man geneigt wäre anzunehmen, daß dieser mittlere Knotenpunkt mit der Mitte des Sees zusammenfallen sollte. Die mittlere Knotenlinie verläuft hier von Gardone-Riviera nach der

Punta S. Vigilio. Die anderen zwei Knotenlinien liegen deshalb auch stark unsymmetrisch zur mittleren.

Bei den Knotenlinien aller Seiches des Gardasees bemerkt man überhaupt die Eigentümlichkeit, daß sie sich mehr auf den südlichen Teil des Sees beschränken, während der nördliche, langgestreckte Teil verhältnismäßig wenig Knotenlinien aufweist.

Diese theoretische Untersuchung über die Lage der Knotenlinien der einzelnen Seiches kann, wie bereits erwähnt, aus Mangel an gleichzeitigen Aufnahmen an mannigfachen Orten des Gardasees nicht mit den Beobachtungsergebnissen verglichen werden und so muß es weiteren zukünftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben, diese Resultate zu bestätigen oder nicht.

IV. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die Reduktion der Limnographenaufzeichnungen in Riva am Gardasee und die Anwendung der Du-Boys'schen sowie der Chrystal'schen Theorie der Seiches auf diesen See haben wichtige Ergebnisse geliefert und uns gezeigt, daß auch so große Seen wie der Gardasee öfter einer theoretischen Behandlung fähig sind. Es kann nicht geleugnet werden, daß es sicher etwas Mißliches ist, aus den Registrierungen einer einzigen Station auf die Seiches des ganzen Sees schließen zu wollen, um so mehr als heutzutage durch Vervollkommnung der Instrumente zur Seichesaufnahme eines Sees diese Arbeit wesentlich erleichtert wurde. Mit den früher mitgeteilten Untersuchungen ist jedoch noch lange nicht das Seichesproblem des Gardasees vollständig gelöst und vielleicht erst durch die Ergebnisse der Seichesaufnahme des Gardasees durch die Società fisica italiana werden, wenn gleichzeitige Beobachtungen der Schwingungsformen des Sees an manchen und verschiedenen Orten vorgenommen werden, manche noch zweifelhafte und noch offenstehende Fragen in diesem Problem beantwortet werden. Bei diesen neueren Untersuchungen wird wohl an erster Stelle die Bestimmung der Lage der Knoten-

linien der einzelnen Seiches treten müssen, sowie die Ermittlung eventueller Nebenschwingungen der Bucht von Peschiera und Garda und weiterer transversaler Seiches des südlichen Seebeckens.

Zum Schlusse seien hier noch die Ergebnisse der früher dargelegten Untersuchungen kurz zusammengefaßt:

1. Für die Ermittlung der Schwingungsdauer der einzelnen Seichesformen des Gardasees liegen für den nördlichen Teil des Sees Registrierungen eines Sarasin'schen Limnographen in Riva vor. Sie umfassen die Zeit von November 1902 bis August 1904 mit geringen Unterbrechungen am Anfange dieser Periode und wesentlichen Störungen am Schlusse derselben. Zur Verfügung stand somit ein Registriermaterial von 18 Monaten.

2. Die Reduktion der Limnogramme von Riva am Gardasee ergab eine größere Anzahl von Schwingungsformen, wovon einige fast beständig in den Registrierungen des Apparates zu finden sind, während andere verhältnismäßig selten auftreten.

3. Als Grundschwingung des Gardasees wurde eine Seiche von 42·92 Minuten Schwingungsdauer ermittelt; diese Periode ergab sich als Mittelwert von 5495 Schwingungen, die sich auf 222 Schwingungsserien verteilen.

Als erste Oberschwingung lieferten die Reduktionen der Limnogramme eine Welle von 28·58 Minuten; auch diese wurde verhältnismäßig oft gemessen; jedoch ist ihre Anwesenheit im Limnogramm öfter nicht durch den bloßen Anblick der Registrierkurve ersichtlich. Die sehr oft zur Ermittlung der wahren Schwingungsdauer dieser Seiche benützte »Restmethode« bewährte sich hier in vorzüglicher Weise und ergab auch die besten Resultate.

4. Als weitere zwei Oberschwingungen zeigten sich noch Seiches von 21·79 und 14·96 Minuten Dauer. Sie treten fast nur in Verbindung mit der Hauptschwingung auf, jedoch hier ziemlich häufig und öfter auch mit bedeutenden Amplituden.

Neben diesen fast stets vorhandenen Wellen wurden noch plurinodale Schwingungen gefunden; sie zeigen der Reihe nach eine Schwingungsdauer von 12·07, 9·87, 8·80, 7·33 Minuten. Auffallend erscheint es, daß die mehrknotigen Wellen von 9·87

und 7·33 Minuten öfter vermessen wurden als die beiden anderen, so daß eine Ungleichförmigkeit in der Häufigkeit des Auftretens dieser mehrknotigen Welle vorhanden zu sein scheint.

Außer diesen Wellen trat noch ziemlich häufig eine Welle von 3·06 Minuten Dauer auf; diese Schwingung kann einerseits eine mehrknotige Seiches sein, andrerseits, was auch wahrscheinlich ist, auf eine Querschwingung des nördlichen Teiles des Sees zurückzuführen sein.

5. Die Ermittlung der für die Anwendung der exakten Chrystal'schen Theorie notwendigen Normalkurve des Gardasees lieferte eine Kurve von nicht besonders komplizierter Form. Die einzelnen Teile des Sees lassen sich, abgesehen von kleinen Unregelmäßigkeiten, durch drei gerade Linien darstellen, so daß sich die Normalkurve des Gardasees als ein Dreieck ergibt, dessen eine Seite noch eingeknickt ist. In dieser Form ist somit der Gardasee einer exakteren theoretischen Behandlung zugänglich.

6. Die Anwendung der Chrystal'schen Theorie auf diese Normalkurve ergab zur Ermittlung der Schwingungsdauer der einzelnen Seiches eine etwas komplizierte transzendente Gleichung. Die ersten vier Nullstellen dieser Gleichung traten bei folgenden Werten der Veränderlichen n ein:

$$n_1 = 0{\cdot}002445,$$
$$n_2 = 0{\cdot}00374,$$
$$n_3 = 0{\cdot}00519,$$
$$n_4 = 0{\cdot}00706.$$

Die Chrystal'sche Theorie liefert somit als Schwingungsdauer der ersten vier Seiches folgende Werte:

$$T_1 = 42{\cdot}83 \text{ Minuten.}$$
$$T_2 = 28{\cdot}00 \quad \text{»}$$
$$T_3 = 20{\cdot}18 \quad \text{»}$$
$$T_4 = 14{\cdot}83 \quad \text{»}$$

Nimmt man die Normalkurve aus bloß zwei Geraden bestehend an, so erhält man unter der Voraussetzung $T_1 = 42{\cdot}83$ noch weitere vier Oberwellen mit einer Schwingungsdauer von

11·9, 10·1, 8·75, 7·6 Minuten.

7. Die Anwendung der Du-Boys'schen Theorie auf den Gardasee lieferte bedeutend höhere Werte für die Schwingungsdauer der einzelnen Wellen; so ergaben sich folgende Perioden:

61·18, 30·59, 20·39, 15·29, 12·2, 10·2, 8·7, 7·6 Minuten.

8. Der Vergleich der Beobachtungsergebnisse und der Resultate der Theorie zeigte, daß eine fast vollständige Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Chrystal'schen hydrodynamischen Theorie und den Beobachtungen vorhanden ist, während die Du-Boys'schen Werte wesentlich von den beobachteten abweichen und durchwegs größer sind als diese. So weichen namentlich die Werte der ersten Seiches sehr stark von den beobachteten ab, während für die kleineren Wellen der Unterschied sich allmählich verkleinert. Die Übereinstimmung ist bei der Chrystal'schen Theorie für alle Wellen fast gleich gut; nur die zweite Oberwelle zeigt in der Theorie einen etwas niedrigeren Wert als in den Beobachtungen.

9. Die Chrystal'sche Theorie liefert somit das Schlußergebnis, daß die Seiche von

42·92 Minuten Dauer die uninodale Schwingung
28·58 » » » binodale »
21·79 » » » dreiknotige »

und

14·96 » » » vierknotige »

des Gardasees ist, während die übrigen Wellen der Reihe nach die fünf-, sechs-, sieben- und achtknotigen Seiches des Gardasees darstellen. Die Schwingung von 3·06 Minuten Dauer ist höchstwahrscheinlich als Querseiches des nördlichen Seeteiles zu erklären.

Aus diesen Ergebnissen folgt weiter, daß die Erklärung, welche Valentin in dem vorläufigen Bericht über die Seespiegelschwankungen des Gardasees für die Schwingung von zirka 30 Minuten gegeben hat, nicht aufrecht zu erhalten ist und daß diese Welle nichts anderes als die binodale Schwingung des Sees darstellt.

10. Zum Schlusse dieser Untersuchungen wurde auf theoretischem Wege die Lage der Knotenlinien der einzelnen Seiches ermittelt. Es ergab sich, daß diese ziemlich unsymmetrisch zur Mitte des Sees liegen und die Tendenz aufweisen, sich mehr gegen das südliche, breite und flache Ende des Sees zu verschieben, während auf den nördlichen, langgestreckten Teil des Sees verhältnismäßig weniger Knotenlinien entfallen. Eine nähere Bestätigung dieser Ergebnisse an der Erfahrung kann erst durch weitere experimentelle Untersuchungen am Gardasee, die bereits von der Società fisica italiana in Angriff genommen wurden und noch fortgesetzt werden, erfolgen.

Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

Hann J., Die tägliche Variation der Windstärke auf den Berggipfeln in Südindien in ihrer Beziehung zu der täglichen Luftdruckschwankung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 555—618.

Windstärke, deren tägliche Variation auf den Berggipfeln in Südindien in ihrer Beziehung zu der täglichen Luftdruckschwankung.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 555—618.

Luftdruckschwankung, tägliche und tägliche Variation der Windstärke.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 555—618.

Berggipfel, tägliche Variation der Windstärke auf denselben und deren Beziehung zur täglichen Luftdruckschwankung.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 555—618.

Haitinger L. und **Ulrich K.**, Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. I. Bericht über die Verarbeitung von Uranpecherzrückständen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Ulrich K. und **Haitinger L.**, Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. I. Bericht über die Verarbeitung von Uranpecherzrückständen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Radiumbariumgemische, Vergleich der auf aktinometrischem und chemischem Wege gefundenen Atomgewichte.
Haitinger L. und Ulrich K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Radiumbromid, Verhalten beim Aufbewahren.
Haitinger L. und Ulrich K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Hann J., Die tägliche Variation der Windstärke auf den Berggipfeln im Südindien in ihrer Beziehung zu der täglichen [illegible]
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa Abt., Bd. 117 (1908), p. 555—618.

Windstärke, deren tägliche Variation auf der Berggipfeln in Südindien in ihrer Beziehung zu der täglichen Luftdruckschwankung.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908) p. 555—618.

Luftdruckschwankung, tägliche und tägliche Variation der Windstärke.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 555—618.

Berggipfel, tägliche Variation der Windstärke auf den und deren Beziehung zur täglichen Luftdruckschwankung.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 555—618.

Haitinger L. und Ulrich K., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. I. Bericht über die Verarbeitung von Uranpecherzrückständen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Ulrich K. und Haitinger L., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. I. Bericht über die Verarbeitung von Uranpecherzrückstände.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Radiumbariumgemische, Vergleich der auf aktinometrischem und chemischem Wege gefundenen Atomgewichte.
Haitinger L. und Ulrich K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Radiumbromid, Verhalten beim A[illegible]ahren.
Haitinger L. und Ulrich K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Radiumverbindungen und radioaktive Substanzen, Darstellung in größerem Maßstabe aus Uranpecherz.
Haitinger L. und Ulrich K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Uranpecherzrückstände, Verarbeitung von 10.000 *kg* auf radioaktive Substanzen.
Haitinger L. und Ulrich K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619 - 630.

Majcen G., Über eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung und einige daraus abgeleitete Eigenschaften der rationalen ebenen Kurven 3. und 4. Ordnung.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644.

Fläche 3. Ordnung (allgemeine), ihre Abbildung und einige daraus abgeleitete Eigenschaften der rationalen ebenen Kurven 3. und 4. Ordnung.
Majcen G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644.

Rationale ebene Kurven 3. und 4. Ordnung (einige ihrer Eigenschaften) und eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung.
Majcen G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644.

Kurven 3. und 4. Ordnung (rationale, ebene), einige ihrer Eigenschaften und eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung.
Majcen G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644

Barrau J. A., Spezielle Kummer'sche Konfigurationen im Maßpolytop.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 645—652.

Konfigurationen, Spezielle Kummer'sche — im Maßpolytop.
Barrau J. A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 645—652.

Dimensionen, Geometrie höherer —. Spezielle Kummer'sche Konfigurationen im Maßpolytop.
Barrau J. A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 645—652.

Radiumverbindungen und radioaktive Substanzen, Darstellung in größerem Maßstabe aus Uranpecherz.

Haitinger L. und **Ulrich** K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619—630.

Uranpecherzrückstände, Verarbeitung von 10.000 kg auf radioaktive Substanzen.

Haitinger L. und **Ulrich** K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 619-630.

Majcen G., Über eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung und einige daraus abgeleitete Eigenschaften der rationalen ebenen Kurven 3. und 4. Ordnung.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644.

Fläche 3. Ordnung (allgemeine), ihre Abbildung und einige daraus abgeleitete Eigenschaften der rationalen ebenen Kurven 3. und 4. Ordnung.

Majcen G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644.

Rationale ebene Kurven 3. und 4. Ordnung (einige ihrer Eigenschaften) und eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung.

Majcen G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644

Kurven 3. und 4. Ordnung (rationale, ebene), einige ihrer Eigenschaften und eine Abbildung der allgemeinen Fläche 3. Ordnung.

Majcen G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 631—644

Barrau J. A., Spezielle Kummer'sche Konfigurationen im Maßpolytop.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 645—652.

Konfigurationen, Spezielle Kummer'sche — im Maßpolytop.

Barrau J. A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 645—652.

Dimensionen, Geometrie höherer —. Spezielle Kummer'sche Konfigurationen im Maßpolytop.

Barrau J. A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 645—652

Schweidler E. v., Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVIII. Über die Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 653—664.

Atmosphärische Elektrizität, Beiträge zur Kenntnis der —. XXVIII. Über die Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre.
Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 653—664.

Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVIII.
Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 653—664.

Przibram K., Über die Beweglichkeit der Ionen in Dämpfen und ihre Beziehung zur Kondensation.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Beweglichkeit der Ionen in Dämpfen und ihre Beziehung zur Kondensation.
Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Kondensation von Dämpfen auf Ionen und die Beweglichkeit der Dampfionen.
Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Ionen der Dämpfe, ihre Beweglichkeit und Beziehung zur Kondensation.
Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Molekelradius und Ionenradius in Dämpfen.
Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Schweidler E. v., **Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVIII.** Über die Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 653—664.

Atmosphärische Elektrizität, Beiträge zur Kenntnis der —. XXVIII. Über die Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre.

Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 653—664.

Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXVIII.

Schweidler E., v., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 653—664.

Przibram K., Über die Beweglichkeit der Ionen in Dämpfen und ihre Beziehung zur Kondensation.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Beweglichkeit der Ionen in Dämpfen und ihre Beziehung zur Kondensation.

Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Kondensation von Dämpfen auf Ionen und die Beweglichkeit der Dampfionen.

Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Ionen der Dämpfe, ihre Beweglichkeit und Beziehung zur Kondensation.

Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Molekelradius und Ionenradius in Dämpfen.

Przibram K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 665—688.

Mertens F., Über die Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 689—690.

Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichungen.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 689—690.

Kreisteilungsgleichungen, Irreduktibilität derselben.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 689—690.

Hasenöhrl F., Zur Berechnung der elektromagnetischen Masse des Elektrons.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 691—696.

Elektron, zur Berechnung des elektromagnetischen Masse desselben.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 691—696.

Elektromagnetische Masse des Elektrons.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 691—696.

Defant A., Über die stehenden Seespiegelschwankungen (Seiches) in Riva am Gardasee.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 697—780.

Seespiegelschwankungen, Über die stehenden — (Seiches) in Riva am Gardasee.
Defant A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 697—780.

Seiches, Über die stehenden Seespiegelschwankungen in Riva am Gardasee.
Defant A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 697—780.

Mertens F., Über die Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichungen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 689—690.

Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichungen.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 689—690.

Kreisteilungsgleichungen, Irreduktibilität derselben.
Mertens F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 689—690.

Hasenöhrl F., Zur Berechnung der elektromagnetischen Masse des Elektrons.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 691—696.

Elektron, zur Berechnung des elektromagnetischen Masse desselben.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 691—696.

Elektromagnetische Masse des Elektrons.
Hasenöhrl F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 691—696.

Defant A., Über die **stehenden** Seespiegelschwankungen (Seiches) in Riva am **Gardasee.**
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 697—780.

Seespiegelschwankungen, Über die stehenden – (Seiches) in Riva am Gardasee.
Defant A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 697—780.

Seiches, Über die stehenden Seespiegelschwankungen in Riva am Gardasee.
Defant A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 697—780.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. VI. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Zur Meteorologie der Adria

von

J. Hann,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juni 1908.)

Ziemlich in der Mitte des Adriatischen Meeres liegt die kleine Felseninsel Pelagosa, auf welcher seit Juni 1894 eine meteorologische Station tätig ist. Die Ergebnisse der meteorologischen Aufzeichnungen daselbst können mit vollem Rechte als Repräsentanten des Klimas des mittleren Teiles der Adria angesehen werden. Pelagosa liegt unter 42° 23'5 N Br. und 16° 15'3 E v. Greenwich. Die Entfernung vom nächsten Küstenpunkte Italiens, d. i. die Halbinsel mit dem Monte Gargano, beträgt 55 *km*, von jenem Dalmatiens 100 *km*, von der Insel Lissa 75 *km*, von der meteorologischen Station Lesina rund 90 *km*.

Die Insel besteht aus einem schmalen, von Ost nach West streichenden Bergrücken von 1390 *m* Maximallänge und nur 340 *m* größter Breite. Die größte Seehöhe erreicht sie im Monte Castello mit 87 *m*, auf welchem sich der Leuchtturm und die meteorologische Station befindet. Das Leuchtfeuer, die Laterne, befindet sich in 116 *m* Seehöhe und wird trotzdem bei heftigen Sciroccostürmen zuweilen vom Gischt der Brandungswellen noch erreicht. An der West-, Süd- und Ostküste stürzen die Felswände steil in die See ab, der nördliche Abhang ist sanfter geneigt.[1]

[1] Näheres über die Insel Pelagosa findet man durch Kärtchen und Abbildungen erläutert in der »Deutschen Rundschau für Geographie und Statistik«, XVIII, 1896, von Groller v. Mildensee, k. k. Oberstleutnant, p. 159.

Aus dieser kurzen Darstellung wird man entnehmen können, daß die Landfläche der Insel auf die meteorologischen Elemente an der Station so gut wie keinen Einfluß haben kann und daß wir demnach die Station als eine »pelagische« bezeichnen können.

Es ist mir lange nicht gelungen, eine meteorologische Station auf Pelagosa in Tätigkeit zu setzen. Ich hatte zwar schon im Mai 1886 meteorologische Instrumente an das Leuchtturmpersonal abgegeben, wegen den Schwierigkeiten aber, sich mit den Beobachtern in regelmäßige Verbindung zu setzen und selbe zu instruieren, konnten die Beobachtungen nicht aufgenommen werden. Erst als die k. u. k. Marinesektion auch die Förderung dieses wissenschaftlichen Unternehmens in gewohnter Weise auf sich nahm und die in der Adria kreuzenden Schiffe auf mein Ansuchen den Auftrag erhielten, von Zeit zu Zeit auf Pelagosa zu landen und die Beobachtungsjournale zu übernehmen, konnten die Beobachtungen in Gang gebracht werden. Die Instruktion der Beobachter, der Leuchtturm-Assistenten, übernahm Herr v. Triulzi, damals k. u. k. Schiffsleutnant.

Die Station ist mit Instrumenten einer Station II. Ordnung ausgerüstet, hat aber zudem einen Barographen erhalten. Die Beobachtungen werden angestellt nach den Instruktionen des österreichischen meteorologischen Beobachtungsnetzes. Sie begannen mit dem 11. Juni 1894 und sind seither ununterbrochen fortgesetzt worden.

Die k. k. Seebehörde in Triest, welcher das Personal der Semaphorstation untersteht, hat in sehr dankenswerter Weise die Übernahme der regelmäßigen meteorologischen Aufzeichnungen durch die Beamten der Seeleuchte nicht bloß gestattet, sondern auch wesentlich gefördert. Leiter der Station ist der Semaphorassistent I. Klasse Giuseppe Coda.

Im nachfolgenden habe ich versucht, die bisherigen Beobachtungsergebnisse der Station Pelagosa zu bearbeiten, als einen Beitrag zur Meteorologie der Adria. Die Lage der meteorologischen Station ist ja fast zu vergleichen mit jener auf einem in der Mitte der Adria verankerten Schiffe.

Ende Jänner 1898 wurde die Station von Seite des k. u. k. Hydrographischen Amtes in Pola besucht und die Barometerkorrektion ermittelt.[1]

Im Jahre 1904 wurde die Station zweimal inspiziert. Das erste Mal am 11. Juni durch Herrn k. u. k. Oberst R. v. Sterneck bei Gelegenheit der Aufstellung eines selbstregistrierenden Flutmessers; das zweite Mal am 26. Juni durch Herrn k. u. k. Korvettenkapitän Wilh. Kesslitz in Unkenntnis des schon vorher stattgefundenen Besuches.

Barometer. Die wahre Seehöhe desselben wurde durch Herrn Kapt. Kesslitz zu 96 *m* ermittelt (früher zu 92 *m* angegeben). Die Barometerkorrektion wurde am 11., 12., 13 Juni durch sieben Ablesungen zu +0·14 *mm* gefunden, am 26. Juni durch sechs Ablesungen zu +0·36, eine Differenz, in der auch die Verschiedenheit (Unsicherheit) der Korrektion der Vergleichsbarometer auf das sogenannte Normalbarometer der k. k. Zentralanstalt steckt. Man wird +0·2 *mm* annehmen dürfen.

Thermometer. Es sind zwei Thermometerpaare aufgestellt. Das auf der Nordwestseite der Seeleuchte befindliche dient zur Ablesung um 7^h morgens, das auf der Ostseite befindliche zu den Ablesungen um 2^h und 9^h abends. Die Thermometer stehen um rund $^1/_2$ *m* von der Wand ab und befinden sich 2·1 *m* über dem Erdboden in einer Seehöhe von rund 90 *m*.

Das trockene Thermometer auf der Nordostseite zeigte die große Korrektion von +4·4°, die sich im Laufe des Jahres 1903 eingestellt haben muß, denn vorher blieben die Differenzen gegen Lesina konstant.

Herr Oberst v. Sterneck ersetzte dieses fehlerhafte Thermometer durch ein neues, das keine merkliche Korrektion hat. Das trockene Thermometer, das zu den Abendablesungen dient, hat eine Korrektion von +0·2°. Die Prüfung der Thermometeraufstellung mittels eines Aßmann'schen Aspirationsthermometers zeigte, daß die Aufstellung als eine völlig befriedigende bezeichnet werden kann.

Der Regenmesser befindet sich $^1/_2$ *m* über dem Boden, etwa 100 *m* südwestlich vom Gebäude, wird richtig bedient und die Aufstellung als günstig bezeichnet.

[1] Siehe Met. Zeitschr. 1899, p. 266.

Die Beobachter, Leuchtfeuerwächter I. Klasse Jos. Coda und Assistent Giov. Glumaz, werden als eifrig und intelligent bezeichnet. Sie schätzen die Windrichtung und Stärke richtig; erstere ist durch Lokalverhältnisse nicht beeinflußt.

Zur Zeitbestimmung dient ein von dem k. u. k. Hydrographischen Amte beigestelltes Schiffschronometer, das nach mitteleuropäischer Zeit richtiggestellt wird. Außerdem ist eine Pendeluhr vorhanden, welche Herr Oberst v. Sterneck gut regulierte und zugleich einen Gnomon aufstellte, dem er eine Zeitgleichungstabelle für mitteleuropäische Zeit beigab.

In welchem Grade die einzelnen meteorologischen Elemente durch die Lage der Station mitten im Meere modifiziert werden, soll im nachfolgenden namentlich auf Grund von korrespondierenden Differenzen derselben gegen jene auf der Insel Lesina erörtert werden. Dabei ist zu bemerken, daß ja auch die Station Lesina auf einer Insel liegt, die allerdings noch unter dem Einfluß des nahen Festlandes steht.

1. Luftdruck. Das Hauptinteresse der Ergebnisse der Luftdruckbeobachtungen bezieht sich darauf, ob und in welchem Maße der Luftdruck von den Küsten gegen die Mitte der Adria sich ändert. Da die Seehöhe des Barometers und dessen Korrektion genau ermittelt sind, durfte man hoffen, diese Frage präzise beantworten zu können. Trotzdem ergeben sich dabei einige Schwierigkeiten.

Die folgende Tabelle I enthält die Ergebnisse meiner bezüglichen Rechnungen.

Ich habe zunächst die korrespondierenden Differenzen der beobachteten Luftdruckmittel Lesina—Pelagosa berechnet, wobei aber bemerkt werden muß, daß auf Lesina die Seehöhe des Barometers sich geändert hat von 8·6 auf 19·5 im Jahre 1897, welchem Umstand durch Anbringung einer Korrektion von +1·0 *mm* Rechnung getragen worden ist. Die einer Höhendifferenz von 76·5 *m* entsprechenden $12^1/_2$jährigen Luftdruckdifferenzen Pelagosa—Lesina sind dann auf die Seehöhe von Lesina reduziert worden. Man findet diese reduzierten Differenzen in der dritten Kolumne der Tabelle. Durch Anbringung dieser Differenzen an die 30jährigen Mittel 1851 bis 1880 von Lesina im Meeresniveau wurden 30jährige Mittel von Pelagosa

Tabelle I.

	Pelagosa—Lesina $\Delta h = 76 \cdot 5\, m$, $12^1/_2$ Jahre			Lesina 1851—1880	Pelagosa 1851—1880	Pelagosa detto	Pelagosa reduziert auf	
	Nach Beobachtung	Berechnet für $\Delta h = 76 \cdot 5$	Differenz	Im Meeresniveau mit Schwerekorr. *A*		*B*	1887—1906 $h = 96\, m$	Meeresniveau
Jänner	—8·46	—6·94	—1·52	763·1	761·6	762·0	752·6	761·3
Februar	—8·37	—6·92	—1·45	62·3	60·9	61·3	51·4	60·2
März	—8·20	—6·89	—1·31	59·6	58·3	58·7	49·9	58·5
April.......	—8·04	—6·82	—1·22	60·2	59·0	59·4	49·8	58·4
Mai........	—7·88	—6·72	—1·16	60·4	59·2	59·6	50·2	58·6
Juni	—7·72	—6·61	—1·11	60·9	59·8	60·2	51·1	59·5
Juli	—7·62	—6·53	—1·09	60·4	59·3	59·7	50·6	58·9
August.....	—7·64	—6·54	—1·10	60·4	59·3	59·7	51·6	59·9
September ..	—7·82	—6·61	—1·21	62·3	61·1	61·5	52·5	60·9
Oktober	—8·03	—6·72	—1·31	62·2	60·9	61·3	51·8	60·3
November ..	—8·16	—6·81	—1·35	60·7	59·4	59·8	52·8	61·3
Dezember...	—8·32	—6·88	—1·44	61·8	60·4	60·8	52·0	60·7
Jahr....	—8·02	—6·75	—1·27	61·2	59·9	60·3	751·37	59·9

abgeleitet, um selbe mit den Luftdruckmitteln für Südeuropa, respektive der Adriastationen in meinem Werke: »Die Luftdruckverhältnisse von Mittel- und Südeuropa« (Wien 1887) vergleichbar zu machen. Neuere derartige Luftdruckmittel liegen ja noch nicht vor.

Um eine Art Kontrolle für diese Berechnung zu haben, reduzierte ich noch die auf die neuere 20jährige Reihe 1887 bis 1906 bezogenen Monatsmittel von Pelagosa, welche durch die Beobachtungen 1887—1906 an der Station Lesina abgeleitet werden konnten, direkt auf das Meeresniveau (Kolumne 7 und 8 der Tabelle I). Man sieht, die Unterschiede sind gering und kompensieren sich im Jahresmittel, so daß der mittlere Luftdruck im Meeresniveau der gleiche wird wie jener in der Periode 1851—1880. An alle diese Luftdruckmittel ist auch schon die Schwerekorrektion angebracht.

Man erhält so folgende Luftdruckdifferenzen zwischen Lesina und Pelagosa im Mittel der Jahreszeiten:

Pelagosa—Lesina im Meeresniveau.

Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr	Maximum	Minimum
1·47	1·23	1·10	1·29	1·27	1·5 Dez.	1·1 Juli

Wir hätten somit ein Luftdruckgefälle von fast 1·3 *mm* im Jahresmittel auf 90 *km* Entfernung und für einen Breitenunterschied (Lesina 43° 10′, Pelagosa 42° 23′) von 47 Minuten oder rund 0°8.

Da die Isobaren auf dieser kurzen Strecke der Küste von Dalmatien ziemlich parallel zu verlaufen scheinen (man sehe die Isobarenkarten in meinem oben zitierten Werke), so ergibt sich ein Gradient von rund 1·3 *mm* von den Küsten gegen die Mitte der Adria, oder ein Barometerminimum von diesem Betrage über der Mitte des Adriatischen Meeres.

Wenngleich man die Existenz eines solchen lokalen Minimums voraussetzen muß und diese Annahme auch durch die allgemeinen Windverhältnisse an den adriatischen und italienischen Küsten unterstützt wird, so erscheint der Betrag dieser Luftdifferenz doch überraschend groß.

Ich habe deshalb alle wahrscheinlichen Fehlerquellen nochmals erwogen, namentlich auch mit der im Jänner 1898 gefundenen Barometerkorrektion (siehe Met. Zeitschr., 1899, p. 267) die Rechnungen neuerdings vorgenommen, ohne zu einem wesentlich verschiedenen Resultat zu gelangen.

In einer sehr verdienstlichen Arbeit in den Jahrbüchern der k. k. Met. Zentralanstalt, Jahrgang 1904, unter dem Titel: »Revision der Luftdruckjahresmittel österreichischer Stationen 1886—1904« hat Herr Dr. M. Margules darauf aufmerksam gemacht, daß die Luftdruckmittel von Lesina 1897 mit der angenommenen Höhenänderung von 8·6 auf 19·5 nicht stimmen. Die Differenzen der Jahresmittel des Luftdruckes von Lesina gegen Triest und Mailand ergeben eine Änderung derselben seit 1897 um 0·55 *mm*, nach der angegebenen Höhenänderung sollte diese Differenz aber 0·98 *mm* sein. Die Luftdruckmittel von Lesina würden demnach einer Seehöhe von bloß 14·8 *mm* entsprechen oder eine analoge Änderung der Barometerkorrektion anzunehmen sein. Unter dieser Voraussetzung wäre die Höhendifferenz Pelagosa—Lesina 80 *m* statt 76·5 *m* und die Reduktion der Luftdruckdifferenzen auf die Seehöhe von Lesina im Jahresmittel +7·25 statt +6·75 rund.

Damit erhält man für Pelagosa Luftdruckmittel 1851—1880 im Meeresniveau, die in der Tabelle I an sechster Stelle (*B*) sich finden und um 0·5 *mm* höher sind. Ich halte diese Mittel für die wahrscheinlicheren. Man hat dann:

Pelagosa—Lesina im Meeresniveau.

Winter	—1·00
Frühling	—0·77
Sommer	—0·73
Herbst	—0·93
Jahr	—0·86

Wir hätten demnach folgende korrespondierende Luftdruckmittel für die Periode 1851—1880 an den Küsten der Adria (mit Schwerekorrektion):

Mittlerer Luftdruck an den Ufern der Adria.

Ostküste:	Jahr	Jänner	Juli
Triest	761·4	763·7	760·8
Fiume	61·3	63·4	60·7
Lesina	61·2	63·1	60·4
Pelagosa (Mitte der Adria)	60·3	62·0	59·7
Punta d'Ostro	61·1	62·8	60·3
Durazzo	61·1	63·1	60·1
Westküste:			
Venedig	61·6	63·8	61·0
Padua	61·6	64·2	60·8
Modena	61·6	64·6	60·7
Ancona	61·7	63·4	61·2
Foggia	61·6	63·7	60·8
Lecce	61·6	63·3	60·7

Der Luftdruck ist sehr gleichförmig verteilt, es zeigt sich keine Abnahme von Norden nach Süden. An den östlichen dalmatinischen Küsten ist der Luftdruck etwas niedriger als an der westlichen italienischen Küste. Die Mittelwerte sind:

	Jahr	Jänner	Juli
Dalmatinische Küste	761·2	763·2	760·5
Italienische Küste	761·6	763·6	760·8

Nach meinen Isobarenkarten, die schon 1886 gezeichnet worden sind, kann man die Rinne niedrigen Luftdruckes in der Achse der Adria zu 760·5 *mm* etwa einschätzen. Die Beobachtungen auf Pelagosa ergeben 760·3, was damit gut übereinstimmt.

Den täglichen Gang des Luftdruckes auf der Insel Pelagosa habe ich nach den damals vorliegenden Beobachtungen (Juli 1894 bis Juni 1897) schon vorläufig berechnet und diskutiert in der Abhandlung: »Weitere Beiträge zu den Grundlagen einer Theorie der täglichen Oszillation des Barometers« (diese Sitzungsber., Bd. CVII, p. 114). Eine eingehendere, auf das ganze bis jetzt vorliegende Beobachtungsmaterial gegründete Bearbeitung ist von anderer Seite in nächster Zeit zu erwarten.

Der tägliche Gang des Barometers auf Pelagosa repräsentiert jenen in der Mitte eines großen Wasserbeckens. Es entfallen die kontinentalen Einflüsse. Die ganztägige Periode ist sehr klein und fehlt im Winter fast ganz. Im Sommer nähert sich die ganztägige Periode der täglichen Temperaturperiode mit einem Minimum um 11^h nachts und einem Maximum um 11^h vormittags, der Luftdruck steigt bei Tag und fällt bei Nacht. Es ist, als wenn über dem Meere bei Nacht Luft in der Höhe gegen das Land abfließen, bei Tag aber in der Höhe Luft vom Lande zufließen würde.

Die Gleichungen des täglichen Barometerganges sind:

Täglicher Gang des Barometers über der Adria.

Winter (November bis Februar)

$$\cdot 044 \sin(24^\circ 2 + x) + \cdot 248 \sin(146 \cdot 8 + 2x).$$

Sommer (Mai bis August)

$$\cdot 202 \sin(288 \cdot 2 + x) + \cdot 264 \sin(126 \cdot 1 + 2x).$$

Frühling und Herbst

$$\cdot 107 \sin(274 \cdot 6 + x) + \cdot 310 \sin(133 \cdot 6 + 2x).$$

Die halbtägige Luftdruckschwankung hat relativ kleine Amplituden und verspätete Phasenzeiten (nur im Winter normal).

Es ist offenbar der Luftaustausch zwischen dem Meere und den benachbarten Landflächen, hervorgerufen durch den täglichen Wechsel der Temperaturdifferenzen zwischen Land und Meer, welcher dem so charakterisierten täglichen Barometergang über der Adria zugrunde liegt.

Zieht man den täglichen Barometergang von Lesina von jenem auf der Insel Pelagosa ab, so erhält man folgende Differenzkurve.

Pelagosa—Lesina. Sommer. Hundertelmillimeter.

	Stunde											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vormittag ..	0	0	0	—2	—5	—8	—12	—13	—14	—13	—11	—7
Nachmittag .	—1	0	3	6	11	14	17	18	9	5	2	0

Die Gleichung dieser Differenzkurve ist (Meer—Land):

$$0\cdot 12 \sin(155^\circ + x) + 0\cdot 04 \sin(290 + 2x).$$

Maximum 8^h abends, Minimum 8^h vormittags.

Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß in diesen Differenzen auch der Höhenunterschied schon eine wenn auch geringe Rolle spielt. Im Winter besteht so gut wie kein Unterschied im täglichen Barometergang zwischen Pelagosa und Lesina.

Die Differenzen des täglichen Barometerganges zu Rom und Pelagosa im Sommer entsprechen der Gleichung

Pelagosa—Rom... $0\cdot 38 \sin(238\cdot 3 + x) + 0\cdot 11 \sin(67^\circ 0 + 2x)$.

Die negativen Differenzen (Luftdruck über der Adria niedriger) erreichen ihr Maximum schon um 2^h morgens, die positiven Differenzen dagegen um 2^h nachmittags. Über der Adria ist um 2^h nachmittags der Luftdruck um $0\cdot 4$ *mm* höher als über dem Festland von Italien, dagegen um 2^h morgens um den gleichen Betrag tiefer.

2. Temperatur. Die folgende Tabelle II enthält die Temperaturmittel von Pelagosa zu den drei Beobachtungsterminen 7^h, 2^h und 9^h und die korrigierten Differenzen gegen Lesina, soweit die Beobachtungsergebnisse auf Pelagosa homogen gefunden worden sind (siehe später). Ich vergleiche die Temperaturen über der Adria auch noch mit jenen in gleicher Breite im Herzen von Asien, an einem der kontinentalsten meteorologischen Stationen der Erde.

Luktschun, Oase Turfan, liegt im Zentrum von Asien in einer Depression zwischen den höchsten Gebirgen und Plateauländern der Erde, vom Meere allseitig abgeschnitten, im chinesischen Turkestan. Es liegen zweijährige meteorologische Aufzeichnungen von diesem merkwürdigen Orte vor, welche General A. v. Tillo bearbeitet und in russischer Sprache veröffentlicht hat. Woeikof gab eine auszügliche Übersetzung davon in der Met. Zeitschr., 1900 (p. 193 bis 208). Da die beobachteten Termine zu Luktschun 7^h, 1^h, 9^h waren, habe ich die Temperatur von Pelagosa von 2^h auf 1^h reduziert nach den stündlichen Beobachtungen zu Lesina. Die Amplitude $1-7^h$ für Pelagosa ist deshalb sogar noch etwas zu groß.

Tabelle II (Temperatur).

	Pelagosa, 96 m			Differenzen gegen Lesina reduziert auf gleiche Höhe			Tägliche Amplituden. Differenzen			
							2—7h		1—7h a.	
	7h	2h	9h	7h	2h	9h	Pelagosa	Lesina	Pelagosa	Luktschun
Jänner	8·7	9·9	8·9	1·9	0·2	1·2	1·2	2·9	1·0	9·2
Februar	8·8	10·3	9·1	1·7	—0·2	1·0	1·5	3·5	1·3	12·6
März	10·6	12·3	10·9	1·2	—0·7	0·4	1·7	3·8	1·5	14·1
April.......	12·8	14·5	12·8	0·5	—1·1	—0·1	1·7	3·5	1·5	11·3
Mai........	16·6	18·5	16·6	0·0	—1·3	—0·5	1·9	3·1	1·7	9·9
Juni	20·6	22·8	20·0	—0·1	—1·2	—0·7	2·1	3·0	2·0	10·0
Juli	23·5	25·6	23·4	0·1	—1·1	—0·6	2·0	3·2	1·9	11·5
August.....	23·3	25·1	23·1	0·2	—1·1	—0·4	1·8	3·7	1·7	12·6
September ..	20·7	22·4	20·7	1·1	—0·9	0·0	1·7	3·9	1·7	15·3
Oktober	17·0	18·6	17·1	1·2	—0·7	0·3	1·6	3·4	1·6	14·6
November ..	13·0	14·5	13·6	1·3	—0·3	0·9	1·5	1·8	1·2	11·8
Dezember ..	10·5	11·5	10·6	1·7	0·2	1·2	1·0	2·6	1·0	8·8
Jahr....	15·5	17·2	15·6	0·9	—0·7	0·2	1·64	3·2	1·5	11·8

Die Temperaturdifferenzen gegen Lesina sind im Mittel der Jahreszeiten:

Temperatur. Pelagosa—Lesina.

	7h	2h	9h	Mittel
Winter	1·8	0·1	1·1	+1·0
Frühling....	0·6	—1·0	—0·1	—0·2
Sommer	0·1	—1·1	—0·6	—0·5
Herbst	1·2	—0·7	0·4	+0·2
Jahr	0·9	—0·7	0·2	+0·1

Diese Differenzen sind durch eine Korrektion von +0·3 im Winterhalbjahr und +0·4 im Sommerhalbjahr auf die Seehöhe von Lesina reduziert. Im Winter sind sie, wie zu erwarten, den ganzen Tag über positiv, im Sommer negativ, im Jahresmittel besteht (gegen Lesina) fast kein Unterschied in der mittleren Temperatur, aber die tägliche Amplitude ist auf Pelagosa viel kleiner.

Die tägliche Temperaturschwankung (d. h. die Differenz von 2^h nachmittags bis 7^h morgens) ist auf Pelagosa sehr klein, fast wie auf offener See, Winter 1·2°, Sommer 2·0°, während sie zu Lesina 3·0° und 3·3° beträgt. An der kontinentalen Station ist die tägliche Amplitude im Mittel achtmal größer, im Frühling und Herbst neun- bis zehnmal ($1-7^h$), für die wahren Amplituden wird das Verhältnis noch erheblich größer sein. Im März erreicht zu Luktschun der Temperaturunterschied zwischen 7^h a. und 1^h p. 14·1°, im September sogar 15·3°, die wahren Tagesschwankungen dürften demnach nahezu 20° erreichen.

Die folgende Tabelle III enthält die beobachteten und die berechneten Monatsmittel der Temperatur auf Pelagosa und zu Luktschun. Die Monatsmittel sind als genäherte wahre Mittel zu betrachten.

Der Unterschied der Jahresmittel zwischen Pelagosa und Luktschun (in gleicher Breite) beträgt 3·1°, um welchen Betrag Pelagosa wärmer ist; im Jänner aber ist die Differenz Pelagosa —Luktschun +20·0°, im Juli —8·4°, die Jahresschwankung der Temperatur auf Pelagosa beträgt bloß 14·8°, hingegen zu Luktschun 43·0°, ist also nahezu dreimal größer.

Tabelle III.

Jährlicher Gang der Temperatur.

	Pelagosa 42° 23′ N, 16° 15′ E			Luktschun 42° 42′ N, 89° 42′ E (—17 *m*)		Jährlicher Gang	
	Meeres-niveau	96 *m*	berech-net	beob.	berech.	Pelagosa	Luk-tschun
Jänner	9·5	9·1	9·1	—10·5	— 9·7	— 6·8	—23·0
Februar	9·7	9·3	9·5	— 2·9	— 4·1	— 6·4	—17·4
März	11·7	11·3	11·1	7·4	7·3	— 4·8	— 6·0
April.......	13·5	13·1	13·4	19·0	18·2	— 2·5	4·9
Mai........	17·4	16·9	16·7	24·1	25·5	0·8	12·2
Juni	21·2	20·7	20·9	29·6	30·1	5·0	16·8
Juli	24·4	23·9	23·7	32·5	32·1	7·8	18·8
August.....	24·0	23·5	23·6	29·6	29·5	7·7	16·2
September ..	21·7	21·2	21·0	23·2	22·2	5·1	9·0
Oktober	18·0	17·5	17·5	13·0	12·6	1·5	— 0·7
November ..	14·2	13·8	13·8	0·5	2·3	— 2·1	—11·0
Dezember...	11·2	10·8	10·7	— 6·2	— 6·5	— 5·2	—19·8
Jahr....	16·4	15·9	15·9	13·3	13·3	4·6	13·0

Um den jährlichen Gang der Temperatur genauer vergleichen zu können, habe ich Mittel für halbe Monate berechnet (Tabelle IV) und zu diesem Zwecke die folgenden Gleichungen des jährlichen Ganges der Temperatur für beide Orte berechnet.

Pelagosa, 96 *m* Seehöhe.

$$15{^\circ}92+7{^\circ}31 \sin(254^\circ\ 3'+x)+0{^\circ}67 \sin(47^\circ\ 27'+2x)$$
$$+0{^\circ}30 \sin(273^\circ\ 48'+3x).$$

Luktschun, 17 *m* (rund) unter dem Meeresniveau.

$$13{^\circ}27+20{^\circ}44 \sin(276^\circ\ 45'+x)+2{^\circ}16 \sin(283^\circ\ 54'+2x)$$
$$+0\cdot70 \sin(233^\circ\ 8'+3x).$$

Tabelle IV.

Jährlicher Gang der Temperatur nach Halbmonaten berechnet.

	Pelagosa	Luktschun	Pelagosa	Luktschun
Jänner 1.......	— 6·30	—22·27	9·6	— 9·0
2.......	— 6·84	—23·00	9·1	— 9·7
Februar 1......	— 6·86	—21·17	9·1	— 7·9
2.......	— 6·43	—17·40	9·5	— 4·1
März 1.......	— 5·70	—11·95	10·2	1·3
2.......	— 4·81	— 5·98	11·1	7·3
April 1.......	— 3·76	— 0·11	12·2	13·2
2.......	— 2·52	4·93	13·4	18·2
Mai 1.......	— 0·99	8·95	14·9	22·2
2.......	0·85	12·22	16·8	25·5
Juni 1.......	2·91	14·67	18·8	27·3
2.......	4·96	16·83	20·9	30·1
Juli 1.......	6·70	18·11	22·6	31·4
2.......	7·82	18·80	23·7	32·1
August 1.......	8·16	18·05	24·1	31·3
2.......	7·69	16·20	23·6	29·5
September 1......	6·60	13·00	22·5	26·3
2......	5·09	8·98	21·0	22·2
Oktober 1......	3·36	4·26	19·3	17·5
2......	1·54	— 0·73	17·5	12·6
November 1......	— 0·31	— 6·88	15·6	6·4
2......	— 2·11	—11·02	13·8	2·3
Dezember 1......	— 3·81	—15·70	12·1	— 2·4
2......	— 5·24	—19·83	10·7	— 6·5

Der Unterschied der Winkelkonstanten des ersten Gliedes, welche den Unterschieden der Phasenzeiten in erster Annäherung entspricht, beträgt 22°7. Da $1° = 365:360$ in Tagen,

d. i. 1·014 gleichkommt, beträgt der Zeitunterschied im Eintritt der Extreme (die Verzögerung zu Pelagosa gegen Luktschun) gerade 23 Tage oder etwas mehr als 3 Wochen.

Genauere Werte der Unterschiede des jährlichen Ganges erhält man durch die graphische Darstellung der äquidistanten Temperaturmittel. Es ergeben sich folgende Unterschiede im Eintritt der Extreme und der Mittelwerte.

I. Eintritt des niedrigsten Tagesmittels:

Pelagosa..... 24. Jänner.
Luktschun ... 8. »

Unterschied 16 Tage Verspätung auf Pelagosa.

II. Eintritt des höchsten Tagesmittels:

Pelagosa..... 31. Juli.
Luktschun ... 18. »

Unterschied 13 Tage Verspätung.

III. Eintritt der mittleren Temperatur im Frühling.

Pelagosa..... 8. Mai.
Luktschun ... 2. April.

Unterschied 36 Tage Verspätung.

IV. Eintritt der mittleren Temperatur im Herbst.

Pelagosa..... 29. Oktober.
Luktschun ... 13. »

Unterschied 16 Tage Verspätung.

Die Verspätung im Eintritt der Extreme beträgt demnach durchschnittlich 2 Wochen. Im Frühling aber tritt die mittlere Temperatur auf Pelagosa 5 Wochen später ein als im Innern von Asien unter gleicher Breite. Dagegen bleibt die Temperatur im Herbst nur wenig mehr als 2 Wochen länger über dem Mittel als zu Luktschun. Bei steigender Temperatur ist demnach der Unterschied in den Phasenzeiten am größten und beträgt 3 Wochen mehr als bei sinkender Temperatur.

Die Jahresschwankungen sind nach den Halbmonatsmitteln

Pelagosa ...... 15°1.
Luktschun .... 41·8.

Die folgende Tabelle V enthält die mittleren Monats- und Jahresextreme der Temperatur auf Pelagosa und zu Luktschun.

Gegenüber Lesina sind die mittleren Kälteextreme auf Pelagosa um 3° gemildert, die Hitzeextreme des Sommers um 2°, die mittlere Jahresschwankung in den Extremen ist um 5° kleiner. Die mittleren Monatsschwankungen der Temperatur nach den Jahreszeiten sind:

	Pelagosa	Lesina	Luktschun
Winter.......	10·6	13·6	26·0
Frühling	9·7	12·7	34·5
Sommer......	9·9	11·8	28·4
Herbst.......	10·1	13·5	31·9
Jahr.........	28·2	32·9	68·3

In den Frühlingsmonaten sind die mittleren Monatsschwankungen der Temperatur auf Pelagosa viermal kleiner als zu Luktschun.

Die absoluten Extreme der Temperatur auf Pelagosa 1894—1907 waren:

— 2°0 Februar 1895 (—1°9 Februar 1897) und 30·6 Juli 1904.

Auf Lesina betrugen sie in der gleichen Periode:

— 5°4 Jänner 1905 (—4°0 Februar 1895) und 34·0 Juli 1894.

Mittel Pelagosa .... 1°2 und 29°4,
» Lesina .... — 1·0 » 31·9,
» Luktschun aber .. —20·7 » 47·6!

Die absoluten Extreme zu Luktschun (2 Jahre bloß) waren:

—21°2 (Jänner 1895) und 48°0 Juli 1893.

Tabelle V.

Temperaturextreme.

	Mittlere Monats- und Jahresextreme								
	Pelagosa			Lesina	Pelagosa—Lesina red.		Luktschun		
	Minimum	Maximum	Monats-schwankg.	Monats-schwankung	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum	Differenz
Jänner	3·1	13·8	10·7	14·1	3·0	—0·1	—20·7	— 0·3	20·4
Februar	3·1	14·4	11·3	13·9	2·5	- 0·6	—17·6	17·0	34·6
März	5·8	15·2	9·4	13·5	2·0	—1·7	— 9·2	27·6	36·8
April	9·0	18·1	9·1	12·7	1·2	—1·9	1·0	37·8	36·8
Mai	12·1	22·8	10·7	12·0	0·0	—1·7	8·8	38·7	29·9
Juni	15·6	26·2	10·6	11·3	—0·4	—1·6	17·2	43·9	26·7
Juli	19·1	28·8	9·7	11·5	—0·1	—1·9	19·7	47·6	27·9
August.....	19·0	28·5	9·5	12·5	0·7	—2·1	15·7	46·4	30·7
September ..	16·3	26·1	9·8	13·2	1·6	—1·8	11·3	40·5	29·2
Oktober	12·6	22·5	9·9	13·3	2·1	—1·3	— 1·7	33·6	35·3
November ..	7·8	18·4	10·6	14·0	2·5	—0·8	—12·1	19·2	31·3
Dezember ..	5·4	15·3	9·9	12·9	2·8	—0·3	—17·9	5·2	23·1
Jahr....	1·2	29·4	28·2	32·9	1·5	—1·3	—20·7	47·6	68·3

Es ist von größerem Interesse, zu sehen, wie die Kälteeinbrüche von Norden durch das Meer gemildert auf Pelagosa ankommen. Die folgenden kleinen Tabellen geben darüber eingehendere Auskunft. Einer der intensivsten Kälteeinbrüche war jener von Ende Jänner 1907, bei welchem in Triest die tiefste bisher daselbst beobachtete Temperatur eintrat.

Tabelle VI.

Der Kälteeinbruch vom Jänner 1907.

	19	20	21	22	23	24	25
Lesina							
Temp. Mittel	8·2	1·1	1·3	—2·6	—0·2	7·3	9·4
Minimum ...	5·2	—1·6	—3·0	—3·8	—4·0	1·8	7·8
Feuchtigkeit.	45	39	58	35	60	88	86%
Bewölkung..	6·0	0·0	10·0	1·7	10·0	10·0	7·3
Wind	NNW_1 abends NE_7	NE_{2-6}	N_1	NE_2	ENE_1	ESE_{1-3}	ESE_2
Witterung ..	—	—	Schnee	Schnee	Schnee 2 *mm*	Regen 24	—
Pelagosa							
Temp. Mittel	3·6	3·0	1·5	6·9	5·2	6·6	6·0
Minimum ...	2·1	0·1	1·2	5·4	3·4	4·3	4·2
Feuchtigkeit.	68	76	68	69	68	72	59%
Bewölkung..	1·7	8·0	10·0	9·0	3·0	7·7	7·7
Wind	NW_4	NE_3	NE_4	SE_3	SE_3	SE_3	SE_4
Witterung ..	—	Schnee	Schnee	Regen 12 *mm*	—	—	Regen 2·3

Zu Triest sank am 23. Jänner, nachts, die Temperatur bei stürmischer Bora bis auf —12°8, das tiefste bekannte Minimum für Triest. Die Temperatur blieb 27 Stunden unter —10°.

Die strengste Kälteperiode erreichte damals Pelagosa gar nicht mehr, indem schon früher Scirocco (SE) einsetzte, während auf Lesina noch NE herrschte. Nur bei Beginn des Kälteeinbruches reichte die Bora (der NE) bis Pelagosa, aber die Temperatur sank dabei nicht unter den Gefrierpunkt. Es fiel aber Schnee um einen Tag früher als auf Lesina, vor Beginn des SE, bei welchem dann Regen eintrat, während auf Lesina bei NE und ENE Schnee fiel. Am 23. war die Temperaturdifferenz Pelagosa—Lesina im Mittel 5°4, um 7^h 7°4, dagegen am 20. kaum 2°.

Bemerkenswert war die Temperaturdepression auf Pelagosa am 13. und 14. Februar 1907, welche (umgekehrt) Lesina nicht erreichte.

13. Februar 1907:

Pelagosa Mittel 3·7, Minimum 2°4, N und NE_{4-6}, am Vormittag Schnee.
Lesina » 7·2, » 5·6, ESE, Regen.

14. Februar 1907:

Pelagosa Mittel 1·5, Minimum —1°9, NW_3.
Lesina » 8·8, » 5·5, ESE, Regen 30 *mm*.

15. Februar 1907:

Pelagosa Mittel 2·8, Minimum 1°4, NE_6.
Lesina » 11·3, » 9·3, E, Regen 6 *mm*.

Es scheint, daß am 13. und 14. Februar Pelagosa auf der Rückseite eines Barometerminimums lag, während das nördlichere Lesina auf der vorderen Seite verblieb und deshalb keine Temperaturerniedrigung erfahren hat. Das Monatsminimum des Februar zu Lesina war bloß 4·7 am 2. Februar.

Es ist schade, daß die Beobachtungen von dem linken, italienischen Ufer der Adria fehlen. Man sollte mit Hilfe derselben die Beobachtungen auf Pelagosa dazu benutzen, für bemerkenswerte Witterungszustände synoptische Karten der Adria zu zeichnen.

Ein sehr intensiver Kälteeinbruch war auch jener von Anfang Jänner 1905, der im mittleren und östlichen Europa fast ohne Beispiel dasteht in bezug auf die Plötzlichkeit des Eintrittes strenger Kälte bei Nordwinden. Auf dem Sonnblick sank die Temperatur bei heftigem NNE am 1. Jänner um 10^h abends auf —37°4, der tiefste bisher daselbst verzeichnete Kältegrad, auf dem Obir zur selben Zeit auf —26·1, zu Triest am 2. Jänner bei Bora auf —9°9 und zu Pola am selben Morgen auf —8°9, die tiefste bisher dort beobachtete Temperatur.[1]

Wie diese Kältewelle nach Süden über die Adria vordrang, zeigt die folgende kleine Tabelle.

Tabelle VII.

Der Kälteeinbruch vom Jänner 1905.

	1904 Dez. 31	Jänner 1905 1	2	3	4	5	6
				Lesina			
Temp. Mittel	9·4	—2·5	—3·5	—0·3	2·0	6·1	8·9
Minimum ...	7·4	—5·8	—4·5	—4·0	0·4	2·5	4·6
Feuchtigkeit.	64	43	59	73	59	67	80
Bewölkung .	6·7	3·3	9·3	4·0	5·4	4·7	6·7
Wind	NE_4	NNE_{3-7}	NE_{4-6}	Var. 1	NNW_1	N_1	V. SW
Witterung ..	Regen 7 *mm*	—	—	—	—	—	Regen 3·4
				Pelagosa			
Temp. Mittel	10·0	2·7	—0·4	1·9	3·7	7·7	9·6
Minimum ...	9·1	1·4	—0·6	1·0	3·1	7·1	9·2
Feuchtigkeit	68	72	95	69	71	69	77
Bewölkung..	7·7	8·5	10·0	9·3	8·3	4·3	7·7
Wind	WNW_4 abds. NE_3	NE_6	NE_6	NE_8	NW_4, NE_4	SE_8, NW_3	Var.
Witterung ..	—	Gewitt., Regen u. Schnee 4·6		Schnee 0·7	Regen 4·3	—	Wetterleuchten

[1] Siehe Meteorol. Zeitschr., 1905, p. 80 bis 83.

Zu Triest wurde am 2. Jänner ein Minimum von —9°9 beobachtet bei stürmischer Bora und geringer Feuchtigkeit. Das Minimum zu Pola am 2. Jänner war —8·9 bei mäßigem NE. Es ist die tiefste Temperatur, die bisher in Pola beobachtet worden ist.

Auf Lesina wie auf Pelagosa trat gleichfalls am 2. Jänner bei stürmischer Bora (NE_8) die niedrigste Temperatur ein, aber schon sehr gemäßigt: Lesina Tagesmittel des 2. Jänner —3°5, Pelagosa bloß —0·4.

Die Minima waren:

	Temperaturminimum am 2. Jänner 1905
Triest......	—9°9
Pola.......	—8·9
Lesina.....	—4·5
Pelagosa...	—0·6

In diesen Zahlen tritt der kältemäßigende Einfluß des Meeres sehr auffallend zutage.

In der folgenden kleinen Tabelle VIII sind die übrigen strengen Kälteeinbrüche während der Beobachtungsperiode von Pelagosa zusammengestellt, welche weitere Belege für die Abschwächung derselben durch die Adria liefern.

Tabelle VIII.

Die übrigen drei strengsten Kälteeinbrüche über der Adria.

	a) Februar 1895						
	13	14	15	16	17	18	19
Lesina							
Temperatur .	1·7	2·3	3·9	—2·8	—1·6	3·5	4·5
Feuchtigkeit	55	60	54	47	55	47	55%
Wind	Var.	NNW_3	N_1	ENE_3	NE_4	ENE_4	Var.
Pelagosa							
Temperatur .	10·4	8·0	4·0	5·9	—0·8	0·1	4·4
Feuchtigkeit.	77	66	78	73	86	89	67%
Wind	Var.	NW_3	Var.	NE_6	N_5	NE_4	NW_4
Witterung ..	—	—	Schnee	Regen	Schnee	—	—

	b) Jänner 1901						
	1	2	3	4	5	6	7
Lesina							
Temperatur .	9·2	1·0	—2·1	—2·9	—0·9	2·2	3·9
Feuchtigkeit.	75	59	52	52	79	79	65
Wind	ENE_3	NE_3	NE_2	NE_1	NE_2	NE_1	ESE_1
Pelagosa							
Temperatur .	11·6	3·8	0·8	0·4	0·5	4·6	5·9
Feuchtigkeit.	75	53	73	75	89	77	69
Wind	Var. 3	NW_5	NNW_4	NNW_4	N_4	NW_4	NW_4
Witterung ..	Regen	Regen	—	Schnee	Schnee	Schnee und Regen	Regen

	c) Februar 1901						
	12	13	14	15	16	17	18
Lesina							
Temperatur .	4·9	1·5	0·1	—1 3	1·4	1·3	3·8
Feuchtigkeit.	63	51	46	55	74	60	56
Wind	SE_1	Var.	N_1	NE_1	NNE_1	Var.	Var.
Pelagosa							
Temperatur .	7·2	3·2	0·3	0·9	2·5	3·3	5·3
Feuchtigkeit.	73	56	65	71	69	54	68
Wind	W	NW_4	N_3	NE_1	NE_3	NW_2	SW_1

Stellen wir nun zum Schlusse die sich aus den obigen Tabellen ergebenden Temperaturunterschiede (im Tagesmittel) zwischen Pelagosa und Lesina bei Kälteeinbrüchen von Norden her zusammen:

Tagesmittel der Temperatur.

	16. und 17. Februar 1895		4. Jänner 1901	14. und 15. Febr. 1901		2. Jänner 1905	21. und 22. Jänner 1907	
Lesina....	—2·8	—1·6	—2·9	0·1	—1·3	—3·5	1·3	—2·6
Pelagosa..	5·9	—0·8	0·4	0·3	0·9	—0·4	1·5	6·9
Differenz..	8·7	0·8	3·3	0·2	2·2	3·1	0·2	9·5

An den Tagen größter Kälte auf Lesina ist Pelagosa um 5°6 wärmer, im Mittel aller Fälle um 3°. Rechnet man mit den wenn auch nicht gleichzeitig eintretenden Extremen, wie dies eigentlich geschehen sollte, so erhält man die Differenzen

2°0, 3·3, 1·6, 3·1, 4·1

im Mittel... 2°8.

Wie schon im Eingang zu dieser Abhandlung bemerkt worden ist, hat das zur Morgenablesung verwendete Thermometer von 1903 an aus schwer verständlicher Ursache eine Korrektion von +4°4 nötig gemacht. Desgleichen ergeben die Differenzen gegen Lesina, daß in den letzteren Jahren 1903 bis Juni 1907 (soweit hier verwendet, die Differenz besteht aber noch fort) die Abendtemperaturen erheblich zu niedrig geworden sind, was sich schon unmittelbar aus den absoluten Werten derselben selbst ergibt. Ich habe diese Abendtemperaturen durch die Differenzen Pelagosa—Lesina 1894—1902 gegen Pelagosa—Lesina 1903—1906 korrigiert und mit diesen korrigierten Abendtemperaturen neue Mittel gerechnet, um eine genähert homogene Temperaturreihe zu erlangen (siehe die folgende Tabelle IX).

Echt ozeanisch ist die oft so niedrige mittlere Temperatur des März und April und die hohe Temperatur des September, höher als die des Juni. Auch der Oktober ist wärmer als der Mai. Der März ist nur um 0°2 wärmer als der Dezember.

Erstaunlich gleichmäßig ist die mittlere Temperatur des August, Extreme 24°3 und 23°2.

Tabelle IX.

Pelagosa. Temperaturmittel (7+2+9+9) : 4.

	Jänner	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Pelagosa (Jahresmittel)	Lesina (Jahresmittel)
1894	—	—	—	—	—	20·7	24·7	23·4	21·1	18·5	14·5	9·9	—	—
95	9·5	7·6	10·7	13·7	16·6	20·9	24·4	23·2	21·4	18·3	14·2	10·6	15·9	16·1
96	7·4	9·3	12·2	11·8	15·9	22·4	24·3	23·6	20·9	18·3	13·4	11·7	15·9	16·0
97	9·8	11·0	12·5	14·2	16·9	20·9	25·1	23·7	22·4	16·2	12·2	10·1	16·3	16·3
98	10·6	9·5	11·8	15·1	17·5	21·5	24·3	23·3	21·4	18·5	16·3	12·2	16·8	16·9
99	11·5	10·0	11·7	13·7	18·2	20·2	24·2	23·4	20·8	17·1	13·8	10·4	16·3	16·2
1900	10·4	11·8	9·8	12·8	16·7	21·6	23·5	23·2	21·4	19·5	15·7	12·4	16·6	16·7
01	8·3	7·5	11·6	13·6	16·9	21·4	23·6	23·5	21·3	17·8	12·9	12·5	15·9	15·9
02	10·8	11·5	10·5	14·2	15·0	19·2	23·4	23·9	21·9	17·7	13·1	9·9	15·9	16·1
03	9·7	10·2	11·3	11·3	16·8	20·1	22·9	23·7	21·5	17·8	13·4	12·2	15·9	16·2
04	10·0	11·2	12·0	14·3	18·2	22·3	25·4	23·9	19·4	16·7	11·7	10·3	16·3	16·5
05	6·7	8·3	11·5	12·9	17·2	21·7	24·8	24·3	22·5	14·7	13·2	10·8	15·7	16·0
06	9·0	8·8	10·7	12·6	16·7	20·1	23·4	24·0	19·6	16·5	14·1	9·4	15·4	15·8
07	7·0	7·6	8·5	11·7	17·3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel....	9·3	9·5	11·1	13·2	17·0	21·0	24·2	23·7	21·2	17·5	13·7	10·9	16·0	16·2

Die mittlere Veränderlichkeit der Monatsmittel der Temperatur beträgt:

Dezember	0·90	März	0·70
Jänner	1·18	April	0·92
Februar	1·22	Mai	0·63
Winter	1·10	Frühling	0·75
Juni	0·74	September	0·60
Juli	0·62	Oktober	0·98
August	0·28	November	1·00
Sommer	0·55	Herbst	0·86

Jahr...... 0·33

Die Veränderlichkeit der Augustmittel beträgt bloß 0°3, ist also ganz außerordentlich gering; die der Februarmittel beträgt 1°2, ist viermal größer, aber auch gering.

Der kälteste Monat war der Jänner 1905 mit 6°7, der heißeste der bekannt heiße Juli 1904 mit 25°4.

Bemerkenswert ist die Folge warmer Jahre 1897 bis 1900, Mittel 16°5, vorher und nachher konstant 15°9. Da man dabei an Fehler denken muß, habe ich die Jahrestemperaturen von Lesina beigegeben, welche die gleiche Folge warmer Jahre aufweisen.

3. Luftfeuchtigkeit. Die folgende kleine Tabelle enthält die Monatsmittel der relativen Feuchtigkeit und deren Differenzen gegen Lesina. Zum Vergleiche ist die mittlere relative Feuchtigkeit zu Luktschun (für den Winter fehlen die Angaben der Feuchtigkeit) beigegeben, welche im größten Gegensatz zu jener von Pelagosa stehen.

Die Luftfeuchtigkeit auf Pelagosa ist, wie zu erwarten, erheblich größer als auf Lesina, im Mittel um mehr als 8%. Der Unterschied ist im Winter kleiner als im Sommer, und ebenso morgens und abends kleiner als nachmittags. Im Sommer aber ist der Unterschied am Morgen am größten und nimmt gegen Abend hin ab.

Tabelle X.

Luftfeuchtigkeit in Prozenten.

	Pelagosa 1894—1899			Pelagosa—Lesina 1894—1899			Luktschun 1894 und 1895		
	7h	2h	9h	7h	2h	9h	7h	1h	9h
Jänner	80	77	78	5	10	5	—	—	—
Februar	79	74	76	5	11	5	—	—	—
März	78	74	77	6	12	6	40	16	33
April	81	73	79	8	12	7	36	18	30
Mai	83	76	81	11	11	8	37	19	28
Juni	79	70	79	12	10·	9	40	20	34
Juli	77	71	75	12	10	9	43	19	30
August	77	67	75	11	11	10	48	22	33
September	80	73	78	7	11	8	48	23	40
Oktober	80	75	79	5	10	7	58	26	47
November	79	76	78	4	10	5	—	—	—
Dezember	75	73	73	4	9	4	—	—	—
Jahr	79	73	77	7·5	10·6	7·0	—	—	—

Relative Feuchtigkeit in Prozenten.

	7h	2h	9h
Pelagosa—Lesina (Mai—August)	11·5	10·5	9·0

Der jährliche Gang der relativen Feuchtigkeit auf Pelagosa ist sehr wenig ausgesprochen:

Winter	76%
Frühling	78
Sommer	74
Herbst	78

April, Mai scheint die größte Feuchtigkeit zu haben, Juli, August die kleinste.

Im größten Gegensatz steht natürlich die Feuchtigkeit auf Pelagosa zu jener im Innern Asiens.

Mittlere relative Feuchtigkeit.

	Pelagosa			Luktschun		
	7^h	2^h	9^h	7^h	1^h	9^h
März—Juni	80	73	79	38	18	31
Juli—Oktober ...	78	71	76	49	22	37

In Luktschun ist im Frühling die relative Feuchtigkeit am kleinsten, gegen den Sommer und Herbst steigt sie. Für 2^h, respektive 1^h sind die Mittel:

Pelagosa	72%
Luktschun....	20

Daß die relative Feuchtigkeit über dem Meere nicht so groß ist, wie man annehmen möchte, hat besonders G. Schott selbst von den offenen Ozeanen gezeigt.

4. Bewölkung. Die mittlere Bewölkung ist auf Pelagosa um rund 9% größer als auf der Insel Lesina, im Winter um 10%, im Spätsommer nur um 7%. Die Mittel für die Jahreszeiten sind:

	Pelagosa	Lesina	Luktschun
Winter.......	5·9	4·9	3·4
Frühling	5·0	4·1	4·7
Sommer......	2·8*	2·0*	4·1
Herbst.......	4·6	3·8	3·0*

Die Bewölkungsverhältnisse sind auch im Innern von Asien, den Winter ausgenommen, nicht viel verschieden von jenen der Insel Pelagosa in gleicher geographischer Breite. Dort hat der Frühling die größte, der Herbst die kleinste Bewölkung, in der Adria der Winter und der Sommer. Die Jahresmittel 4·6, 3·7, 3·8 sind nicht wesentlich verschieden.

Tabelle XI.

Bewölkungsverhältnisse.

	Mittel 1894—1907				Luktschun Mittel
	Pelagosa	Lesina	Differenz roh	Differenz ausgeglichen	
Jänner	**6·0**	4·8	1·2	1·1	3·6
Februar	5·9	**5·0**	0·9	1·0	3·6
März	5·4	4·4	1·0	0·9	3·9
April.......	5·0	4·2	0·8	0·9	**5·1**
Mai.......	4·5	3·6	0·9	0·9	5·0
Juni	3·8	3·0	0·8	0·9	4·6
Juli........	2·4	1·4*	1·0	0·8	4·0
August.....	2·2*	1·5	0·7	0·7	3·7
September ..	3·3	2·6	0·7	0·7	2·3*
Oktober	5·1	4·4	0·7	0·7	3·0
November ..	5·4	4·5	0·9	0·9	3·7
Dezember ..	5·8	4·9	0·9	1·0	2·9
Jahr	4·6	3·7	0·9	0·9	3·8

5. Niederschläge. Die Messung der Niederschlagsmengen auf so exponierten Punkten, wie es die Leuchttürme sind, ist wegen der starken Luftbewegung immer mit Schwierigkeiten verbunden, selbst in einem Klima, wo der Schneefall keinen merklichen Beitrag zu der Niederschlagsmenge liefert. Die Aufstellung des Regenmessers auf Pelagosa ist, wie die Inspektion ergab, eine gute. Es kann also nur die heftigere Luftbewegung sein, welche wohl die Niederschlagsmenge kleiner erscheinen läßt als sie wirklich sein dürfte.

Da als Niederschlagstage in dem Beobachtungsjournale nur jene erscheinen, an welchen eine meßbare Regenmenge (0·1 *mm* und darüber) gefallen ist, so fällt auch die Zahl der Niederschlagstage leicht zu gering aus, obgleich im Klima der mittleren Adria die unmeßbaren schwachen Niederschläge wohl

recht klein an Zahl sind. Jedenfalls ist deshalb die Vergleichbarkeit der Niederschlagstage eine einwandfreiere als die der Niederschlagsmenge. Die folgende kleine Tabelle enthält die korrespondierende Zahl der Niederschlagstage auf Pelagosa und auf Lesina.

Tabelle XII.

Mittlere Zahl der Niederschlagstage.

	Pelagosa	Lesina	Luktschun
	13 Jahre korrespondierend		2 Jahre
Jänner	8·4	11·4	1·0
Februar	8·4	10·5	0·5
März	8·2	10·5	0·5
April	6·9	10·7	1·0
Mai	5·8	9·6	4·5
Juni	4·2	6·9	**5·5**
Juli	1·9*	3·9	3·5
August	1·9*	3·5*	3·0
September ...	3·9	6·2	1·0
Oktober	7·8	11·0	0·0*
November ...	8·2	9·9	0·0*
Dezember....	**9·0**	**12·5**	1·0
Jahr	74·6	106·6	21·5

Man sieht, daß die Zahl der Niederschlagstage über der Mitte der Adria (mit obigem Vorbehalt) wesentlich kleiner ist als auf Lesina, in der Nähe des Festlandes. Die Mittel für die Jahreszeiten sind:

Niederschlagstage.

	Pelagosa	Lesina	Luktschun
Winter	**25·8**	**34·4**	2·5
Frühling....	20·9	30·8	6·0
Sommer	8·0*	14·3*	**12·0**
Herbst	19·9	27·1	1·0*

Die größte Regenwahrscheinlichkeit hat über der mittleren Adria der Winter, speziell der Dezember, die kleinste der Sommer, Juli und August. Im Innern von Asien hat der Frühsommer die größte Regenwahrscheinlichkeit, die dabei immer noch sehr gering ist, die kleinste der Herbst, der regenlos ist. Die Niederschlagswahrscheinlichkeit im Winter ist:

Pelagosa kaum......	0·29,
Lesina	0·38,
Luktschun kaum	0·03,

im Sommer:

Pelagosa noch nicht..	0·09,
Lesina.............	0·16,
Luktschun	0·13.

Die Regenwahrscheinlichkeit im Jahresmittel beträgt für

Pelagosa...........	0·20,
Lesina.............	0·29,
Luktschun	0·06,

auf 100 Tage kommen zu Luktschun noch nicht 6 Niederschlagstage.

Da die Frage, ob es wirklich über dem Meere selbst seltener und weniger regnet als an der Küste, von großem Interesse ist, so habe ich die einzelnen gemessenen Jahresmengen des Niederschlages auf Pelagosa und auf der Insel Lesina einer genaueren Prüfung unterzogen, deren Ergebnisse in der folgenden Tabelle XIII sich zusammengestellt finden.

Ich schließe aus dieser Zusammenstellung, daß die Niederschlagsmengen zu Pelagosa in den Jahren 1895, 1898 und 1900 zu klein sind und nicht in Rechnung gezogen werden dürfen. Zu Lesina aber ist im Jahre 1903 die Niederschlagsmenge zu klein, nach der mittleren Regendichte 8 *mm* wird man 820 *mm* rund annehmen dürfen, was Pelagosa : Lesina zu 0·44 liefern würde, auch wohl etwas zu klein.

Das mittlere Verhältnis Pelagosa : Lesina stellt sich dann aus 10 Jahren zu 0·51 heraus (Extreme 0·64 und 0·41).

Die mittlere Regendichte auf Lesina kann zu 8 *mm* angenommen werden, jene auf Pelagosa zu 5·8 *mm*, nach der homogenen Reihe 1899—1906.

Tabelle XIII.

Vergleich der Niederschlagsmessungen.

	Regenmenge des Jahres			Regentage		Regendichte Menge pro Tag	
	Lesina	Pelagosa	Pelagosa zu Lesina	Lesina	Pelagosa	Lesina	Pelagosa
1894	918	466	·51	95	55	9·7	8·5
95	897	275	(·31)	105	73	8·5	(3·8)
96	975	427	·44	112	100	8·7	4·3
97	876	356	·41	96	82	9·1	4·3
98	690	225	(·33)	79	79	8·7	(2·8)
99	689	417	·60	104	67	6·6	6·2
1900	1320	457	(·35)	143	87	9·2	5·2
01	782	388	·50	128	76	6·1	5·1
02	877	408	·46	113	79	7·8	5·2
03	492	360	·73 !	103	61	4·8 !	5·9
04	694	442	·64	98	67	8·9	6·6
05	826	496	·60	110	70	7·5	7·1
06	756	390	·52	110	73	6·8	5·3

Soweit die Regenmessungen auf Pelagosa mit jenen auf Lesina vergleichbar sind, kommen wir zu dem Resultat, daß auf der Insel Pelagosa wenig mehr als die Hälfte der Regenmenge von Lesina fällt.

Daß auf dem offenen Meere weniger Regen fällt als an oder doch in der Nähe einer Steilküste, welche noch dazu im Luv der Regenwinde liegt, ist durchaus wahrscheinlich. Die Veranlassung zu Niederschlägen ist über dem offenen Meere eine erheblich seltenere als an einer bergigen Küste. Doch mag das obige Verhältnis doch etwas zu klein sein.

Vergleichen wir noch die mittleren korrespondierenden Monatssummen des Regenfalles auf Pelagosa und auf Lesina sowie die Tage mit Schneefall und mit Gewitter.

Tabelle XIV.

Korrespondierende Mittelwerte für Pelagosa und Lesina.

	Regenmenge 11 Jahre		Tage mit Schneefall 13 Jahre		Gewittertage 13 Jahre		Pelagosa Tage mit	
	Pelagosa	Lesina	Pelagosa	Lesina	Pelagosa	Lesina	Nebel $5^1/_2$ J.	Sturm 13 J.
Jänner	47	78	0·7	1·0	0·6	0·8	1·6	5·8
Februar	33	74	0·2	0·6	0·6	1·0	3·4	4·6
März	45	72	0·2	0·2	0·8	1·0	2·4	4·4
April	36	60	—	—	0·9	1·2	2·2	2·3
Mai	39	59	—	—	2·1	1·8	3·4	1·5
Juni	22	44	—	—	2·9	1·8	1·7	1·2
Juli	7	15	—	—	3·0	2·1	2·0	0·8
August	15	29	—	—	2·5	1·8	1·7	0·7
September	26	71	—	—	2·5	2·5	2·7	1·2
Oktober	54	115	—	—	1·8	1·8	2·5	2·3
November	47	110	—	—	1·2	0·9	1·3	3·5
Dezember	47	110	—	0·2	1·5	1·0	1·5	5·7
Jahr	418	837	1·1	2·0	20·4	17·7	26·4	34·0
Winter	127	262	0·9	1·8	2·7	2·8	6·5	16·1
Frühling	120	191	0·2	0·2	3·8	4·0	8·0	8·2
Sommer	44	88	—	—	8·4	5·7	5·4	2·7
Herbst	127	296	—	—	5·5	5·2	6·5	7·0

Pelagosa hatte in den 11 für den Niederschlag vorliegenden Jahrgängen im Herbst und im Winter die gleiche Regenmenge, auf Lesina hatte aber der Herbst ein entschiedenes Maximum

des Regenfalles, so daß im Herbst das Verhältnis Pelagosa zu Lesina bloß 0·43 ist, im Frühling dagegen 0·57. Es scheint mir fraglich zu sein, ob diese Unterschiede als reell angesehen werden können.

Pelagosa hat etwas seltener Schneefall als Lesina, wie zu erwarten. Bemerkenswert ist, daß der Dezember noch schneefrei ist, während der März in 10 Jahrgängen durchschnittlich noch zwei Schneetage hat. Es ist dies auch für den maritimen Temperaturgang charakteristisch.

Auf Pelagosa wurden mehr Gewittertage als auf Lesina notiert trotz der erheblich geringeren Zahl der Regentage. Das ist zu erwarten. Der Beobachter auf einer hohen Felsenklippe inmitten des Meeres, mit freiem Rundblick nach allen Seiten, dessen Aufmerksamkeit viel weniger abgelenkt wird gegen die Wahrnehmung fernen Donners als die eines Beobachters zwischen Häusern auf dem Lande, befindet sich unter den günstigsten Verhältnissen zur Aufzeichnung von Gewittern. Bemerkenswert ist aber die erheblich größere Häufigkeit von Gewittern im Sommer auf Pelagosa, welche für mich wenigstens unerwartet ist. Man hätte eher das Gegenteil annehmen mögen. In den übrigen drei Jahreszeiten ist die Häufigkeit der Gewitterstürme die gleiche.[1]

Die Aufzeichnung der Nebel auf Pelagosa ist von 1900 an eine ganz andere als vorher, von da an findet man fast gar keine Nebel mehr notiert. Da das Auftreten von Nebel für eine Semaphorstation doch von besonderem Interesse sein sollte, ist mir dieser Umstand sehr befremdend. Dagegen ist die Notierung der Stürme (geschätzte Windstärke 6 bis 10) gleichmäßig durchgeführt worden und die Zahl der Sturmtage im Jahre schwankt nur wenig.

Die meisten Stürme hat natürlich der Winter, die seltensten der Sommer; auf den Winter entfallen fast genau die Hälfte aller Stürme. Von »Äquinoktialstürmen« ist nichts zu bemerken, weder im Frühling noch im Herbste.

Ich füge auch die Zahl der Gewittertage bei.

---

[1] Über einen interessanten Blitzschlag in die Seeleuchte von Pelagosa siehe Meteorologische Zeitschr. 1877, p. 29.

Zahl der Tage mit Sturm und Gewitter.

	Sturmtage	Gewittertage
1895......	49	12
96......	28	28
97......	29	32
98......	28	25
99......	29	23
1900......	36	27
01......	33	21
02......	38	24
03......	26	15
04......	24	12
05......	28	20
06......	39	18
Mittel.....	32·3	21·4

6. Die Windrichtungen auf Pelagosa. Es ist sehr zu bedauern, daß auf Pelagosa kein Anemometer aufgestellt ist. Es wären sehr interessante Ergebnisse zu erwarten in mehrfacher Hinsicht. Vor allem hätte die Konstatierung der Richtungen der Luftbewegungen großes Interesse, dann aber auch die Frage der täglichen Periode der Richtung und Stärke mitten auf dem Meere. Pelagosa würde eine unvergleichliche Gelegenheit zu anemometrischen Untersuchungen bieten.

Die Auszählung der Häufigkeit der acht Hauptwindrichtungen auf Pelagosa ergibt ein außerordentliches Überwiegen der beiden entgegengesetzten Richtungen SE und NW, beide mit fast gleicher Häufigkeit; die übrigen Richtungen sind selten.

Mittlere Häufigkeit der acht Hauptwindrichtungen in Tagen.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Kalmen
Winter....	7	11	1	**25**	3	9	4	**28**	2
Frühling ..	4	6	3	**35**	2	6	5	27	4
Sommer...	3	3	2	21	1	4	8	**43**	7
Herbst....	4	7	3	**28**	2	8	4	**29**	6

Die Südostwinde sind im Frühjahr vorwiegend, die Nordwestwinde im Sommer, der Nordostwind (Ausläufer der Bora)

ist im Winter am häufigsten, im Sommer am seltensten, Südwestwinde erreichen im Herbst und Winter ihre größte Häufigkeit, am seltensten ist der Südostwind (Scirocco) im Sommer. Im allgemeinen entspricht dies bekannten Verhältnissen.

Das große Übergewicht der beiden entgegengesetzten Richtungen SE und NW ist desgleichen zu erwarten, da Pelagosa in der Mitte der Rinne niedrigen Luftdruckes über der Längsachse der Adria liegt.

Für die Jahreszeiten habe ich die mittleren Windrichtungen berechnet, aber nicht nach obigen gekürzten Zahlen, sondern nach den Summen der Häufigkeit bei drei Beobachtungen täglich.

Mittlere Windrichtung und Einfluß der Jahreszeiten auf dieselben.

Pelagosa

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
φ	N 27° W	S 40° E	W 42° N	N 10° E	W 42° N
R	10	5	22	4	8

Lesina

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
φ	N 63° E	E 7° N	N 4° W	N 74° E	E 26° N
R	41	28	17	32	26

Abweichung vom Jahresmittel.

Pelagosa

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
φ	N 85° E	E 52° S	W 36° N	S 76° E

Lesina

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst
φ	N 66° E	E 63° S	W 12° N	S 66° E

Die mittleren Windrichtungen auf Pelagosa haben wenig Bedeutung, da ja die entgegengesetzten Richtungen vorherrschend sind, die Resultanten daher auch (den Sommer ausgenommen) sehr klein ausfallen. Lesina hat ziemlich verschiedene mittlere Richtungen, da der Einfluß des Landes eine

viel größere Häufigkeit der Nordostwinde bedingt, namentlich im Winter.

Interessanter sind die Ergebnisse der Berechnung des Einflusses der Jahreszeiten auf die mittlere Windrichtung, welche dadurch erhalten werden, daß man von den Windkomponenten der Jahreszeiten jene des Jahres abzieht und aus den Restbeträgen die mittlere Richtung berechnet. Trotz der erheblichen Unterschiede der mittleren Windrichtungen in den Jahreszeiten auf Pelagosa und auf Lesina stellt sich der Einfluß der Jahreszeiten auf die Ablenkung der Windrichtungen als sehr übereinstimmend heraus, so daß man ein Mittel aus den Ergebnissen nehmen kann, wobei ich aber Pelagosa das doppelte Gewicht geben will.

Einfluß der Jahreszeiten auf die mittleren Windrichtungen über der Adria.

Winter	Frühling	Sommer	Herbst
N 79° E	E 56° S	W 28° N	S 73° E

Im Winter wird die mittlere Windrichtung am stärksten nach Osten abgelenkt, im Frühling nach Süden, im Sommer nach WNW und im Herbst wieder nach Osten.

Wenn anemometrische Aufzeichnungen von Pelagosa vorliegen würden, ließen sich diese Verhältnisse exakter darstellen. Ich muß hierzu bemerken, daß ich auch von Lesina die Ergebnisse der dreistündigen Terminbeobachtungen der Windrichtungen benutzt habe.

Von Lesina liegen aber auch anemometrische Aufzeichnungen vor, welche ich vor längerer Zeit eingehend bearbeitet und diskutiert habe in meiner Abhandlung: »Der tägliche und jährliche Gang der Windgeschwindigkeit und der Windrichtung auf der Insel Lesina. Mit einem Beitrag zur Charakterisierung der Bora und des Scirocco«, Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Jahrgang 1888, p. 30 bis 41 und 287 bis 302. Im Anschluß daran mag auch noch verwiesen werden auf meine Abhandlung: »Zur Charakterisierung der Winde des Adriatischen Meeres«, diese Sitzungsber., Bd. LVIII, Juliheft 1868.

Ein neuer physikalischer Beweis für die Achsendrehung der Erde

von

O. Tumlirz,

k. M. k. Akad.

(Mit 10 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juni 1908.)

Im folgenden will ich eine neue physikalische Methode zum Nachweis der Achsendrehung der Erde mitteilen und im Anschluß daran Versuche nach dieser Methode beschreiben. Ausgeführt wurden diese Versuche im k. und k. Militärgeographischen Institut in Wien mit Unterstützung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, welche eine Subvention von 1000 Kronen aus dem Legate Scholz bewilligte, und der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen, welche einen Beitrag von 300 Kronen gewährte.

I.

Die hydrodynamischen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (1)$$

gelten für ein im Raume festes Koordinatensystem. Wir setzen eine inkompressible Flüssigkeit, also $\rho = \text{const.}$ voraus. Der Druck p ist eine Funktion von x, y, z, t, also $p = p(x, y, z, t)$. Betrachten wir ein zweites Koordinatensystem ξ, η, ζ, dessen Achsen den festen Achsen des Systems x, y, z parallel sind und dessen Ursprung eine geradlinige gleichförmige Bewegung im Raume hat, so daß die Gleichungen

$$x = a + \alpha t + \xi, \quad y = b + \beta t + \eta, \quad z = c + \gamma t + \zeta$$

gelten, wo $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ Konstanten sind, so gelten die hydrodynamischen Differentialgleichungen auch für dieses Koordinatensystem, denn es ist $\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dx^2}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}$. Ferner sind die Komponenten der Kraft nach den Achsen ξ, η, ζ dieselben wie die nach den Achsen x, y, z und schließlich ist $\frac{\partial p}{\partial \xi}=\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial \eta}=\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial \zeta}=\frac{\partial p}{\partial z}$.

Wir denken uns jetzt im Raume ein festes Koordinatensystem, in welchem eine Achse jene Richtung haben soll, welche gegenwärtig die Erdachse hat. Dann denken wir uns ein zweites Koordinatensystem, dessen Ursprung im Mittelpunkt der Erde liegen soll und dessen Achsen stets den Achsen des ersten Systems parallel sein sollen. Weil die Bewegung, welche der Mittelpunkt der Erde in dem Zeitraum von einigen Tagen hat, als eine geradlinige, gleichförmige Bewegung angesehen werden kann, so können wir die hydrodynamischen Differentialgleichungen ohneweiters auf das letztgenannte Koordinatensystem beziehen. Bezeichnen wir der Einfachheit halber das letzte Koordinatensystem wieder mit x, y, z, so gelten dann dafür die Gleichungen (1). Das Koordinatensystem soll ein sogenanntes Linkssystem und die Achse, welche mit der Erdachse zusammenfällt, die z Achse sein. Die positive z-Achse gehe durch den Nordpol.

Nun führen wir wieder ein neues Koordinatensystem x', y', z' ein, welches mit der Erde fest verbunden sein soll. Der Koordinatenursprung falle ebenfalls mit dem Mittelpunkt der Erde zusammen, ferner falle die z'-Achse mit der Erdachse, also mit der z-Achse und die $x'z'$-Ebene mit der Ebene des Meridians eines bestimmten Beobachtungsortes auf der nördlichen Halbkugel zusammen, so zwar, daß der Beobachtungsort im ersten Quadranten liegt. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die x'-Achse mit der x-Achse bildet, mit φ, so soll der Winkel φ von der x-Achse aus in dem Sinne positiv gerechnet werden, in welchem man die x-Achse zu drehen hätte, wenn man sie in die y-Achse übergehen lassen wollte. Es gelten dann die Gleichungen:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, \quad z = z'.$$

Bezeichnen wir die Größe der Winkelgeschwindigkeit der Erde mit ω, so ist $\omega = -\frac{d\varphi}{dt}$. Wir erhalten demnach:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\varphi = \frac{d^2x'}{dt^2} + 2\omega\frac{dy'}{dt} - \omega^2 x'$$

$$-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\varphi = \frac{d^2y'}{dt^2} - 2\omega\frac{dx'}{dt} - \omega^2 y'.$$

Bezeichnen wir die Komponenten der Kraft nach den Achsen x', y', z' mit X', Y', Z', so ist

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = X', \quad -X\sin\varphi + Y\cos\varphi = Y', \quad Z = Z'.$$

Ferner ist $p = p(x, y, z, t) = p(x', y', z', t)$, also

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial p}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial p}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial p}{\partial y'} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial p}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial y'} = -\frac{\partial p}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial y}\cos\varphi.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} + 2\omega\frac{dy'}{dt} - \omega^2 x' &= X' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x'} \\ \frac{d^2y'}{dt^2} - 2\omega\frac{dx'}{dt} - \omega^2 y' &= Y' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'} \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= Z' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z'} \end{aligned} \qquad (2)$$

Die Komponenten $X' + \omega^2 x'$, $Y' + \omega^2 y'$, Z' sind, wenn auf die Flüssigkeit nur die Anziehungskraft der Erde wirkt, die Komponenten der Beschleunigung der Schwere. Betrachten wir an dem Beobachtungsort ein Gefäß mit Wasser, so steht die Schwerebeschleunigung senkrecht zum Niveau und betrachten wir in dem Gefäß zwei parallele horizontale planparallele Platten von geringem Abstand (Fig. 1), so folgt aus ihrer horizontalen Einstellung, daß die Beschleunigung der Schwere auch zu ihnen senkrecht ist. Mit Rücksicht darauf wollen wir ein neues Koordinatensystem x'', y'', z'' so einführen,

daß die $x''y''$-Ebene mit der Grenzebene der einen Platte zusammenfällt, daß ferner der Koordinatenursprung O'' in die frühere $x'z'$-Ebene fällt, ferner die x''-Achse nach dem Süden gerichtet und die y''-Achse parallel der y'-Achse ist und endlich die positive z''-Achse vertikal nach oben geht.

Ist α die geozentrische und β die geographische Breite des Koordinatenursprungs O'', ist R der nach O'' gerichtete Erdhalbmesser und g die Schwerebeschleunigung, so gelten für den Raum zwischen den Platten die Gleichungen

$$(X'+\omega^2 x')\sin\beta - Z'\cos\beta = 0, \quad Y'+\omega^2 y' = 0,$$
$$(X'+\omega^2 x')\cos\beta + Z'\sin\beta = -g,$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\sin\beta - \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\beta + 2\omega\frac{dy'}{dt}\sin\beta =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\sin\beta - \frac{\partial p}{\partial z'}\cos\beta\right)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} - 2\omega\frac{dx'}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'}$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\beta + \frac{d^2z'}{dt^2}\sin\beta + 2\omega\frac{dy'}{dt}\cos\beta =$$
$$= -g - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\cos\beta + \frac{\partial p}{\partial z'}\sin\beta\right)$$

und deshalb wegen der Beziehungen

$$x'' = x'\sin\beta - z'\cos\beta + R\sin(\beta-\alpha)$$
$$y'' = y'$$
$$z'' = x'\cos\beta + z'\sin\beta + R\cos(\beta-\alpha)$$

die Gleichungen

$$\frac{d^2x''}{dt^2} + 2\omega\sin\beta\frac{dy''}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x''}$$
$$\frac{d^2y''}{dt^2} - 2\omega\sin\beta\frac{dx''}{dt} - 2\omega\cos\beta\frac{dz''}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y''} \qquad (3)$$
$$\frac{d^2z''}{dt^2} + 2\omega\cos\beta\frac{dy''}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z''}.$$

Schließlich führen wir Zylinderkoordinaten ein mittels der Gleichungen:

$$x'' = r\cos\psi, \quad y'' = r\sin\psi, \quad z'' = z''.$$

Der Winkel ψ werde in der $x''y''$-Ebene von der x''-Achse aus in dem Sinne positiv gezählt, in welchem man die x''-Achse zu drehen hätte, wenn man sie in die y''-Achse übergehen lassen wollte. Aus den zwei ersten Gleichungen 3) folgt

$$\frac{d^2x''}{dt^2}\sin\psi - \frac{d^2y''}{dt^2}\cos\psi + 2\,\omega\sin\beta\left(\sin\psi\frac{dy''}{dt} + \cos\psi\frac{dx''}{dt}\right)$$
$$+ 2\,\omega\cos\beta\cos\psi\frac{dz''}{dt} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x''}\sin\psi - \frac{\partial p}{\partial y''}\cos\psi\right)$$

oder weil

$$\frac{d^2x''}{dt^2}\sin\psi - \frac{d^2y''}{dt^2}\cos\psi = -2\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt} - r\frac{d^2\psi}{dt^2}$$

$$\frac{dy''}{dt}\sin\psi + \frac{dx''}{dt}\cos\psi = \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\psi} = \frac{\partial p}{\partial x''}\frac{\partial x''}{\partial\psi} + \frac{\partial p}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial\psi} = -r\frac{\partial p}{\partial x'}\sin\psi + r\frac{\partial p}{\partial y''}\cos\psi$$

ist,

$$r\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt} - 2\omega\sin\beta\frac{dr}{dt} - 2\omega\cos\beta\cos\psi\frac{dz''}{dt} =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\,\partial\psi}. \quad (4)$$

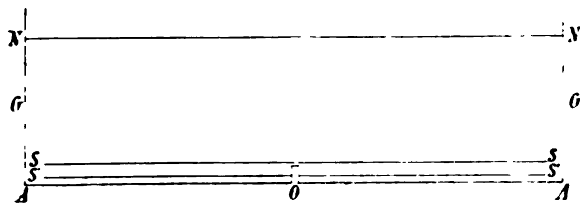


Fig. 1.

Wir betrachten jetzt das zylindrische Gefäß GG, welches bis zu dem Niveau NN mit Wasser gefüllt sein soll. Am Boden sollen sich zwei parallele horizontale Kreisscheiben SS und

$S'S'$ befinden. Die untere Scheibe habe in der Mitte bei O eine kleine Durchbohrung. Ebenso habe die Bodenplatte AA in der Mitte eine kleine Durchbohrung, und zwar von derselben Größe. Durch beide Öffnungen gehe ein oben geschlossenes und unten offenes Röhrchen hindurch, welches in dem zwischen den Scheiben befindlichen Teile sehr viele kleine Öffnungen haben möge. Dieses Gefäß stellt schematisch im Prinzip die Versuchsanordnung vor, von welcher später die Rede sein wird.

Es sei zunächst die Öffnung bei O geschlossen und alles in Ruhe. Dann ist $\frac{\partial p}{\partial \psi} = 0$. In bezug auf die Zylinderachse des Gefäßes ist alles symmetrisch. Öffnen wir den Abfluß bei O, so wird die Strömung in dem ganzen Gefäß in bezug auf die Zylinderachse des Gefäßes symmetrisch sein. Der Druck p wird durch die Strömung geändert; betrachten wir aber einen horizontalen Kreis, welcher seinen Mittelpunkt in der Zylinderachse hat, so muß der Druck wegen der vollständigen Symmetrie in allen Punkten des Kreises um denselben Betrag geändert werden. Wir müssen also, wenn wir die Zylinderachse zur z''-Achse des Zylinderkoordinatensystems nehmen, wieder $\frac{\partial p}{\partial \psi} = 0$ erhalten. Die Gleichung (4) bekommt jetzt, wenn wir sie noch mit r multiplizieren, die Gestalt

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\psi}{dt}\right) - 2\omega \sin\beta\, r \frac{dr}{dt} - 2\omega \cos\beta\, r \cos\psi \frac{dz''}{dt} = 0. \quad (5)$$

Setzen wir

$$\frac{dr}{dt} = V, \quad \frac{d\psi}{dt} = W, \quad \frac{dz''}{dt} = w,$$

so lautet die Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{\partial W}{\partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial z''} = 0.$$

Da wegen der vollständigen Symmetrie in bezug auf die Zylinderachse $\frac{\partial V}{\partial \psi} = 0$ und $\frac{\partial W}{\partial \psi} = 0$ ist, so reduziert sich die letzte Gleichung auf

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{\partial w}{\partial z''} = 0.$$

Nun wollen wir unsere Betrachtung auf den Teil der Flüssigkeit beschränken, welcher sich zwischen den Kreisscheiben SS und $S'S'$ befindet. Da der Abstand der Scheiben als gering vorausgesetzt wird, so erfolgt dort die Strömung parallel zu den Scheiben, d. h. es ist dort überall $w = 0$. Somit reduziert sich die Gleichung (5) auf

$$\frac{d(r^2 W)}{dt} = 2\omega \sin\beta\, r V \tag{6}$$

und die Kontinuitätsgleichung auf

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0. \tag{7}$$

Weil $\frac{\partial W}{\partial \phi} = 0$ und $w = 0$ ist, so wird aus der Gleichung (6)

$$\frac{\partial (r^2 W)}{\partial t} + V \frac{\partial (r^2 W)}{\partial r} = 2\omega \sin\beta\, r V. \tag{8}$$

Ist die Strömung stationär geworden, dann sind V und W Funktionen, welche die Zeit t nicht mehr enthalten, also

$$\frac{d(r^2 W)}{dr} = 2\omega \sin\beta\, r \tag{9}$$

$$\frac{d(r V)}{dr} = 0. \tag{10}$$

Am Rande der Kreisscheiben können wir die Winkelgeschwindigkeit W, welche ja relativ zur Erde gilt, gleich Null setzen. Bezeichnen wir den Radius der Kreisscheiben mit R und integrieren wir die Gleichung (9) von $r = R$ bis $r = r$, so wird

$$r^2 W = -\omega \sin\beta (R^2 - r^2)$$

oder

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = -\omega \sin\beta (R^2 - r^2). \tag{11}$$

Andrerseits folgt aus der Gleichung (10)

$$r V = C,$$

wo C eine Konstante bedeutet, oder

$$r\frac{dr}{dt}=C. \tag{12}$$

Wenn wir jetzt die Gleichungen (11) und (12) miteinander verbinden, so wird

$$r\frac{d\psi}{dr}=-\frac{\omega\sin\beta}{C}(R^2-r^2), \tag{13}$$

woraus

$$\psi=-\frac{\omega\sin\beta}{C}\left(R^2\log r-\frac{r^2}{2}\right)+\text{const.}$$

folgt. Für $r=R$ wollen wir $\psi=\psi_0$ setzen. Dann wird

$$\psi-\psi_0=\frac{\omega\sin\beta R^2}{C}\log\frac{R}{r}-\frac{\omega\sin\beta}{2C}(R^2-r^2). \tag{14}$$

Das ist die Gleichung der Stromlinien für die Bewegung der Flüssigkeit zwischen den Scheiben.

Hätte die Erde keine Rotation, so wäre $\omega=0$ und $\psi=\psi_0$, d. h. es wären alle Stromlinien radiale gerade Linien. Durch die Rotation der Erde werden die Stromlinien zu krummen Linien.

Schreiben wir die letzte Gleichung in der Form

$$\frac{C(\psi-\psi_0)}{R^2\omega\sin\beta}=\log\frac{R}{r}-\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{2}=\sigma,$$

so erhalten wir für σ die folgenden Werte:

$\frac{r}{R}=1,$ 0·9, 0·8, 0·7, 0·6, 0·5, 0·4,

$\sigma=0,$ 0·0104, 0·0432, 0·1017, 0·1908, 0·3182, 0·4963,

$\frac{r}{R}=0·3,$ 0·2, 0·1, 0·05.

$\sigma=0·7490,$ 1·1295, 1·8076, 2·4970.

Bei den Versuchen, welche im folgenden beschrieben werden, hatte das zylindrische Gefäß einen Durchmesser von

160 *cm*. Die Kreisscheibe SS war eine Glasplatte von 140 *cm* Durchmesser und die Kreisscheibe $S'S'$ war eine Glasplatte von 154 *cm* Durchmesser. Die Mittelpunkte beider Scheiben lagen in der vertikalen Zylinderachse des Gefäßes. Die beiden Scheiben hatten einen Abstand von 5 *cm*.

Bei dem Versuch, der später ausführlich beschrieben werden soll, betrug die Ausflußmenge $4 \cdot 072\, cm^3\, \mathrm{sec}^{-1}$. Weil die Strömung zwischen den Platten im Sinne des abnehmenden Radius erfolgt, so ist $V = \frac{dr}{dt}$ negativ. Betrachten wir den Querschnitt des zwischen den Scheiben befindlichen Raumes am Rande der oberen Scheibe, so erhalten wir dort

$$-140\pi \times 5 \times V = 4 \cdot 072,$$

also für $r = R$ die Radialgeschwindigkeit

$$V = -0 \cdot 00185\, cm\, \mathrm{sec}^{-1}$$
$$= -0 \cdot 0185\, mm\, \mathrm{sec}^{-1}.$$

Dadurch ergibt sich für die Konstante C der Wert

$$C = -0 \cdot 1296\, cm^2\, \mathrm{sec}^{-1}.$$

Dieser Wert gestattet uns nun, für jeden Wert von r die zugehörige Radialgeschwindigkeit zu berechnen. Wir erhalten:

$\frac{r}{R}$	V	$\frac{r}{R}$	V
1	$-0 \cdot 0185$ *mm*/sec	$0 \cdot 5$	$-0 \cdot 0370$ *mm*/sec
$0 \cdot 9$	$-0 \cdot 0205$	$0 \cdot 4$	$-0 \cdot 0462$
$0 \cdot 8$	$-0 \cdot 0231$	$0 \cdot 3$	$-0 \cdot 0617$
$0 \cdot 7$	$-0 \cdot 0264$	$0 \cdot 2$	$-0 \cdot 0925$
$0 \cdot 6$	$-0 \cdot 0308$	$0 \cdot 1$	$-0 \cdot 185$

Da Wien die geographische Breite $\beta = 48° \, 14'$ hat und

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{R^2 \omega \sin \beta}{C} = -2 \cdot 0502 \text{ in Bogenmaß}$$
$$= -117 \cdot 47°.$$

Dies gibt:

$\frac{r}{R}$	$\psi_0-\psi$	$\frac{r}{R}$	$\psi_0-\psi$	$\frac{r}{R}$	$\psi_0-\psi$
1	0°	0·6	22·41°	0·2	132·7°
0·9	1·222°	0·5	37·38°	0·1	212·3°
0·8	5·075°	0·4	58·30°	0·05	293·3°
0·7	11·95°	0·3	87·98°		

Wir müssen jetzt nochmals das Koordinatensystem $x''y''z''$ und das Zylinderkoordinatensystem näher betrachten. Die z''-Achse ging vertikal nach aufwärts, die x''-Achse nach Süden und die y''-Achse nach Westen. Befindet sich ein Beobachter in der z''-Achse, so daß die positive Richtung dieser Achse von den Füßen zum Kopfe geht, und sieht er nach der positiven x''-Achse, so wird der Winkel ψ im Sinne der Drehung des

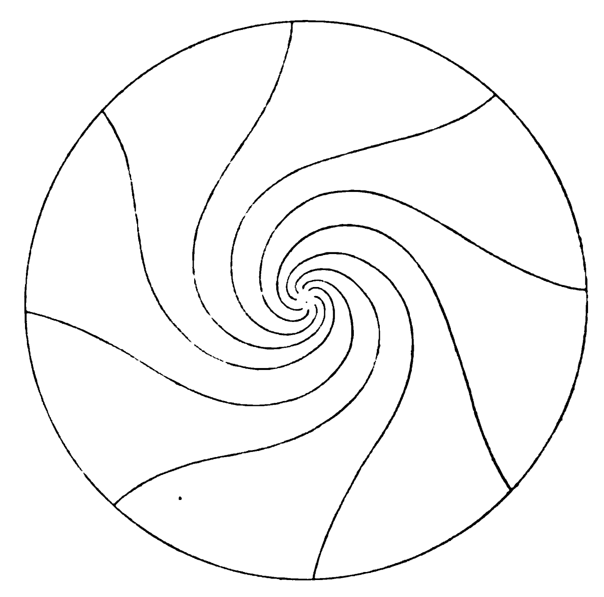


Fig. 2.

Uhrzeigers positiv gerechnet. Tritt also ein Flüssigkeitsteilchen in den Raum zwischen den Glasplatten bei $r = R$ unter dem Winkel ψ_0 ein, so wird für dieses Teilchen während seiner Bewegung gegen die Mitte der Winkel ψ immer kleiner und

kleiner, d. h. die Stromlinien sind von rechts nach links im Sinne der Erdrotation gewundene krumme Linien. Die Fig. 2 zeigt diesen theoretischen Verlauf der Stromlinien.

II.

Die Stromlinien nehmen diese Form an, wenn die Radialgeschwindigkeiten die obige Größe haben. Je größer die Radialgeschwindigkeiten sind, desto größer ist der absolute Wert von C und desto weniger gekrümmt sind die Stromlinien. Um die Stromlinien zur Darstellung zu bringen, bediente ich mich derselben Methode, nach welcher ich die Stromlinien beim Abfluß einer Flüssigkeit durch eine kleine Öffnung im Boden des Gefäßes dargestellt habe.[1] Nach dieser Methode brachte ich kleine Näpfchen, welche mit Methylviolett gefüllt waren, unter den Rand der oberen Scheibe. Die Flüssigkeitsbewegung nimmt nämlich die farbigen Fäden, welche sich aus den Näpfchen entwickeln, mit und diese Fäden geben durch ihre Gestalt die Stromlinien wieder. Da nach der oben gegebenen Berechnung am Rande der oberen Scheibe, also für $r = R = 70\,cm$ die Radialgeschwindigkeit $= 0\cdot0185\,mm\,\mathrm{sec}^{-1}$ ist, demnach ein Flüssigkeitsteilchen dort in der Minute nur einen Weg von $1\cdot11\,mm$ zurücklegt, so hatte ich vor der Ausführung der Versuche das große Bedenken, ob bei dieser außerordentlich kleinen Geschwindigkeit der Farbstoff überhaupt mitgenommen wird, denn der Farbstoff hat die Eigentümlichkeit, daß er sich nach dem Austritt aus dem Näpfchen zunächst auf den Boden senkt. Die Versuche haben aber erfreulicherweise gezeigt, daß der Farbstoff wirklich mitgenommen wird; allerdings sind mehrere Stunden erforderlich, bis die Fäden sich bis zur Ausflußöffnung entwickeln. Je länger dann der Ausfluß dauert, desto farbenreicher werden die Fäden.

Da in der Rechnung die Voraussetzung gemacht wird, daß die Bewegung stationär ist, so muß das Gefäß so groß gewählt werden, daß der Wasserspiegel im Laufe vieler Stunden nur sehr wenig sinkt. Das Gefäß muß also einen beträchtlichen Durchmesser haben. Eine andere Forderung, welche streng

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, Abt. IIa, p. 1024 (1896).

erfüllt sein muß, ist die, daß die Flüssigkeit vor dem Öffnen des Abflusses vollkommen zur Ruhe gekommen sein muß; denn es muß mit besonderer Sorgfalt darauf gesehen werden, daß jede fremde Rotation der Flüssigkeit ausgeschlossen sein muß. Dies wird nicht nur dadurch erreicht, daß man die Flüssigkeit von der Füllung des Gefäßes bis zum Beginn des Abflusses eine sehr lange Zeit ruhig stehen läßt, sondern auch durch die Konstruktion des Apparates und durch Vorsichtsmaßregeln beim Füllen des Gefäßes. Ferner muß der Raum, in dem das Gefäß steht, eine konstante Temperatur haben, weil eine Temperaturänderung sehr leicht eine Konvektion in der Flüssigkeit, also eine Störung des zu beobachtenden Bewegungszustandes herbeiführen kann. Diese letztere Forderung

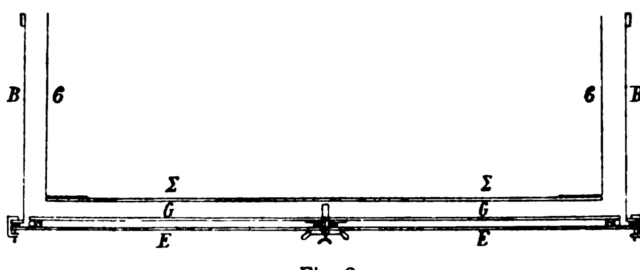


Fig. 3.

war bei meinen Versuchen fast ganz erfüllt. Der Kellerraum, welcher mir nämlich im k. und k. Militärgeographischen Institut in Wien eingeräumt war, war so günstig gelegen, daß die Temperatur nach den Angaben eines Thermographen höchstens um 0·2° C. schwankte. Da die mittlere Temperatur 6·3° C. war und bei 4° C. das Dichtemaximum des Wassers liegt, so entsprechen diesen Temperaturschwankungen so minimale Schwankungen der Dichte, daß man Wärmekonvektionen im Wasser als ausgeschlossen betrachten konnte.

Der Apparat, welchen ich nun im folgenden beschreiben werde, wurde von Herrn Hermann Dümler, Mechaniker in Wien, IX. Bez., Schwarzspanierstraße 4 und 6 konstruiert. Herr Dümler verfolgte auch die Versuche mit dem größten Interesse und seine Ratschläge trugen sehr viel zum Gelingen der Versuche bei. Der Apparat bestand vor allem aus einem großen

zylindrischen Gefäß *BEEB* (Fig. 3). Die Bodenplatte *EE* war eine kreisförmige Platte aus Schmiedeeisen von 6 *mm* Stärke und 165 *cm* Durchmesser. Der Mantel *BB* bestand aus 2 *mm* starkem Eisenblech, welches am oberen Rande eine ungefähr 2 *cm* breite Verstärkung aus Stabeisen hatte und mit Minium und einer Ölfarbe angestrichen war. Der Mantel hatte eine Höhe von 55 *cm* und einen Durchmesser von 160 *cm*. Am unteren Rande war er durch einen flachen, rechtwinklig gestellten Ring verstärkt, welcher ungefähr 3 *cm* breit und 4 *mm* dick war. Zwischen diesem Ringe und der schmiedeisernen Platte befand sich ein endloser massiver Gummiring *D* (Fig. 4) von ungefähr 1 *cm* Dicke. Dieser Gummiring wurde durch 24 eiserne Pressen zusammengepreßt, wodurch das Gefäß vollkommen abgedichtet wurde. Die Schmiedeeisenplatte wurde ebenfalls mit einer Ölfarbe, und zwar auf beiden Seiten überzogen. In die Schmiedeeisenplatte wurden acht zylindrische Messingfüßchen *L* (Fig. 4) von 1 *cm* Höhe und 2 *cm* Durchmesser so eingeschraubt, daß sie alle von dem Zylindermantel *BB* einen Abstand von 3 *cm* und untereinander einen gleichen Abstand hatten. Die Füßchen bekamen eine Gummiauflage. Auf die Füßchen wurde dann eine kreisförmige Platte *GG* (Fig. 3 und 4) aus Rohglas von 8 *mm* Dicke und 154 *cm* Durchmesser gelegt. Die Rohglasplatte war auf der unteren Seite mit einer weißen Ölfarbe angestrichen. Wird der Apparat mit Wasser gefüllt, so dringt das Wasser in den Raum zwischen den Platten *GG* und *EE* und es erfährt dabei die Glasplatte *GG* allseits den gleichen Druck. Damit aber in diesen Zwischenraum der Farbstoff nicht eindringt und den weißen Ölanstrich färbt, wurde um die Füßchen *L* ein endloser hohler Gummiring *R* (Fig. 4) gelegt, welcher vor dem Versuch mit einer Luftpumpe ähnlich wie die Pneumatik eines Fahrrades aufgepumpt wurde. Dies bewirkte, daß der Ring *R* sich an die beiden Platten ganz dicht anlegte.

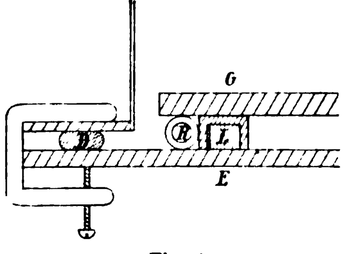


Fig. 4.

Die Glasplatte GG und die Schmiedeeisenplatte EE erhielten in der Mitte eine kreisförmige Bohrung von 26 mm Durchmesser. Bevor die Glasplatte GG aufgelegt wurde, wurde in die Bohrung der Schmiedeeisenplatte ein Messingzylinder mm (Fig. 3), welcher seitlich in eine Messingscheibe ss überging und unter dieser Scheibe einen endlosen massiven Gummiring rr trug, eingesetzt. Der Zylinder war 4 cm hoch und hatte unten am äußeren Rande ein Gewinde, auf welches eine 1 cm dicke Schraubenmutter mit einer dazwischen gelegten 2½ mm



[illegible]

[illegible]

die Spitze *c* einer Schraubenspindel *g* verschlossen werden, welche durch den massiven Boden des Zylinders ***mm*** hindurchging. Der Boden ist in ββ (Fig. 5) in der Aufsicht gezeichnet. Wie man sieht, hatte er noch zwei andere größere Öffnungen ***hh***, welche für den Abfluß des Wassers dienten. Mit der Platte ***bb*** war eine hohle Messingröhre *aa* verlötet, welche oben geschlossen war und in der Mantelfläche 36 feine Löcher von $^1/_3$ *mm* Durchmesser hatte. Durch diese Löcher und durch die Öffnungen bei *c* und in dem Boden des Zylinders *mm* erfolgte der Abfluß des Wassers.

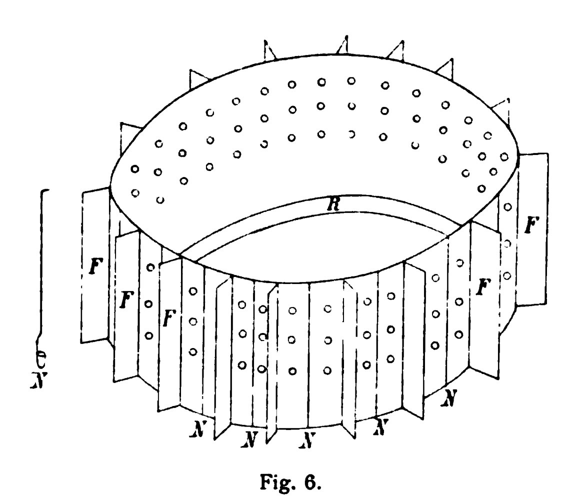


Fig. 6.

Auf die Glasscheibe *GG* wurden am Rande in gleichem Abstand zehn hohle Messingfüßchen von 5 *cm* Höhe, welche mit einer Gummiauflage versehen waren, gestellt und darauf wurde eine kreisförmige, 8 *mm* starke Spiegelglasscheibe ΣΣ (Fig. 3 und 5) von 140 *cm* Durchmesser so gelegt, daß ihr Mittelpunkt in die Zylinderachse fiel. Die Füßchen wurden so gestellt, daß die Scheibe ΣΣ auf ihnen mit dem Rande ruhte. Die Glasplatten *GG* und ΣΣ waren beide horizontal und einander parallel.

Schließlich wurde auf die Glasscheibe ΣΣ ein Blechzylinder *CC* aus 1 *mm* starkem Zinkblech gesetzt (Fig. 3 und 6). Sein Durchmesser war 140 *cm* und seine Höhe 50 *cm*. Die Bodenplatte war bis auf einen 10 *cm* breiten Streifen am Rande

ausgeschnitten. Mit diesem Rande ruhte der Blechzylinder auf der Scheibe ΣΣ. Auf der unteren Seite des Randstreifens war noch ein endloser, ungefähr 3 *cm* breiter Docht angekittet. An der äußeren Mantelfläche des Zylinders *CC* wurden 16 rechteckige Blechtafeln *F* in vertikaler Stellung und in gleichem Abstand um feste Scharniere mit Reibung drehbar angebracht. Die Tafeln waren 50 *cm* hoch und 10 *cm* breit. In der Mitte zwischen den Blechtafeln *F* befanden sich 16 Stäbchen *N*, von welchen eines in Fig. 6 (links) besonders gezeichnet ist. Die Stäbchen trugen unten Näpfchen und waren in festen Scharnieren mit Reibung verschiebbar. Die Scharniere wurden in vertikaler Stellung an den Blechmantel gelötet und waren auf der äußeren Seite aufgeschnitten, damit die Stäbchen mit den Näpfchen hineingeschoben werden konnten. Die Näpfchen befanden sich bei den Versuchen immer 15 *mm* unter der Spiegelglasplatte. Damit diese Stellung immer leicht erreicht werden konnte, waren die Stäbchen am oberen Ende so rechtwinklig umgebogen, daß, wenn das Knie mit dem Blechmantel zur Berührung kam, das Näpfchen gerade 15 *mm* unter der Spiegelglasscheibe stand. Die Näpfchen waren konisch; die obere Öffnung hatte einen Durchmesser von 4 *mm* und die untere einen Durchmesser von 1 *mm*, während die Höhe 4 *mm* betrug.

Schließlich hatte der Blechmantel, so wie es die Fig. 6 zeigt, drei Lochreihen von je 32 Löchern, also zusammen 96 Löcher von 1 *cm* Durchmesser, damit das Wasser innen und außen kommunizieren konnte. Die Lochreihen hatten vom oberen Rande einen Abstand von 10, 20 und 30 *cm*.

Der Zweck der Blechflügel *F* war der, den Raum zwischen dem Blechmantel und dem Außenmantel in Kammern zu teilen, durch welche in diesem Raume jede Rotation um die Zylinderachse aufgehoben wurde. Es ist nämlich zu beachten, daß das Wasser, welches sich zwischen den Glasplatten bewegt, aus diesen Kammern kommt.

Der Apparat stand auf einem äußerst festen Tische von 82 *cm* Höhe. Der Tisch hatte oben 98 *cm* im Quadrat und unten 124 *cm* im Quadrat. Damit die Schmiedeeisenplatte bei dem großen Gewicht, welches auf ihr lastete, keine Verbiegungen

erfahre, wurde auf den Tisch, wie es die Fig. 7 angibt, ein Rost aus Gußeisen, welcher ein einheitliches Stück bildete, gelegt. Die Stäbe hatten eine Länge von 158 *cm*, eine Breite von 5 *cm* und eine Dicke von 1 *cm*. Was die Last anbelangt, welche auf der Schmiedeeisenplatte ruhte, so betrug das Gewicht des Apparates nahezu 2 Meterzentner und da der Apparat, wenn er vollgefüllt war, 10 Hektoliter faßte, so war die Last, welche auf der Schmiedeeisenplatte ruhte, ungefähr 12 Meterzentner.

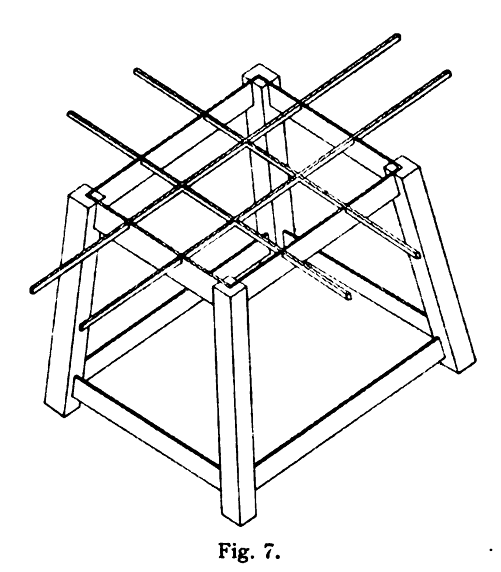


Fig. 7.

Zur Füllung des Apparates wurde ein Gabelrohr aus Messing an den Außenmantel angeschraubt und durch einen Gummischlauch mit der Wasserleitung verbunden. Aus dem einen Rohr floß das Wasser in eine der oben angegebenen Kammern zwischen dem Außenmantel und dem Blechmantel und aus dem anderen Rohre in den Innenraum des Blechmantels. Die Röhren waren in der Nähe der Mündung möglichst vertikal nach abwärts gebogen. Um aber die Stoßwirkung des Strahles zu vermeiden und gleichzeitig zu verhüten, daß durch eine geringe seitliche Richtung des Strahles beim Füllen des Apparates eine starke Rotationsbewegung in die Wassermasse hineinkommt, wurden die Wasserstrahlen zunächst in zwei zylindrische Glasgefäße geschickt, welche eine Höhe von 30 *cm* und

einen Durchmesser von 8·5 *cm* hatten und unmittelbar unter den Ausflußröhren möglichst vertikal aufgehängt waren. In jedem Glaszylinder befand sich überdies eine Vorrichtung aus Zinkblech, welche aus vier rechteckigen Tafeln von 26 *cm* Länge bestand, die miteinander so zusammengelötet waren, wie es die Fig. 8 zeigt. Die Tafeln reichten bis an die Mantelfläche der Zylinder und teilten den Innenraum eines jeden Zylinders in vier Kammern. Die Achse, in welcher die Tafeln zusammenstießen, setzte sich unten noch um ein Stück von 1 *cm* Länge fort. Es wurde nun in jedem Gefäß der Wasserstrahl in eine der vier Kammern geschickt. Das Wasser mußte unter den Tafeln in die übrigen drei Kammern treten, dort emporsteigen und dann über den Rand und längs der Außenseite des Gefäßes fließen. Selbstverständlich waren beim Füllen die Blechflügel *F* des Blechzylinders (Fig. 6) senkrecht zur Mantelfläche gestellt, so daß der Raum zwischen dem Blechzylinder und dem Außenmantel in die oben erwähnten Kammern geteilt war. Schließlich wurde noch an der Innenseite des Blechzylinders, so wie es die Fig. 9 in der Aufsicht zeigt, vier Tafeln aus Zinkblech von 46 *cm* Höhe und 11 *cm* Breite in gleichem Abstand voneinander so befestigt, daß die Breitseite zur Mantelfläche senkrecht stand und die Langseite zur Zylinderachse parallel war. Dies hatte zur Folge, daß, wenn schon die Wassermasse in dem Innenraum des Blechzylinders bei der Füllung eine schwache Rotation erhielt, die Rotation längs der Mantelfläche unterdrückt war. Diese einfache Vorrichtung trug zur Beruhigung der Wassermassen sehr stark bei.

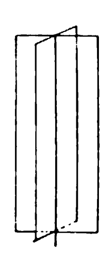


Fig. 8.

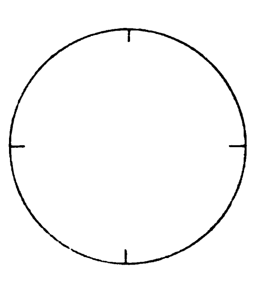


Fig. 9.

Nachdem der Apparat ganz gefüllt war (die Wassermenge betrug, wie schon erwähnt, etwas über 10 Hektoliter) sperrte ich den Experimentierraum ab und ließ den Apparat viele Stunden lang ruhig stehen. Bei dem letzten Versuch blieb der Apparat 40 Stunden lang ruhig stehen. Hierauf öffnete ich den Abfluß

und setzte gleichzeitig die Näpfchen vorsichtig ein. Da die Ausflußmenge $4 \cdot 072\, cm^3$ pro Sekunde betrug, so sank der Wasserspiegel äußerst langsam. Nach vollen 24 Stunden war er um $17 \cdot 5\, cm$ gesunken. Um diese Zeit wurde die Erscheinung photographiert. Der photographische Apparat befand sich an der Decke des Kellerraumes gerade oberhalb des Apparates.

Um über die Beruhigung der Wassermasse nach der Füllung des Apparates eine Vorstellung zu geben, will ich die Ergebnisse einer Arbeit benutzen, welche ich im Jahre 1881 unter dem Titel: »Über die Rotationsbewegung einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit um eine Achse unter dem Einfluß der Reibung« veröffentlicht habe.[1] Ich betrachtete dort die Rotationsbewegung einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit innerhalb einer starren Kreiszylinderfläche. Ist die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders gleich Null und ist zur Zeit $t = 0$ die Winkelgeschwindigkeit W der Flüssigkeit[2] für den Radiusvektor r durch die Gleichung

$$W = \frac{1}{\sqrt{r^3}} f(r)$$

gegeben, wo $f(r)$ eine stetige Funktion bedeutet, so ist zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit W durch die Gleichung

$$r W = \Sigma\, e^{-\frac{n^2 \mu t}{\rho}} J^1(nr) \frac{\int_0^l f(\xi) \sqrt{\xi}\, J^1(n\xi)\, d\xi}{\int_0^l \xi J^1(n\xi) J^1(n\xi)\, d\xi}$$

gegeben. Es ist demnach die Geschwindigkeit rW für irgend einen Radiusvektor und zu irgendeiner Zeit ausgedrückt durch eine unendliche Reihe von Exponentialgrößen, welche, wenn die Flüssigkeit die Zylinderfläche benetzt, nach den reellen positiven Wurzeln n der transzendenten Gleichung

$$J^1(nl) = 0$$

---

[1] Diese Sitzungsberichte, II. Abt., Bd. 85, p. 106, Jahrg. 1882.

[2] In der genannten Arbeit ist die Winkelgeschwindigkeit mit ψ bezeichnet.

fortschreitet, wobei aber die Wurzel $n = 0$ ausgenommen ist. μ bedeutet den Reibungskoeffizienten, ρ die Dichte, l den Radius der Zylinderfläche und J^1 die Bessel'sche Funktion erster Ordnung. Setzen wir $nl = z$, so sind die positiven reellen Wurzeln der Gleichung $J^1(z) = 0$ durch

$$z_1 = 0,\ z_2 \begin{matrix} > 3\cdot 8 \\ < 3\cdot 9 \end{matrix},\ z_3 \begin{matrix} > 4 \\ < 4\cdot 1 \end{matrix},\ z_4 \begin{matrix} > 7 \\ < 7\cdot 1 \end{matrix} \cdots\cdots$$

gegeben. Nach einer sehr langen Zeit können wir in dem Ausdruck für rW bloß jene Glieder beibehalten, welche die kleinsten Wurzeln ($n_1 = 0$ ausgenommen) der erwähnten Gleichung enthalten, nämlich die Wurzeln n_2 und n_3. Da diese Wurzeln sehr nahe beisammen liegen, so wollen wir ihren Mittelwert n wählen und schreiben

$$rW = 2e^{-\frac{n^2\mu t}{\rho}} J^1(nr) \frac{\int_0^l \sqrt{\xi} f(\xi) J^1(n\xi) d\xi}{\int_0^l \xi J^1(n\xi) J^1(n\xi) d\xi}$$

Ist die Flüssigkeit Wasser von 6° C. und ist der Radius l des Zylinders gleich $70\,cm$, so können wir nach 10 Stunden die Winkelgeschwindigkeit W durch diesen Ausdruck darstellen. Wir wollen den Wert, welchen die Winkelgeschwindigkeit nach 10 Stunden hat, mit W_1 und diese Zeit mit t_1 bezeichnen. Wenn wir die Rotation nach 20 Stunden betrachten, und dann die Winkelgeschwindigkeit mit W_2 und die Zeit mit t_2 bezeichnen, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{W_1}{W_2} = e^{\frac{n^2\mu}{\rho}(t_2 - t_1)}$$

Da $t_2 - t_1 = 36000$ Sekunden und $\frac{n^2\mu}{\rho}(t_2 - t_1) = 1\cdot 650$ ist, so ist

$$W_2 = \frac{W_1}{5\cdot 207}.$$

Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit nach 40 Stunden mit W_8, so ergibt sich in analoger Weise

$$W_8 = \frac{W_1}{141 \cdot 2}.$$

In den ersten 10 Stunden befolgt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit nicht das zuletzt angegebene einfache Gesetz, da aber die Summenglieder, welche die höheren Wurzeln enthalten, mit der Zeit desto rascher abnehmen, je größer die Wurzeln sind, so können wir sagen, daß die Winkelgeschwindigkeit im Verlaufe der ersten 10 Stunden rascher abnimmt als in dem Verhältnis $1 : 5 \cdot 207$ und daß daher das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit W_8 nach 40 Stunden zu der Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ kleiner ist als

$$\frac{1}{5 \cdot 207 \times 141 \cdot 2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{735 \cdot 2}.$$

Nun ist zu beachten, daß auf die Bewegung des Wassers, das sich in unserem Blechzylinder befand, die Bodenfläche, nämlich die Spiegelglasplatte, ebenfalls durch Reibung einwirkte und daß durch die am Rande angebrachten vier Blechtafeln der Radius der rotierenden Flüssigkeit viel kleiner als 70 *cm* war. Es mußte also in unserem Falle die Rotationsbewegung viel rascher abnehmen. Bei dem Versuche, von dem soeben die Rede war und der photographisch aufgenommen wurde, zeigte ein schwimmendes Thermometer unmittelbar nach der Füllung eine solche Rotation in dem Blechzylinder an, daß ein Umlauf ungefähr in einer Stunde vollzogen wurde. Daraus folgt nach den obigen Betrachtungen, daß die Winkelgeschwindigkeit nach 40 Stunden weniger als einen Umlauf in 735 Stunden, also weniger als einen Grad in 2 Stunden oder 12° in 24 Stunden betrug.

Viel rascher erfolgt die Beruhigung des Wassers zwischen den Glasplatten und ganz besonders rasch in den Kammern zwischen dem Blechmantel und dem Außenmantel. Man kann in beiden Räumen nach 40 Stunden eine vollkommene Ruhe annehmen. Da durch die vier an der Innenseite des Blechzylinders angesetzten Blechtafeln die Rotation des Wassers in

der Nähe der Mantelfläche gleich anfangs unterdrückt wird, und das Wasser, welches durch die Öffnungen der Mantelfläche in die Kammern eintritt, aus dieser Schichte kommt, so können wir sagen, daß nach 40 Stunden alle Voraussetzungen für den Versuch erfüllt sind.

Die Photographie in Fig. 10 wurde 24 Stunden nach der Öffnung des Abflusses aufgenommen. Betrachten wir in dieser Photographie die vier Quadranten, welche durch die Ziffern

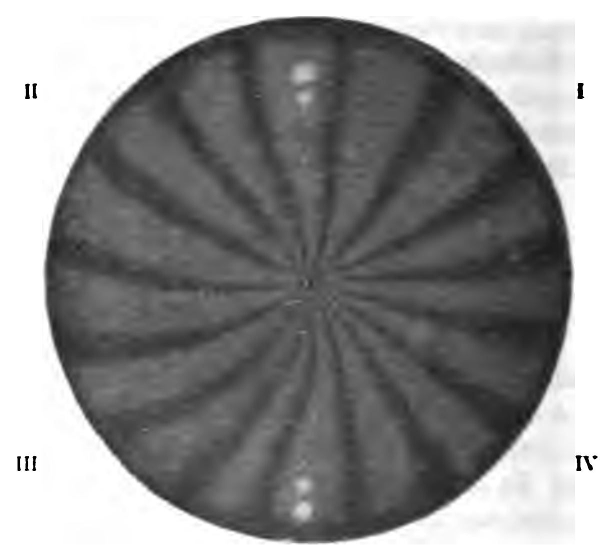


Fig. 10.

I, II, III, IV markiert sind, so sehen wir, daß mit Ausnahme des Quadranten I in allen drei übrigen Quadranten die Erscheinung den von der Theorie verlangten Charakter hat. Ich habe im ganzen sechs Versuche angestellt und immer zeigte sich die Erscheinung in gleicher Weise; die Linien im ersten Quadranten zeigten eine Abweichung von der Theorie. Den Grund dieser Störung habe ich bisher noch nicht ermitteln können, doch vermute ich den folgenden Zusammenhang. Die farbigen Fäden senken sich nach ihrem Austritt aus den Näpfchen zunächst zur Rohglasplatte herab und ziehen sich dann längs dieser Platte zum Ausflußröhrchen hin. Wird nach dem Versuch das Gefäß ganz entleert, so sieht man noch

auf dem Glase die farbigen Linien, und versucht man jetzt die Linien mit einem mit Wasser angefeuchteten Tuche wegzuwischen, so verschwinden sie nicht ganz. Erst bei Behandlung mit Weingeist verschwinden sie völlig. Dies zeigt, daß der Farbstoff auf dem Glase klebt. Ich vermute nun, daß dieses Kleben, wenn die Rohglasplatte vielleicht nicht in allen Teilen die gleiche Beschaffenheit hat, einen Einfluß auf die Erscheinung ausüben kann. Auf jeden Fall werde ich die Versuche mit anderen Farbstoffen, welche auf dem Glase weniger oder gar nicht haften, wiederholen.

Zum Schlusse fühle ich mich angenehm verpflichtet, der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen, ferner Seiner Exzellenz dem Herrn k. u. k. Feldmarschalleutnant Otto Frank, Kommandant des k. u. k. Militärgeographischen Institutes, und dem Herrn k. u. k. Hauptmann Leopold Andres, Vorstand der geodätischen Gruppe im k. u. k. Militärgeographischen Institute, für die gewährte Unterstützung meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Zur Elektronik in Metallen

von

G. Jäger.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Mai 1908.)

Die vorliegende Arbeit ist im wesentlichen angeregt durch die Abhandlungen von P. Drude, »Zur Elektronentheorie der Metalle«[1] und H. A. Lorentz, »Le mouvement des électrons dans les méteaux«.[2] Unsere Untersuchungen führen, soweit die Voraussetzungen dieselben sind, zu den Ergebnissen, welche bereits H. A. Lorentz erhalten hat, unterscheiden sich aber methodisch vollständig von diesen. Da nämlich allen jenen, die nicht Spezialisten auf dem Gebiete der kinetischen Gastheorie sind, das Verständnis für Lorentz' Entwicklungen nicht leicht werden dürfte, so halte ich es nicht für unwichtig, zu zeigen, wie man, ohne meines Erachtens weniger streng zu verfahren, auf Grund allgemein bekannter Sätze zu ähnlichen Resultaten gelangen kann.

Wir machen folgende Voraussetzungen: Jedes Metall bestehe aus Atomen, positiven und negativen Elektronen. Die positiven Elektronen seien im Vergleich zu den negativen sehr schwer beweglich, so daß wir für viele Erscheinungen annehmen können, sie seien mit den Atomen fest verbunden und wie diese gleichmäßig im Raum verteilt. Was ihre Zahl anbelangt, so ist es, solange nicht Gründe zu einer anderen Annahme zwingen, am bequemsten, sie gleich der Zahl der

---

[1] Drude, Ann., Bd. 1, p. 566 (1900); Bd. 3, p. 369 (1900).

[2] Arch. Néerl., Sér. II, T. X, p. 336 (1905).

Atome zu setzen, so daß also jedes Atom mit einem positiven Elektron als fest verbunden anzusehen ist. Die negativen Elektronen müssen in einem elektrisch neutralen Metall in derselben Zahl wie die positiven vorhanden sein. Das elektrische Elementarquantum ist also für beide Arten von Elektronen dieselbe Größe. Wir sehen es als identisch mit der Elektrizitätsmenge einwertiger Ionen der Elektrolyten an. Es wird nun von den verschiedenen Forschern weiter vorausgesetzt, daß von den negativen Elektronen ein Teil gebunden, ein Teil frei ist. Man hat sich dabei die Sache ähnlich wie einen teilweise dissoziierten Elektrolyten vorzustellen. Die gebundenen Elektronen verlassen demnach ihren Ort nicht, so daß wir uns in diesem Falle immer ein Metallatom, ein positives und ein negatives Elektron zu einem Gebilde vereinigt denken müssen, welches als elektrisch neutral anzusehen ist und einer undissoziierten Molekel eines Elektrolyten analog zu setzen wäre. Die freien negativen Elektronen sollen sich zwischen den Metallatomen mit großer Geschwindigkeit vorwärts bewegen wie die Molekeln eines Gases in einem porösen Körper. Alle Anschauungsweisen und Rechnungsmethoden der kinetischen Gastheorie sollen sich auf die freien negativen Elektronen anwenden lassen. Dabei geben wir ihnen eine scheinbare Masse m, wie sie aus den Messungen an langsamen Kathodenstrahlen gewonnen worden ist. $\frac{m\overline{c^2}}{2}$ bedeutet somit die mittlere kinetische Energie eines Elektrons, welche denselben Wert hat wie die mittlere kinetische Energie einer einatomigen Gasmolekel bei derselben Temperatur. $\overline{c^2}$ ist also das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Elektronen und wir wissen, daß diese Größe bei der absoluten Temperatur T

$$\overline{c^2} = \frac{\overline{c_0^2}}{T_0} T$$

ist, wenn sie bei der Temperatur T_0 den Wert $\overline{c_0^2}$ hat. Mit Drude wollen wir

$$\frac{m\overline{c^2}}{2} = \alpha T$$

setzen, so daß also α eine Naturkonstante ist, deren Größe die Gastheorie näherungsweise berechnen lehrt.

Sobald wir den negativen Elektronen eine kinetische Energie erteilen, die proportional der absoluten Temperatur ist, so müssen sie auch Anteil an der spezifischen Wärme der Metalle haben. Es scheint mir nun nicht uninteressant zu sein, einen Blick darauf zu werfen, wie groß in einer Grammolekel eines Metalles unter der Vorraussetzung, daß sämtliche negativen Elektronen ungebunden sind, der Anteil derselben am Gesamtwärmeinhalt des Metalles ist. Nach der kinetischen Gastheorie haben bei gleicher Temperatur alle Gasmolekeln im Mittel dieselbe Energie der fortschreitenden Bewegung, die für ein einatomiges Gas identisch ist mit dem gesamten Wärmeinhalt desselben. Ich habe für die bekanntesten Gase die Zunahme K dieser Energie für 1° C. Temperaturerhöhung berechnet und in der letzten Reihe der folgenden Tabelle zusammengestellt, während die erste Reihe die chemische Formel des Gases, die zweite die Molekularwärme und die dritte die Größe $\frac{3}{2}(\varkappa-1)$ enthält, wie sie in Winkelmann's Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. III, p. 232, angegeben ist

	H	$\frac{3}{2}(\varkappa-1)$	$K=\frac{3}{2}H(\varkappa-1)$
Hg	2·94	1·000	2·94
O_2	4·95	0·607	3·005
N_2	4·86	0·607	2·950
H_2	4·85	0·607	2·944
Cl_2	6·20	0·484	3·001
Br_2	6·84	0·438	2·996
J_2	6·52	0·460	2·999
CO	4·89	0·604	2·964
NO	4·99	0·591	2·949
HCl........	5·08	0·591	3·002
HBr	4·64	0·646	2·997
HJ.........	5·04	0·595	2·987
ClJ	6·32	0·475	3·002
BrJ	6·14	0·495	3·039

	H	$\frac{3}{2}(\varkappa-1)$	$K = \frac{3}{2}H(\varkappa-1)$
CO_2	6·54	0·457	2·989
N_2O	6·66	0·466	3·104
SO_2	7·92	0·372	2·946
H_2S	6·57	0·387	2·543
NH_3	6·46	0·470	3·036
CH_4	7·19	0·478	3·437
C_2H_4	7·57	0·367	2·778

Daraus ergibt sich als Mittelwert für K

$$\bar{K} = 2 \cdot 981.$$

Dieser Mittelwert beträgt also rund 3 Grammkalorien. Der Anteil der Elektronenenergie an der Atomwärme ist somit bei unseren Annahmen kein geringer. Zur Beurteilung dessen seien die Atomwärmen der Metalle (Winkelmann, l. c., p. 186) in folgender Tabelle zusammengestellt:

Al	Sb	As	Pb	Cd	Fe	Au	In
5·80	6·08	6·10	6·48	6·33	6·36	6·37	6·45
Ir	K	Ko	Cu	Li	Mg	Mn	Mo
6·28	6·46	6·25	6·00	6·59	6·07	6·66	6·92
Na	Ni	Os	Pd	Pt	Hg	Rh	Ru
6·74	6·40	6·18	6·31	6·29	6·37	5·96	6·20
Ag	Te	Th	Bi	Wo	Zn	Sn	
6·14	5·92	6·84	6·42	6·13	6·22	6·68	

Der Mittelwert aller Atomwärmen ist

$$\bar{A} = 6 \cdot 32.$$

Demnach würden alle negativen Elektronen, wenn sie sämtlich frei beweglich sind und ihre Anzahl gleich der Zahl der Metallatome ist, einen Anteil an der Atomwärme der Metalle haben, welcher rund die Hälfte der gesamten Atomwärme ausmacht. Da den Metallatomen natürlich ein Teil der Atomwärme zugeschrieben werden muß, so geht daraus hervor, daß die Zahl der freien Elektronen die Zahl der Atome

nur mäßig übersteigen kann und daß sie in gleichen Atommengen verschiedener Metalle ähnliche Werte haben muß und ihre Änderung mit der Temperatur nicht beträchtlich sein kann.

Die Elektrostatik metallischer Leiter wird durch die gegebene Anschauungsweise nicht geändert. Wir haben einen unelektrischen Konduktor, wenn sich gleichviel positive und negative Elektronen auf ihm befinden, die wir uns gleichmäßig über das ganze Innere des Körpers verteilt zu denken haben. Ist ein Überschuß negativer Elektronen da, so wirken nur diese aufeinander, da die anderen sich ja in ihrer Wirkung »neutralisieren«. Die Elektrizität wird sich also nach den gewöhnlichen Gesetzen auf der Oberfläche des Konduktors verteilen. Da wir jedoch den Elektronen eine gewisse Ausdehnung zuschreiben, so entsteht die Frage nach der Dicke der elektrischen Schicht. Es läßt sich leicht zeigen, daß wir auch vom Standpunkte der Elektronentheorie dieselbe für gewöhnliche Probleme der Elektrostatik als verschwindend klein ansehen können. Stellen wir uns z. B. vor, wir hätten eine Silberkugel von 1 *cm* Radius. Dieselbe sei derart mit negativer Elektrizität geladen, daß jedes Atom der Oberfläche ein negatives Elektron im Überschuß enthält. Da wir mit Zuhilfenahme der Loschmidt'schen Zahl leicht finden können, daß 1 cm^3 Silber etwa $2 . 10^{23}$ Atome enthält, so gehen auf die Längeneinheit $\sqrt[3]{200} . 10^7$, d. i. rund $6 . 10^7$, daher auf die Flächeneinheit rund $4 . 10^{15}$ Silberatome. Die Oberfläche einer Silberkugel vom Radius Eins, also auch von der Kapazität Eins, enthält etwa $5 . 10^{16}$ Atome. Denken wir uns jedes dieser Atome mit einem überschüssigen Elektron versehen und nehmen wir das Elementarquantum $e = 1{\cdot}5 . 10^{-10}$ an, so ist die Elektrizitätsmenge E oder, was für unser spezielles Beispiel dasselbe ist, das Potential V gleich $5 . 10^{16} . 1{\cdot}5 . 10^{-10}$ oder der Größenordnung nach

$$E = V = 10^7.$$

Multiplizieren wir diese Zahl mit 300, so erhalten wir das Potential ausgedrückt in Volt. Wir haben also

$$V = 3 . 10^9 \text{ Volt.}$$

Da wir bei den gewöhnlichen elektrostatischen Experimenten Potentiale haben, welche der Größenordnung nach etwa ein Milliontel des zuletzt berechneten sind, so sind wir nicht in der Lage, so viel überschüssige Elektronen auf einen Konduktor zu bringen, daß sie sich in mehreren Schichten an der Oberfläche ähnlich wie die Molekeln einer kondensierten Flüssigkeit übereinander lagern müßten. Sind nicht alle positiven Elektronen im metallischen Leiter kompensiert, so werden die nicht kompensierten auf die negativen Elektronen mit Kräften wirken, welche jenen entgegengesetzt gerichtet sind, die sie aufeinander ausüben. Während letztere so wirken, daß die positiven Elektronen gegen die Oberfläche getrieben würden, so werden die negativen gegen das Innere des Körpers wandern. Die nicht kompensierten unbeweglichen positiven Elektronen werden sich also an derselben Stelle befinden, wo sich bewegliche positive Elektrizität auf dem Konduktor ansammeln würde. Wo immer also positive Ladungen auftreten, haben wir uns das so vorzustellen, daß durch Entfernen der beweglichen negativen Elektronen die unbeweglichen positiven freie Elektrizität ergeben. Ein Entladen eines positiv geladenen Konduktors geschieht nicht durch Ableiten der positiven Elektrizität, sondern durch Zufuhr einer entsprechenden Menge negativer Elektronen, welche die positiven in ihrer Wirkung neutralisieren usw.

Wir wollen nun das Verhalten eines Metalles betrachten, welches sich im absoluten Vakuum befindet, d. h. in einem Raume, der gar nichts enthält, auch keine Elektronen, ausgenommen höchstens den hypothetischen Lichtäther. Der Metallkörper sei zu einem bestimmten Zeitpunkt elektrisch neutral, d. h. er enthält gleich viel positive und negative Elektronen. In diesem Zustande wird er nicht bleiben können; denn da die negativen Elektronen sich wie Gasmolekeln zwischen den Atomen des Metalles mit großer Geschwindigkeit hindurchbewegen, so wird eine gewisse Anzahl das Metall verlassen, das Metall muß sich positiv laden. Diese Ladung wird eine Anziehungskraft auf die das Metall verlassenden negativen Elektronen ausüben, mit wachsender Zeit die Abgabe negativer Elektrizität also immer mehr erschweren.

Wir denken uns nun ein ebenes horizontales Stück der Begrenzungsfläche des Metalles, oberhalb sei das Vakuum. In der Volumeinheit des Metalles seien N negative Elektronen, ihre Geschwindigkeit sei nach dem Maxwell'schen Gesetze verteilt. Die Zahl der Elektronen per Volumseinheit, welche eine Geschwindigkeit zwischen u und $u+du$ senkrecht gegen die Oberfläche haben, ist somit

$$\frac{N}{\gamma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\gamma^2}} du,$$

wenn γ die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Elektronen bedeutet. Die Zahl derselben, welche in der Sekunde gegen die Einheit der Oberfläche fliegen, ist somit

$$\frac{N}{\gamma\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{u^2}{\gamma^2}} du.$$

Wir machen nun die Voraussetzung, daß die Metallatome auf die Elektronen Anziehungskräfte ausüben. Das hat zur Folge, daß an der Oberfläche die Elektronen gegen das Innere des Metalles gezogen werden, während im Innern diese Kräfte, da sie nach allen Richtungen in der gleichen Weise vorhanden sind, sich in ihrer Wirkung aufheben. Es ist dies genau so aufzufassen wie bei den Kapillarkräften einer Flüssigkeit. Geht daher ein Elektron aus dem Innern ins Vakuum über, so muß es zur Überwindung dieser Kräfte eine bestimmte Arbeit a leisten. Nur jene Elektronen, deren kinetische Energie $\frac{mu^2}{2}$ senkrecht gegen die Oberfläche größer als a ist oder, was dasselbe bedeutet, deren Geschwindigkeitskomponente u größer als $\sqrt{\frac{2a}{m}}$ ist, wird das Metall tatsächlich verlassen. Dadurch würde eine positive Ladung des Metalles entstehen. Verbinden wir dasselbe jedoch leitend mit der Erde, so werden beständig ebensoviel Elektronen aus der Erde nachströmen, als durch die Oberfläche des Metalles ausgestrahlt werden. Die Zahl der in der Sekunde ausgestrahlten Elektronen wird daher gegeben sein durch

$$Z = \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} \frac{N}{\gamma\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{u^2}{\gamma^2}} du = \frac{N\gamma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2a}{m\gamma^2}}.$$

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit γ der Elektronen steht mit der Temperatur t in der Beziehung

$$\gamma^2 = \gamma_0^2(1+\beta t),$$

wenn wir unter β den Ausdehnungskoeffizienten der Gase, unter γ_0 die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Elektronen bei 0° C. verstehen.

Von der Arbeit a können wir wohl in erster Annäherung annehmen, daß sie mit der Temperatur in der Beziehung

$$a = a_0(1-\varepsilon t)$$

steht, indem sich nach Analogie schließen läßt, daß sich a mit der Temperatur ähnlich ändert wie die Kapillaritätskonstante einer Flüssigkeit. Fassen wir demnach unter C bezüglich k alles Konstante zusammen, so erhalten wir für die Zahl der in der Sekunde durch die Einheit der Oberfläche gehenden Elektronen

$$Z = CN\sqrt{1+\beta t}\, e^{-k\frac{1-\varepsilon t}{1+\beta t}},$$

wobei über die Abhängigkeit des N von der Temperatur keine speziellen Annahmen gemacht werden sollen.

Die Erfahrung zeigt, daß für gewöhnlich derartige Ausstrahlungen negativer Elektronen seitens der Metalle nicht beobachtet werden, d. h. wir müssen für diesen Fall k als eine große Zahl ansehen, so daß Z entsprechend klein ausfällt.

Wir können das etwa mit dem Verdampfen eines Körpers vergleichen, der sich im Vakuum befindet. Die Atome befinden sich ebenfalls in Bewegung und die schneller bewegten müssen die Fähigkeit erlangen, sich vom Körper loszureißen. Die Zahl der auf diese Weise verdampfenden Atome ist aber bei den meisten festen Körpern so klein, daß wir eine Abnahme im Gewicht nicht beobachten können. Wir haben anzunehmen, daß die Trennungsarbeit für ein Atom so groß ist, daß sich nur

verhältnismäßig selten eines von der Oberfläche des Körpers entfernt. Erhitzen wir jedoch den Körper, so wächst die Zahl der verdampfenden Atome, so daß wir bei genügend hoher Temperatur tatsächlich eine Abnahme der Masse des Körpers beobachten können. Ein ganz ähnliches Verhalten folgt aus unserer Formel für die Elektronen. Mit zunehmender Temperatur wird Z immer größer, und wir werden schließlich zu Temperaturen gelangen, bei welchen die Zahl der abgegebenen Elektronen so groß ist, daß eine Ausstrahlung der Elektrizität beobachtet werden kann, wie es ja tatsächlich bei glühenden Körpern nachgewiesen worden ist.

Denken wir uns eine Kugel, welche negativ geladen ist und eine Oberflächendichte σ hat, so übt diese Ladung auf ein negatives Elektron an der Oberfläche radial die Kraft $4\pi\sigma e$ aus. Diese Kraft ist entgegengesetzt gerichtet der Kraft, mit welcher die Metallatome auf das Elektron wirken. Unsere Arbeit a wird daher verkleinert. Die Verkleinerung wird proportional σ, also auch proportional dem Potential V sein, auf welches wir die Kugel laden, wobei wir uns V in absolutem elektrostatischen Maß dargestellt denken. Demnach wird die Zahl der Elektronen, welche in der Sekunde die Einheit der Oberfläche passieren,

$$Z = CN\sqrt{1+\beta t}\, e^{-\frac{2a-bV}{m\gamma^2}},$$

wobei b die entsprechende Proportionalitätskonstante bedeutet. Die Zahl Z wird demnach mit V rasch wachsen. Ähnlich haben wir uns wohl die Zunahme der Dichte der Kathodenstrahlen mit der Ladungsdichte der Kathode vorzustellen. Freilich ist hier auch die Natur der Umgebung von wesentlichem Einflusse.

Sind wir in der Lage, die Größe a, d. i. die Arbeit, welche ein Elektron gegen die Anziehungskräfte der Atome leisten muß, damit es das Metall verlassen kann, zu verringern, was durch Überziehen der Kathode mit verschiedenen Substanzen (Wehnelt) ja tatsächlich gelingt, so werden die Kathodenstrahlen schon bei kleinerer Ladungsdichte auftreten. Da die großen Geschwindigkeiten, welche Kathodenstrahlen erreichen

können, nach unserer Vorstellung lediglich durch die elektrischen Kräfte der Kathode erzeugt werden, so müssen jene Kathodenstrahlen, welche bei niedrigerem Ladungspotential entstehen, auch kleinere Geschwindigkeiten besitzen, sie müssen »weicher« sein.

Wir nehmen jetzt an, wir hätten zwei Metallzylinder (Fig. 1), welche mit ihrer Grundfläche aneinander stoßen. Die Zahl der Elektronen in der Volumeinheit des ersten Metalles sei N_1, die Arbeit, welche ein Elektron gegen die Anziehungskräfte der Atome zu leisten hat, wenn es das Metall verläßt, sei a_1. Für das zweite Metall seien die entsprechenden Größen N_2 und a_2. Wir wollen die Metalle so wählen, daß $a_1 > a_2$ ist.

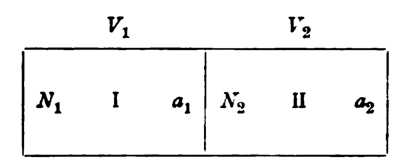


Fig. 1.

Geht demnach ein Elektron direkt vom Metall (I) zu (II) über, so muß es gegen die Metallatome die Arbeit $a_1 - a_2$ leisten. In umgekehrter Richtung wird seitens der Anziehungskräfte diese Arbeit geleistet werden. Fliegt daher ein Elektron von (I) gegen (II), so wird es die Trennungsfläche nur dann passieren können, wenn seine kinetische Energie senkrecht gegen die Trennungsfläche größer als $a_1 - a_2$ ist. In entgegengesetzter Richtung wird jedoch jedes Elektron auch von kleinster Geschwindigkeit von (II) zu (I) übertreten können. Wie oben erhalten wir für die Zahl der Elektronen, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit von (I) nach (II) gehen und eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u + du$ senkrecht gegen die Trennungsfläche haben,

$$\frac{N_1}{\gamma\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{u^2}{\gamma^2}} du,$$

und analog die Zahl der Elektronen, welche in entgegengesetzter Richtung wandern,

$$\frac{N_2}{\gamma\sqrt{\pi}} u e^{-\frac{u^2}{\gamma^2}} du.$$

Während nun die letzteren anstandslos die Trennungsfläche passieren und dabei sogar noch eine Erhöhung der Energie erfahren, werden erstere nur zum Teil von (I) nach (II) übertreten können. Das sind jene, deren kinetische Energie senkrecht gegen die Trennungsfläche nicht unter einer bestimmten Größe $\frac{m u_1^2}{2}$ liegt, wobei u_1 also die Grenzgeschwindigkeit für die Möglichkeit des Übertretens ist. Wir werden daher die Gesamtzahl Z_1 der übertretenden Elektronen erhalten, wenn wir den ersten Ausdruck zwischen den Grenzen u_1 und ∞ integrieren. Es wird also

$$Z_1 = \frac{N_1}{\gamma\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{\gamma^2}} du = \frac{N_1 \gamma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u_1^2}{\gamma^2}},$$

während in entgegengesetzter Richtung eine Zahl übertritt, welche gleich ist

$$Z_2 = \frac{N_2}{\gamma\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{\gamma^2}} du = \frac{N_2 \gamma}{2\sqrt{\pi}}.$$

Im allgemeinen werden die Zahlen Z_1 und Z_2 voneinander verschieden sein, d. h. nach der einen Seite wandern mehr Elektronen als nach der anderen. Es wird daher die Elektrizitätsmenge oder, was dasselbe ist, das elektrische Potential in den beiden Metallen verschieden werden. Wir erhalten einen Potentialunterschied zwischen den beiden Metallen (I) und (II) von der Größe $V_1 - V_2$, wenn V_1 das Potential des Metalles (I), V_2 jenes im Metall (II) ist.

Es muß daher jedes negative Elektron, welches von (I) nach (II) geht, nicht nur die Arbeit $a_1 - a_2$, sondern auch noch die Arbeit $(V_1 - V_2)e$ leisten, verliert also an Energie die Größe $a_1 - a_2 - (V_2 - V_1)e$. Es wird somit der Grenzwert der Geschwindigkeit gegeben sein durch

$$\frac{m u_1^2}{2} = a_1 - a_2 - (V_2 - V_1)e,$$

weil alle Elektronen, welche eine kleinere Energiekomponente senkrecht gegen die Trennungsfläche haben, diese nicht passieren können. Es wird demnach

$$Z_1 = \frac{N_1 \gamma}{2\sqrt{\pi}} e^{-2\frac{a_1 - a_2 - (V_2 - V_1)e}{m\gamma^2}}.$$

Gleichgewicht wird also erst dann vorhanden sein, wenn gleichviel Elektronen in derselben Zeit nach beiden Richtungen fliegen, d. h. wenn

$$Z_1 = Z_2$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{N_1 \gamma}{2\sqrt{\pi}} e^{-2\frac{a_1 - a_2 - (V_2 - V_1)e}{m\gamma^2}} = \frac{N_2 \gamma}{2\sqrt{\pi}}$$

oder

$$e^{-2\frac{a_1 - a_2 - (V_2 - V_1)e}{m\gamma^2}} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Durch Logarithmieren erhalten wir

$$2\frac{a_1 - a_2 - (V_2 - V_1)e}{m\gamma^2} = l\frac{N_1}{N_2}$$

oder

$$V_2 - V_1 = \frac{a_1 - a_2}{e} - \frac{m\gamma^2}{2e} l \frac{N_1}{N_2}.$$

Nach den Ergebnissen der kinetischen Gastheorie steht das Quadrat der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit γ zu dem mittleren Quadrat der Geschwindigkeit c der Molekeln in der Beziehung

$$\gamma^2 = \frac{2}{3}\overline{c^2},$$

so daß wir nach den einleitenden Bemerkungen, da wir

$$\frac{m\overline{c^2}}{2} = \alpha T$$

setzten, auch

$$\frac{m\gamma^2}{2} = \frac{2}{3}\alpha T$$

schreiben können. Darnach ist

$$V_2 - V_1 = \frac{a_1 - a_2}{e} - \frac{2\alpha}{3e} Tl \frac{N_1}{N_2}.$$

Wir erhalten also eine Formel für die Potentialdifferenz, welche bei Berührung zweier Metalle auftritt, was ja von Volta angefangen bis auf den heutigen Tag von einer Reihe von Physikern tatsächlich angenommen wird.

Drude und mit ihm J. J. Thomson[1] machen die Annahme, daß $a_1 - a_2$ vernachlässigt werden kann. Es ergeben sich dann, wenn man $\frac{N_1}{N_2}$ nicht ganz unwahrscheinlich groß annimmt, für die Potentialunterschiede so kleine Zahlen, daß damit die Größen, welche von verschiedenen Beobachtern angegeben werden, nicht in Einklang gebracht werden können. Andrerseits fragt es sich aber, ob man tatsächlich $\frac{a_1 - a_2}{e}$ vernachlässigen kann und ob nicht vielleicht gerade diese Größe ausschlaggebend ist. Mit einem Wort, unsere Theorie wird sich erst dann zugunsten einer bestimmten Ansicht, ob nämlich tatsächlich Kontaktelektrizität vorhanden ist oder nicht, stellen können, wenn direkte Messungen der Größen a_1 und a_2 vorhanden sind.

Daß für den Fall vorhandener Kontaktelektrizität auch das Gesetz der Spannungsreihe besteht, erhellt aus unserer Formel ohneweiters.

Haben wir Zylinder verschiedener Metalle vom Querschnitt Eins aneinander stoßend und es geht ein Strom hindurch, so ist dessen Intensität i gegeben durch die Elektrizitätsmenge, welche in der Sekunde den Querschnitt passiert. Haben wir das Potentialgefälle Eins, so werden die negativen Elektronen mit einer bestimmten Geschwindigkeit v in der Richtung des Potentialanstieges wandern. Die Zahl, welche in der Sekunde den Querschnitt passiert, ist somit Nv, indem wir wieder unter N die Zahl der Elektronen in der Volumeinheit verstehen. Die Stromstärke ist in diesem Falle

$$i = Nve,$$

---

[1] The corpuscular theory of matter, London 1907.

unter e wieder das Elementarquantum der Elektrizität verstanden. Da die Geschwindigkeit proportional dem Potentialgefälle wächst, so haben wir allgemein beim Potentialgefälle $\mathfrak{E}$ die Stromstärke

$$i = Nv\mathfrak{E}e.$$

Setzen wir unsere frühere Metallkombination (Fig. 1) voraus, so ist die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn ein Elektron von (II) nach (I) geht,

$$a_1 - a_2 - (V_2 - V_1)e = \frac{m\gamma^2}{2} l \frac{N_1}{N_2} = \frac{2\alpha T}{3} l \frac{N_1}{N_2}.$$

Die Zahl der in der Sekunde die Trennungsfläche passierenden Elektronen ist $\frac{i}{e}$.

Die Wärmemenge W, welche in der Sekunde an der Trennungsfläche frei wird, ist gleich der Zahl der passierenden Elektronen, multipliziert mit dem Energiezuwachs eines Elektrons, also

$$W = \frac{2\alpha T}{3e} l \frac{N_1}{N_2} \cdot i.$$

Diese Formel gibt uns direkt die Größe des Peltiereffektes, der positiv oder negativ sein kann je nach dem Vorzeichen von $l \frac{N_1}{N_2}$.

In dieser Weise fortfahrend, indem wir die Anschauungen der kinetischen Gastheorie auf das Verhalten der Elektronen in Metallen übertragen, könnten wir noch eine Reihe elektrischer Eigenschaften der Metalle darstellen, doch wurde dies in einer wohl kaum zu übertreffenden feinen Art von H. A. Lorentz schon getan.

Wir wollen uns daher darauf beschränken, im folgenden zu zeigen, daß man gleiche Resultate auch erhalten kann, wenn man annimmt, daß sich die Elektronen in einem Metall wie ein Gas verhalten, so daß man auf sie die hydrostatischen Grundgleichungen anwenden kann. Auch dies

wurde teilweise schon von anderen, so z. B. von J. J. Thomson,[1] versucht, doch kam er infolge anderer Grundannahmen zu anderen Resultaten.

Auf ein Gas soll nur in der x-Richtung eine äußere Kraft wirken. Sein Gleichgewichtszustand ist dann durch die Gleichung

$$\rho X - \frac{dp}{dx} = 0$$

gegeben, wobei wir unter ρ die Dichte des Gases, unter X die äußere Kraft, welche auf die Masseneinheit des Gases wirkt, unter p den Druck verstehen, unter welchem das Gas steht. Eine einfache Umformung ergibt

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X. \tag{1}$$

Diese Gleichung soll auch den Gleichgewichtszustand der Elektronen bestimmen, wenn nur Kräfte in der x-Richtung auf sie wirken. Ist wieder N die Zahl der Elektronen in der Volumeinheit, m die (scheinbare) Masse eines Elektrons, so haben wir

$$\rho = Nm, \quad p = \frac{Nm\overline{c^2}}{3} = \frac{2}{3}N\alpha T$$

zu setzen. Sonach ist

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\alpha}{3}\frac{d(NT)}{dx},$$

daher

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{Nm}\cdot\frac{2\alpha}{3}\frac{d(NT)}{dx} = \frac{2\alpha T}{3m}\cdot\frac{1}{NT}\frac{d(NT)}{dx} =$$

$$= \frac{2\alpha T}{3m}\cdot\frac{dl(NT)}{dx}. \tag{2}$$

Daß sich die Zahl N mit x ändert, kann einmal davon abhängen, daß sich die Natur des Metalles ändert oder daß die Temperatur nicht konstant bleibt. In jeder zur x-Richtung

[1] L. c.

senkrecht liegenden Ebene soll N und T sowie die Natur des Metalles konstant sein.

Nennen wir das Potential der elektrischen Kräfte V, so ist $-\frac{dV}{dx}$ die Kraft, welche auf die Einheit der positiven Elektrizität in der x-Richtung ausgeübt wird. Die Kraft auf ein negatives Elektron ist daher

$$-\frac{dV}{dx}\cdot -e = e\frac{dV}{dx}.$$

Die Zahl der Elektronen in der Masseneinheit (scheinbare mechanische Masse, nicht zu verwechseln mit der Elektrizitätsmenge) ist $\frac{1}{m}$. Die Kraft X_1, welche die elektrischen Kräfte auf die Masseneinheit Elektronen ausüben, ist daher $\frac{e}{m}\frac{dV}{dx}$. Nehmen wir nun weiter an, daß die Kraft X_2, welche von seiten der Metallatome auf die Masseneinheit der Elektronen ausgeübt wird, die Arbeit dA leistet, wenn sich die Masseneinheit um dx weiterbewegt, so ist

$$dA = X_2 dx$$

oder

$$X_2 = \frac{dA}{dx}.$$

Die gesamte Kraft X, welche demnach auf die Masseneinheit Elektronen ausgeübt wird, ist

$$X = X_1 + X_2 = \frac{e}{m}\frac{dV}{dx} + \frac{dA}{dx}.$$

Diese Kraft muß nach Gleichung (1) gleich $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$ sein, wofür wir den in Gleichung (2) gegebenen Ausdruck einsetzen wollen. Dadurch erhalten wir

$$\frac{e}{m}\frac{dV}{dx} + \frac{dA}{dx} = \frac{2\alpha T}{3m}\cdot\frac{dl(NT)}{dx}. \qquad (3)$$

Das ist die Grundgleichung, von der wir bei allen weiteren Untersuchungen ausgehen wollen. Die rechte Seite der Gleichung können wir nach Ausführung der Differentiation auch schreiben:

$$\frac{2\alpha T}{3m}\cdot\frac{dl(NT)}{dx}=\frac{2\alpha}{3m}\cdot\frac{dT}{dx}+\frac{2\alpha T}{3mN}\cdot\frac{dN}{dx}.$$

Vergleichen wir unser Resultat mit der Grundgleichung, von welcher H. A. Lorentz ausgeht, so finden wir einen kleinen Unterschied darin, daß wir die Arbeit A als Funktion der Temperatur annehmen, während sie Lorentz als unabhängig davon ansieht. Weiters wird, wenn wir Lorentz' Gleichung in unserer Bezeichnungsweise darstellen, die rechte Seite der Gleichung (3)

$$\frac{\alpha}{3m}\cdot\frac{dT}{dx}+\frac{2\alpha T}{3mN}\cdot\frac{dN}{dx}.$$

Wir erhalten also den ersten Summanden dieses Ausdruckes doppelt so groß.[1]

Betrachten wir nur solche Erscheinungen, welche bei konstanter Temperatur stattfinden, so wird $\frac{dT}{dx}=0$. Dann werden die beiden Grundgleichungen einander gleich. Daraus geht ohneweiters hervor, daß für solche Fälle unsere Resultate mit jenen von H. A. Lorentz identisch werden müssen.

Wir denken uns einen homogenen Metallzylinder, dessen Achse die x-Achse des Koordinatensystems sein soll. In seinem ganzen Innern sei die Temperatur konstant, desgleichen die Zahl N der in der Volumeinheit enthaltenen freien Elektronen.

---

[1] Der physikalische Grund dieser Verschiedenheit liegt, wie Herr H. A. Lorentz selbst die Güte hatte mir mitzuteilen, in der Annahme, daß die Elektronen nur Zusammenstöße mit den Metallatomen machen, während die Zusammenstöße der Elektronen untereinander als verhältnismäßig selten in der Rechnung vernachlässigt wurden. Wir hingegen gingen direkt von der Annahme aus, die Bewegung der Elektronen in einem Metall erfolge so wie die Bewegung eines Gases in einem porösen Körper.

Dann wird die rechte Seite der Gleichung (3) Null, desgleichen ist $\frac{dA}{dx} = 0$, folglich muß auch $\frac{dV}{dx} = 0$, also

$$V = \text{konst.}$$

werden. Wir haben einen gewöhnlichen Leiter vor uns, auf welchem die Elektrizität in Ruhe ist.

Wir nehmen nun an, daß zwei Zylinder (I) und (II) (Fig. 1) verschiedener Metalle bei konstanter Temperatur T aneinanderstoßen, so wird für jedes einzelne Metall das eben Gesagte gelten, doch werden die Werte von V, A und N innerhalb der einzelnen Metalle im allgemeinen verschieden sein. Wir wollen sie für das erste Metall mit V_1, A_1, N_1, für das zweite mit V_2, A_2, N_2 bezeichnen. Die Integration der Gleichung (3) ergibt dann

$$\frac{e}{m}(V_2 - V_1) + A_2 - A_1 = \frac{2\alpha T}{3m} l \frac{N_2}{N_1} \tag{4}$$

oder

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{e}(A_1 - A_2) + \frac{2\alpha T}{3e} l \frac{N_2}{N_1}. \tag{5}$$

Es wird also im allgemeinen eine Kontaktpotentialdifferenz eintreten. $A_2 - A_1$ ist die Arbeit, welche die Kräfte, die die Metalle auf die Elektronen ausüben, leisten, wenn die Masseneinheit derselben durch die Berührungsfläche vom Metall (I) zum Metall (II) wandert. Wir erkennen auch ohneweiters, daß die von uns erhaltene Gleichung mit jener auf p. 854 erhaltenen identisch ist und daß hier alles das gilt, was wir bereits dort erwähnten.

Wir können Gleichung (3) auch schreiben:

$$dV = -\frac{m}{e} dA + \frac{2\alpha T}{3e} dl(NT).$$

Diese Gleichung wollen wir auf einen Metallzylinder anwenden, dessen verschiedene Teile verschiedene Temperaturen besitzen. Natürlich ist das nach dem Früheren wieder so zu verstehen, daß die Temperatur nur in der Achse veränderlich,

in allen Teilen eines dazu senkrechten Querschnittes also konstant ist. Die Integration ergibt

$$V'-V = \frac{m}{e}(A-A')+\frac{2\alpha}{3e}\int_{T}^{T'} T\,dl(NT),$$

wenn wir unter V, A, T die Werte des Potentials, der Arbeit und der Temperatur am Anfang, unter V', A', T' die entsprechenden Werte am Ende des Zylinders verstehen. Unsere Gleichung können wir weiter umformen in

$$V'-V = \frac{m}{e}(A-A')+\frac{2\alpha}{3e}\int_{T}^{T'} T\cdot\frac{1}{NT}\,d(NT) =$$

$$= \frac{m}{e}(A-A')+\frac{2\alpha}{3e}\left(\int_{T}^{T'}\frac{T}{N}\,dN+\int_{T}^{T'} dT\right) =$$

$$= \frac{m}{e}(A-A')+\frac{2\alpha}{3e}\left(T'-T+\int_{T}^{T'}\frac{T}{N}\,dN\right). \qquad (6)$$

Wir sehen also, daß nach unserer Vorstellung Potentialdifferenzen auch in einem Metall auftreten, sobald verschiedene Stellen desselben sich auf verschiedenen Temperaturen befinden. Experimentell ist dies noch nicht nachgewiesen, wurde aber für die Erklärung der thermoelektrischen Erscheinungen (F. Kohlrausch) bereits seit langem angenommen. Wir sehen auch, daß die Abhängigkeit der Potentialdifferenz von der Temperatur eine ziemlich komplizierte ist, so daß man nur für genügend kleine Temperaturdifferenzen die Potentialdifferenz der Temperaturdifferenz proportional setzen kann.

T		T		T'		T
I	N_1 / A_1	N_2 / A_2	II	N'_2 / A'_2	N'_1 / A'_1 III	N_1 / A_1
V_1	V_1	V_2		V'_2	V'_1	V''_1

Fig. 2.

Wir denken uns jetzt drei Zylinder vom Querschnitt Eins (Fig. 2) aneinanderstoßend. Die Zylinder (I) und (III) sollen aus demselben Metall bestehen, (II) aus einem anderen. Im

ersten Metall sei die Temperatur konstant T, im zweiten steige oder falle sie zwischen den Lötstellen von T auf T', im dritten von T' auf T. Anfang und Ende des Gesamtzylinders besitzen also dieselbe Temperatur T. Die Zahl der freien negativen Elektronen pro Volumeinheit bezeichnen wir, soweit wir sie als mit der Temperatur veränderlich ansehen, im ersten und dritten Metall mit N_1, im mittleren mit N_2. Die speziellen Werte dafür an der Berührungsstelle von (II) und (III) seien N_2', bezüglich N_1'. Die Größe A sei im ersten Metall A_1, am Anfang des zweiten A_2, am Ende A_2', am Anfang des dritten Metalles A_1', am Ende wieder A_1. Im ersten Metall werden wir das konstante Potential V_1 haben. Zu Anfang des zweiten Metalles sei das Potential V_2, am Ende V_2'. Das Metall (III) habe schließlich am Anfang das Potential V_1', am Ende V_1''. Nach den Gleichungen (5) und (6) werden wir somit der Reihe nach haben:

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{e}(A_1 - A_2) + \frac{2\alpha T}{3e} l \frac{N_2}{N_1},$$

$$V_2' - V_2 = \frac{m}{e}(A_2 - A_2') + \frac{2\alpha}{3e}\left(T' - T + \int_T^{T'} \frac{T}{N_2} dN_2\right),$$

$$V_1' - V_2' = \frac{m}{e}(A_2' - A_1') + \frac{2\alpha T'}{3e} l \frac{N_1'}{N_2'},$$

$$V_1'' - V_1' = \frac{m}{e}(A_1' - A_1) + \frac{2\alpha}{3e}\left(T - T' + \int_{T'}^{T} \frac{T}{N_1} dN_1\right).$$

Addieren wir alle diese Gleichungen, so bleibt auf der linken Seite nur die Potentialdifferenz $V_1'' - V_1$ an den Enden des Gesamtzylinders, welche uns die elektromotorische Kraft E unserer Thermokette darstellt. Dieselbe ist somit

$$E = \frac{2\alpha}{3e}\left(T' l \frac{N_1'}{N_2'} - T l \frac{N_1}{N_2} + \int_T^{T'} \frac{T}{N_2} dN_2 - \int_T^{T'} \frac{T}{N_1} dN_1\right),$$

was wir auch in die Form bringen können:

$$E = \frac{2\alpha}{3e}\int_T^{T'} l \frac{N_1}{N_2} dT. \tag{7}$$

Es ist nun bemerkenswert, daß trotz der Verschiedenheit der Grundgleichungen die Lorentz'sche Theorie genau dasselbe Resultat ergibt. Dies rührt davon her, daß es für das Endresultat gleichgültig ist, in welcher Weise sich A mit der Temperatur ändert oder, wenn wir uns physikalisch ausdrücken, in welcher Weise die Kräfte, welche die Atome auf die Elektronen ausüben, von der Temperatur abhängig sind. Ferner heben sich aus unserer Summe auch jene Glieder heraus, welche nur von der Temperatur abhängen, so daß tatsächlich nur jene Teile der Grundgleichung von Belang sind, welche in der Lorentz'schen Formulierung denselben Wert haben wie in der unserigen.

Wir wollen die Gleichung (7) noch für einige spezielle Fälle in Betracht ziehen, und zwar vorerst für die Annahme, daß N_1 und N_2 von der Temperatur unabhängig seien. Dann wird

$$E = \frac{2\alpha}{3e}\, l\, \frac{N_1}{N_2} \cdot (T'-T).$$

Die elektromotorische Kraft ist dann einfach der Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen proportional, wie es bei kleinen Temperaturdifferenzen ja immer angenommen wird.

Führen wir die Zahl der freien Elektronen als lineare Funktion der Temperatur ein, indem wir etwa

$$N_1 = N_{10}(1+\nu_1 T), \qquad N_2 = N_{20}(1+\nu_2 T)$$

setzen, so wird

$$E = \frac{2\alpha}{3e}\int_T^{T'} l\, \frac{N_{10}(1+\nu_1 T)}{N_{20}(1+\nu_2 T)}\, dT =$$

$$= \frac{2\alpha}{3e}\left[l\, \frac{N_{10}}{N_{20}} \cdot (T'-T) + \int_T^{T'} l(1+\nu_1 T)\, dT - \int_T^{T'} l(1+\nu_2 T)\, dT \right].$$

Ist ν_1 und ν_2 genügend klein, so kann

$$l(1+\nu_1 T) = \nu_1 T, \qquad l(1+\nu_2 T) = \nu_2 T$$

gesetzt werden. Führen wir dies in die letzte Gleichung ein, so wird

$$E = \frac{2\alpha}{3e}\left[l\,\frac{N_{10}}{N_{20}}\cdot(T'-T) + \frac{\nu_1}{2}(T'^2-T^2) - \frac{\nu_2}{2}(T'^2-T^2)\right] =$$

$$= \frac{2\alpha}{3e}\left[l\,\frac{N_{10}}{N_{20}}\cdot(T'-T) + \frac{\nu_1-\nu_2}{2}(T'^2-T^2)\right].$$

Das ist nun nichts anderes als die Formel von Avenarius. Würden wir diese Formel als streng gültig ansehen — mit geringer Beschränkung stellt sie ja tatsächlich das thermoelektrische Verhalten der Metalle gut dar —, so würde daraus folgen, daß wir die Abhängigkeit der Zahl der freien Elektronen N von der Temperatur durch die Gleichung darstellen können:

$$N = N_0 e^{\nu T}.$$

In der Tat, führen wir in die obige Gleichung

$$N_1 = N_{10} e^{\nu_1 T}, \qquad N_2 = N_{20} e^{\nu_2 T}$$

ein, so wird sie

$$E = \frac{2\alpha}{3e}\int_T^{T'} l\,\frac{N_{10}e^{\nu_1 T}}{N_{20}e^{\nu_2 T}}\,dT =$$

$$= \frac{2\alpha}{3e}\left[l\,\frac{N_{10}}{N_{20}}\cdot(T'-T) + \frac{\nu_1-\nu_2}{2}(T'^2-T^2)\right].$$

Also ohne die beschränkende Annahme, daß ν_1 und ν_2 sehr klein sind, erhalten wir hier das Gesetz von Avenarius.

In einer zylindrischen Leitung vom Querschnitt Eins fließe ein Strom von der Stärke i. Die negativen Elektronen müssen entgegen dem Potentialgefälle mit der Geschwindigkeit $v\mathfrak{E}$ wandern (p. 856). Sind N Elektronen in der Volumeinheit enthalten, so ist $Nv\mathfrak{E}$ die Zahl der Elektronen, welche in der Sekunde den Querschnitt passieren, und

$$Nv\mathfrak{E}e = i$$

ist die Elektrizitätsmenge, welche von diesen Elektronen durch den Querschnitt des Leiters getragen wird. Nach Gleichung (4) ist nun

$$\frac{2\alpha T}{3m}\,l\,\frac{N_2}{N_1}$$

die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn die Masseneinheit Elektronen vom Metall (I) zu (II) wandert, wobei wir wieder die eingangs gegebene Anordnung zweier Metalle wählen. Da ein Elektron die Masse m besitzt, so gehen auf die Masseneinheit $\frac{1}{m}$ Elektronen. Bei der Stromstärke i fließen in der Sekunde durch den Querschnitt $\frac{i}{e}$ Elektronen, deren Masse $\frac{mi}{e}$ ist. Die Arbeit, welche die Kräfte dabei leisten, tritt in Form von Wärmeenergie auf. Die in der Sekunde erzeugte Wärmemenge wird daher sein:

$$W = \frac{mi}{e} \cdot \frac{2\alpha T}{3m} \, l \frac{N_2}{N_1} = \frac{2\alpha T}{3e} \, l \frac{N_2}{N_1} \cdot i. \qquad (8)$$

Wir gewinnen also auch so die bereits früher abgeleitete Formel (p. 856) für den Peltiereffekt.

Wir fassen jetzt ein Längenelement dx eines Metallzylinders vom Querschnitt Eins ins Auge. Dasselbe besitze an den Enden die Temperaturen T und $T+dT$. Ein elektrischer Strom fließe von T zu $T+dT$. Die negativen Elektronen wandern also von $T+dT$ zu T. Bei dieser Wanderung werden sie von der Temperatur $T+dT$ auf die Temperatur T gebracht, müssen also an das Metall Wärme abgeben. $\frac{i}{e}$ ist wie oben die Zahl der in der Sekunde passierenden Elektronen. Nennen wir die Wärmekapazität eines Elektrons wieder α, so ist αdT die Wärme, welche ein Elektron,

$$W_1 = \frac{i\alpha}{e} dT$$

die Wärmemenge, welche der Strom in der Sekunde an das Längenelement dx abgibt. Während die Elektronen das Element dx passieren, wird sich aber auch ihre Konzentration ändern, da ja N eine Funktion der Temperatur ist. Nennen wir die Zahl der Elektronen in der Volumeinheit N bei der Temperatur T, N' bei der Temperatur T', so können wir auf die

frei werdende Wärmemenge ohneweiters die Gleichung (8) anwenden, wenn wir in derselben

$$N_2 = N, \qquad N_1 = N'$$

setzen. Dies ergibt

$$W_2 = \frac{2\alpha T}{3e} l \frac{N}{N'} \cdot i = -\frac{2\alpha T}{3e}(lN' - lN).i =$$

$$= -\frac{2\alpha T}{3e} dlN.i = -\frac{2\alpha T}{3e} \cdot \frac{dlN}{dT} \cdot dT.i,$$

da wir ja N' und N als unendlich wenig verschieden voneinander annehmen müssen. Die gesamte frei werdende Wärme W werden wir erhalten, wenn wir die beiden Wärmemengen W_1 und W_2 addieren. Es ist somit

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\alpha i}{e} dT - \frac{2\alpha T}{3e} \cdot \frac{dlN}{dT} dT.i =$$

$$= -\frac{2\alpha T}{3e}\left(\frac{dlN}{dT} - \frac{3}{2}\frac{1}{T}\right) dT.i =$$

$$= -\frac{2\alpha T}{3e} \frac{dl\left(NT^{-\frac{3}{2}}\right)}{dT} dT.i.$$

Diese Gleichung repräsentiert uns also den Thomsoneffekt, indem

$$\mu = -\frac{2\alpha T}{3e} \cdot \frac{dl\left(NT^{-\frac{3}{2}}\right)}{dT}$$

nichts anderes ist, als was Lord Kelvin die »spezifische Wärme der Elektrizität« nennt. Auch in diesem Resultat sind wir in vollkommener Übereinstimmung mit H. A. Lorentz.

Es läßt sich also unter der Annahme, daß nur die negativen Elektronen das wirklich Bewegliche in einem Metall sind und daß diese sich genau so verhalten wie ein Gas in einem porösen Körper, eine Reihe von elektrischen Erscheinungen darstellen. Doch tauchen alle jene Schwierigkeiten auf, auf

welche H. A. Lorentz hingewiesen hat, sobald wir auch positive Elektronen, wie es der Halleffekt zu verlangen scheint, als beweglich hinstellen. Diese Annahme führt aber andrerseits zu Widersprüchen, auf die schon J. J. Thomson aufmerksam gemacht hat, der auch einen Fingerzeig gegeben hat, wie man sich etwa den Halleffekt bei nur einer Art wandernder Elektronen erklären kann. Es dürfte sich daher vorerst empfehlen, mit den einfachen Annahmen, welche wir bei unseren Untersuchungen benützten, weiter zu operieren. So scheint es nicht schwierig zu sein, die Erscheinungen des elektrischen Lichtbogens, der Entladungen in gasverdünnten Räumen, der Theorie der galvanischen Elemente usw. mathematisch zu formulieren und so direkt einen Zusammenhang dieser verschiedenen Erscheinungen festzustellen.

Zur Theorie des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes

von

G. Jäger.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juni 1908.)

Das schönste Resultat der Untersuchungen P. Drude's: »Zur Elektronentheorie der Metalle«[1] ist wohl die Ableitung des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes. Mit seltener Kühnheit der Konzeption wird angenommen, daß die Wärmeleitung in einem Metall fast zur Gänze nur durch die Elektronen bewirkt wird und die Atome dabei eine so geringfügige Rolle spielen, daß ihr Einfluß vielfach ganz vernachlässigt werden kann. Die Folge davon ist, daß das Verhältnis der Wärmeleitungsfähigkeit und des elektrischen Leitungsvermögens für alle Metalle dasselbe und proportional der absoluten Temperatur sein muß, Folgerungen, die tatsächlich schon früher von G. Wiedemann und Franz und anderen bestätigt worden sind. Drude machte bei seinen Rechnungen die vereinfachende Voraussetzung, daß alle Elektronen dieselbe Geschwindigkeit besäßen. H. A. Lorentz[2] zeigte später, wie man mit Anwendung bekannter Prinzipien der kinetischen Gastheorie die Elektronenbewegung in Metallen viel allgemeiner darstellen kann. Durch seine Rechnungen wird Drude's Resultat qualitativ bestätigt, doch erhält er quantitativ, wie zu erwarten stand, andere Ausdrücke.

---

[1] Drud. Ann., I, p. 566 (1900); III, p. 369 (1900).

[2] Arch. Néerl., Sér. II, T. X, p. 336 (1905).

Wegen der Wichtigkeit der Sache schien es mir angezeigt, im folgenden einen neuen Weg zur Erlangung des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes zu zeigen, der einerseits die beschränkende Annahme Drude's über die Geschwindigkeit der Elektronen fallen läßt, andrerseits keine so tiefgehenden Kenntnisse der kinetischen Gastheorie erfordert, wie sie das Verständnis der Lorentz'schen Arbeit voraussetzt.

Die Wärme- und Elektrizitätsleitung sei lediglich durch die Beweglichkeit der negativen Elektronen bedingt. Für diese gelten die Gasgesetze. Ihre Bewegung sei also derart wie die der Gasmolekeln in einem porösen festen Körper. Die Elektronen machen Zusammenstöße mit den Metallatomen und untereinander. Den Weg, welchen ein Elektron im Mittel zwischen zwei Zusammenstößen zurücklegt, nennen wir die mittlere Weglänge l. Wir machen die beschränkende Annahme, daß wir jede Weglänge zwischen zwei Zusammenstößen durch die mittlere ersetzen können.

Wir denken uns einen Metallwürfel von 1 *cm* Kantenlänge. Parallel einer Kante, die wir als x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ansehen, wirke das Potentialgefälle $\mathfrak{E}$. Ein negatives Elektron von der scheinbaren Masse m unterliegt der Kraft $-e\mathfrak{E}$, indem wir unter e das Elementarquantum der Elektrizität verstehen. Die Bewegung eines Elektrons ist somit bestimmt durch die Gleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -e\mathfrak{E}$$

oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e\mathfrak{E}}{m}.$$

Durch Integration ergibt sich die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e\mathfrak{E}t}{m} + \xi.$$

Die Komponente ξ ist dabei die x-Komponente der Wärmebewegung, welche das Elektron nach dem letzten Zusammenstoß angenommen hat. Für die Größe ξ machen wir die Voraussetzung, daß für die Verteilung der Geschwindigkeiten der

Elektronen das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung der Molekeln eines ruhenden Gases gilt. Haben unsere Elektronen infolge der Wärmebewegung die Geschwindigkeit c, so ist die Zeit τ, welche zwischen zwei Zusammenstößen infolge der oben gemachten Annahmen verfließt,

$$\tau = \frac{l}{c}.$$

Die Geschwindigkeit, welche das Elektron während dieser Zeit parallel zur x-Achse hat, ändert sich somit von ξ bis $\xi - \frac{e\mathfrak{E}\tau}{m}$. Es bewegt sich daher mit einer mittleren Geschwindigkeit

$$\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = -\frac{e\mathfrak{E}\tau}{2m} + \xi = -\frac{e\mathfrak{E}l}{2mc} + \xi.$$

Haben wir in unserem Würfel von der Volumseinheit ν Elektronen dieser Geschwindigkeit, so werden $\nu\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$ den Querschnitt in der Sekunde passieren und die Elektrizitätsmenge $-\nu e\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$ hindurchtragen, da jedes Elektron die Menge $-e$ mit sich führt. Bilden wir nun diesen Ausdruck für sämtliche vorhandenen Elektronen, so erhalten wir die gesamte Elektrizitätsmenge, welche in der Sekunde den Querschnitt unseres Würfels passiert; das ist die Intensität i des elektrischen Stromes, der infolge der elektromotorischen Kraft $\mathfrak{E}$ entsteht. Wir haben also

$$i = \sum -\nu e\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \sum \frac{\nu e^2\mathfrak{E}l}{2mc} - \sum \nu e\xi.$$

Unter Voraussetzung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes haben wir sowohl der Größe als der Zahl nach ebensoviel positive als negative ξ, weshalb

$$\sum \nu e\xi = 0$$

zu setzen ist. Ist ferner die Gesamtzahl der Elektronen N, so ist nach Maxwell die Zahl ν jener, die eine Geschwindigkeit zwischen c und $c+dc$ besitzen,

$$\nu = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\,\gamma^3} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc,$$

wobei also γ die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Elektronen bedeutet. Die Stromstärke i wird sich daher ausdrücken lassen durch

$$i = \frac{4Nle^2\mathfrak{E}}{2\sqrt{\pi}\,\gamma^3 m}\int_0^\infty ce^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc = \frac{2Nle^2\mathfrak{E}}{\sqrt{\pi}\,\gamma m}\int_0^\infty \frac{c}{\gamma} e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} d\frac{c}{\gamma} =$$

$$= \frac{Nle^2\mathfrak{E}}{\sqrt{\pi}\,\gamma m}\left[-e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}}\right]_0^\infty = \frac{Nle^2\mathfrak{E}}{\sqrt{\pi}\,\gamma m}.$$

Nennen wir L die elektrische Leitfähigkeit unseres Metallwürfels, so ist nach dem Ohm'schen Gesetz

$$i = L\mathfrak{E},$$

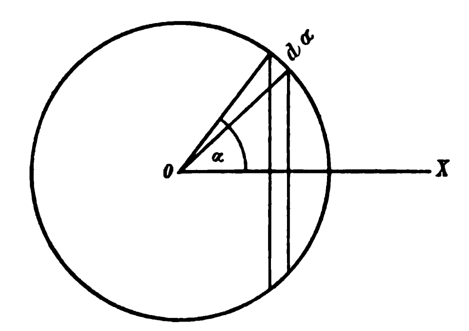
folglich nach dem Früheren

$$L = \frac{Nle^2}{\sqrt{\pi}\,\gamma m}.$$

In ähnlicher Weise gelingt es nun auch, einen Ausdruck für das Wärmeleitungsvermögen des Würfels aufzustellen. Wir wollen einen Temperaturanstieg parallel zur x-Achse annehmen. Der Wärmetransport kommt auf die Weise zustande, daß Elektronen, welche aus Schichten höherer Temperatur in solche tieferer kommen, an dieselben Energie abgeben.

Nehmen wir wieder an, die mittlere Weglänge der Elektronen sei l, so wird im Mittel ein Elektron zwischen zwei Zusammenstößen ebenso oft eine Wegkomponente parallel zur x-Achse im positiven wie im negativen Sinne haben. Suchen wir den Mittelwert der positiven Wegkomponenten, so können wir folgenderart verfahren: Wir denken uns sämtliche Richtungen, welche ein Elektron einschlagen kann, als Radien einer Kugel aufgetragen. Dieselben werden die Kugeloberfläche

überall in gleichmäßiger Verteilung durchstechen. Alle jene Richtungen, welche mit der x-Achse (Fig. 1) einen Winkel α einschließen, der kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, werden eine positive Wegkomponente besitzen von der Größe $l \cos \alpha$. Haben wir über den ganzen Raum n Richtungen verteilt und setzen wir den Radius der Kugel gleich Eins, so kommen auf die Einheit der Oberfläche der Kugel $\frac{n}{4\pi}$ Richtungen. Suchen wir demnach die Zahl der Richtungen, welche mit der x-Achse einen Winkel zwischen α und $\alpha + d\alpha$ einschließen, so haben wir die Fläche



der dem Winkelelement $d\alpha$ entsprechenden Zone auf der Kugel zu suchen und mit $\frac{n}{4\pi}$ zu multiplizieren. Das ergibt

$$\frac{2\pi n \sin \alpha \, d\alpha}{4\pi} = \frac{n}{2} \sin \alpha \, d\alpha.$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit $l \cos \alpha$ und integrieren ihn von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir die Summe sämtlicher positiven x-Komponenten der Wege l; die mittlere positive Komponente l_x somit, wenn wir diese Summe noch durch die Gesamtzahl derselben, d. i. $\frac{n}{2}$ dividieren. Es ist also

$$l_x = l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha = l \left[\frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{2}.$$

Wir können uns die Sache nun so vorstellen, daß eine Ebene, die wir senkrecht zur x-Achse legen, beständig nach beiden Richtungen von Elektronen durchflogen wird. Die Ausgangspunkte jener, welche in der Richtung der x-Achse fliegen, liegen im Mittel um $\frac{l}{2}$ von den Ausgangspunkten jener entfernt, welche im entgegengesetzten Sinne wandern. Da wir ein lineares Temperaturgefälle voraussetzen, so unterscheiden sich die Temperaturen der beiden Elektronenarten im Mittel um eine Größe, welche gleich ist dem Temperaturunterschied zweier zur x-Achse senkrechten Ebenen, die um $\frac{l}{2}$ voneinander entfernt sind. Es ändert daher im Resultat der Rechnung nichts, wenn wir annehmen, daß alle von links kommenden Elektronen eine ganz bestimmte Temperatur haben, alle rechts kommenden ebenfalls; doch muß diese Temperatur um den genannten Unterschied höher sein.

Nach dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz ist nun wiederum die Zahl der Elektronen in unserem Einheitswürfel, die Geschwindigkeitskomponenten zwischen ξ und $\xi+d\xi$, η und $\eta+d\eta$, ζ und $\zeta+d\zeta$ haben,

$$\frac{N}{\sqrt{\pi^3}\,\gamma^3} e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\gamma^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{1}$$

Die kinetische Energie derselben erhalten wir, wenn wir diesen Ausdruck mit $\frac{m}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$ multiplizieren. Dies ist dann gleichzeitig der Wärmeinhalt der betreffenden Elektronen. Multiplizieren wir diesen Ausdruck noch mit ξ, so erhalten wir die gesamte Energie, welche diese Elektronen in der Sekunde durch den Querschnitt unseres Würfels tragen. Integrieren wir dann über alle möglichen Werte, d. i. nach ξ von $\xi = 0$ bis $\xi = \infty$, nach η und ζ von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhalten wir die gesamte Energie, welche in der Sekunde durch den Querschnitt von den in positiver Richtung fliegenden Elektronen getragen wird.

Genau so können wir mit den in negativer Richtung fliegenden verfahren, indem wir jetzt nach ξ von $\xi = -\infty$ bis $\xi = 0$ integrieren, und erhalten dann die Energie, welche nach dieser Richtung durch den Querschnitt in der Sekunde getragen wird. Dabei ist folgendes zu beachten: Wir haben angenommen, daß in der Volumeinheit N Elektronen vorhanden sind. Da die von links kommenden Elektronen aus Orten tieferer Temperatur kommen, so haben sie eine kleinere mittlere Geschwindigkeit als die entgegengesetzt fliegenden. Es müßte somit ein Transport der negativen Elektrizität nach links erfolgen, was eine Anhäufung von Elektronen auf der linken Seite ergeben würde. Diese Anhäufung wird jedoch dadurch beschränkt, daß die angehäufte Elektrizität die Elektronen in entgegengesetzter Richtung zu treiben sucht. Es muß sich also wiederum ein Gleichgewichtszustand herstellen, der dadurch gegeben ist, daß ebensoviel Elektronen nach der einen wie nach der anderen Seite fliegen. Oder die geweckte elektrische Kraft hat den Effekt, daß die Komponente ξ der Elektronen im Mittel nach beiden Richtungen denselben Wert hat. Der Ausdruck (1) ist nun daraus entstanden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron eine Geschwindigkeitskomponente zwischen ξ und $\xi + d\xi$ hat, gegeben ist durch

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{\gamma^2}} d\xi.$$

Analoge Ausdrücke erhalten wir für die anderen Komponenten. Das Produkt der drei Ausdrücke multipliziert mit der Zahl N gibt uns dann den Ausdruck (1). Durch den Einfluß der geweckten elektrischen Kräfte sind nun die ξ an einem Punkte so verteilt, als wäre kein Temperaturgefälle vorhanden, sondern in der ganzen Umgebung des Punktes die ihm selbst zukommende Temperatur herrschen würde. Wir haben daher für sämtliche ξ ein ganz bestimmtes γ. Etwas anderes ist es aber mit den Geschwindigkeitskomponenten η und ζ. Diesen entspricht im Falle der von rechts nach links fliegenden Elektronen eine wahrscheinlichste Geschwindigkeit γ', die im Vergleich zu γ so gewählt werden muß, wie es

dem Temperaturunterschiede von zwei um $\frac{l}{2}$ voneinander entfernten Punkten der x-Achse zukommt.

Die Differenz beider Energiemengen, welche sich in der Rechnung einfach als algebraische Summe ausdrückt, gibt uns schließlich die Wärmemenge, welche tatsächlich den Querschnitt des Würfels in der x-Richtung pro Sekunde durchströmt. Dieselbe können wir auch schreiben $-k\frac{dT}{dx}$, wenn wir unter k die Wärmeleitungsfähigkeit, unter $\frac{dT}{dx}$ den Temperaturanstieg längs der x-Achse verstehen. Nach all dem erhalten wir somit:

$$-k\frac{dT}{dx} =$$

$$= \frac{Nm}{2\sqrt{\pi^3}\gamma^3}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\gamma^2}}d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+ \frac{Nm}{2\sqrt{\pi^3}\gamma\gamma'^2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)e^{-\frac{\xi^2}{\gamma'^2}-\frac{\eta^2+\zeta^2}{\gamma^2}}d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Führen wir erst die Integration nach η und ζ durch, so gelangen wir durch partielle Integration auf das bekannte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\eta^2+\zeta^2}{\gamma^2}}d\eta\,d\zeta = \pi\gamma^2,$$

was in unsere Gleichung eingesetzt ergibt:

$$-k\frac{dT}{dx} = \frac{Nm}{2\gamma\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}(\xi^3+\gamma^2\xi)e^{-\frac{\xi^2}{\gamma^2}}d\xi +$$

$$+ \frac{Nm}{2\gamma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}(\xi^3+\gamma'^2\xi)e^{-\frac{\xi^2}{\gamma'^2}}d\xi. \qquad (2)$$

Die vorstehenden Integrale sind nun ganz elementarer Art und ergeben

$$\int_0^{\infty}(\xi^3+\gamma^2\xi)e^{-\frac{\xi^2}{\gamma^2}}d\xi = \gamma^4, \qquad \int_{-\infty}^{0}(\xi^3+\gamma'^2\xi)e^{-\frac{\xi^2}{\gamma'^2}}d\xi = -\gamma'^4,$$

was in Gleichung (2) eingesetzt nach entsprechender Ordnung ergibt

$$k \frac{dT}{dx} = \frac{Nm}{2\gamma\sqrt{\pi}}(\gamma'^4 - \gamma^4).$$

Wir wollen nun mit Drude die mittlere kinetische Energie eines Elektrons

$$\frac{m\overline{c^2}}{2} = \alpha T$$

setzen, wobei wir unter T die absolute Temperatur verstehen und α eine Naturkonstante ist, welche, auf die Bewegung der Gasmolekeln angewendet, für alle Gase dieselbe Größe besitzt und von uns auch für die Bewegung der Elektronen als gültig angenommen wird. Die Größe $\overline{c^2}$ steht, wie ebenfalls die Gastheorie zeigt, mit der Größe γ^2 in der Beziehung

$$\overline{c^2} = \frac{3}{2}\gamma^2;$$

somit können wir auch schreiben:

$$\gamma'^4 - \gamma^4 = \frac{4}{9}(\overline{c'^2}^2 - \overline{c^2}^2) = \frac{16}{9}\frac{\alpha^2}{m^2}(T'^2 - T^2) =$$

$$= \frac{16}{9}\frac{\alpha^2}{m^2}(T'+T)(T'-T) = \frac{32\alpha^2 T}{9m^2}(T'-T),$$

was wir uns erlauben können, da ja T' von T sehr wenig verschieden ist. Wir haben nämlich

$$T = T_0 + \frac{dT}{dx}x, \qquad T' = T_0 + \frac{dT}{dx}\left(x + \frac{l}{2}\right),$$

indem wir nach den früher gemachten Bemerkungen für T und T' die Temperatur zweier Punkte der x-Achse wählen müssen, welche nur um die halbe mittlere Weglänge der Elektronen auseinander liegen. Es ist somit

$$T' - T = \frac{l}{2} \cdot \frac{dT}{dx},$$

folglich

$$\gamma'^4 - \gamma^4 = \frac{16\alpha^2 l T}{9m^2} \cdot \frac{dT}{dx}$$

und weiter

$$k\frac{dT}{dx} = \frac{Nm}{2\gamma\sqrt{\pi}}(\gamma'^4 - \gamma^4) = \frac{Nm}{2\gamma\sqrt{\pi}} \cdot \frac{16\alpha^2 l T}{9m^2} \cdot \frac{dT}{dx} =$$

$$= \frac{8N\alpha^2 l T}{9\sqrt{\pi}\, m\gamma} \cdot \frac{dT}{dx},$$

woraus für die Wärmeleitungsfähigkeit k folgt:

$$k = \frac{8N\alpha^2 l T}{9\sqrt{\pi}\, m\gamma}.$$

Bilden wir jetzt das Verhältnis der Wärmeleitungsfähigkeit zur elektrischen Leitfähigkeit, so erhalten wir

$$\frac{k}{L} = \frac{8Nl\alpha^2 T}{9\sqrt{\pi}\, m\gamma} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\, m\gamma}{Nc^2 l} = \frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T.$$

Dieses Verhältnis enthält keine Größe mehr, welche von der Natur des Metalles abhängig wäre, wie z. B. N oder l. Es ist der Ausdruck des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes.

Es bleibe nicht unbemerkt, daß unsere Untersuchungen dasselbe Resultat ergeben haben, welches H. A. Lorentz erhielt. Was jedoch die einzelnen Werte für k und L anbelangt, so stimmen wir zwar qualitativ, aber nicht quantitativ mit Lorentz überein, indem die Lorentz'schen Werte $^4/_3$ mal größer sind als die unserigen.

Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

II.

Über die Wärmeentwicklung des Radiums

von

E. v. Schweidler und **V. F. Hess.**

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1908.)

Nachdem zuerst P. Curie und A. Laborde[1] die Wärmeentwicklung von stärkeren Radiumpräparaten qualitativ nachgewiesen hatten, wurden von verschiedenen Autoren auf Grund quantitativer Versuche Werte für die Wärmemenge angegeben, die 1 *g* metallischen Radiums erzeugen würde. Diese Werte, in Grammkalorien pro Stunde, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; es ist dabei vorausgesetzt, daß die rasch zerfallenden Umwandlungsprodukte des Radiums (Emanation bis Radium *C*) in der dem radioaktiven Gleichgewicht entsprechenden Menge mit vorhanden sind, ferner der Wert 225 für das Atomgewicht des Radiums zugrunde gelegt.

E. Rutherford und H. T. Barnes,[2] ebenso K. Angström[3] schlossen aus ihren Versuchen, daß die Wärmeentwicklung hauptsächlich der Absorption der in den emittierten α-Partikeln

[1] P. Curie und A. Laborde, C. R. *136*, 673, 1903.

[2] E. Rutherford und H. T. Barnes, Phil. Mag. (6) *7*, 202, 1904.

[3] K. Angström, Ark. f. Mat. Astr. och Fys. *1*, 523, 1904; *2*, 1, 1905; auch: Physik. Zeitschr. *6*, 685, 1905.

enthaltenen Energie entspricht, die durchdringenden β- und γ-Strahlen dagegen keinen merklichen Beitrag hierzu liefern; J. Precht[1] dagegen fand, daß die durch eine etwa 3 *mm* dicke Bleischichte absorbierten β- und γ-Strahlen etwa 10% des Gesamtbetrages der entwickelten Wärme liefern.

Autoren	Präparat	Methode	$Q\left(\frac{cal}{h}\right)$
P. Curie und A. Laborde[2]..	1 *g* 17% Bromid	—	zirka 100
Runge und J. Precht[3]....	—	—	105
E. Rutherford und H. T. Barnes[4].	30 *mg* reines Bromid	Differential-Luftthermometer	110
J. Precht[5].......	34 » » »	Eiskalorimeter	113·3
K. Angström[6]. .	90 » » »	Elektr. Kompensationskalorimeter	117
J. Precht[7].......	25 » » »	Eiskalorimeter	134

Endlich haben Rutherford und Barnes[8] die Verteilung der Wärmeentwicklung auf die verschiedenen α-strahlenden Produkte untersucht und das Resultat erhalten:

Ra................ 25%.
Emanation+Ra *A* ... 44
Ra *C* 31

Wir haben nun eine neuerliche Bestimmung der Wärmeproduktion des Radiums vorgenommen, bei der die Größe der

---

1 J. Precht, Ann. *21*, 595, 1906.
2 P. Curie und A. Laborde, l. c.
3 Runge und J. Precht, Berl. Ber. *38*, 783, 1903,
4 E. Rutherford und H. T. Barnes, Nature, *68*, 622, 1903.
5 J. Precht, Verh. d. D. phys. Ges. *6*, 101, 1904.
6 K. Angström, l. c.
7 J. Precht, Ann. *21*, 595, 1906.
8 E. Rutherford und H. T. Barnes, Phil. Mag. (6) *9*, 621, 1905.

zur Verfügung stehenden Substanzmenge wesentlich günstigere Versuchsbedingungen darbot. Vorläufig beschränkten wir uns auf die Bestimmung des Gesamtbetrages, den 1 *g* Radium im Gleichgewicht mit den folgenden kurzlebigen Zerfallsprodukten liefert; eine Wiederholung der Versuche über die Verteilung auf die einzelnen Komponenten und über die Wärmewirkung der durchdringenden Strahlen bleibt der Zukunft vorbehalten.

Das Radiumpräparat.

Das Präparat, mit dem die Messungen ausgeführt wurden, ist identisch mit dem in der Beschreibung der Radiumdarstellung von L. Haitinger und K. Ulrich[1] als »Kopf« bezeichneten; es ist eine Menge von 1·0523 *g* Radium-Bariumchlorids, das — bei 130° C. getrocknet — als wasserfrei anzusehen ist. Die provisorische Atomgewichtsbestimmung hatte den Wert 225 ergeben. Unter der Annahme des Atomgewichtes 226·0 für reines Radium ergibt sich hieraus, daß das Präparat 99·3% Radiumchlorid und 75·65% = 0·7951 *g* metallisches Radium enthält. Mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit der provisorischen Atomgewichtsbestimmung ist der Radiumgehalt auf etwa ½% unsicher; doch wird die in Aussicht genommene definitive Atomgewichtsbestimmung diese Unsicherheit teilweise beheben.

Noch in einer zweiten Beziehung ist das Präparat mangelhaft definiert, nämlich in bezug auf seinen Gehalt an den langlebigen Zerfallsprodukten Ra*D* bis Ra*F*, da sich nicht genau konstatieren läßt, wann zuletzt das ursprünglich vorhandene Ra*D* abgeschieden wurde und durch welche Zeit während des komplizierten Darstellungsverfahrens die Emanation aufgespeichert wurde, also Ra*D* bildete, oder aber entweichen konnte. Im Maximum könnten etwa 11% der Gleichgewichtsmenge von Ra*D* gebildet sein, wenn man bei einer mittleren Lebensdauer dieser Substanz von 17 Jahren eine durch zwei Jahre fortdauernde ununterbrochene Nachbildung annimmt; der tatsächliche Gehalt ist jedenfalls bedeutend kleiner, da bei der

[1] L. Haitinger und K. Ulrich, Sitzungsber. der kaiserl. Akademie der Wissensch. in Wien, Bd. 117, Abt. IIa., p. 619, 1908.

Darstellung die Emanation oft durch Erwärmung, Abdampfen etc. ausgetrieben wurde, oder aus offenstehenden Lösungen entwich. Immerhin ist die Unsicherheit über den Betrag der Wärme, der auf das vorhandene Polonium als fünften α-Strahles entfällt, etwa $^1/_2 {}^0/_0$ des Gesamtbetrages.

Es ist somit die Definition des Präparats eine derartige, daß bei absolut fehlerfreier Beobachtung seiner Wärmeentwicklung der Wert für 1 *g* metallisches Radium auf $1^0/_0$ unsicher berechnet würde.

Die Methode der Wärmebestimmung.

Die Methode war die bereits von Angström angewandte: Differentialkalorimeter mit Kompensation durch Stromwärme und thermoelektrischer Temperaturmessung. Das Prinzip ist folgendes: In zwei möglichst gleichbeschaffenen Kalorimetern I und II, die sich in einem Hohlraum konstanter Temperatur befinden, wird einerseits durch das Radium, andrerseits mittels einer Heizspirale bekannten Widerstandes durch einen meßbaren Strom Wärme entwickelt; der Strom wird derart reguliert, daß die Temperaturdifferenz der beiden Kalorimeter Null wird, beziehungsweise es wird dieser Wert der Stromstärke aus zwei beobachteten durch Interpolation berechnet.

Da die Voraussetzung absoluter Gleichheit der beiden Kalorimeter unzulässig ist, muß die eventuelle Ungleichheit durch Kommutation der Kalorimeter eliminiert werden. Bezeichnen β_1 und β_2 die Wärmemengen, welche die Kalorimeter I und II durch Leitung und Strahlung abgeben bei einem Temperaturüberschuß von 1° über die Temperatur der Umgebung, Q_R die Wärmeproduktion des Radiums, Q und Q' die beiden beobachteten Kompensationswärmen, so ist:

$$\frac{Q_R}{\beta_1} = \frac{Q}{\beta_2} \quad \text{und} \quad \frac{Q_R}{\beta_2} = \frac{Q'}{\beta_1},$$

somit

$$Q_R = \frac{1}{2}[Q + Q']$$

in formaler Analogie mit dem Verfahren bei einer Doppelwägung.

Das Kalorimeter.

Das Differentialkalorimeter (vergl. Fig. 1 der Tafel) bestand aus zwei Kupferhohlzylindern von 2·5 *cm* äußeren Durchmesser und 6 *cm* Höhe (außen) bei einer Wandstärke von 0·5 *cm*. Die abnehmbaren, gut passenden, ebenfalls 0·5 *cm* dicken Deckel besaßen je zwei Bohrungen, durch welche übersponnene Kupferdrähte führten, einerseits als Zuleitung zur Heizspirale, andrerseits als blinde Leitung, die bloß den Wärmeverlust durch Leitung in beiden Kalorimetern gleich machen sollte. Die äußere Oberfläche der Kalorimeter war poliert und vergoldet, um die Wärmeausstrahlung möglichst zu verkleinern. Die beiden Zylinder wurden getragen von einer brillenförmigen Ebonitfassung, die — um eine vertikale Achse leicht drehbar — die Kommutation der Kalorimeter gestattete, während die Deckel und Zuleitungen fix blieben. Die ganze Vorrichtung stand in einem Zinkgefäß von 24 *cm* Durchmesser und 28 *cm* Höhe, das unter Zwischenlegung wärmeisolierender Stoffe in einem weiteren, abermals mit Watte umhüllten Gefäß stand.

Aus den später zu besprechenden Messungen ergab sich, daß der Wärmeverlust jedes Kalorimeters durch Strahlung und Leitung bei einem Temperaturüberschuß von 1° C. im Mittel 0·37 cal pro Minute betrug, bei einer Abweichung von 1·5% zwischen den Werten für die beiden Kalorimeter. Aus der ersteren Zahl und dem Wasserwert eines Zylinders folgt, daß bei konstanter Wärmeproduktion im Innern und konstanter Außentemperatur ein stationärer Zustand derart sich asymptotisch herstellt, daß die Abweichung von der definitiven Endtemperatur in je einer halben Stunde auf die Hälfte sinkt; es sind somit mehrere Stunden erforderlich, damit der Endzustand praktisch als erreicht betrachtet werden kann.

Die Temperaturerhöhung, die durch das Radium, beziehungsweise durch die kompensierende Joule'sche Wärme hervorgerufen wurde, betrug rund 5·5° C.

Aus der obigen Zahl für den Wärmeverlust durch Leitung und Strahlung und aus den Dimensionen der Kalorimeter läßt sich berechnen, daß im stationären Zustand die Temperaturdifferenz zwischen der inneren und äußeren Oberfläche des

Kupferhohlzylinders 0·0003° C. betrug; es ist somit die ganze Masse eines Kalorimeters praktisch als isotherm zu betrachten.

Die Temperaturmessung.

Die Temperaturmessung erfolgte mittels eines Thermoelements, gebildet durch einen Nickeldraht, der die beiden Kalorimeter verband, während von jedem noch eine Kupferdrahtleitung zum Galvanometer führte. Die thermoelektrische Kraft beträgt 23.10^{-6} Volt für 1° C. Das zur Messung des Thermostromes verwendete Instrument war ein Drehspulenspiegelgalvanometer mit einem Reduktionsfaktor von $1 \cdot 2.10^{-8}$ Ampère pro Skalenteil bei einem Spulenwiderstand von 1·4 Ohm und Gesamtwiderstand des Galvanometerkreises von 1·6 Ohm. Somit entsprach ein Ausschlag von 1 pars einer Spannung von rund 2.10^{-8} Volt, oder eine Temperaturdifferenz der Kalorimeter von 1° C. rief einen Ausschlag von 1150 partes hervor.

Die Kompensationsstromleitung.

Die Heizspirale bestand aus übersponnenem Manganindraht, der auf ein Glasröhrchen von den ungefähren Dimensionen des Radiumgefäßes aufgewickelt und mit den Kupferdrahtzuleitungen direkt verlötet war. Der Widerstand betrug 17·888 ± 0·002 Ohm; der Temperatureinfluß ist bei dem geringen Temperaturkoeffizienten des Manganins (0·03‰ pro 1° C.) zu vernachlässigen.

Die Joule'sche Wärme wurde nach der Formel $\frac{E^2}{w}$ bestimmt, indem ein im Nebenschluß geschaltetes Präzisionsmillivoltmeter die Größe der Klemmspannung angab; der Widerstand der Zuleitung von der Heizspirale bis zum Voltmeter im Betrag von 0·036 Ohm wurde in Rechnung gezogen. Als Stromquelle dienten mehrere parallel geschaltete Akkumulatoren, die Regulierung erfolgte durch Stöpselrheostate.

Da die Voltmeter des Westontypus bekanntlich merkliche elastische Nachwirkung zeigen und das Instrument wochenlang ununterbrochen stromdurchflossen blieb, war eine Korrektion

des Voltmeters erforderlich. Dieselbe wurde ausgeführt mittels einer Kompensationsmethode unter Verwendung eines geprüften Normalclarkelements und ergab für die anzubringende Korrektion den Betrag —0·0100 Volt; es ist ein günstiger Zufall, daß die Klemmspannungen bei den Versuchen zwischen 1·39 und 1·43 Volt lagen, also die Korrektion mittels des Clarkelements (1·43 Volt) eben für den abgelesenen Ausschlag bestimmt wurde.

Im Interesse der genaueren Ablesung wurde der Voltmeterausschlag in der Regel auf eine ganze Anzahl von Skalenteilen ($^1/_{100}$ Volt) gebracht; es ist dann E^2 auf $0 \cdot 8^0/_{00}$ und $\frac{E^2}{w}$ auf rund $1^0/_{00}$ genau zu ermitteln.

Die Beobachtungsresultate.

Die Aufstellung des gesamten Instrumentariums erfolgte in einem Zimmer, dessen Fensterläden dauernd geschlossen blieben und das durch einen regulierbaren Gasofen kontinuierlich geheizt wurde. Die Zimmertemperatur war infolgedessen leidlich konstant, doch waren langsame Änderungen entsprechend den Schwankungen der Außentemperatur und rasch eintretende kleine Änderungen, bedingt durch die Anwesenheit des Beobachters und durch die Glühlampen der Skalenbeleuchtung nicht zu vermeiden. Es wurde daher auch das Galvanometer in eine wärmeisolierende Umhüllung (Holzkiste mit Watte belegt) eingebaut und die Kalorimeteranordnung möglichst nahe an das Galvanometer gerückt, so daß nur wenige Dezimeter der Leitung frei lagen. Passend angeordnete Schirme hielten von diesem Teile die direkte Strahlung der Wärmequellen (Ofen, Lampen) und kälteren Mauerpartien ab. Die trotz dieser Vorrichtungen restierenden Temperaturdifferenzen der beiden Kalorimeter infolge ungleichmäßiger Temperaturverteilung der Umgebung und die durch unkontrollierbare Thermokräfte in der Galvanometerleitung entstandenen Ausschläge mußten durch Mittelwertbildung eliminiert werden. Vom erreichten Genauigkeitsgrad geben die später angeführten Resultate ein Bild.

Als das Radiumpräparat, das in einem Glasröhrchen mit eingeriebenem Stöpsel aufbewahrt war, in das Kalorimeter I gebracht worden war und die kompensierende Stromwärme durch Probieren ermittelt wurde, ergab sich zunächst das überraschende Resultat, daß die Wärmeproduktion des Radiums nur etwa 40% des erwarteten Wertes betrug; doch war von Tag zu Tag ein merkliches Anwachsen zu konstatieren, wie sich aus der graphischen Darstellung (Fig. 2 der Tafel) ersehen läßt. Offenbar war durch einen Zufall kurz vor Beginn der Versuche ein großer Teil der angesammelten Emanation aus dem Gefäß entwichen, obwohl es nicht geöffnet worden war. In der Tat ließen sich zwei Umstände finden, die in diesem Sinne gewirkt haben konnten. Erstens war das Radiumgefäß bis zum Beginn der Versuche (8. Jänner) in einem längere Zeit — während der Weihnachtsferien — ungeheizten und daher ziemlich kalten Raume aufbewahrt worden, so daß nach dem Transport in das warme Beobachtungszimmer bei nicht luftdicht schließendem Stöpsel ein Austritt der im Röhrchen enthaltenen Gase erfolgen konnte. Zweitens war gerade zu dieser Zeit ein ungewöhnlich rapider Barometersturz eingetreten (um 25 *mm* vom 6. bis 8. Jänner), was natürlich im gleichen Sinne wirksam ist. Es wurde daher der Stöpsel durch eine dünne Paraffinschicht von außen gedichtet und das Glasgefäß noch in eine eben in das Kalorimeter passende Messingbüchse geschoben, deren Deckel gleichfalls mit Paraffin gedichtet wurde. Die Werte der Wärmeentwicklung zeigten sich weiterhin nicht mehr merklich durch den Barometergang beeinflußt.

Als Beispiel für die Art der Berechnung und die erzielte Genauigkeit seien von den definitiven Versuchen die der ersten Serie ausführlicher mitgeteilt.

Die erste Kolumne enthält die Zeit der Beobachtung, die zweite das Quadrat der am Voltmeter abgelesenen Spannung (ohne Voltmeterkorrektion), die dritte den zugehörigen Galvanometerausschlag mit dem Index *R* oder *S*, je nach dem Sinne des Ausschlages; die vierte die hieraus durch Interpolation berechnete Kompensationsspannung in der zweiten Potenz.

A. Radium in Kalorimeter I, Heizspirale in Kalorimeter II.

	E^2	a	
4. März, 12h	1·9881	11·7 *S*	$E_0^2 = 1·9936$
6. » 15	2·0164	53·9 *R*	
9. » 11	1·9881	14·6 *S*	
12. » 12	1·9881	15·4 *S*	$E_0^2 = 1·9943$
12. » 18	2·0178	55·4 *R*	
13. » 9	1·9881	13·7 *S*	$E_0^2 = 1·9980$
13. » 14	2·0178	40·0 *R*	
14. » 15	1·9881	26·3 *S*	
Mittel....			1·9953

B. Radium in Kalorimeter II, Heizspirale in Kalorimeter I.

	E^2	a	
16. März, 16h	1·9881	42·8 *S*	$E_0^2 = 1·9673$
16. » 20	1·9614	12·1 *R*	
17. » 10	1·9600	11·0 *R*	$E_0^2 = 1·9659$
17. » 19	1·9881	48·0 *S*	
18. » 9	1·9600	14·4 *R*	
18. » 14	1·9600	15·9 *R*	$E_0^2 = 1·9669$
18. » 16	1·9881	48·7 *S*	
Mittel....			1·9667

Daraus ergibt sich unter Elimination der Kalorimeterverschiedenheiten als Mittelwert der ersten Serie $E_0^2 = 1·9810$ Volt² (unkorrigiert). Analog wurden eine zweite und dritte Serie von Messungen berechnet. Das Ergebnis ist:

Erste Serie (Gewicht 3):	$E_0^2 = 1·9810$ (unkorr.)	1·9531 (korr.)
Zweite » (» 1):	1·9843 »	1·9564 »
Dritte » (» 2):	1·9908 »	1·9631 »

Hauptmittel .... **1·9570.**

Die größte Abweichung eines Einzelwertes vom Mittelwert beträgt 3‰.

Unter Einsetzung des Wertes für den Widerstand der Heizspirale und des Faktors 0·2390 für die Umrechnung von Wattsekunden in Grammkalorien ergibt sich hieraus der Absolutwert für die Wärmeentwicklung des verwendeten Radiumpräparats:

$$\begin{aligned} Q &= 0\cdot 1092 \text{ Watt.} \\ &= 0\cdot 02605 \text{ cal/sec.} \\ &= 1\cdot 563 \text{ cal/min.} \\ &= 93\cdot 78 \text{ cal/h.} \end{aligned}$$

Da die Unsicherheit des beobachteten Mittelwertes 3‰, die der Reduktion auf absolute Einheiten (Fehler der Voltmeterkorrektion und der Widerstandsbestimmung) 1‰ beträgt, kann dieses Resultat als auf 4‰ genau angesehen werden.

Da das Radiumpräparat 0·7951 *g* metallisches Radium enthält, berechnet sich hieraus die Wärmeentwicklung von 1 *g* metallischen Radiums zu

$$Q = \mathbf{118\cdot 0} \textbf{ Grammkalorien in der Stunde.}$$

Dieser Wert ist mit einer Unsicherheit von 1·4% behaftet, wovon 1% auf die Definition des Präparats, 0·4% auf die Beobachtungsfehler der Wärmebestimmung entfallen.

In bezug auf die zur Wärmeproduktion ausgenützte Strahlung ist zu bemerken, daß bei der gewählten Versuchsanordnung nur jene Strahlen nicht zur Wirkung kamen, die etwa 1 *mm* Glas und 5 *mm* Kupfer durchdringen, also jedenfalls ein kleiner Bruchteil der Gesamtstrahlung.

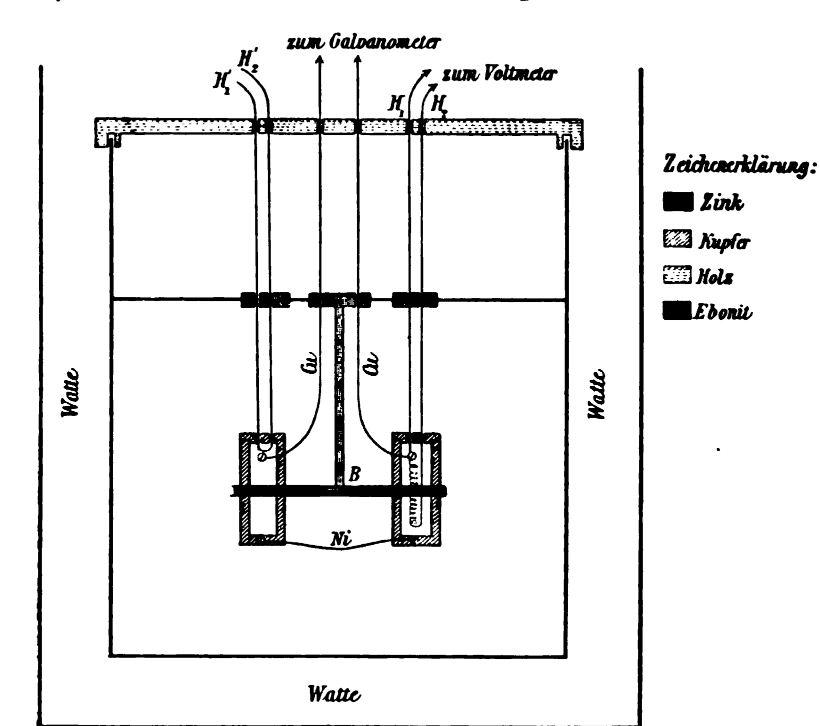


Fig. 1 *a*.

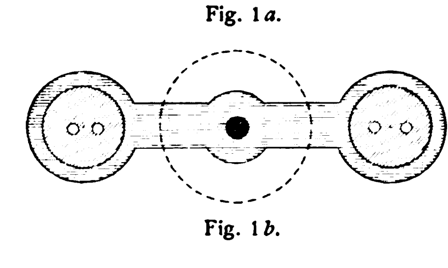


Fig. 1 *b*.

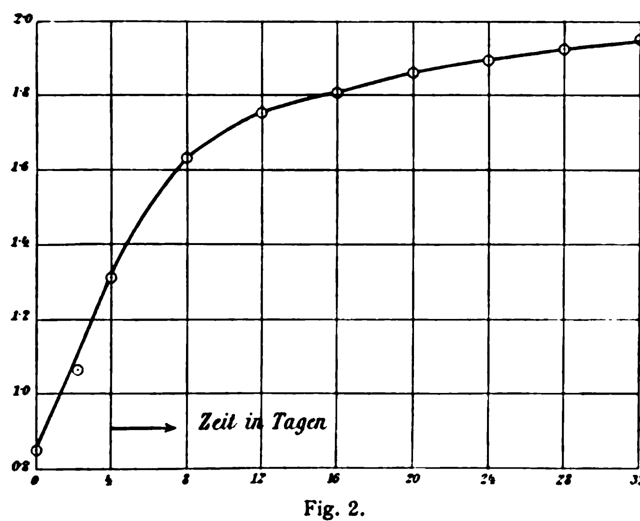


Fig. 2.

Über die Beziehung der Schmelz- und Sublimationswärme zur Theorie der Kapillarität

von

Dr. **Rudolf Girtler,**

Privatdozenten an der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juni 1908.)

William Thomson[1] hat zuerst auf die Veränderlichkeit der zu einem bestimmten gegebenen Druck gehörigen Temperatur eines gesättigten Flüssigkeitsdampfes mit der Flüssigkeitsoberfläche hingewiesen. Aus seiner Theorie, deren Richtigkeit auf der des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie fußt, folgt, daß ein Tropfen einer Flüssigkeit in einem begrenzten Raume, der bei einer gegebenen Temperatur von derselben Flüssigkeit mit ebener Oberfläche gesättigt wurde, noch verdampfen kann. Bei einem Tropfen Flüssigkeit gehört zu einer bestimmten Temperatur ein höherer Druck des gesättigten Dampfes, bei konkaver Oberfläche ein niedrigerer Druck des gesättigten Dampfes als bei ebener Oberfläche. Hiebei verstehen wir unter Druck des gesättigten Dampfes jenen, welcher an der Oberfläche der Flüssigkeit herrscht.

Nach W. Thomson hat Warburg[2] einen anderen Weg eingeschlagen, um zu demselben Resultat wie Thomson zu gelangen.

J. Stefan[3] wies auf den Zusammenhang zwischen der Theorie der Verdampfung und der der Kapillarität hin und berechnete aus der Arbeit, welche nötig ist, um ein Flüssigkeits-

---

1 William Thomson, Phil. magazine, 79 (1871), p. 448.

2 Warburg, Bemerkungen über den Druck des gesättigten Dampfes. Wied. Annalen, 264 (1886), p. 394.

3 J. Stefan, Über die Bezichung zwischen den Theorien der Kapillarität und Verdampfung. Wied. Annalen, 265 (1886), p. 655.

molekel an die Oberfläche zu bringen, den inneren Druck der Flüssigkeit unter Zugrundelegung der für Flüssigkeit und Dampf als gültig angenommenen Zustandsgleichung von van der Waals, in der er die Temperatur konstant setzt.

Aus den Resultaten der zitierten Forscher folgt unmittelbar, daß die Verdampfungswärme und die Dampfdichte nicht nur Funktionen des Druckes sind, sondern, wiewohl in sehr geringem, der Messung kaum zugänglichem Maße, auch von der Oberflächenkrümmung der verdampfenden Flüssigkeit abhängen müssen. Das berührte auch Stefan (l. c.), ohne jedoch auf diesen funktionellen Zusammenhang näher einzugehen. Diesen Zusammenhang sowohl für die Verdampfungswärme als auch für die Sublimations- und Schmelzwärme näher zu beleuchten, ferner gewisse Schlüsse auf die Kapillaritätskonstante und den inneren Druck fester Körper zu ziehen, soll die Aufgabe der vorliegenden Arbeit sein.

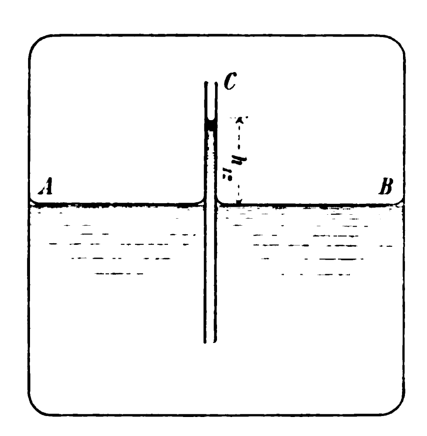
In der Zustandsgleichung für gesättigte Dämpfe $p = f(t)$ bedeutet p für gewöhnlich einen gewissen mittleren Druck des gesättigten Dampfes, indem man von der Wirkung der Schwere absieht. Wir wollen im folgenden unter p den Druck an der Oberfläche der mit ihrem gesättigten Dampf im Gleichgewicht stehenden Flüssigkeit verstehen. Ferner sollen, einer Bezeichnungsweise von M. Planck[1] folgend, die sich ziemlich eingebürgert hat, in den aufzustellenden Gleichungen die Volumina und Drucke mit zwei Indices versehen werden, und zwar sollen die ersten Indices die Phase des betreffenden Volumens, die zweiten aber jene Phase bezeichnen, mit welcher das Volumen in Berührung und thermischem Gleichgewicht steht. Dabei sollen 1, 2, 3 der Reihe nach die dampfförmige, flüssige, feste Phase bezeichnen; v_{13} bedeutet demnach die dampfförmige Phase des Körpers mit dem Volumen v im thermischen Gleichgewicht mit der festen Phase desselben Körpers, p_{13} ist der Druck, der zum Volumen v_{13} gehört.

Wir wenden uns nun zuerst zu dem Einfluß der Krümmung auf die Verdampfungswärme. Wir denken uns einen Raum, in

---

[1] M. Plank, Verdampfen, Schmelzen, Sublimieren. Wied. Annalen, 15 (1882), p. 446.

welchem eine gewisse Menge Flüssigkeit und Dampf sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Der Raum sei durch eine wärmedichte Hülle von der Temperatur der Flüssigkeit und des Dampfes umgeben. Hierauf denken wir uns in die Flüssigkeit ein Kapillarrohr C von der Temperatur der Flüssigkeit gesteckt (siehe Figur). Die Flüssigkeit steige im Kapillarrohr um die mittlere Höhe h_{12} und, wenn die Temperatur konstant erhalten bleibt, wird sich wieder ein Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und Dampf einstellen. Der Druck auf den Meniskus im Kapillarrohr p' ist um $\sigma_{12} h_{12}$ kleiner als in der Niveaufläche AB mit dem Drucke p, wenn σ_{12} das mittlere spezifische Gewicht des Dampfes zwischen Meniscus und Niveaufläche AB vorstellt. (Dieser Druck p' kann auch größer als p sein, wie das bei einer nicht benetzenden Flüssigkeit eintritt; darauf beziehen sich die beiden Zeichen in der folgenden Gleichung.) Es ist



$$p' = p \pm \sigma_{12} h_{12}. \qquad (1)$$

Die Formel für die Verdampfungswärme

$$v = \vartheta(v_{12} - v_{21}) \frac{dP_{12}}{d\vartheta} \qquad P_{12} = P_{21} \qquad (2)$$

setzt bekanntlich voraus, daß Flüssigkeit und Dampf vollkommen homogen seien. Unter den gewöhnlichen Verhältnissen ist die Ursache der Inhomogenität der Flüssigkeit und des Dampfes die Schwere. Die Flüssigkeit im Kapillarrohr oberhalb AB ist infolge des Kapillardruckes der Schwere entzogen, man kann also bis auf die wahrscheinlich rapide Dichtigkeitsänderung an der Oberfläche annehmen, daß sie im Bereich des Kapillarrohrs oberhalb der Niveaufläche AB wirklich homogen ist. In diesem Sinne können wir Gleichung (2) auf den Raum im Kapillarrohr C zur Verwendung bringen, der unten durch

die Niveaufläche AB und oben in einer um nur sehr weniges größeren Höhe als h_{12} durch eine zu AB parallele Ebene abgeschlossen ist.

Für diesen Raum ist in Gleichung (2) für P_{12} der Druck p' einzusetzen, denn die freie Oberfläche, durch welche die Flüssigkeitsmoleküle treten müssen, um in den Dampfraum treten zu können, steht unter dem Druck p'. Wir erhalten demnach bei der Temperatur ϑ für die Verdampfungswärme den Ausdruck

$$v' = \vartheta(v_{12}-v_{21})\left[\frac{dp_{12}}{d\vartheta} \pm \frac{d(\sigma_{12}h_{12})}{d\vartheta}\right]$$

$$= \vartheta(v_{12}-v_{21})\frac{dp_{12}}{d\vartheta} \pm \vartheta(v_{12}-v_{21})\frac{d}{d\vartheta}(\sigma_{12}h_{12}). \qquad (3)$$

wenn p_{12} den Druck pro Flächeneinheit in der Niveaufläche AB bedeutet.

Statt $\sigma_{12}h_{12}$ können wir $\sigma_{12}\frac{\alpha_\vartheta}{\rho_{21}-\sigma_{12}}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ setzen, worin α_ϑ die Kapillaritätskonstante der Flüssigkeit gegen ihren für die Temperatur ϑ gesättigten Dampf, ρ_{21} das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bei derselben Temperatur $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ die mittlere Krümmung bezeichnet. Da nun $\sigma_{21}=\frac{1}{v_{21}}$, $\sigma_{12}=\frac{1}{v_{12}}$, so wird

$$\sigma_{12}h_{12} = \frac{2}{R}\alpha_\vartheta\frac{v_{21}}{v_{12}-v_{21}}, \qquad (4)$$

wenn wir annähernd den oberen Meniskus als Teil einer Kugelfläche annehmen. Somit geht Gleichung (3) in

$$v' = v \pm \vartheta(v_{12}-v_{21})\frac{2}{R}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\alpha_\vartheta v_{21}}{v_{12}-v_{21}}\right) \qquad (3')$$

über. In (3') bezeichnet also v' die Verdampfungswärme bei gekrümmter freier Oberfläche und der Temperatur ϑ, v die Verdampfungswärme bei ebener Oberfläche und derselben Temperatur.

Die Sublimationswärme ist ebenso wie die Verdampfungswärme eine Funktion der Temperatur und der Oberflächenkrümmung, wie sich durch ganz ähnliche Schlüsse wie die vorhergehenden ergeben wird. Wir denken uns in einem Raume, der von einer Wärme undurchlässigen Wand eingeschlossen ist, eine Flüssigkeit mit ihrem bei der herrschenden Temperatur ϑ'' gesättigten Dampfe koexistierend. Die Temperatur ϑ'' sei zuvörderst höher als die Gefriertemperatur der Flüssigkeit im Kapillarrohr. Wird wieder in die Flüssigkeit ein Kapillarrohr von der Temperatur ϑ'' gesteckt, so wird die Flüssigkeit in demselben eine mit der Temperatur ϑ'' zusammenhängende Höhe h''_{12} einnehmen. Wir denken uns jetzt alles auf die Gefriertemperatur ϑ' der Flüssigkeit im Kapillarrohr abgekühlt. Die Folge hiervon wird sein, daß die Höhe der Flüssigkeit im Kapillarrohr über der Niveaufläche der Flüssigkeit größer wird, da die Kapillaritätskonstante mit abnehmender Temperatur für gewöhnlich steigt. Die mittlere Höhe im Kapillarrohr über oder unter dem Flüssigkeitsniveau sei jetzt h'_{12}. Wir haben jetzt dem Flüssigkeits- und Dampfgemisch noch eine bestimmte Wärmemenge zu entziehen, um einen Gleichgewichtszustand zwischen der enstehenden festen und dampfförmigen Phase zu ermöglichen. Um sowohl im Kapillarrohr als auch im übrigen Flüssigkeitsraum die feste Phase von derselben Temperatur zu erhalten, wird sich die Temperatur ϑ' noch — wenn auch um sehr wenig — ändern müssen, da der feste Körper im Kapillarrohr und im übrigen Raume unter wenn auch sehr wenig verschiedenen Drucken stehen. Die Temperatur sei also jetzt ϑ. Wir schneiden jetzt genau so wie früher jenen oben näher beschriebenen Teil heraus und wenden auf ihn die der Gleichung (2) analoge Gleichung für die Sublimationswärme an:

$$s = \vartheta(v_{13}-v_{31})\frac{dP_{13}}{d\vartheta} \qquad P_{13} = P_{31}. \tag{5}$$

Nun ist aber der Druck im Kapillarrohr auf den festen Körper

$$p' = p \pm \sigma_{13} h_{13} = p \pm \sigma_{13}\gamma h'_{13}, \tag{6}$$

wenn p, σ_{13}, h_{13} die analogen Bedeutungen wie in Gleichung (1) haben; h_{13} haben wir gleich $\gamma h'_{13}$ gesetzt, wobei γ eine sehr

nahe der Zahl 1 liegende Größe bedeutet, die sicherlich von der Temperatur ϑ abhängt, die wir aber, um die Gleichungen nicht zu sehr zu komplizieren, in der Folge als konstant annehmen wollen. Bei ganz analogen Bezeichnungen wie oben wird

$$s' = \vartheta(v_{13}-v_{31})\frac{d}{d\vartheta}(p \pm \sigma_{13}h_{13})$$

$$= \vartheta(v_{13}-v_{31})\frac{dp}{d\vartheta} \pm \frac{2\vartheta}{R}\gamma(v_{13}-v_{31})\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{v_{13}\alpha_{\vartheta'}}{v_{13}-v_{31}}\right).$$

Also

$$s' = s \pm \frac{2}{R}\vartheta\gamma(v_{13}-v_{31})\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{v_{13}\alpha_{\vartheta'}}{v_{13}-v_{31}}\right). \tag{7}$$

Setzen wir noch $\alpha_{\vartheta'} = \delta\alpha_{\vartheta}$, worin δ von der Temperatur ϑ und der speziellen Art des erstarrten Körpers abhängt, so wird aus (7)

$$s' = s \pm \frac{2}{R}\vartheta\gamma(v_{13}-v_{31})\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\delta v_{13}\alpha_{\vartheta}}{v_{13}-v_{31}}\right). \tag{7'}$$

Es läßt sich demnach aus den Gleichungen (3') und (7') der Zusammenhang zwischen Verdampfungswärme und Sublimationswärme mit der Theorie der Kapillarität erschließen; es folgt mit Zuhilfenahme des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, daß auch die Schmelzwärme mit der Oberflächenkrümmung sich verändert. Bezeichnet man nämlich mit r' die Schmelzwärme für eine gewisse Menge Substanz in ihrer festen Phase bei der Temperatur ϑ und hat die freie natürliche Oberfläche eine kugelförmige Krümmung vom Radius R — unter natürlicher Oberfläche[1] des festen Körpers verstehen wir die aus der flüssigen Phase durch Erstarrung und nicht etwa die durch die mechanische Bearbeitung des festen Körpers selbst entstandene —, nennt man ferner r die Schmelzwärme desselben Körpers bei ebener freier natürlicher Oberfläche, so gilt nach dem ersten Hauptsatz

$$s' = r' + v' \qquad s = r + v$$

$$s' - s = (r' - r) + (v' - v).$$

[1] Darauf werden wir weiter unten noch zurückkommen.

Also nach (7') und (3')

$$\pm\frac{2\vartheta\gamma}{R}(v_{13}-v_{31})\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\delta v_{13}\alpha_\vartheta}{v_{13}-v_{31}}\right)=$$

$$= r'-r\pm\frac{2\vartheta}{R}(v_{12}-v_{21})\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{v_{12}\alpha_\vartheta}{v_{12}-r_{21}}\right),$$

d. h.

$$r'-r=\pm\frac{2\vartheta}{R}\left[\gamma(v_{13}-v_{31})\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\delta v_{13}\alpha_\vartheta}{v_{13}-v_{31}}\right)-\right.$$

$$\left.-(v_{12}-v_{21})\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{v_{12}\alpha_\vartheta}{v_{12}-v_{21}}\right)\right]. \qquad (8)$$

Vernachlässigen wir in Gleichung (8) v_{31} gegenüber v_{13} und v_{21} gegenüber v_{12}, so erhalten wir sehr angenähert:

$$r'-r=\pm\frac{2\vartheta}{R}\left[\frac{d(\alpha_\vartheta\delta)}{d\vartheta}v_{13}\gamma-\frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta}v_{12}\right]. \qquad (8')$$

δ und γ wären zwei aus der Erfahrung folgende, für jeden einzelnen Körper und jede Temperatur spezifische Koeffizienten. Wir wollen sie, was wir nach bereits Gesagtem ebenfalls ohne nennenswerten Fehler tun dürfen, gleich 1 setzen und erhalten

$$r'-r=\pm\frac{2\vartheta}{R}\,\frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta}(v_{13}-v_{12}). \qquad (8'')$$

Aus (8'') ersehen wir, daß, wie vorauszusehen war, $r'-r$ eine sehr kleine Größe ist, denn v_{13} ist von v_{12} nicht viel verschieden, wie die bezüglichen Tabellen lehren. Bei sehr kleinem R kann aber $r'-r$ immerhin von Bedeutung sein. Im Leben der Pflanzen sind die Kapillarkräfte bekanntlich von sehr großer Wichtigkeit. Da $\frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta}$ für gewöhnlich negativ ist, so ergibt sich aus (8'') für konkave Oberfläche, für welche von den beiden in (8'') vorkommenden Zeichen das negative gültig ist, für $r'-r$ eine positive Größe. Für die im Pflanzenorganismus vorkommenden Kapillaren ist R sehr klein, daher kann $r'-r$ verhältnismäßig bedeutend werden. Die Gleichung (8'') besagt für diesen Fall, daß die Wärmemenge, welche innerhalb des Pflanzenorganismus bei einer bestimmten Temperatur entzogen werden muß, um das Gefrieren herbeizuführen, größer

ist als in der freien Natur, d. h. innerhalb der Pflanze kommt das Nährwasser später zum Gefrieren als außerhalb der Pflanze; dieser Umstand verlängert die Lebensfähigkeit der Pflanze und schützt sie innerhalb gewisser Grenzen vor dem Erfrieren.

Andrerseits wird bei sehr kleinen Wassertropfen, die also konvexe Oberflächen besitzen, nach Gleichung (8'') die bei einer bestimmten Temperatur zu entziehende Wärmemenge, welche das Erstarren herbeiführt, kleiner sein müssen als bei ebener freier Oberfläche des Wassers. Es können also Tautropfen bei einer gegebenen Temperatur bereits vollkommen erstarrt sein, wenn die freien Oberflächen der Gewässer bei derselben Temperatur noch keine Spuren von Eis zeigen.

Wir wollen nun $r'—r$ für einen Wassertropfen von 1 *mm* Radius bei —1° C. berechnen, und zwar so genau als das bei dem lückenhaft vorliegenden Zahlenmaterial möglich ist. Die Versuche über die Tension des Wasserdampfes über Wasser und Eis ergeben, daß die Dampfkurven für Eis und Wasser bei 0° einen gemeinsamen Punkt besitzen, bei anderen Temperaturen aber durchaus nicht zusammenfallen.[1]

W. Fischer (l. c.) fand bei —1·10° C. für P_{13} den Wert von 4·24 *mm*, für P_{12} aber den Wert 4·31 *mm* Quecksilberdruck. Das spezifische Volumen v_{12} ist bei dieser Temperatur annähernd 210680 cm^3 für das Gramm als Gewichtseinheit. Wenden wir, um v_{13} zu finden, das Boyle-Charles'sche Gesetz an, was bei so niedrigen Tensionen gestattet ist, so finden wir

$$P_{13}v_{13} = P_{12}v_{12} \quad v_{13} = \frac{4\cdot 32}{4\cdot 24}\,210680 = 214655\,cm^3,$$

daher ist $v_{13} — v_{12} = 3975\,cm^3$ für Wasserdampf bei —1° C. Die Kapillaritätskonstante α_ϑ ist von der absoluten Temperatur ϑ abhängig nach einem von Weinberg[2] für Wasser aufgestellten Gesetze, das für Temperaturen zwischen 0° und 74° C. gültig ist:

$$\alpha_\vartheta = 0\cdot 0816\,(1 — 0\cdot 0022\,t) = 0\cdot 0816\,(1\cdot 6 — 0\cdot 0022\,\vartheta),$$

---

[1] Siehe z. B. W. Fischer, Über die Tension der über flüssiger und fester Phase gesättigten Dämpfe. Wied. Annalen, 28 (1886), p. 400.

[2] Weinberg, Zeitschr. für phys. Chemie, 10 (1892), p. 34.

worin t in Celsiusgraden, ϑ in absoluter Temperaturskala eingesetzt werden muß. Aus der Weinberg'schen Formel folgt:

$$\frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta} = -0\cdot0022.0\cdot0816\,\vartheta = -0\cdot00017952\,\vartheta.$$

Unseres Wissens existieren keine Versuche, auf Grund welcher die Abhängigkeit der Kapillaritätskonstanten von der Temperatur unterhalb des Eispunktes gefolgert worden wäre. Für Wasser von $-1\cdot10°$ wird jedoch $\frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta}$ sehr wenig von $-0\cdot00017952 \times 272$ verschieden sein.

Für $r'-r$ ergibt sich demnach für unseren Wassertropfen im Zentimetergramm-Gewichtssystem nach (8'')

$$r'-r = -\frac{2.272.10.0\cdot00017952.272.3975.4.\pi}{3\cdot1000},$$

da $\frac{4}{3}\frac{\pi}{1000}$ das Gewicht des Wassertropfens darstellt. Um $r'-r$ in großen Kalorien auszudrücken, haben wir vorstehenden Ausdruck noch durch 424.10^5 zu dividieren, also

$$r'-r = -0\cdot000104 \text{ Kalorien},$$

d. i. eine sehr kleine, der Messung nicht zugängliche Zahl.

Wir haben oben gesagt, daß die freie gekrümmte Oberfläche des festen Körpers eine natürliche sein müsse, damit die Gleichung $r'-r = \pm\frac{2\vartheta}{R}\frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta}(v_{13}-v_{12})$ angewendet werden könne; das bedarf noch einer kleinen Auseinandersetzung. Ist die freie Oberfläche der Flüssigkeit, welche mit ihrem bei einer gegebenen Temperatur gesättigten Dampf im thermischen Gleichgewicht stehend gedacht wird, bereits eine gekrümmte und wird die Flüssigkeit zum Erstarren gebracht, so wird die erstarrte Oberfläche im allgemeinen ebenfalls gekrümmt sein. Zu jedem mit einer bestimmten mittleren Krümmung begabten Flächenelement gehört dann ein bestimmter Druck der dampfförmigen Phase. Die durch Erstarrung entstandene feste Oberfläche wird also auf jeden Fall eine Gleichgewichtsfläche sein. Es ist kein Grund vorhanden,

daß die Kapillarkräfte, die als Folgeerscheinung der zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte und der besonderen an der Oberfläche eines Körpers wirkenden Verhältnisse gedacht werden, beim Übergang in den festen Zustand verschwinden sollten oder mit anderen Worten, man muß von einer Kapillarität fester Körper in ganz analogem Sinne sprechen können, wie von der von Flüssigkeiten. Quincke[1] hat darauf in einer Abhandlung hingewiesen und auch die Kapillaritätskonstanten fester Körper aus der Beobachtung zu erschließen versucht, daß die Festigkeit runder Metalldrähte sowohl von dem Querschnitt als auch von dem Umfang, also von der Oberfläche der Substanz abhängig erscheint.

Wird die ursprünglich ebene freie Oberfläche eines mit der dampfförmigen Phase koexistierenden festen Körpers von sehr kleinem Volumen durch mechanische Bearbeitung in eine gekrümmte verwandelt, so wird der Gleichgewichtszustand etwas, wenn auch sehr wenig gestört. Wenn wir voraussetzen, daß der Druck des gesättigten Dampfes sich nicht geändert hat, so kann daher diese durch mechanische Bearbeitung entstandene gekrümmte Fläche streng genommen keine Gleichgewichtsfläche mehr sein.

Ist eine Flüssigkeit und deren gesättigter Dampf bei einer bestimmten Temperatur koexistierend und wird die freie Oberfläche der Flüssigkeit an einer Stelle durch Einsenken eines Kapillarrohres an einer Stelle gekrümmt, so ist diese neue Fläche keine Gleichgewichtsfläche mehr, die geänderten Oberflächenverhältnisse bedingen das Ansteigen der Flüssigkeitsmasse, bis der Druck auf dieselbe so groß geworden ist, daß dieselbe eine Gleichgewichtsfläche sein kann. Durch die durch die mechanische Bearbeitung geänderten Oberflächenverhältnisse des festen Körpers werden wahrscheinlich entweder die inneren Spannungen des Körpers verändert und kommt eine leichte Deformation desselben zustande, oder es tritt eine Sublimation ein, wenn dieselbe bei der gegebenen Temperatur überhaupt möglich ist, vielleicht wird auch die Occlusion des Dampfes befördert, beziehungsweise verringert; darüber läßt

---

[1] Quincke, Wied. Annalen (1868), p. 210.

sich natürlich nichts Bestimmtes sagen. Das eine erhellt aber unzweideutig aus dem Vorhergehenden, daß zur Geltung der Gleichung (8″) eine natürliche Oberfläche des festen Körpers die wichtige Voraussetzung ist.

Die einem festen Körper während des Schmelzprozesses zugeführte Wärmemenge wird bekanntlich zur Überwindung des äußeren Druckes und zur Veränderung der potentiellen Energie des Körpers verwendet. Für die letztere ergibt die Gauß'sche Theorie der Kapillarität einen Ausdruck von der Form

$$E = -Kv + \frac{1}{2} F.H, \tag{9}$$

worin K und H zwei Konstante, v das Volumen des Körpers und F die Oberfläche desselben darstellt. K wird auch als innerer Druck, $^1/_2 H$ als die Konstante der Kapillaritätskräfte aufgefaßt, welche an der den zwei Medien A und B, von welchen das erste den festen Körper, das zweite den gesättigten Dampf desselben bei einer bestimmten Temperatur bezeichne, gemeinsamen Oberfläche enstehen. Wir denken uns nun zwei gleich geformte und gleich große Räume R_1 und R_2; in dem ersten Raume R_1 befinde sich an einem sehr dünnen, die Wärme gut leitenden Drahte ein sehr kleiner Eiswürfel im Schwerpunkt aufgehängt, in dem zweiten Raume R_2 hänge an einem ganz gleichen Drahte eine sehr kleine Eiskugel ebenfalls im Schwerpunkt. Kugel und Würfel seien im Gleichgewicht mit ihrem bei derselben Temperatur gesättigten Dampf und seien von gleichem Volumen. Da die Körperchen sehr klein sind, so wird man von einer etwa vorhandenen Dichtigkeitsvariation im Innern und von der verschiedenen Dichte des Dampfes an der Oberfläche derselben absehen können. Demgemäß darf man annehmen, daß Würfel und Kugel, wenn sie an gleich langen Drähten an denselben Stellen der Umgrenzungsflächen der Räume R_1 und R_2 aufgehängt sind, unter zwei voneinander zwar verschiedenen, aber längs der ganzen Oberflächen konstanten Drucken stehen. Es werde nun diesen beiden Eiskörperchen längs dieser Drähte durch eine sehr entfernte Wärmequelle die Schmelzwärme zugeführt, welche für sie nach bereits Gesagtem nicht gleich sein kann.

Nach Beendigung des Schmelzprozesses werden Eiskugel und Eiswürfel in an den Drähten hängende kleine Wasserkugeln übergegangen sein. Sehen wir von der gegen den äußeren Druck geleisteten Arbeit wegen ihrer Kleinheit ab, so muß der Gewinn an potentieller Energie gleich der Schmelzwärme sein. Wir betrachten zuerst die Eiskugel, sie habe den Radius ρ_1, ihre Energie sei nach (9)

$$E_1 = -K_1 v_1 + F_1 A_1 = -K_1 \frac{4}{3} \rho_1^3 \pi + 4 \rho_1^2 \pi A_1.$$

Nach Zuführung der Schmelzwärme sei der Radius der entstandenen Wasserkugel ρ_2, deren potentielle Energie

$$E_2 = -K_2 v_2 + F_2 A_2 = -K_2 \frac{4}{3} \rho_2^3 \pi + 4 \rho_2^2 \pi A_2.$$

Ferner ist

$$E_2 - E_1 = r', \tag{10}$$

wenn r' die Schmelzwärme bedeutet. Dieselben Ansätze machen wir auch für den Eiswürfel. Die Kantenlänge l desselben berechnet sich aus der Gleichheit seines Volumens mit der der Eiskugel: $l = \rho_1 \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3}$, seine Oberfläche f, ist gleich $6 \rho_1^2 \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{2/3}$. Die potentielle Energie des Eiswürfels ist wieder nach (9)

$$e_1 = -K_1 v_1 + f_1 A_1 = -K_1 \frac{4}{3} \rho_1^3 \pi + 6 \rho_1^2 \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{2/3} A_1.$$

Nach Zuführung der Schmelzwärme muß die Energie des Wassertropfens gleich E_2 sein. Ganz wie früher erhalten wir

$$E_2 - e_1 = r \tag{11}$$

Nach dieser und nach Gleichung (10) ist

$$r' - r = \frac{2\vartheta}{\rho_2} \frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta} (v_{13} - v_{12}) \frac{4}{3} \rho_1^3 \pi = e_1 - E_1 = A_1 (f_1 - F_1)$$

$$F_1 = 4 \pi \rho_1^2$$

Setzen wir annähernd $\rho_1 = \rho_2$, so erhalten wir

$$\frac{4}{3} \vartheta \frac{d\alpha_\vartheta}{d\vartheta} (v_{13} - v_{12}) \pi = A_1 \left[3 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{2/3} - 2\pi\right] \tag{11'}$$

Durch die letzte Gleichung ist ein Mittel gegeben, um die Kapillaritätskonstante des Eises zu berechnen. Aus (11′) ergibt sich mit Berücksichtigung des oben für Wasser gefundenen Wertes von $r' - r$

$$A_1 = 146900\, g/cm = 14690000\, mg/mm.$$

Aus der Größenordnung von A_1 ersieht man, wie ungeheuer groß die Kapillaritätskonstante des festen Eises bei $-1 \cdot 10°$ C. gegenüber der des Wassers ist, welche bei 0° bekanntlich nahezu 8 *mg/mm* ist.

Die angeschriebenen Gleichungen für die potentielle Energie erlauben uns mit Zuhilfenahme des gefundenen Wertes von A_1 einen angenäherten Aufschluß über den inneren Druck in festen Körpern. Führen wir in Gleichung (10) für r' den Wert $\frac{4}{3}\rho_1^3\pi\gamma R$, worin γ das spezifische Gewicht des festen Körpers und R die Schmelzwärme pro Gewichtseinheit ohne Rücksicht auf Krümmung der Oberfläche (also jener Wert der Schmelzwärme, der aus den Beobachtungen gefolgert werden kann), so erhalten wir

$$-K_2 v_2 + F_2 A_2 + K_1 v_1 - F_1 A_1 = E_2 - E_1 = \frac{4}{3}\rho_1^3\pi\gamma R.$$

Nennen wir das Verhältnis der Volumina vor und nach dem Schmelzprozeß ε, also $\frac{4}{3}\rho_1^3\pi : \frac{4}{3}\rho_2^3\pi = \varepsilon$, so kann die zuletzt aufgeschriebene Gleichung auf die Form

$$\rho_2(K_1\varepsilon - K_2) + 3(A_2 - A_1\varepsilon^{2/3}) = \rho_2\gamma R\varepsilon$$

gebracht werden. Daraus ergibt sich der innere Druck im festen Körper

$$K_1 = \gamma R - \frac{3(A_2 - A_1\varepsilon^{2/3})}{\rho_2\varepsilon} + \frac{K_2}{\varepsilon}. \tag{12}$$

Setzen wir annähernd $\varepsilon = 1$ und vernachlässigen A_2, d. i. die Kapillaritätskonstante der Flüssigkeit gegenüber A_1, so folgt aus Gleichung (12)

$$K_1 = \gamma R + \frac{3A_1}{\rho_2} + K_2. \tag{12'}$$

In (12') stellt $\frac{A_1}{\rho_2}$ die Hälfte des Kapillardruckes pro Flächeneinheit vor, den wir mit P bezeichnen wollen, also

$$K_1 = \gamma R + \frac{3P}{2} + K_2. \tag{12'}$$

Aus (12') ergibt sich für Eis, wenn wir für K_2 den inneren Druck von Wasser, wie er aus der van der Waal'schen Zustandsgleichung folgt, mit 10700 Atm/cm^2 = 10735310 g/cm^2 einsetzen.

$$K_1 = 1.80.424.10^3 + 3.146900 + 10735 \cdot 31.10^3$$

$$= 33920.10^3 + 10735 \cdot 31.10^3 + 3.146900$$

$$K_1 = 45096.10^3 g/cm^2. \tag{13}$$

Der innere Druck des festen Eises ergibt sich also von derselben Größenordnung wie der innere Druck des flüssigen Wassers. Es ist naturgemäß, daß der innere Druck eines festen Körpers in Zusammenhang stehen muß mit den Elastizitätskonstanten eines festen Körpers. Guldberg hat (Ostwald's Klassiker, Nr. 139) ein empirisches Gesetz über den Zusammenhang der Schmelzwärme R und dem longitudinalen Elastizitätsmodulus E aufgestellt, das für sehr viele Körper tatsächlich mit genügender Genauigkeit gültig ist. Es lautet:

$$R = \frac{E}{\gamma . 40000} \tag{14}$$

Setzen wir (14) in (12') ein, so ergibt sich das aus Theorie und Erfahrung annähernd folgende Gesetz

$$K_1 = \frac{E}{40000} + \frac{3P}{2} + K_2. \tag{15}$$

Daß das von Guldberg ausgesprochene Gesetz sich nicht vollkommen für alle Körper gültig erweist, rührt sicherlich daher, daß in ihm die zweite das elastische Verhalten eines isotropen Körpers charakterisierende Elastizitätskonstante, der Schubmodul, nicht vorkommt. Für die Schmelzwärme wird auch der Schubmodul maßgebend sein.

Über Dielektrizitätskonstanten beim Schmelzpunkt

von

Josef Hattwich.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Juli 1908.)

Im allgemeinen nimmt die Dielektrizitätskonstante (DE.) bei festen Körpern mit wachsender Temperatur zu, bei Flüssigkeiten und Gasen dagegen ab. Weniger untersucht ist der Übergang von dem festen in den flüssigen Zustand. Bei NH_3 SO_2 und $(C_2H_5)_2O$ fand Eversheim[1] eine kontinuierliche Änderung der DE. beim Durchgang durch den Schmelzpunkt. Behn und Kiebitz[2] zeigten hingegen bei Wasser einen bedeutenden Sprung der DE. am Erstarrungspunkt, welchen sie nach der Abegg'schen[3] Anschauung durch Verunreinigungen der verwendeten Substanz zu erklären versuchen. Im folgenden habe ich für fünf Substanzen, die bisher nur zum Teile untersucht wurden, den Temperaturkoeffizienten der DE. und insbesondere die Änderung in der Nähe des Schmelzpunktes hinsichtlich ihrer Kontinuität untersucht.

Die Methode, nach welcher diese Untersuchungen angestellt wurden, ist im wesentlichen die von Drude[4] und

---

[1] Wied. Ann., *13*, 492, 1904.

[2] Boltzmann-Festschrift, p. 610, 1904.

[3] Wied. Ann., *65*, 229, 1898.

[4] Wied. Ann., *61*, 466, 1897. — Zeitschr. für phys. Chemie, *33*, 282, 1897. — Ann. der Physik, IV. Folge, Bd. 8, 336, 1902.

Schmidt[1] modifizierte Lecher'sche[2] mittels elektrischer Wellen, wie sie von Drude insbesondere zur Messung der DE. kleiner Substanzmengen verwendet wurde. Doch habe ich auf Veranlassung des Herrn Prof. Lecher die Versuchsanordnung noch insoweit abgeändert, als die Messungen nicht durch die Verschiebung einer Brücke, sondern durch Änderung der Plattendistanz eines Drude'schen Meßkondensators ausgeführt wurden, welcher nicht wie bei Schmidt in den Sekundärkreis, sondern in den Primärkreis eingeschaltet war.

Der horizontal liegende Primärkreis enthielt die in Petroleum liegende Erregerfunkenstrecke, die von einer kleinen Drude'schen Teslaanordnung gespeist wurde; die zwei daran anschließenden parallelen Horizontaldrähte (Durchmesser 1 *mm*, Entfernung 10 *cm*, Länge 1·7 *m*) endeten in einem Meßkondensator I. Dieser aus Funkenstrecke, Paralleldrähten und Meßkondensator bestehende Primärkreis besaß eine gewisse Eigenschwingung, welche durch Veränderung der Plattendistanz variiert werden konnte. In einem vertikalen Abstand von zirka 20 *cm* über dem Primärkreis war der Sekundärkreis angebracht, gleichfalls aus zwei parallelen Kupferdrähten (Durchmesser 1 *mm*, Entfernung zirka 10 *cm*) bestehend, welche an dem oberhalb der Erregerfunkenstrecke gelegenen Ende miteinander verbunden und geerdet waren. Die beiden anderen Enden waren mit den beiden Belegungen eines kleinen Zylinderkondensators II verbunden, welcher folgendermaßen konstruiert war. Ein zylinderförmig zusammengerolltes Nickelblech (Höhe 7 *cm*, Durchmesser des Zylinders 2 *cm*) bildete die eine, ein in der Zylinderachse befindlicher Nickelstab die zweite Kondensatorbelegung. Beide wurden, an Nickeldrähte angeschmolzen, in das Innere einer eprouvettenförmigen Glasröhre gesenkt, welche oben durch einen Kork verschlossen war. Durch diesen wurden die Nickeldrähte isoliert hindurchgeführt und endeten oben in Ösen, mittels welcher sie an den freien Enden des Sekundärkreises befestigt werden konnten. Auf eine gute Verbindung an dieser Stelle mußte stets sorgfältig

[1] Ann. der Phys., *9*, 919, 1902.

[2] Wied. Ann., *42*, 142, 1891.

geachtet werden. Um die Distanz der beiden Kondensatorbelegungen stets konstant zu erhalten, besaß das Glasgefäß unten eine kleine Vertiefung, in welche der zentrale Nickelstab gesenkt wurde und so festen Halt gewann. Zwischen die Belegungen dieses Kondensators II wurde die zu untersuchende Substanz gebracht und das ganze in ein Bad von Paraffinöl gesenkt, in welchem es bis zirka 190° erwärmt werden konnte. Diese Temperatur reichte für meine Zwecke vollkommen aus, da die untersuchten Substanzen alle ihren Schmelzpunkt unter 190° hatten und es ja hauptsächlich auf ihr Verhalten in der Umgebung des Schmelzpunktes ankam.

Die Messung selbst geschah nun in folgender Weise. Durch geeignete Einstellung des Meßkondensators I wurden Primär- und Sekundärkreis miteinander zur Resonanz gebracht, welche daran erkannt wurde, daß eine über dem nicht geerdeten Ende des Sekundärkreises befindliche Heliumröhre aufleuchtete. Wurde nun der Kondensator II mit einem Dielektrikum beschickt, so trat infolge der geänderten Kapazität des Sekundärkreises eine Störung der Resonanz zwischen den beiden Kreisen ein, welche erst dadurch wieder beseitigt werden konnte, daß man die Plattendistanz des Meßkondensators änderte. Die Größe dieser Änderung gab mir bei vorhergegangener Eichung des ganzen Apparats ein Maß für die DE. derjenigen Substanz ab, welche sich zwischen den Belegungen des Kondensators II befand. Anstatt das Maximum des Aufleuchtens der Röhre zu beobachten, änderte ich die Plattendistanz des Meßkondensators nach beiden Seiten hin soweit, bis die Heliumröhre zu leuchten aufhörte und notierte mir jedesmal das Mittel aus den beiden an der Skala abgelesenen extremen Werten, denn so erhielt ich genauere Resultate als durch Ablesen des ziemlich verschwommenen Maximums. Wurde durch irgend welche Umstände (z. B. dadurch, daß sich in dem Petroleum der Erregerfunkenstrecke kleine Kohlenpartikelchen niederschlugen) die Intensität der Wellen beeinträchtigt, so machte sich dies dadurch bemerkbar, daß eine Verschiebung jener extremen Stellungen der Meßkondensatorplatten, innerhalb welcher ein Aufleuchten der Röhre bemerkt wurde, stattfand, während jedoch der Mittelwert stets derselbe

Schmidt[1] modifizierte Lecher'sche[2] mitte' ...n Substanz Wellen, wie sie von Drude insbesondere zur ... kleiner Substanzmengen verwendet wurde ...en von Drude[1] Veranlassung des Herrn Prof. Lecher d' ... von Benzol und noch insoweit abgeändert, als die Me' ...ng der Eichflüssig- Verschiebung einer Brücke, sond' ... Plattendistanzen des Plattendistanz eines Drude'schen wurden, welcher nicht wie bei ' sondern in den Primärkreis e'

Der horizontal lieg... Petroleum liegende F... kleinen Drude'schen ... daran anschließend ... 1 *mm*, Entfernun... kondensator I. Meßkondens... Eigenschw... distanz ... von zir... angeb... (Du... w... F...

DE.	Plattendistanz
1	2·73 *cm*
2·26	1·74
2·96	1·54
3·56	1·40
5·09	1·12
6·90	0·90

Benzol
5·3% Aceton
94·7 Benzol
10% Aceton
90 Benzol
20% Aceton
80 Benzol
31% Aceton
69 Benzol

Bei den von mir untersuchten Substanzen waren Meßkondensatorplatten von 3 *mm* Dicke und 18 *cm* Durchmesser vollkommen ausreichend. Die Abhängigkeit der Plattendistanz des Meßkondensators I von den Werten der DE. wurde durch eine Kurve dargestellt, welche deutlich zeigt, daß der Zusammenhang kein linearer ist. Die im folgenden angegebenen Werte der DE. wurden aus den an der Skala des Meßkondensators abgelesenen Werten der zugehörigen Plattendistanzen berechnet.

Die hinsichtlich des Temperaturkoeffizienten ihrer DE. zu untersuchenden Substanzen wurden nun in gepulverter Form zwischen die Belegungen des Kondensators II gebracht, und

[1] Zeitschr. für phys. Chemie (1897).

'cher Menge, daß die Substanz nachher in flüssigem zu einer bestimmten Marke reichte, welche sich des oberen Randes der beiden Belegungen ·lichst alle zwischen diesen verlaufenden betreffende Dielektrikum hindurchgehen 'zt, während sich die Substanz in ge- ondensator befand, der Wert der DE. ɹo sich derselbe natürlich als viel zu klein, uß der zwischen den kleinen Teilchen der Sub- ndlichen Luft zuzuschreiben ist. Die eigentlichen ıgen konnten also erst beginnen, nachdem die Substanz ımal geschmolzen war. Die Resultate dieser Messungen sind im folgenden zusammengestellt.

I. Schwefel.

Verwendet wurde reiner, pulverisierter Stangenschwefel oder Schwefelblumen. In beiden Fällen fand ich bei Zimmertemperatur für die DE. den Wert 3·22. Eine merkliche Änderung der DE. innerhalb des Temperaturintervalls von 15 bis 190° C. war nicht zu konstatieren. Die von M. v. Pirani[1] angegebenen Werte der DE. des Schwefels beziehen sich einerseits auf Zimmertemperatur, andrerseits auf eine Temperatur unmittelbar vor dem Siedepunkt. Es erscheint demnach als wahrscheinlich, daß eine Änderung der DE. erst bei höheren als den hier verwendeten Temperaturen stattfindet oder daß sie bei niedrigeren Temperaturen zumindest innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt (über die Genauigkeit der Messungen vergl. weiter unten). Für die übrigen Substanzen sind die gefundenen Werte aus der nachfolgenden Tabelle ersichtlich.

II. Paraffin (Schmelzpunkt 55°).

Das Maximum der DE. wurde demnach im zähflüssigen Zustand beobachtet, übereinstimmend mit den Resultaten, welche M. v. Pirani nach der Nernst'schen Methode gefunden hat.[2]

---

[1] Über Dielektrizitätskonstanten fester Körper. Inaug. Diss. Berlin 1903.

[2] Man vergl. auch die von Arons und Rubens angegebenen Werte (Phys.-chem. Tabellen von Landolt-Börnstein).

Temperatur	Paraffin	Kolophonium	Naphthalin	Phenantren
15°.......	1·97	2·40	2·51	2·79
20	1·99	2·36	2·47	2·80
30	2·03	2·26	2·40	2·82
40	2·02	2·33	2·40	2·84
50	1·97	2·40	2·37	2·85
60	1·97	2·46	2·30	2·89
70	1·96	2·54	2·23	2·96
80	1·96	2·64	2·19	2·96
90	1·95	2·67	2·30	3·00
100	1·93	2·78	2·30	3·13
110	1·91	3·00	2·37	3·22
120	1·90	3·29	2·43	3·21
130	1·90	3·32	2·51	3·18
140	1·90	3·36	2·57	3·16
150	1·90	3·43	2·61	3·10
160	1·89	3·52	2·62	3·07
170	1·89	3·61	2·64	3·03
180	1·88	3·67	2·64	3·00
190	1·88	—	—	2·96

III. Kolophonium (47° biegsam, 80° zähflüssig, 90° flüssig).

Das Verhalten der DE. des Kolophoniums ist ziemlich abweichend von dem bei anderen festen Körpern. Die DE. nimmt zunächst bei wachsender Temperatur bis etwa 30° ab, von hier an aber (auch oberhalb des Schmelzpunktes) rasch zu.

IV. Naphthalin (Schmelzpunkt 80°).

Hier macht sich zunäehst eine Abnahme der DE. mit wachsender Temperatur bemerkbar, welche bis gegen den Schmelzpunkt anhält, worauf mit wachsender Temperatur ein Steigen des Wertes der DE. stattfindet.

V. Phenantren [$C_{14}H_{10}$] (Schmelzpunkt 99°).

Das Maximum der DE. liegt hier, ähnlich wie bei Paraffin, in der Nähe des Schmelzpunktes, jedoch nicht unterhalb desselben wie dort, sondern etwa 10° oberhalb.

In die eingangs erwähnte Regel, daß im allgemeinen bei festen Körpern die DE. mit wachsender Temperatur zunimmt, bei Flüssigkeiten dagegen abnimmt, passen demnach von den hier untersuchten Substanzen nur Paraffin und Phenantren hinein, während das Verhalten der übrigen beträchtlich davon abweicht. Was die Änderung der DE. beim Schmelzpunkt anbelangt, so war dieselbe bei allen Substanzen kontinuierlich.

Über die Genauigkeit der Messungen.

Die Kurve, welche die Beziehung zwischen der DE. und der abgelesenen Plattendistanz veranschaulicht, zeigt deutlich, daß die Genauigkeit der Messungen nicht an allen Punkten dieselbe sein konnte, sondern daß sie am größten war, wenn die DE. der zu untersuchenden Substanz zwischen den Werten 1 und 2·26 gelegen war. In diesem Intervall kam auf eine Änderung (δ) der Plattendistanz um 0·01 *cm* eine Änderung (Δ) der DE. um 0·0127, d. i. 1·3% des Anfangswertes. Im zweiten Intervall entsprach einem $\delta = 0\cdot01$ *cm* ein $\Delta = 0\cdot035$, d. i. 1·5% und im dritten Intervall war für $\delta = 0\cdot01$ *cm* $\Delta = 0\cdot0428$, d. i. 1·4%. Da bei einer vier- bis fünfmaligen Wiederholung der Beobachtung die abgelesenen Werte der Plattendistanz für eine bestimmte Temperatur um weniger als 0·01 *cm* verschieden waren, so können demnach die gefundenen Werte im Durchschnitt als bis auf 1·4% genau angesehen werden.

Hann J., Zur Meteorologie der Adria.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783—818.

Adria, Zur Meteorologie der —.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783—818.

Meteorologie der Adria.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783—818.

Pelagosa, Resultate der meteorologischen Beobachtungen auf der Insel —.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783—818.

Tumlirz O., Ein neuer physikalischer Beweis für die Achsendrehung der Erde.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 819—841.

Erde, Ein neuer physikalischer Beweis für ihre Achsendrehung.
Tumlirz O., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 819—841.

Achsendrehung der Erde, Ein neuer physikalischer Beweis für die —.
Tumlirz O., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 819—841.

Jäger G., Zur Elektronik in Metallen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 843—867.

Elektronik in Metallen.
Jäger G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 843—867.

1

Hann J., Zur Meteorologie der Adria.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783–818.

Adria, Zur Meteorologie der - .
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783—818.

Meteorologie der Adria.
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783—818.

Pelagosa, Resultate der meteorologischen Beobachtungen auf der Insel - .
Hann J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 783—818.

Tumlirz O., Ein neuer physikalischer Beweis für die Achsendrehung der Erde.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 819—841.

Erde, Ein neuer physikalischer Beweis für ihre Achsendrehung.
Tumlirz O., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 819—841.

Achsendrehung der Erde, Ein neuer physikalischer Beweis für die -.
Tumlirz O., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 819—841.

Jäger G., Zur Elektronik in Metallen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 843—867.

Elektronik in Metallen.
Jäger G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 843—867.

Jäger G., Zur Theorie des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 869—878.

Wiedemann-Franz'sches Gesetz.
Jäger G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 869—878.

Elektronentheorie des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes.
Jäger G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa Abt., Bd. 117 (1908), p. 869—878.

Schweidler E., v. und Hess V. F., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. II. Über die Wärmeentwicklung des Radiums.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879 – 888.

Hess V. F. und Schweidler E., v., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. II. Über die Wärmeentwicklung des Radiums.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879—888.

Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mitteilungen der —. II. Über die Wärmeentwicklung des Radiums.
Schweidler E., v. und Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879—888.

Radium, Über die Wärmeentwicklung des —. Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. II.
Schweidler E., v. und Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879—888.

Girtler R., Über die Beziehung der Schmelz- und Sublimationswärme zur Theorie der Kapillarität.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889 – 902.

Schmelzwärme, Über die Beziehung der — und Sublimationswärme zur Theorie der Kapillarität.
Girtler R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889—902.

Jäger G., Zur Theorie des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 869—878.

Wiedemann-Franz'sches Gesetz.
Jäger G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 869—878.

Elektronentheorie des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes.
Jäger G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 869—878.

Schweidler E., v. und Hess V. F., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. II. Über die Wärmeentwicklung des Radiums.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879—888.

Hess V. F. und Schweidler E., v., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. II. Über die Wärmeentwicklung des Radiums.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879—888.

Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mitteilungen der —. II. Über die Wärmeentwicklung des Radiums.
Schweidler E., v. und Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879—888.

Radium, Über die Wärmeentwicklung des —. Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. II.
Schweidler E., v. und Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 879—888.

Girtler R., Über die Beziehung der Schmelz- und Sublimationswärme zur Theorie der Kapillarität.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889—902.

Schmelzwärme, Über die Beziehung der — und Sublimationswärme zur Theorie der Kapillarität.
Girtler R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889—902.

Sublimationswärme, Über die Beziehung der — und Schmelzwärme zur Theorie der Kapillarität.

Girtler R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889—902.

Kapillarität, Über die Beziehung der Schmelz- und Sublimationswärme zur Theorie derselben.

Girtler R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889—902.

Hattwich J., Über Dielektrizitätskonstanten beim Schmelzpunkt.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 903—909.

Dielektrizitätskonstanten beim Schmelzpunkt.

Hattwich J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 903—909.

Sublimationswärme, Über die Beziehung der und Schmelzwärme zur Theorie der Kapillarität.

Girtler R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889–902.

Kapillarität, Über die Beziehung der Schmelz- und Sublimationswärme zur Theorie derselben.

Girtler R., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 889–902.

Hattwich J., Über Dielektrizitätskonstanten beim Schmelzpunkt. Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 903–909.

Dielektrizitätskonstanten beim Schmelzpunkt.

Hattwich J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 903–909.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. VII. HEFT.

ABTEILUNG IIa.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Polarisation des Lichtes bei der inneren Diffusion

(I. Mitteilung)

von

G. Dimmer.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Mai 1908.)

Die Veränderungen, die das Licht beim Hindurchtreten durch eine trübe Schicht hinsichtlich seines Polarisationszustandes erleidet, sind bereits mehrfach Gegenstand theoretischer und experimenteller Untersuchungen gewesen. Diese Untersuchungen lassen sich in zwei Gruppen einteilen, je nachdem, ob die die Trübung, beziehungsweise die Diffusion verursachenden Teilchen als Leiter der Elektrizität oder als Isolatoren angenommen werden. Der ersteren Annahme, die uns übrigens hier nicht weiter beschäftigen soll, bedienten sich vor allen J. J. Thomson,[1] F. Ehrenhaft[2] und in jüngster Zeit G. Mie.[3] Experimentelle Arbeiten haben Ehrenhaft, R. Threlfall[4] und vor kurzem E. Müller[5] geliefert. Die kolloidalen Metallösungen gaben diesem Zweige der Theorie in besonders günstiger Weise die Möglichkeit eines weiteren Ausbaues und einer experimentellen Verifikation.

Die zweite Annahme, daß nämlich die zerstreuenden Teilchen Isolatoren seien, wurde von Lord Rayleigh[6] seinen

[1] J. J. Thomson, Rec. Res. in El. a. Magn. Oxford 1903, § 369 bis 378.

[2] F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys., *11*, 489 (1903); diese Sitzungsberichte, *114* (IIa), 1115 (1905).

[3] G. Mie, Ann. d. Phys., IV, *25*, 377 (1908).

[4] R. Threlfall, Phil. Mag. (5), *38*, 446 (1894).

[5] E. Müller, Ann. d. Phys., IV, *24*, 1 (1907).

[6] Lord Rayleigh, Phil. Mag. (4), *41*, 107, 447 (1871); (5), *12*, 86 (1881); (5), *12*, 95 (1881).

richtunggebenden theoretischen Arbeiten zugrunde gelegt. Aus der Rayleigh'schen Theorie folgt zunächst, daß, wenn natürliches Licht einfällt, das zerstreute Licht für alle zur Einfallsrichtung senkrechten Richtungen total, für andere Richtungen partiell polarisiert ist, und zwar in der Ebene parallel zum einfallenden und gebeugten Strahl. Die experimentellen Untersuchungen, wie sie von Stokes,[1] Tyndall[2] und vor allem von Pernter[3] unternommen wurden, haben die Theorie im allgemeinen bestätigt; messende Versuche jedoch, die sich auf das ganze Zerstreuungsgebiet zwischen 0 und 90° erstreckten, sind meines Wissens bisher noch nicht ausgeführt worden.

Im folgenden soll nun zunächst über einige orientierende Grundversuche berichtet werden, bei denen die teilweise Polarisation, die senkrecht einfallendes, natürliches, weißes Licht durch die Zerstreuung im trüben Medium erleidet, für die verschiedenen Zerstreuungswinkel zwischen 0 und 90° gemessen wurde.

Da einerseits die Methode, die ich anzuwenden beabsichtigte, für trübe Lösungen, die in Trögen mit glatten Wänden aufgestellt werden müssen, nicht anwendbar ist und andrerseits die Polarisation bei der Zerstreuung durch feste trübe Medien meines Wissens überhaupt noch nicht untersucht worden ist, entschloß ich mich, die Untersuchungen an derartigen festen Medien, insbesondere matten Gläsern, durchzuführen.

Das zu untersuchende Glas wurde auf das Präparatentischchen eines Goniometers gestellt und durch den Kollimator paralleles weißes Licht einer Bogenlampe darauf gerichtet, und zwar senkrecht zur Ebene des Glases. Der verschwenkbare Arm des Goniometers trug ein Savart'sches Polariskop und außerdem zwischen dem Polariskop und dem Objekt einen für diese Messungen um eine vertikale Achse drehbaren Plattenstapel, dessen Winkelstellung an einem Teilkreis, der ebenfalls vom verschwenkbaren Arm des Goniometers getragen wurde,

---

[1] G. Stokes, Phil. Trans. 1852, § 183.
[2] J. Tyndall, Proc. Roy. Soc., *17*, 62 (1868).
[3] J. M. Pernter, Denkschr. der Wiener Akad. der Wiss., *73*, 301 (1901).

abgelesen werden konnte. Auf diese Weise konnte jeder beliebige seitliche Zerstreuungswinkel am Goniometer eingestellt werden, worauf dann der Plattenstapel so lange gedreht wurde, bis die im Savart'schen Polariskop sichtbaren Interferenzstreifen verschwanden. Der Plattenstapel war vorher nach einer von Desains[1] angegebenen Methode geeicht worden, so daß jedem Winkel φ am Teilkreis des Plattenstapels ein Winkel α sich zuordnen ließ, derart, daß $\cos 2\alpha$ direkt den Anteil des polarisierten Lichtes am Gesamtlicht in Prozenten angibt.

Es gelangten zunächst fünf Glasplatten zur Untersuchung, von denen die erste (1) mit sogenannter Mattfarbe[2] mattiert war, während die vier anderen (2, 3, 4 und 5) dadurch erhalten wurden, daß das mit Mattfarbe mattierte Glas 5 Minuten, beziehungsweise 10, 20 und 40 Minuten abgeätzt wurde. Die Ergebnisse der Messungen sind in den nachstehenden fünf Tabellen I bis V angegeben; die erste Kolumne enthält die Zerstreuungswinkel β, die zweite Kolumne die prozentuellen Anteile P des polarisierten Lichtes am Gesamtlichte.

Tabelle I.

Mit Mattfarbe mattiertes Glas (1).

β	P
45	0·006981
50	0·04536
60	0·1184
70	0·1392
80	0·1323

Tabelle II.

5 Minuten abgeätztes Glas (2).

β	P
45	0·06627
50	0·1685
60	0·3584
70	0·4226
80	0·4321

[1] Desains, Pogg. Annalen, *82*, 152 (1851).

[2] Eine mattätzende Mischung von Flußsäure und Schwefelsäure.

Tabelle III.

10 Minuten abgeätztes Glas (3).

β	P
40	0·04188
50	0·1633
60	0·3123
70	0·3939
80	0·4131

Tabelle IV.

20 Minuten abgeätztes Glas (4).

β	P
30	0·01396
40	0·1184
50	0·2890
60	0·4415
70	0·4879
80	0·4787

Tabelle V.

40 Minuten abgeätztes Glas (5).

β	P
30	0·06976
40	0·1599
50	0·3090
60	0·4384
70	0·4818
80	0·4478

Ferner wurde versucht, die Grenzen, die hinsichtlich des Trübungsgrades durch die Reihe der eben besprochenen fünf Platten gegeben waren, beiderseits zu überschreiten. Um einerseits zu noch stärkeren Trübungen als der des Plättchens I zu gelangen, wurde dünnes Papier, Beinglas und ein sehr feines Gewebe untersucht. Beim Papier war die Polarisation so gering, daß sie selbst bei den größten seitlichen Zerstreuungswinkeln nicht gemessen werden konnte, beim Gewebe war überhaupt bei keinem Zerstreuungswinkel eine Polarisation zu konstatieren. Beim Beinglas war wohl bei den größeren Zerstreuungswinkeln Polarisation zu beobachten, es konnte jedoch keine Stellung des Plattenstapels gefunden werden, bei

der die Interferenzstreifen im Polariskop ausgelöscht worden wären. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein, daß die beobachtete Polarisation eben nicht durch die Zerstreuung bewirkt wird, sondern durch Brechung an der blanken Vorderfläche der Beinglasplatte. Auf solche Fälle ist eben, wie schon eingangs erwähnt, die benützte Methode zur Messung der Polarisation nicht anwendbar. Da das Beinglas eine sehr starke Trübung aufweist, die selbst die des Gewebes oder Papiers weit übertrifft, so ist von vornherein anzunehmen, daß das zerstreute Licht einer derartigen Platte keine Polarisation zeigt. Um andrerseits zu noch geringeren Trübungen zu gelangen als der des Plättchens 5, wurde ein völlig blankes Glas *(a)* untersucht. Ein solches zeigt, wenn es auch noch so blank geputzt ist, doch stets seitliches Streulicht, das allerdings, namentlich bei den größeren Zerstreuungswinkeln, sehr schwach ist, so daß die Messungen an diesem Plättchen sich sehr schwierig gestalteten. Das Ergebnis zeigt die Tabelle VI.

Tabelle VI.

Blankes Glas *(a)*.

β	*P*
20	0·03490
30	0·08020
40	0·1633
50	0·2924
60	0·4289
70	0·5417
80	0·5821

Es gelangten außerdem noch ein mittels Sandstrahlgebläses mattiertes Glas *(b)* und ein Glas *(c)* zur Untersuchung, das sich durch eine besonders zarte und gleichmäßige Ätzung auszeichnete, sowie augenscheinlich aus einer besonderen, einen gelblichen Stich in der Farbe aufweisenden Glassorte bestand. Die Ergebnisse zeigen die Tabellen VII und VIII.

Tabelle VII.

Mit Sandstrahl mattiertes Glas (*b*).

β	*P*
40	0·01396
45	0·04188
50	0·08366
60	0·1288
70	0·1357
80	0·1392

Tabelle VIII.

Geätztes Glas (*c*).

β	*P*
10	0·01396
20	0·02094
30	0·04885
40	0·1080
50	0·2045
60	0·3190
70	0·3681
80	0·3746

In der nebenstehenden Fig. 1 sind die in den vorstehenden Tabellen enthaltenen Meßresultate zusammenfassend in Kurvenform dargestellt. Die Zerstreuungswinkel β sind als Abszissen, die Anteile *P* als Ordinaten aufgetragen. Die mit 1 bis 5 bezeichneten, voll ausgezogenen Kurven beziehen sich auf die fünf in der Trübung angebbar abgestuften Glasplatten 1 bis 5, die punktierten Kurven *a*, *b*, *c* auf die entsprechenden Plättchen. Die strichlierte Kurve ist die von Rayleigh theoretisch abgeleitete, entsprechend der Beziehung $P = \frac{(1-\cos^2\beta)}{(1+\cos^2\beta)}$.

Die Schlüsse, die sich aus den Meßergebnissen ziehen lassen, sind im folgenden zusammengestellt:

1. Die obere Grenze der Messungen lag bei 80°. Darüber hinaus waren wegen der zu geringen Intensität des seitlichen Streulichtes keine weiteren Messungen möglich. Die untere Grenze, unterhalb deren wegen der zu geringen Intensität der Interferenzstreifen im Polariskop keine weiteren Messungen möglich waren, war für die verschiedenen Plättchen verschieden. Je geringer die Trübung war, desto weiter hinab konnte im allgemeinen die Messung ausgedehnt werden.

2. Sämtliche durch Messung gewonnenen Kurven liegen unter der theoretisch abgeleiteten, was zu erwarten war, da Rayleigh in seiner Theorie gewissermaßen eine unendlich

geringe Trübung voraussetzt. Je geringer bei einem der untersuchten Objekte die Trübung ist, desto mehr nähert sich die zugehörige Kurve der theoretischen und desto mehr gleicht sie ihr an Gestalt.

3. Der Anteil des polarisierten Lichtes am Gesamtlicht wächst im allgemeinen mit zunehmendem Zerstreuungswinkel.

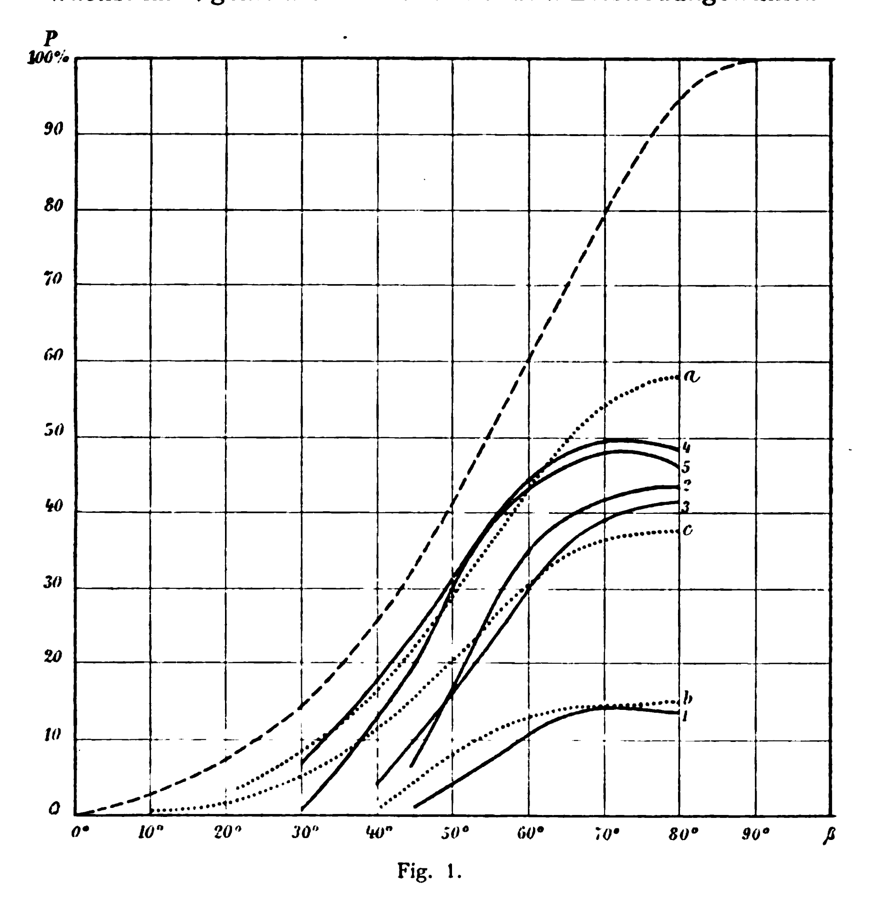


Fig. 1.

Zuerst ist die Zunahme eine sehr langsame, dann eine sehr rasche, schließlich wieder eine langsame. Je stärker die Trübung ist, desto langsamer ist im Anfang der Zuwachs, desto weiter reicht diese langsame Zunahme im Anfang und desto kürzer und weniger steil ist der das rasche Wachstum wiedergebende Ast der Kurve.

4. Um den Einfluß des Grades der Trübung auf die Polarisation deutlicher zu zeigen, wurde versucht, Kurven zu gewinnen (Fig. 2), für die als Abszissen gewissermaßen die Trübungen, nämlich als ihr allerdings sehr ungenaues Maß die Anzahl der Minuten aufgetragen wurden, die das Abätzen andauerte. Als Ordinaten wurden wieder die Beträge P auf-

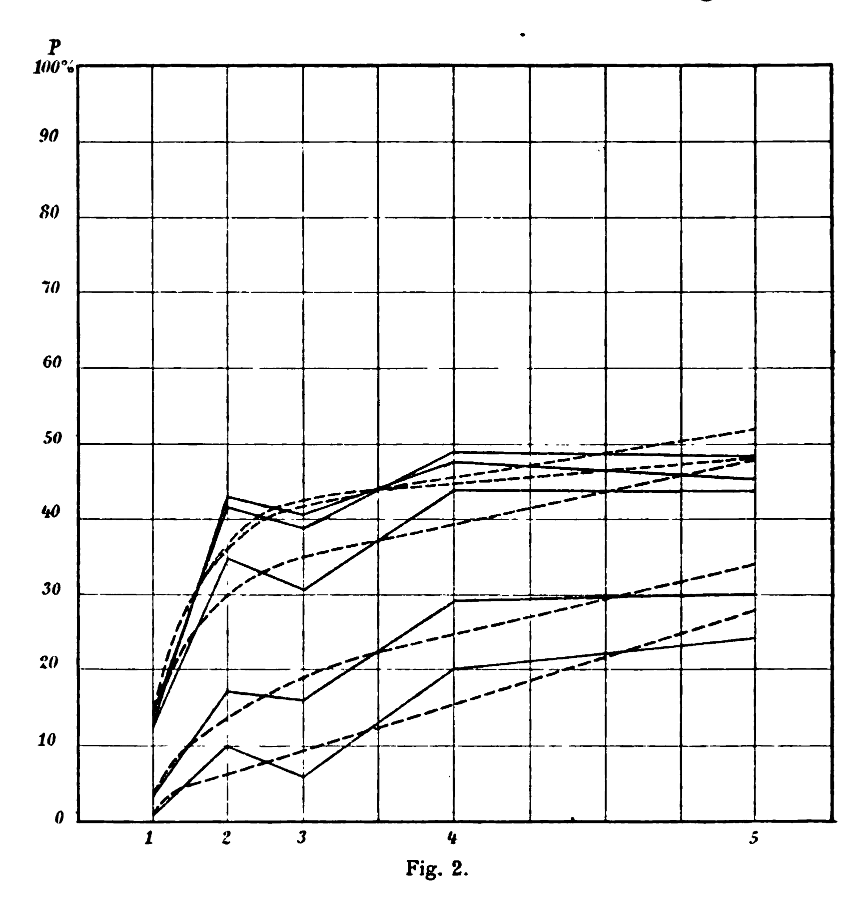


Fig. 2.

getragen. Hier erwies sich jedoch ein Umstand als sehr störend, für den eine ausreichende Erklärung nicht gegeben werden kann. Aus der Fig. 1 ist ersichtlich, daß die Kurven 2 und 3 einerseits und die Kurven 4 und 5 andrerseits sich schneiden und daß in beiden Fällen die dem länger abgeätzten, also weniger trüben Plättchen zugehörige Kurve teilweise unter der

dem kürzer abgeätzten, also stärker trüben Plättchen zugehörigen, namentlich im Anfang unverhältnismäßig steilen Kurve verläuft, so z. B. die Kurve 3 auf der ganzen Strecke von zirka 48 bis 80° unter der Kurve 2. Die Ursache dieser Erscheinung mag in unkontrollierbaren Unregelmäßigkeiten der Ätzwirkung gelegen sein, die sich namentlich in größerer Nähe des Anfangszustandes, bei Plättchen 2, geltend machen. Unter Verwendung der Werte aus sämtlichen Kurven der fünf Plättchen ist es also, wie Fig. 2 zeigt, nicht möglich, eindeutige Kurven der gesuchten Art zu erhalten, da die einzelnen Werte sich nicht vollständig in eine Kurve mit regelmäßigem Verlauf einfügen lassen. Die strichlierten Kurven der Fig. 2 dürften dem wahren Verlauf der Erscheinungen näher kommen. Sie wurden erhalten mit Hilfe der aus den Kurven 1, 2, 3, 4 und 5 sich ergebenden Mittelwerte der Minutenzahlen und Polarisationsbeträge als Abszissen, beziehungsweise Ordinaten. Die Form der Kurven in Fig. 2 zeigt, daß die Polarisation mit abnehmender Trübung zuerst rascher, dann langsamer zunimmt, und zwar wird mit zunehmendem Zerstreuungswinkel die Anfangszunahme immer rascher und die Endzunahme immer langsamer. Die Kurven werden sämtlich im weiteren Verlaufe, also mit abnehmender Trübung, linear.

5. Daß auch ein Einfluß des Materials des Objektes und der Art seiner Bearbeitung auf den Gang der Erscheinungen vorhanden ist, zeigen die Kurven *b* und *c*, die dem Sandstrahlglas und dem feinmattierten Glase zugehören. Obwohl hier nur ein Unterschied in der Glassorte und in der Art der Mattierung besteht, zeigen diese Kurven doch eine besondere Lage und vor allem, augenscheinlich als eine Folge der gleichmäßigen Bearbeitung der Oberfläche, eine besonders regelmäßige Gestalt. Die Kurve *c* ist auch die einzige, die bis zu einem Zerstreuungswinkel von 10° hinabreicht. Leider war es bisher nicht möglich, den Einfluß weitergehender Änderungen am Versuchsmaterial zu untersuchen.

6. Die Messungen am blanken Glase brachten gewissermaßen eine Enttäuschung. Obwohl hier die Trübung eine bei weitem geringere ist als selbst beim Plättchen 5, liegt die zugehörige Kurve *a* doch zum größten Teile in nächster Nähe

der Kurven 4 und 5, zum Teil sogar unter diesen. Erst in ihrem letzten Teile geht sie weit über die beiden anderen Kurven hinaus und erreicht die höchsten überhaupt gemessenen Werte. Andrerseits zeigt sie einen sehr regelmäßigen Verlauf und eine ganz besonders gute Anpassung an die theoretische Kurve, augenscheinlich der Einfluß der außerordentlichen Zartheit und Gleichmäßigkeit der zerstreuenden Schichte, analog dem Plättchen *c*, dessen Kurve auch den regelmäßigen Verlauf und die der theoretischen Kurve ähnliche Gestalt zeigt.

7. Von besonderer Wichtigkeit wäre bei den gemessenen Kurven die Frage des Maximums der Polarisation. Nach der Theorie ist die Polarisation im Maximum eine totale und dieses liegt bei einem Zerstreuungswinkel von 90°. Experimentell hat schon Tyndall[1] nachgewiesen, daß bei stärkerer Trübung, wenn also die zerstreuende Schicht bereits weißlich ist, das Maximum der dann nur partiellen Polarisation nicht bei 90°, sondern bei einem kleineren Zerstreuungswinkel liegt, so daß also der einfallende und der maximal polarisierte gebeugte Strahl einen stumpfen Winkel einschließen. Die Kurve I zeigt deutlich, daß für Trübungen von der beim Plättchen 1 vorhandenen Stärke das Maximum nicht bei 90° liegt, sondern etwa bei 70°, so daß also hier der einfallende und der maximal polarisierte gebeugte Strahl einen Winkel von 110° einschließen. Das Vorhandensein einer Abweichung des Maximums von der theoretischen Lage bei größeren Trübungen ist durch diese Kurve auch für die untersuchten Medien nachgewiesen (Tyndall[2] untersuchte Gase). Da bei dem Plättchen 1 auch unter einem Zerstreuungswinkel von 80° die Lichtintensität noch ausreicht, um sichere Messungen zu ermöglichen, kann dieses Ergebnis als sichergestellt betrachtet werden. Leider verhält es sich bei den übrigen Kurven wesentlich anders. Während die Kurven 2, 3, *c* und *a* eine Zunahme der Werte bis zur oberen Grenze der Messungen zeigen, nehmen bei den Kurven 4 und 5 die Werte am Schlusse wieder ab; es zeigt sich also das Verhalten wie bei der Kurve 1. Dabei liegen aber

---

[1] Siehe Fußnote 2 auf p. 914.

[2] J. Tyndall, Phil. Mag. (4), 37, 385 (1869); Phil. Trans., 1870.

die Kurven 4 und 5 über den Kurven 2 und 3 sowie über der Kurve *c*, wenn auch unter der Kurve *a*. Demgegenüber ist es nicht möglich, aus den bisher vorhandenen Messungen Schlüsse auf die genaue Lage des Maximums, beziehungsweise auf irgendwelche Gesetzmäßigkeiten in der Lage des Maximums in Abhängigkeit vom Grade der Trübung zu ziehen, etwa den Schluß, daß das Maximum mit abnehmender Trübung immer weniger von der theoretisch ermittelten Lage bei 90° abweiche und umgekehrt. Dieser Schluß läge theoretisch nahe und würde durch den Verlauf der Kurven 1, *c* und *a* wahrscheinlich gemacht, die sämtlich Plättchen mit sehr gleichmäßiger trüber Schicht zugehören, also einen regelmäßigen Verlauf zeigen. Die Ursache, weshalb aus den vorhandenen Messungen keine besseren Ergebnisse hinsichtlich des Maximums der Polarisation abgeleitet werden können, ist augenscheinlich vor allem darin gelegen, daß bei den größeren Zerstreuungswinkeln von zirka 80° die Intensität des seitlichen Streulichtes für alle Plättchen außer den am stärksten mattierten bereits so gering ist, daß keine sicheren Messungen mehr möglich sind. Darauf deutet auch die oberste Kurve in Fig. 2 hin. Läge diese Kurve mit stets steigenden Werten anfangs unter, später über der zweitobersten Kurve, so wäre dies allerdings ein Beweis für die Richtigkeit des oben als wahrscheinlich hingestellten Schlusses. Die Kurve für den Zerstreuungswinkel von 80° schneidet aber die Kurve für den Winkel von 70° zweimal und weist selbst ein Maximum auf. Dies ist aber eine Unmöglichkeit, da es ganz widersinnig erscheint, daß für irgendeinen Trübungsgrad unter irgendeinem Zerstreuungswinkel ein Maximum der Polarisation aufträte, während für geringere Trübungen beim selben Zerstreuungswinkel die Polarisation wieder kleiner wäre. Der Verlauf der obersten Kurve in Fig. 2 ist also vielmehr ein Beweis dafür, daß die Messungen für geringere Trübungen und größere Zerstreuungswinkel unsicher werden. Die gleiche Ursache liegt auch dem Umstand zugrunde, daß die Kurve *b*, die dem sehr gleichmäßig mattierten Sandstrahlglas zugehört, kein Maximum aufweist, trotzdem dieses Glas einen ziemlich starken Trübungsgrad besitzt. Diese Kurve wurde nämlich mit einem anderen, zwar völlig gleich konstruierten, aber wesentlich lichtschwä-

cheren Polariskop ermittelt als die anderen Kurven, so daß in diesem Falle auch bei der stärkeren Trübung die Werte für den größten Zerstreuungswinkel schon unsicher sind.

Die Untersuchungen werden fortgesetzt, und zwar in nachfolgenden Richtungen: Es soll

1. die genauere Lage des Maximums der Polarisation in Abhängigkeit vom Trübungsgrad ermittelt,
2. die Depolarisation eben polarisierten Lichtes in gleicher Weise wie die Polarisation natürlichen Lichtes untersucht,
3. der Einfluß der Farbe des einfallenden Lichtes,
4. der Einfluß des Materials, beziehungsweise seiner Bearbeitung und
5. der Einfluß der Absorptionsverhältnisse am Objekt auf den Gang der Erscheinungen festgestellt werden.

Die Versuche wurden mit Benützung von Apparaten aus der Sammlung des physikalischen Institutes der k. k. Technischen Hochschule in Wien im elektrotechnischen Institut dieser Hochschule, wo mir ein Versuchsraum und die Lichtquelle zur Verfügung gestellt wurden, ausgeführt. Ich ergreife die Gelegenheit, den Vorständen dieser beiden Institute, Herrn Prof. Dr. Gustav Jäger, beziehungsweise Herrn Oberbaurat Karl Hochenegg meinen herzlichsten Dank zu sagen.

Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

III.

Untersuchungen über die Radiumemanation. I. Volumen der Emanation

von

E. Rutherford.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1908.)

Die Menge Radiumemanation, die in einem Gramm Radium im Gleichgewicht enthalten ist, ist eine festbestimmte Größe. Sie ist gegeben durch $\frac{q}{\lambda}$, wenn q die pro Sekunde erzeugte Emanationsmenge und λ die radioaktive Konstante der Emanation bedeutet. Nimmt man die Halbwertsperiode der Emanation zu 3·75 Tagen, so ist $\lambda = 2 \cdot 14 \times 10^{-6}\,sec^{-1}$.

Ich habe bereits mehrmals das Volumen der Emanation pro Gramm Radium (bezogen auf 760 *mm* und 0°) auf Grund der vorhandenen experimentellen Daten berechnet. Wohl die einfachste und nächstliegende Annahme zur Berechnung ist die, daß ein Radiumatom beim Zerfall ein α-Teilchen aussendet und damit zu einem Atom der Radiumemanation wird. Nimmt man ferner an, daß jedes α-Teilchen die Ionenladung $e = 3 \cdot 4 \times 10^{-10}$ E. S. E. mit sich führt, so berechnet sich, wie ich zeigte, das Volumen der Emanation zu $0 \cdot 8\,mm^3$.[1] Neuere Arbeiten machten es jedoch wahrscheinlich, daß das α-Teilchen die doppelte Ionenladung, nämlich $2e$, trägt. Unter dieser Voraussetzung wird das Volumen nur halb so groß, als oben angegeben.[2]

---

[1] Rutherford, p. 288, second edition.

[2] Rutherford, Phil. Mag., p. 367, Oct. 1906.

Neuerdings habe ich in Gemeinschaft mit H. Geiger eine genaue Bestimmung der Zahl der α-Teilchen, die von einem Gramm Radium pro Sekunde ausgesandt werden, durchgeführt.[1] Anschließend wurde auch die Ladung eines α-Teilchens gemessen. Unter Benützung der erhaltenen Zahlen ergab sich nach unserer Berechnung das Volumen der Emanation zu $0 \cdot 57\ mm^3$. Diese Zahl liegt ungefähr in der Mitte zwischen den beiden zuerst mitgeteilten Werten.

Ramsay und Soddy[2] haben als erste eine direkte experimentelle Bestimmung des Volumens der Emanation in folgender Weise durchgeführt. Die Emanation wurde, nachdem sie zuerst soweit als möglich von den beigemischten Gasen befreit war, in einem Glasrohr vermittels flüssiger Luft kondensiert. Nach Entfernung der nicht kondensierten Gase mittels der Pumpe wurde die wieder gasförmige Emanation durch Quecksilber in ein Kapillarrohr zum Zwecke der Volumenbestimmung gedrängt. Aus der Größe des Gasvolumens nach zwei Tagen wurde das Volumen der Emanation pro Gramm Radium zu ungefähr $1\ mm^3$ berechnet.

Unter Benützung einer ähnlichen Methode wurde später eine Reihe von systematischen Volumenbestimmungen der Emanation von Ramsay und Cameron[3] durchgeführt. Als Resultat ergab sich, daß zirka $7 \cdot 07\ mm^3$ Emanation pro Gramm Radium vorhanden sind.

Die Verfasser bemerkten dazu, daß der von Ramsay und Soddy zuerst erhaltene Wert wohl aus dem Grunde zu klein war, daß nahezu die Hälfte der Emanation während der Ausführung der Versuche mit dem nicht kondensierten Gase weggepumpt worden war. Die experimentelle Volumenbestimmung der Emanation ($7 \cdot 07\ mm^3$) hat somit einen Wert ergeben, der von wesentlich anderer Größenordnung ist als der Wert, der sich durch die Berechnung ergibt ($0 \cdot 57\ mm^3$). Es ist von Wichtigkeit, den Grund für diese beträchtliche Abweichung des experimentellen Wertes vom theoretischen zu finden.

---

[1] Über diese Versuche ist bereits (18. Juni 1908) vor der Royal Society London berichtet worden.

[2] Ramsay und Soddy, Proc. Roy. Soc., 73, 346 (1904).

[3] Ramsay und Cameron, Journ. Chem. Soc., 1907.

Wenn sich der experimentelle Wert als richtig erweist, so wäre damit eine Reihe der radioaktiven Daten wie auch die Theorie, auf der die Berechnung beruht, zum mindesten in Frage gestellt.

Abgesehen von der Wichtigkeit, die dem erwähnten Punkte zukommt, ist die Abtrennung der Radiumemanation in reinem Zustand auch eine Sache von hoher praktischer Bedeutung. Reine Emanation ist nötig zu einem erfolgreichen Studium der physikalischen und chemischen Eigenschaften dieses so bemerkenswerten Gases.

Reine Emanation ist aber auch nötig für Versuche, wie sie von Cameron und Ramsay[1] angeregt und begonnen wurden. Die Radiumemanation wurde in diesen Versuchen mit Lösungen verschiedener Art in Berührung gebracht und das resultierende Produkt bestimmt.

Durch die außerordentliche Liebenswürdigkeit der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien wurde mir kürzlich ein Radiumpräparat zur Verfügung gestellt, das ungefähr 250 *mg* reines Radium enthielt. Versuche wurden sofort begonnen in der Absicht, die Emanation in reinem Zustande zu erhalten und ihr Volumen zu bestimmen. Im folgenden sollen der Kürze halber nur die Hauptresultate und einige Beispiele aus der großen Zahl der Messungsreihen mitgeteilt werden.

Behandlung und Reinigung der Emanation.

Zwei wesentlich verschiedene Methoden können zur Anwendung gelangen, um die Emanation von dem Radiumpräparat zu trennen. Die eine Methode besteht in Erhitzung des Präparats, die andere darin, daß man das Präparat in Lösung bringt. Beide Methoden kamen in Verwendung. Anfänglich befand sich das Präparat in einem Quarzkolben, der selbst von einem weiteren Quarzkolben umgeben war. Dieser wurde im elektrischen Ofen bis zu einer entsprechenden Temperatur erhitzt. Nahezu alle Emanation wird bei der Schmelztemperatur des Bariumradiumchlorids (zirka 830°) abgegeben.[2]

---

[1] Cameron und Ramsay, Journ. Chem. Soc., 1593 (1907).

[2] L. Kolowrat, Le Radium, No. 9, 317 (1907).

Man erhielt so während der Erhitzung eine äußerst geringe Menge des in hohem Grade radioaktiven Gases.

Das Volumen war so klein, daß es sich als nötig erwies, eine kleine Menge von Wasserstoff oder Sauerstoff in die Pumpe einzuführen, um dadurch das Gas völlig aus der Pumpe erhalten zu können.

Bei den weiteren Versuchen befand sich das Radium in Lösung in einem Quarzkolben. Die Emanation wurde zusammen mit der beträchtlichen Menge von Wasserstoff und Sauerstoff, der sich in der Lösung bildete, aus der Pumpe gepumpt. Wie in den Experimenten von Ramsay und Cameron wurde das Volumen vermindert, indem man den elektrischen Funken auf das Gas einwirken ließ. Der im Überschuß zurückbleibende Wasserstoff konnte durch Einführung der entsprechenden Menge Sauerstoff in derselben Weise reduziert werden. Die Emanation, vermischt mit etwa 1 cm^3 Wasserstoff, wurde dann unter Quecksilber in einem Glasrohr aufgefangen. Dieses Glasrohr enthielt reines Ätzkali, um etwa vorhandene Kohlensäure zu absorbieren.

Die Versuchsanordnung, welche zur Reinigung und Volumenbestimmung der Emanation diente, ist in Tafel I wiedergegeben. Die Anordnung besteht im wesentlichen aus einer Vorrichtung ähnlich dem Mac Leod'schen Manometer. An ein Kapillarrohr von 15 *cm* Länge und einem Durchmesser von 0·58 *mm* war ein langes Glasrohr von 30 *cm* Länge und einem Durchmesser von 1·2 *cm* angeschmolzen. Wenn das Reservoir *Z* bei geschlossenem Hahn *A* gehoben wurde, so wurde das Gas in dem Rohr *E* in das Kapillarrohr *F* gepreßt und sein Volumen konnte gemessen werden. Eine Luftfalle *R* verhinderte, daß Gase zwischen Quecksilber und Glasrohr in die Höhe steigen konnten.

Die Methode, die zur Reinigung der Emanation verwendet wurde, war die folgende: Das ganze System wurde zunächst soweit als möglich mittels einer Quecksilberpumpe leer gepumpt. Dann wurde die Emanation, vermischt mit etwa 1 cm^3 Gas, in das Rohr *C* unter Quecksilberverschluß eingebracht. Die nach außen durch Quecksilber gedichteten Hähne *A* und *B* waren geschlossen, während die Emanation durch Heben des

Quecksilbers durch den Hahn *H* und durch das Rohr *D*, dessen Wände mit einer Schicht Ätzkali bedeckt waren, in das Glasrohr *T* gepreßt wurde. Dieses U-förmige Rohr, dessen Volumen ungefähr $1 \cdot 5\, cm^3$ betrug, tauchte in flüssige Luft, so daß sich die Emanation darin kondensierte. Alle Emanation konnte leicht kondensiert werden durch wiederholtes Heben und Senken des Quecksilberspiegels in *D*. Darnach wurde der Hahn *B* geöffnet und alle nicht kondensierten Gase durch die Pumpe entfernt.

Weiter wurde der Quecksilberspiegel in *D* eingestellt, wie durch die punktierte Linie angegeben, und die Emanation nach Entfernung der flüssigen Luft für längere Zeit in Berührung mit dem Ätzkali gelassen. Dies bezweckte die Absorption der letzten Spuren etwa vorhandener Kohlensäure.

Zur weiteren Reinigung der Emanation wurde das U-Rohr *T* in ein Bad von Penthan gebracht, das vermittels flüssiger Luft auf eine Temperatur abgekühlt war, die zwischen dem Gefrierpunkt des flüssigen Penthans (—150° C.) und der Temperatur der flüssigen Luft (—186° C.) lag. Das ganze Röhrensystem wurde dann wieder völlig mittels der Quecksilberpumpe leer gepumpt, wobei allerdings ein Teil der Emanation flüchtig wurde und durch die Pumpe entfernt wurde. Wenn schließlich das Vakuum so tief als erreichbar war, wurde das Bad entfernt und der Hahn *B* geschlossen. Nach Öffnen des Hahnes *A* trat der größte Teil der Emanation in den Raum *E* ein. Das Volumen des U-Rohres *T* war nur gering, verglichen mit dem Volumen des Raumes *E*. Diese Versuche wurden im verdunkelten Zimmer ausgeführt. Damit war es möglich, den Zeitpunkt, wenn eine fast völlige Verdampfung der Emanation eingetreten, an dem plötzlichen Aufleuchten des Rohres *E* beim Eintritte der Emanation zu erkennen. Sobald dies beobachtet wurde, wurde der Hahn *A* geschlossen und die Emanation in die Kapillare gepreßt, wo ihr Volumen in regelmäßigen Zwischenräumen gemessen wurde.[1]

---

[1] Bei Durchführung der vorstehenden Versuche habe ich vielfach von den Methoden Gebrauch gemacht, wie sie von Sir W. Ramsay und anderen zur Handhabung kleiner Gasmengen in so vortrefflicher Weise entwickelt worden sind. Siehe auch Travers, Study of Gases.

Messungen der Radioaktivität.

Es ist für die Berechnungen von Wichtigkeit, die Menge Radiumemanation, die sich bei den einzelnen Versuchen im Kapillarrohr befand, genau zu kennen. Zu diesem Zwecke wurden vergleichende Messungen der γ-Aktivität der Emanation und des $RaBr_2$-Normalpräparats, das einen Wärmeeffekt von 110 *g*/cal. pro Gramm und Stunde gab, durchgeführt. Sobald die Emanation sich in dem Kapillarrohr befand, wurde die in dem U-Rohr und den Verbindungsröhren zurückgelassene Emanation völlig entfernt.

Mittels eines kleinen geschlossenen γ-Strahlen-Elektroskops, dessen Wände aus Blei bestanden, wurde dann die Aktivität der Emanation im Kapillarrohr ungefähr drei Stunden nach Einführung der Emanation gemessen. Das Elektroskop war 76 *cm* vom Kapillarrohr entfernt. Die so bestimmte γ-Aktivität gibt, verglichen mit der Aktivität des Normalpräparats, ein Maß für die vorhandene Emanationsmenge, und zwar bezogen auf die Emanationsmenge, die in 1 *mg* reinen Radiums im Gleichgewicht vorhanden ist. Bestimmungen der γ-Aktivität wurden täglich ausgeführt und diese Messungen zeigten, daß die Aktivität der hoch konzentrierten und auf ein kleines Volumen zusammengepreßten Emanation in der normalen Weise, nämlich innerhalb 3·75 Tagen, auf den halben Wert fiel. Die vorstehend beschriebenen Aktivitätsmessungen sind von grundlegender Bedeutung, wenn die Resultate auf irgendeinen Grad von Genauigkeit Anspruch erheben sollen. Die Annahme allein, daß alle Emanation, die sich innerhalb einer gewissen Zeit gebildet hat, aus der Radiumlösung entfernt wurde und sich im Kapillarrohr befindet, wäre nicht hinreichend gewesen. So blieb jedesmal ein kleiner Teil der Emanation zurück, wenn das Gas von einem Gefäß in ein anderes übergeführt werden mußte. Anfügen möchte ich noch, daß in fast allen Experimenten die Menge Emanation, deren Volumen und Aktivität gemessen wurde, der Menge entsprach, die in 60 bis 140 *mg* Radium im Gleichgewicht enthalten ist.

Die Menge, die während der Reinigung durch die Pumpe entfernt wurde, entsprach 20 bis 30 *mg* Radium.

Diskussion der Versuche.

Vorbereitende Versuche zeigten, daß das Volumen der Emanation sicherlich viel kleiner war, als die Experimente von Ramsay und Cameron ergeben haben. Die Reinheit der Emanation wurde in dem Kapillarrohr selbst spektroskopisch geprüft. Verwendet wurden äußere Elektroden, nämlich Zinnfolie, die um den oberen und unteren Teil des Kapillarrohres gewickelt war. Durch ein kleines Induktorium konnte das Gas im Rohr zum Leuchten erregt werden. Ein Hilger'sches Spektroskop für direkte Ablesung der Wellenlängen gestattete eine genaue Prüfung des Spektrums. In allen Vorversuchen zeigte das Spektrum den Charakter eines Bandenspektrums, das der Anwesenheit von Kohlensäure zugeschrieben werden mußte. Außerdem zeigten sich die Quecksilberlinien sowie gelegentlich auch andere äußerst schwache Linien. Besondere Vorsichtsmaßregeln wurden getroffen, um Kohlensäure fernzuhalten. Phosphorsäure wurde zum Dichten der Hähne an Stelle von Fett verwendet. Außerdem war, wie erwähnt, die Emanation vor Einbringung in das Kapillarrohr für längere Zeit in Berührung mit dem Ätzkali belassen.

Trotz aller dieser Maßregeln konnte die Emanation nicht von den letzten Spuren von Kohlensäure befreit werden. Es wurde auch versucht, die noch vorhandene Kohlensäure durch fraktionierte Destillation zu entfernen. Aber auch dieses Verfahren war nur teilweise erfolgreich. Es gewinnt den Anschein, als ob die Emanation gleichzeitig mit einem anderen Gas, das gegenwärtig ist, sich verdichtet und auch gleichzeitig mit diesem wieder verdampft, wenn die Temperatur steigt.

Nach einer großen Zahl von Versuchen zeigte es sich schließlich, daß die Emanation nach der ersten Reinigung 5 bis 24 Stunden in Berührung mit dem Ätzkali belassen werden mußte. Auf diese Weise konnte die Intensität des Kohlensäurespektrums genügend geschwächt werden, so daß das Spektrum der Emanation und anderer Gase deutlich hervortrat. Es war dann wohl nahezu reine Emanation vorhanden. Der Grund, warum das Gas so lange mit dem Ätzkali in Berührung bleiben muß, ist nicht recht ersichtlich. Vielleicht

geht die Absorption der Kohlensäure nur sehr langsam vor sich. Es ist aber auch denkbar, daß das beobachtete Spektrum in Wirklichkeit dem Kohlenmonoxyd und nicht der Kohlensäure zuzuschreiben ist. Gerade über diesen Punkt herrscht eine beträchtliche Meinungsverschiedenheit. Wenn das vorhandene Gas wirklich CO ist, so müßte es erst unter der Einwirkung der Emanation in CO_2 verwandelt werden, um von dem Ätzkali absorbiert werden zu können. Das würde erklären, warum der Absorptionsprozeß so langsam vor sich geht.

Soweit meine Erfahrung reicht, sind als wesentliche Bedingungen für eine zweckmäßige Behandlung der Emanation die folgenden zu bezeichnen. Die beigemischten Gase müssen bei einer Temperatur, die gerade unterhalb des Verdampfungspunktes der Emanation liegt, weggepumpt werden. Die Temperatur muß also höher sein als die Temperatur der flüssigen Luft. Von Wichtigkeit ist weiter, daß die Emanation für längere Zeit mit dem Ätzkali in Berührung ist. Ich vermute, daß der hohe Wert, der für das Volumen der Emanation von Ramsay und Cameron erhalten wurde, sich infolge der Anwesenheit fremder Gase ergab, die sich mit der Emanation in der flüssigen Luft kondensiert hatten.

Über die Volumenänderungen der Emanation.

Ramsay und Cameron (l. c.) geben eine Reihe von Beispielen der Volumenänderung, die sie im Laufe ihrer Experimente beobachteten. Das Volumen des Gases im Kapillarrohr verkleinerte sich rasch auf ungefähr die Hälfte während der ersten beiden Stunden. Späterhin verringerte sich das Volumen langsamer.

Bei meinen Versuchen konnte ich eine ganz ähnliche Erscheinung beobachten. In einzelnen Fällen zog sich das Volumen während mehrerer Stunden auf weniger als die Hälfte zusammen. Nach dieser ersten Kontraktion zeigte sich nur wenig Änderung im Verlauf einer Woche. In anderen Fällen zeigte sich dagegen eine Volumenvergrößerung an Stelle einer Verminderung. Manchmal vergrößerte sich das Volumen im Verlauf einiger Stunden auf den doppelten ursprünglichen Wert; es folgte dann eine langsame Kontraktion. Die erwähnten

Volumenänderungen stehen in vielen Fällen in keiner direkten Beziehung zu den Volumenänderungen der Emanation selbst. Denn das wahre Volumen der Emanation betrug manchmal nur etwa 20 $^0/_0$ des vorhandenen Gesamtvolumens. Es ist mit Schwierigkeiten verbunden, eine befriedigende Erklärung für das beschriebene Verhalten des Gases zu finden. Man könnte vielleicht annehmen, daß die mit der Emanation vermischten Gase entweder Verbindungen eingehen oder auch unter dem Einfluß der intensiven Strahlung der Emanation dissoziieren. Da Versuche über den Einfluß reiner Emanation auf verschiedene bekannte Gase nicht vorliegen, so können wir auch nur Vermutungen über die Natur der vorhandenen Gase und die Gründe für die Volumenänderungen aufstellen. Wenn beispielsweise Kohlendioxyd vorhanden ist und es würde dieses Gas in Anwesenheit der Emanation in Kohlenmonoxyd und Sauerstoff zerfallen, so müßte das Volumen sich vergrößern.

Ein anderer Faktor kann möglicherweise bei den Volumenänderungen eine wichtige Rolle spielen, besonders wenn es sich um nahezu reine Emanation handelt. Man nimmt bekanntlich an, daß die positiven und negativen Ionen, die sich in einem Gas bei gewöhnlichem Drucke bilden, eine große Zahl Moleküle um sich konzentrieren. Da nun die Emanation selbst und das mit ihr in Berührung befindliche Gas in hohem Maße ionisiert ist, so erscheint es wohl möglich, namentlich mit Rücksicht auf die rasche Bildung von RaC nach Einbringung der Emanation, daß das ursprüngliche Volumen sich infolge der Bildung einer großen Zahl der erwähnten Aggregate verkleinert. Es sind freilich noch eine Reihe spezieller Experimente nötig, um diese merkwürdigen und einzig dastehenden Volumenänderungen völlig zu erklären.

Experimentelle Ergebnisse.

Im folgenden sind einige typische Beispiele ausgewählt, die die anfänglichen Volumenänderungen illustrieren sollen. Das für alle Versuche benützte Kapillarrohr war aus Jenaer Borsilikatglas gefertigt. Das Rohr war völlig gleichmäßig weit,

und zwar betrug der Durchmesser 0·58 *mm*. Die Kapillardepression entsprach 14 *mm* Quecksilber. Das Glas nahm unter dem Einfluß der Emanation rasch eine braune Färbung an, nach längerer Zeit wurde es sogar völlig schwarz. Nach Erhitzen des Rohres bis zur Temperatur der Thermolumineszenz wurde aber das Glas wieder völlig durchsichtig. Vor jedem Versuche wurde das Kapillarrohr erwärmt, um das Glas von den anhaftenden Gasen zu befreien.

In allen Fällen zeigte sich, daß das im Kapillarrohr befindliche Gas innerhalb des Versuchsbereiches und der Versuchsfehlergrenze dem Boyle'schen Gesetz gehorchte.

Versuch 1.

Dieser Versuch gibt ein Beispiel für die Vergrößerung des Volumens, wie sie an beträchtlich unreiner Radiumemanation beobachtet wurde. Die im Kapillarrohr vorhandene Emanationsmenge entsprach, wie direkte Messungen zeigten, 67 *mg* reinen Radiums.

Zeit, verstrichen nach Eintritt der Emanation in das Kapillarrohr	Gasvolumen im Kapillarrohr unter Normaldruck und bei Zimmertemperatur
2 Minuten	0·154 mm^3
6 »	0·169 »
17 »	0·201 »
28 »	0·235 »
41 »	0·260 »
50 »	0·270 »
64 »	0·280 »
71 »	0·291 »
81 »	0·297 »
3·9 Stunden	0·346 »
21 »	0·355 »

Nach Ablauf von 21 Stunden wurde das Spektrum des Gases im Kapillarrohr untersucht. Das Kohlensäurespektrum war vorherrschend. Außerdem wurden Quecksilberlinien und einige weitere Linien beobachtet, die jedoch nicht mit Sicherheit identifiziert werden konnten. Das anfängliche Volumen

entsprach 67 *mg* Radium. Daraus berechnet sich das Volumen der Emanation, das einem Gramm Radium entspricht, zu 2·3 mm^3. Das nach 3·9 Stunden erreichte Volumen entspricht 5·2 mm^3 pro Gramm. Die Emanation war allerdings, wie die Spektralanalyse zeigte, keineswegs rein, sondern wohl mit beträchtlichen Mengen von CO_2 vermischt.

Versuch 2.

Dieser Versuch gibt ein Beispiel für eine Volumenverminderung. Die Emanation war ganz beträchtlich reiner als bei der zuerst mitgeteilten Messungsreihe; die Emanation stand vor der Einführung in das Kapillarrohr vier Stunden in Berührung mit dem Ätzkali. Die vorhandene Emanationsmenge entsprach 130 *mg* Ra.

Zeit, verstrichen nach Eintritt der Emanation in das Kapillarrohr	Gasvolumen im Kapillarrohr unter Normaldruck und bei Zimmertemperatur
2 Minuten	0·171 mm^3
5 »	0·169 »
10 »	0·165 »
18 »	0·158 »
26 »	0·150 »
37 »	0·135 »
56 »	0·126 »
70 »	0·120 »
91 »	0·106 »
5·9 Stunden	0·097 »
17 »	0·069 »
44 »	0·075 »
92 »	0·079 »
161 »	0·080 »
185 »	0·119 »
209 »	0·125 »
257 »	0·125 »

Das ursprüngliche Volumen der Emanation ergibt 1·32 mm^3 für ein Gramm Radium. Unter Berücksichtigung des Zerfalles der Emanation während der Dauer des Versuches betrug das

Volumen nach Ablauf von 17 Stunden 0·59 mm^3 pro Gramm Radium. Nach dieser Zeit war der kleinste Wert erreicht.

Man sieht, daß das Volumen nach 17 Stunden auf beinahe 0·4 des ursprünglichen Wertes sich vermindert hatte. Nach diesem Minimalwert wuchs das Volumen wieder, wenn auch nicht ganz regelmäßig. Der Versuch erstreckte sich über 11 Tage. Nach Verlauf dieser Zeit wurde die Emanation, die diese ganze Zeit sich im Kapillarrohr befunden hatte, wieder in der gewöhnlichen Weise spektroskopisch untersucht. Ein ausgeprägtes Heliumspektrum war sichtbar, das alle charakteristischen Linien zeigte. Auch das Kohlensäurespektrum war vorhanden, doch war dessen Intensität gering im Vergleich mit der des Heliumspektrums. Außerdem wurden auch Quecksilberlinien und einige Linien unbekannter Herkunft gemessen. Wasserstofflinien wurden bei diesem Versuche wie auch in allen anderen nicht beobachtet. Es hat sich somit eine Bestätigung der bekannten Versuche von Ramsay und Soddy[1] ergeben. Diese fanden, daß das Heliumspektrum in einem Rohre, das Emanation enthält, nach Verlauf einiger Zeit sichtbar wird.

Der Grund für das Anwachsen des Gasvolumens im vorliegenden Versuche nach dem Minimum ist damit offenkundig. Das aus der Emanation entstehende Helium wird wohl zunächst von den Glaswänden absorbiert, da die α-Teilchen, die identisch mit dem Heliumatom sind, mit großer Geschwindigkeit auf die Glaswände auftreffen. Dieses Helium wird aber allmählich wieder abgegeben und vergrößert somit das Volumen des schon vorhandenen Gases. Es kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, welche Menge Helium an den Glaswänden haftete. Wenn wir als wahres Volumen der Emanation den erhaltenen Minimumwert nehmen, d. i. 0·59 mm^3, dann müßte das Volumen des Heliums ungefähr das Dreifache dieses Wertes sein, angenommen, daß das ausgesandte α-Teilchen wirklich ein Heliumatom ist. Das am Ende der Versuchsreihe nach 11 Tagen beobachtete Volumen war 0·125 mm^3 und das Gas war wohl wesentlich Helium.

---

[1] Ramsay und Soddy, Proc. Roy. Soc., 42, 204 (1903).

Versuch 3.

Die Emanation war für diesen Versuch besonders sorgfältig gereinigt und war über 18 Stunden in Berührung mit dem Ätzkali. Die vorhandene Emanationsmenge entsprach 130 *mg* Radium. Das Anfangsvolumen betrug 0·097 mm^3, was 0·80 mm^3 pro Gramm Radium entspricht. Eine Volumänderung konnte während der ersten 15 Minuten nicht mit Sicherheit erkannt werden. Die Emanation wurde daraufhin wieder im U-Rohre, das völlig luftleer war, kondensiert und im Penthanbad gekühlt. Als die Emanation wieder in das Kapillarrohr zurückgebracht war, zeigte sich nahezu dasselbe Volumen als zuerst. Um die Reinheit der Emanation zu prüfen, wurde wieder das Spektrum des im Kapillarrohr befindlichen Gases untersucht. Es zeigte sich ein vorher nicht beobachtetes Spektrum, bestehend aus einer Reihe heller Linien. Dieses Spektrum rührte, wie fast mit Sicherheit angenommen werden darf, von der Emanation selbst her. Auch einige Kohlensäurebanden waren sichtbar. Es wurde sofort damit begonnen, die Wellenlängen der neuen Linien genau festzustellen. Ehe jedoch diese Messungen beendet waren, verschwanden die Emanationslinien und das Kohlensäurespektrum war wieder vorherrschend. Man konnte dann, nachdem das Kapillarrohr ausgepumpt, an der Phosphoreszenz und durch die Aktivitätsmessungen erkennen, daß fast alle Emanation an den Glaswänden haftete und nur ein Teil sich frei in gasförmigem Zustand befand. Die Emanation blieb zwei Tage an der Glaswand adsorbiert und wurde nur durch kräftiges Erhitzen teilweise wieder frei. Die Emanation war wohl infolge der elektrischen Entladung in die Glaswände getrieben worden.

Versuch 4.

Nachdem die Emanation in der gewöhnlichen Weise gereinigt war, wurde sie für fünf Stunden in Kontakt mit dem Ätzkali gelassen. Nach Einführung in das Kapillarrohr betrug das Volumen 0·126 mm^3. Das Volumen blieb für 20 Minuten nahezu konstant und begann dann langsam sich zu verkleinern. Nach 17 Stunden war ein Wert von 0·076 mm^3 erreicht.

Die anfänglich vorhandene Emanationsmenge entsprach 130 *mg* Ra. Somit betrug das Volumen 0·97 mm^3 für ein Gramm Radium. Das geringste Volumen der Emanation, das gemessen wurde, ergab 0·66 mm^3 pro Gramm Radium. Für den Zerfall der Emanation in der Zwischenzeit ist dabei Rechnung getragen.

Versuch 5.

Die bereits zu Versuch 4 verwendete Emanation wurde nochmals im U-Rohre kondensiert und dann für 24 Stunden in Berührung mit dem Ätzkali gelassen. Nach weiterer entsprechender Behandlung wurde die Emanation wieder in das Kapillarrohr gepreßt. Das anfängliche Volumen betrug 0·083 mm^3. Wie im Versuch 4, so blieb auch diesmal das Volumen in den ersten 20 Minuten nahezu ungeändert, um dann langsam sich zusammenzuziehen. Nach vier Stunden war das Volumen 0·046 mm^3.

Die vorhandene Emanationsmenge entsprach 79 *mg* Ra. Daraus ergibt sich, daß das ursprüngliche Volumen der Emanation 1·05 mm^3 pro Gramm Radium und das Volumen nach vier Stunden 0·58 mm^3 pro Gramm Radium betrug. Die Spektraluntersuchung zeigte wieder vor allem die Anwesenheit von CO_2; gleichzeitig traten wieder eine Reihe neuer Linien auf, die der Emanation zugeschrieben werden müssen. Die Wellenlängen dieser Linien wurden bestimmt. Nachdem die Entladung etwa zwei Stunden mit Unterbrechungen durch das Gas gegangen war, verschwanden die meisten der Emanationslinien. Es stellte sich heraus, daß wieder der größere Teil der Emanation von den Wänden des Kapillarrohres adsorbiert war, wie das bereits in einem früheren Experiment beobachtet worden war.

Daß das Kohlensäurespektrum besonders vorherrschte, kann, wie ich glaube, nicht durch die Annahme erklärt werden, daß eine beträchtliche Menge dieses Gases, vermischt mit der Emanation, schon vor dem Einsetzen der Entladung vorhanden war. Es wird diese Erscheinung vielmehr einer Erzeugung dieses Gases durch die elektrische Entladung

zuzuschreiben sein, vermutlich der Zersetzung einer Spur organischer Substanz auf der Quecksilberoberfläche.[1] Diese Annahme findet eine Stütze in der Tatsache, daß das Kohlensäurespektrum ebenso deutlich beobachtet wurde, wenn praktisch die Emanation und alle beigemischten Gase durch die Pumpe entfernt waren.

Ich hoffe, in einer späteren Arbeit auf das Spektrum der Emanation unter verschiedenen Bedingungen und andere damit zusammenhängende Versuche zurückzukommen. Während der vorliegenden Versuche wurde dieses Spektrum nur nebenbei bei Prüfung der Reinheit der Emanation erhalten.

Einige Bemerkungen, die Kondensation der Emanation betreffend.

Wenn die Emanation sich in nahezu reinem Zustande befindet, so kondensiert sie sich mit großer Schnelligkeit an jeder Stelle, die unter ihren Verdampfungspunkt (—150° C.) abgekühlt ist. Befand sich die Emanation im U-Rohr, so verursachte das langsame Eintauchen des Rohres in flüssige Luft eine Kondensation der Emanation auf einem äußerst geringen Raum. Es trat diese Kondensation wohl gerade an der Stelle ein, an der das Glasrohr besonders dünnwandig war. Ein heller, phosphoreszierender Punkt zeigte sich und es erweckte beinahe den Anschein, als ob man die Emanation in flüssigem Zustand in Gestalt eines flachen Tropfens, der eine Oberfläche von etwa $^1/_2$ mm^2 besaß, sehen könnte. Diese auffallende Erscheinung konnte des öfteren beobachtet werden. Wenn die Emanation für einige Minuten auf die Temperatur der flüssigen Luft abgekühlt war, so verschwand der helle Fleck allmählich und die Emanation verteilte sich auf eine viel größere Oberfläche. Ramsay hat bereits beobachtet, daß die Emanation,

---

[1] Anmerkung bei der Korrektur. Spätere Versuche haben die Richtigkeit dieser Erklärung bestätigt. Wurde die in der beschriebenen Weise gereinigte Emanation in ein Spektralrohr mit Platinelektroden eingefüllt, so konnte während der Entladungen keine Spur des Bandenspektrums von Kohlendioxyd bemerkt werden.

die in flüssiger Luft kondensiert ist, durch anhaltendes Pumpen zum Teil entfernt werden kann. Diese Tatsache beweist, daß bei dieser Temperatur die Emanation einen ganz merklichen Dampfdruck besitzt. Weit deutlicher tritt diese Erscheinung hervor bei Verwendung eines Penthanbades, wo die Temperatur des Bades den Kondensationspunkt der Emanation nur um etwa 20 bis 30° C. überschreitet. Jeder einzelne Hub der Pumpe entfernt in diesem Falle einen nicht unbeträchtlichen Teil der Emanation.

Ein weiterer merkwürdiger Effekt wurde beobachtet. Wenn die Emanation zunächst in dem U-Rohr kondensiert war, so zeigte sich nach Verlauf von etwa zehn Minuten, daß ein Teil der Emanation auch in den Raum des Rohres, der sich außerhalb der flüssigen Luft befand, diffundiert war und sich dort kondensierte. Das Leuchten des Rohres war gerade da, etwa 5 *mm* über dem Spiegel der flüssigen Luft, am hellsten. Diese Erscheinung ließe sich erklären, wenn man annimmt, daß die Phosphoreszenzfähigkeit des Glases bei tiefen Temperaturen eine geringere ist. Dem widerspricht allerdings die Beobachtung, daß der obere Teil auch dann zunächst noch heller erscheint als der übrige Teil des Rohres, wenn man das ganze Rohr in flüssiger Luft kühlt.

Die beschriebenen Versuche zeigen deutlich, daß die Emanation auch weit unterhalb ihrer Verflüchtigungstemperatur noch einen beträchtlichen Dampfdruck besitzt. Es herrscht infolgedessen eine beständige Verdampfung und gleichzeitige Wiederkondensation an den verschiedenen Stellen des Rohres. Der ganze Vorgang der Kondensation und Verdampfung kann infolge der Phosphoreszenz des Glases unter dem Einfluß der Emanation im verdunkelten Zimmer deutlich mit dem Auge verfolgt werden.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Resultate, welche sich aus den Versuchen 2 bis 5 ergeben haben, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	Volumen der Emanation pro Gramm Radium[1]	
	bei Beginn des Versuches	am Ende des Versuches
2	1·32 mm^3	0·80 mm^3
3	0·80 »	—
4	0·97 »	0·66 »
5	1·05 »	0·58 »

Man ersieht, daß das kleinste Volumen, das bei Beginn eines Versuches beobachtet wurde, 0·80 mm^3 pro Gramm Radium betrug. Das kleinste nach der Kontraktion beobachtete Volumen war 0·58 mm^3. Der Wert, der für das anfängliche Volumen von Ramsay und Cameron gefunden wurde, betrug 7·07 mm^3, war also etwa neunmal größer als das kleinste anfängliche Volumen bei meinen Versuchen.

Die Beobachtung hatte ferner gezeigt, daß die Emanation während der ersten Stunden nicht merklich von den Glaswänden absorbiert wurde.

Aus diesem Grunde erscheint es berechtigt, als wahren Wert des Volumens nicht den anfänglichen, sondern den zu nehmen, der sich nach der Kontraktion ergab. Wie bereits bemerkt, führt die theoretische Berechnung des Volumens zu dem Werte 0·57 mm^3 pro Gramm Radium.

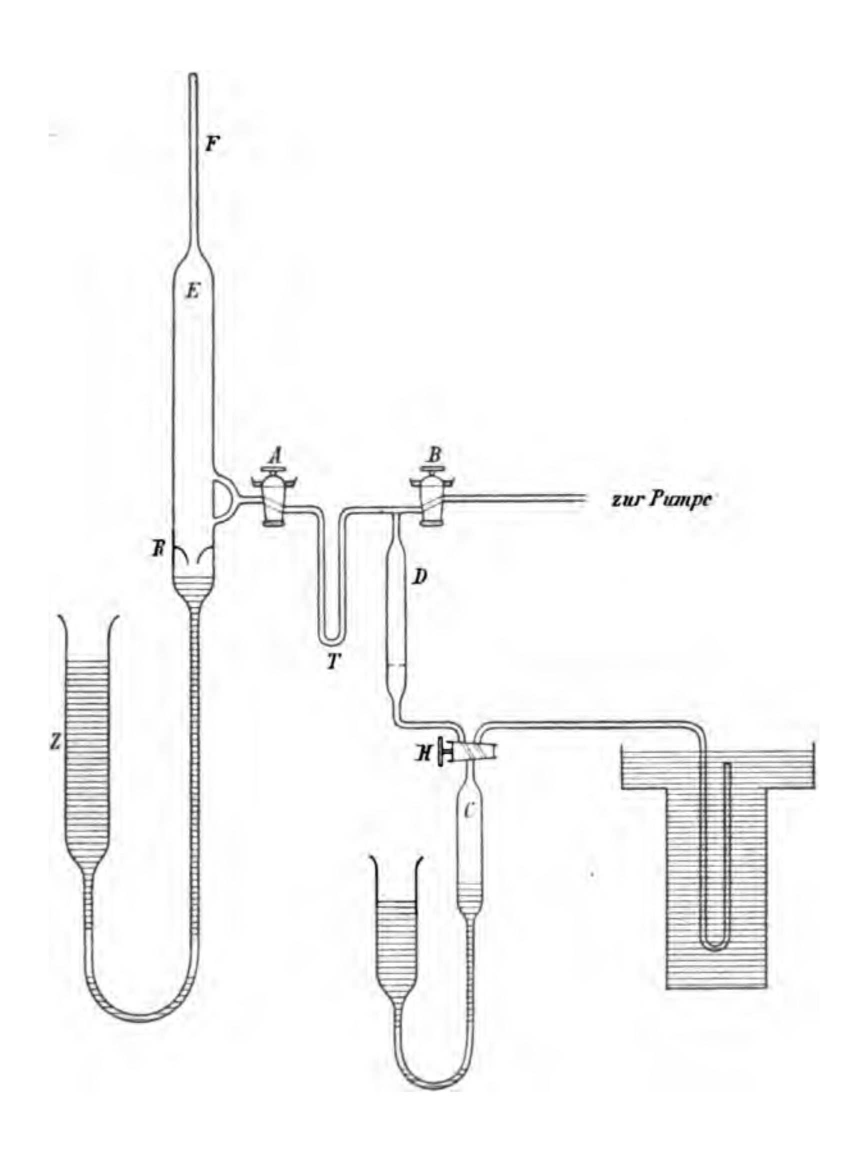
Die Übereinstimmung der vorliegenden Versuche, die 0·80, 0·66 und 0·58 mm^3 Emanation pro Gramm Radium ergaben, mit dem theoretischen Werte 0·57 mm^3 ist so gut, als man der Natur der Experimente nach erwarten kann. Wir haben bereits gesehen, daß man nur mit Schwierigkeit eine befriedigende Erklärung der anfänglichen Kontraktion finden

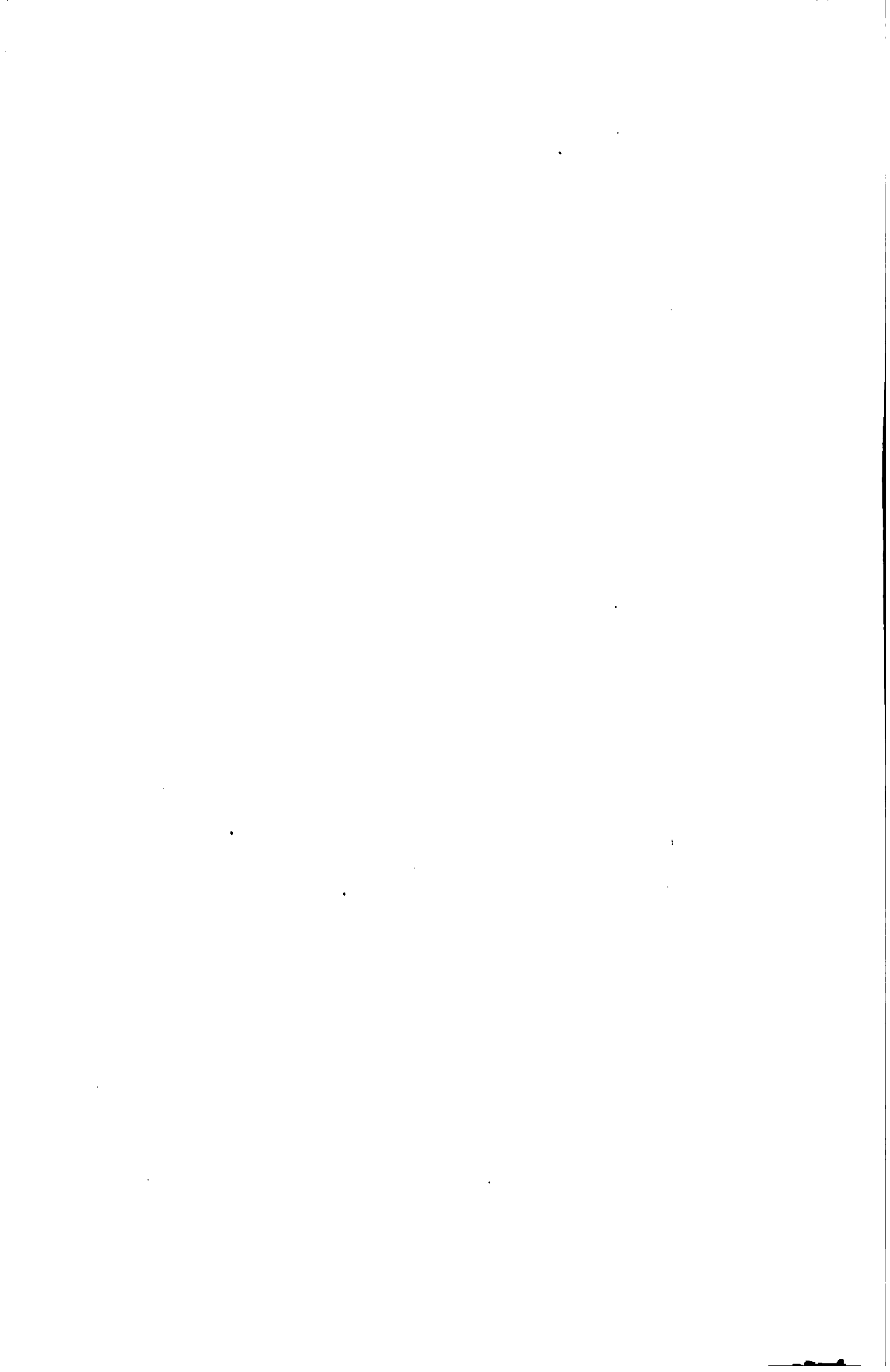
[1] Die hier gegebenen Volumina beziehen sich auf normalen Druck und eine Temperatur von 16° C. Eine kleine unbestimmte Korrektur sollte noch an denselben angebracht werden wegen der erwärmenden Wirkung der Emanation.

kann. Zur weiteren Klarlegung der Verhältnisse sind noch eine Reihe von Versuchen nötig.

Die vorstehend mitgeteilten Resultate sind nur vorläufige. Doch hoffe ich in einer späteren Arbeit eingehend über das Volumen der Emanation und die auftretenden Volumenänderungen berichten zu können.

Herrn T. Royds bin ich zu Dank verpflichtet für die vielseitige Unterstützung bei Ausführung der Versuche.


F
E
A
B
zur Pumpe
R
D
T
Z
H
C



Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

IV.

Beobachtungen über die Unbeständigkeit des Radiumbromids

von

Sir **William Ramsay**, K. C. B.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1908.)

Das mir durch die Güte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien gelieferte Salz[1] wog $0 \cdot 388\,g$ und war ursprünglich Bromid. Herr Dr. Brill, welcher so freundlich war, das Salz persönlich auf der Reise nach London zu besorgen, brachte die Nachricht mit, daß das Salz, als es in das Fläschchen hineingetan wurde, $0 \cdot 5\,g$ wog. Man hat sich natürlich gewundert, wieso sich das Gewicht nach kurzer Frist so sehr vermindert hatte.

1. Schon am Anfang des Monats November 1907 machte Dr. Brill eine Bestimmung der Radioaktivität dieser Probe, welche als A bezeichnet wird, indem er etwa $1 \cdot 2\,mg$ auf der Mikrowage abwog und die entladende Kraft des Präparats mit der einer etwas kleineren Menge von sehr reinem, wasserfreiem Chlorradium, B, verglich.

Das Gewicht von A, auf einer Mikrowage bestimmt, war 32·21 Skalenteile, das von B 21·49. Die Eimerchen, worin diese zwei Proben gewogen wurden, wurden in Glasröhren eingeschmolzen und nach vier Wochen wurde die entladende Wirkung der β- und γ-Strahlen untersucht. Die Aktivität von A war 107·2, wenn $B = 100$ gesetzt wird.

---

[1] Siehe über die Herstellung desselben: Sitzungsber. der kais. Akad. der Wiss. in Wien, 1908, p. 628.

2. Um diese Zahlen zu vergleichen, mußten beide Salze in Bromid übergeführt werden, indem sie mit reiner Bromwasserstoffsäure eingedampft wurden, bis die Gewichte sich als konstant erwiesen. Das Gewicht von *A* wurde dadurch von 38·21 bis 44·78 vermehrt, während *B* von 21·49 bis 28·10 zunahm. Also sind 21·49 Teile $RdCl_2$ 44·78 Teilen $RdBr_2$, alle beide wasserfrei, in betreff der entladenden Wirkung äquivalent.

3. Von diesen Zahlen kann man das Atomgewicht des Radiums in *B* berechnen; denn

$$21 \cdot 49(160+x) = 28 \cdot 10(71+x),$$

also $x = 218 \cdot 4$ = Atomgewicht von Ra. Das Chlorid war a'so annähernd rein.

4. Das Chlorid enthielt also 20·94 Gewichtsteile reines $RdCl_2$ oder (Ra = 226) 15·934 Gewichtsteile metallisches Radium. Nun waren die relativen Aktivitäten von *A* und *B* 107·2 und 100. Also enthielt *A*

$$15 \cdot 934 \times \frac{107 \cdot 2}{100} \text{ Gewichtsteile Radium} = 17 \cdot 081,$$

in 32·21 Gewichtsteilen. Dieses entspricht einem Gehalt an Bromid von 29·174 Gewichtsteilen oder

$$\frac{29 \cdot 174 \times 100}{32 \cdot 21} = 90 \cdot 6\%.$$

5. Da die ganze Menge 0·388 *g* betrug, enthielt das Präparat $0 \cdot 388 \times 0 \cdot 906\,g = 0 \cdot 3514\,g$ Radium als reines Bromid. Da aber das Gewicht sich nach der Proportion $\frac{44 \cdot 78}{38 \cdot 21}$ bei der Überführung in wasserfreies Bromid vermehrte, so entsprechen die 0·388 *g* 0·4547 *g* $RdBr_2$ oder 0·4971 *g* $RdBr_2 . 2H_2O$.

6. Dieses Salz war nur teilweise in Wasser löslich; es wurde in ein Kölbchen hineingetan, an eine Töpler'sche Luftpumpe angeschmolzen und die beim Auflösen gesammelten Gase separat untersucht. Während einiger Monate haben wir die Emanation gesammelt und zu verschiedenen Versuchen

angewendet, worüber in den »Trans. Chem. Soc.« für 1908 berichtet worden ist. Gelegentlich einer Änderung des Apparats haben wir etwas reine Bromwasserstoffsäure hineinpipettiert; das Präparat brauste auf und gab Kohlensäure ab. Wir mußten also schließen, daß das ursprüngliche Salz sich während der Zeit von etwa zwei Jahren seit seiner Bereitung in Carbonat verwandelt haben muß.

Es ist auch zu bemerken, daß die abgepumpten Gase, ehe die Bromwasserstoffsäure zugefügt worden war, aus lauter Wasserstoff und Sauerstoff bestanden; aber nach Addition der Säure wurden Bromdämpfe in großer Menge mit verhältnismäßig wenig Sauerstoff abgegeben. Nach ein paar Monaten aber hörte das Entweichen von Brom auf und es wurde, wie früher, normales Knallgas stetig entwickelt.

7. Noch eines möchte ich erwähnen. Bei dem Anschmelzen des Kölbchens im November 1907 war es nicht zu vermeiden, daß ich die Finger dicht an das Salz hielt; die Operation war aber rasch fertig und dauerte kaum 10 Minuten. Seitdem habe ich das Kölbchen fast niemals berührt. Etwa Mitte Juni ist die Haut meines Daumens und der zwei ersten Finger beider Hände hart geworden, so ungefähr wie nach einer vom Rudern erzeugten Blase; die Finger wurden etwas heiß und die Haut ist augenscheinlich abgestorben und trennt sich von der Unterhaut ab. Es war wenig schmerzhaft, bloß ein Mangel an Tastgefühl blieb zurück. Es ist wirklich zu bewundern, daß nach so langer Zeit die Wirkung der β- und γ-Strahlen erst zum Vorschein kam. Es zeigt jedoch, daß man bei der Behandlung solcher größeren Quantitäten von Radium nicht zu vorsichtig sein kann.

8. Die Gase, welche von dem Wiener Präparat bei der Behandlung mit Wasser entwichen (siehe Punkt 6), wurden sorgfältig gesammelt und analysiert. Die ursprüngliche Menge des Gases war $1 \cdot 312\,cm^3$. Es bestand aus

$$\left.\begin{array}{ll} CO_2 \ldots\ldots & 0 \cdot 015\,cm^3 \\ H_2 \ldots\ldots\ldots & 0 \cdot 047 \\ O_2 \ldots\ldots\ldots & 1 \cdot 125 \\ N_2 + He \ldots & 0 \cdot 125 \end{array}\right\} = 1 \cdot 312\,cm^3.$$

Der Rückstand von Stickstoff und Helium wurde gemessen, die Analyse summiert sich genau auf $100^0/_0$.

Dieser Rückstand wurde mittels mit flüssiger Luft gekühlter Kokosnußkohle von Stickstoff befreit; das Spektrum von Helium war sichtbar, obgleich sehr schwach. Es scheint, als ob Wasserstoff und Helium zum größten Teil entwichen wären und daß etwas Luft an dem Salze haftete. Jedenfalls ist es bemerkenswert, daß so wenig Gas okkludiert war und daß Wasserstoff und Helium in so winzig kleiner Menge vorhanden waren.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich Herrn Dr. Brill sowie auch Herrn Alex. Cameron für ihre freundliche Hilfe während diesen Untersuchungen herzlich danken.

Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen

von

Dr. **V. F. Hess.**

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1908.)

I. Einleitung.

Unter Refraktionskonstante versteht man diejenige Funktion des Brechungsexponenten und der Körperdichte, welche bei Änderung der letzteren durch Temperatur oder Druckvariation ihren Wert nicht ändert. Mit anderen Worten: Der den Brechungsexponenten n enthaltende Teil jener Funktion soll sich nur proportional der Dichte D ändern.

Die Versuche, eine solche Funktion $f(n, D)$ zu finden, sind zahllos gewesen. Die älteste Form ist wohl die von Newton und Laplace vorgeschlagene

$$f(n, D) = \frac{n^2-1}{D} = \text{konstant.}$$

Diejenige Funktion von n allein, welche sich proportional der Dichte ändert, nennt man Refraktionsvermögen.

Im Newton-Laplace'schen Ausdruck wäre also n^2-1 als »Refraktionsvermögen« zu bezeichnen.

Es haben sich bis heute folgende drei Formeln für das Refraktionsvermögen R erhalten:

I. $\overset{\text{I}}{R} = n - 1$ (Beer, Landolt, Biot, Arago, Gladstone).

II. $\overset{\text{II}}{R} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ (L. Lorenz, H. A. Lorentz).

III. $\overset{\text{III}}{R} = n^2 - 1$ (Newton, Laplace, Schrauf).

Nach Wüllner kann man das Refraktionsvermögen einer Mischung aus dem ihrer Bestandteile mittels der Formel

$$\frac{R}{D}(p_1 + p_2) = R_1 \frac{p_1}{D_1} + R_2 \frac{p_2}{D_2}$$

(Wüllner'sche Mischungsregel) berechnen, wobei R das Refraktionsvermögen der Mischung, R_1, R_2 das der Bestandteile, p_1, p_2 und D_1, D_2 die Gewichte und Dichten der Bestandteile, D die Dichte des Gemisches bedeutet.

Für die R kann irgendeine der drei angegebenen Formen eingesetzt werden. Man erhält so drei formal identische, dem Wesen nach aber grundverschiedene Mischungsregeln:

$$\frac{\overset{\text{I}}{R}}{D}(p_1 + p_2) = \frac{\overset{\text{I}}{R_1}}{D_1} p_1 + \frac{\overset{\text{I}}{R_2}}{D_2} p_2. \quad \text{(I)}$$

Die analogen Formeln mit $\overset{\text{II}}{R}$ oder $\overset{\text{III}}{R}$ seien mit (II) und (III) bezeichnet.

Die aus diesen Formeln berechneten Brechungsexponenten einer Mischung stimmen mit den beobachteten Werten nicht gut überein. Am schlechtesten ist die Übereinstimmung bei Formel (III) und (I). Die Lorentz'sche Formel (II) gibt etwas bessere Resultate.

Pulfrich[1] brachte an der Formel (I) eine Verbesserung an durch Einführung einer neuen Konstanten α und Berücksichtigung der durch das Mischen hervorgerufenen Änderung c der Volumseinheit. So stellte er eine Mischungsformel auf, welche lautet:

$$\frac{n-1}{D} \cdot \frac{1-\alpha c}{1-c}(p_1 + p_2) = \frac{n_1 - 1}{D_1} p_1 + \frac{n_2 - 1}{D_2} p_2 \text{ (Pulfrich);}$$

---

[1] Pulfrich, Zeitschr. für physik. Chemie, *4*, 561 (1889).

α bedeutet eine Zahl, die für alle Mischungsverhältnisse zweier bestimmter Flüssigkeiten praktisch konstant betrachtet werden kann.

Buchkremer[1] und der Verfasser[2] haben bei ihren experimentellen Untersuchungen eine sehr gute Übereinstimmung der Pulfrich'schen Formel mit der Erfahrung nachzuweisen vermocht.

Schütt[3] erzielte noch bessere Übereinstimmung, indem er die Pulfrich'sche Konstante

$$\alpha = a + b p_1$$

setzte, d. h. den vielleicht vorhandenen geringen Gang des α mit dem Prozentgehalt noch berücksichtigte.

Zur Berechnung von Brechungsexponenten mit einer Genauigkeit von zirka 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale — viel weiter reichen ohnehin die gewöhnlichen Beobachtungsmittel nicht — ist jedoch eine solche Komplikation nicht erforderlich und reicht es aus, Pulfrich's α als charakteristische Konstante aller Mischungsverhältnisse zweier Flüssigkeiten zu betrachten.

Die oberwähnten Untersuchungen Buchkremer's und des Verfassers haben auch sichergestellt, daß das Pulfrich'sche α sich nur wenig mit Temperatur und Wellenlänge ändert, also innerhalb der gewöhnlichen Versuchsgrenzen auch in dieser Hinsicht als praktisch konstant angenommen werden kann.

In der vorliegenden Arbeit, deren Zweck unten p. 953 eingehender dargelegt ist, wird nun eine allgemeine, für alle Formen des Refraktionsvermögens R geltende Beziehung aufgestellt, in deren Folge man zu Mischungsformeln gelangt, welche gleich gute Resultate liefern wie die Pulfrich'sche. Der Anwendungsbereich der neuen Formeln wird ferner erweitert und die aufgestellten Beziehungen durch Heranziehung des vorhandenen Beobachtungsmaterials so weit als möglich experimentell verifiziert.

---

[1] L. Buchkremer, Dissert. Bonn 1890.

[2] V. F. Hess, Diese Sitzungsber., 114. Bd., Abt. IIa, Juli 1905.

[3] Schütt, Zeitschr. für physik. Chemie, *5*, 349 (1890).

II. Theorie.

§ 1. Festsetzung der Bezeichnungen.

Es bedeuten:

v_1 das Volumen des ersten Bestandteiles der Mischung.
v_2 » » » zweiten » » »
D_1, D_2 die Dichten der beiden zur Mischung verwendeten Flüssigkeiten.
p_1, p_2 die zur Mischung abgewogenen Mengen derselben.
D die nach der Mischung statthabende beobachtete Dichte (also nach erfolgter Kontraktion oder Dilatation des Volumens).
D_v diejenige Dichte, welche das Gemisch haben würde, wenn keine Volumänderung eingetreten wäre.
V das Gesamtvolumen nach der Mischung.
C die gesamte Volumänderung.
c die Änderung, welche auf die Volumseinheit der Summe der gemischten Volumina entfällt (also Kontraktion oder Dilatation der Volumeinheit).
n_1, n_2 die Brechungsexponenten der beiden Komponenten des Gemisches.
R das Refraktionsvermögen, also je nach Wahl einen der auf p. 948 erwähnten Ausdrücke:

$$\overset{\mathrm{I}}{R} = n-1, \quad \overset{\mathrm{II}}{R} = \frac{n^2-1}{n^2+2}, \quad \overset{\mathrm{III}}{R} = n^2-1.$$

§ 2. Die beim Mischen eintretende Volumänderung.

Der schon von Pulfrich (l. c.) verfolgte Gedankengang zur Berechnung der Volumänderung, die bei einer Mischung auftritt, ist in Kürze der folgende:

Nach den bezüglichen Definitionen bestehen die Beziehungen:

$$D_1 = \frac{p_1}{v_1}, \qquad D_2 = \frac{p_2}{v_2},$$

$$D_v = \frac{p_1+p_2}{v_1+v_2} = \frac{v_1 D_1 + v_2 D_2}{v_1+v_2} = D_1 + (D_2 - D_1)\frac{v_2}{v_1+v_2}, \quad (1)$$

$$C = v_1 + v_2 - V,$$

$$V = \frac{p_1+p_2}{D}$$

oder durch Einsetzen aus (1):

$$V = (v_1+v_2)\frac{D_v}{D},$$

daher

$$C = (v_1+v_2)\left[1 - \frac{D_v}{D}\right]$$

und die Kontraktion der Volumeinheit beträgt somit

$$c = \frac{C}{v_1+v_2} = 1 - \frac{D_v}{D} = \frac{D-D_v}{D}. \quad (2)$$

§ 3. Die Fundamentalgleichung.

Ein dem Ausdruck D_v formal analog gebildeter Ausdruck für das Refraktionsvermögen lautet:

$$R_v = \frac{R_1 v_1 + R_2 v_2}{v_1+v_2} = R_1 + (R_2 - R_1)\frac{v_2}{v_1+v_2}; \quad (3)$$

R_v würde das Refraktionsvermögen bedeuten, welches das Gemisch haben würde, wenn keine Volumänderung beim Mischen stattfände.

Ein dem Ausdruck für die Volumkontraktion (2) etwa analog gebauter für das Refraktionsvermögen hätte die Form

$$\frac{R-R_v}{R},$$

welchen wir als »Kontraktion des Refraktionsvermögens« bezeichnen wollen.

Wir behaupten nun, es bestehe zwischen diesem Ausdruck und der Volumkontraktion direkte Proportionalität:

$$\frac{R—R_v}{R} = q\frac{D—D_v}{D} = qc; \qquad (4)$$

hierbei kann für die R irgendeine der gebräuchlichen Formen des Refraktionsvermögens gebraucht werden.

Pulfrich hat die Existenz einer solchen Proportionalität seinerzeit für das Beer'sche $\overset{\mathrm{I}}{R} = n—1$ behauptet und wurde dies auch durch die oben (p. 948 und 949) zitierten Arbeiten Pulfrich's, Buchkremer's und des Verfassers erwiesen.

Ich behaupte nun, es bestehe die Fundamentalgleichung (4) für jeden der drei gebräuchlichen Ausdrücke des Refraktionsvermögens R. Der Proportionalitätsfaktor q ist für die verschiedenen Mischungsverhältnisse zweier Flüssigkeiten praktisch konstant, ist stets positiv, ändert sich nur wenig, und zwar in stetiger Weise mit der Temperatur und hängt auch von der Wellenlänge des bei Bestimmung der Brechungsexponenten verwendeten Lichtes fast gar nicht ab, kann also als charakteristische Konstante eines Gemisches zweier bestimmter Flüssigkeiten betrachtet werden.

Ich habe in einer früheren Arbeit[1] die Pulfrich'sche Relation durch Einführung des theoretisch bestbegründeten Ausdruckes für das Refraktionsvermögen modifiziert, und zwar wählte ich damals den Lorentz'schen Ausdruck $\overset{\mathrm{II}}{R} = \frac{n^2—1}{n^2+2}$; es gelang mir, die daraus resultierende Relation

$$\frac{\overset{\mathrm{II}}{R} - \overset{\mathrm{II}}{R}_v}{\overset{\mathrm{II}}{R}} = \beta . c$$

an mehreren Beobachtungsreihen als tatsächlich bestehend nachzuweisen. Die Übereinstimmung zwischen Berechnung

[1] V. F. Hess, Diese Sitzungsber., Bd. 115, Abt. IIa, Mai 1906.

und Beobachtung war sogar eine noch etwas bessere als bei Benützung der Pulfrich'schen Formel.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung ist nun, nachzuweisen, daß die Proportionalitätsbeziehung (4) auch bei Wahl des Newton'schen Ausdruckes für das Refraktionsvermögen $\overset{III}{R} = n^2 - 1$ nachweisbar besteht und somit festgelegt wird, daß die einfache Annahme direkter Proportionalität zwischen Volumkontraktion und »Kontraktion des Refraktionsvermögens«, also die Einführung **einer** weiteren Konstanten q genügt, um alle bisher aufgestellten empirischen oder theoretisch begründeten Mischungsformeln mit der Beobachtung in ausreichende Übereinstimmung zu bringen.

Es soll also gewissermaßen gezeigt werden, daß die Nichtberücksichtigung der Volumänderung ein allen drei üblichen Mischungsformeln (I), (II), (III) anhaftender prinzipieller Mangel ist, indem die Einführung der Fundamentalgleichung (4) genügt, um aus allen erwähnten Mischungsformeln Brechungsexponenten mit einer durchschnittlichen Abweichung von 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale, also in hinreichender Übereinstimmung mit den beobachteten Werten vorausberechnen zu können.

§ 4. Umformung der Fundamentalgleichung (4).

Es soll jetzt mit der Gleichung (4) formal dieselbe Transformation vorgenommen werden, welche ich in meiner § 3 zitierten Arbeit für das Lorentz'sche $\overset{II}{R} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ ausgeführt habe.

Die Gleichung (4)

$$R(1 - qc) = R_v = \frac{R_1 v_1 + R_2 v_2}{v_1 + v_2}$$

nimmt unter Berücksichtigung der § 2 abgeleiteten Relationen

$$v_1 + v_2 = \frac{p_1 + p_2}{D_v} \quad \text{und} \quad D_v = D(1 - c)$$

folgende Form an:

$$R_v = \frac{R_1 \frac{p_1}{D_1} + R_2 \frac{p_2}{D_2}}{p_1 + p_2} D(1-c) = R(1-qc)$$

oder

$$\frac{R}{D} \frac{1-qc}{1-c} (p_1 + p_2) = R_1 \frac{p_1}{D_1} + R_2 \frac{p_2}{D_2}. \tag{5}$$

Dies stellt ganz allgemein die Verbesserung der Wüllnerschen Mischungsregel (p. 948) mit Berücksichtigung der Volumkontraktion dar. Für R kann irgendeiner der drei üblichen Ausdrücke für das Refraktionsvermögen $\overset{\mathrm{I}}{R}$, $\overset{\mathrm{II}}{R}$ oder $\overset{\mathrm{III}}{R}$ eingesetzt werden.

So erhält man drei modifizierte Mischungsformeln, welche in extenso geschrieben, lauten:

I. $R = \overset{\mathrm{I}}{R}$, $q = \alpha$ gesetzt, ergibt:

$$\frac{n-1}{D} \cdot \frac{1-\alpha c}{1-c} (p_1 + p_2) = \frac{n_1 - 1}{D_1} p_1 + \frac{n_2 - 1}{D_2} p_2 \tag{5 I}$$

(Beer-Landolt-Gladstone'sche Formel modifiziert von Pulfrich);

II. $R = \overset{\mathrm{II}}{R}$, $q = \beta$ gesetzt:

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1-\beta c}{1-c} \cdot \frac{p_1 + p_2}{D} = \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} \frac{p_1}{D_1} + \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} \frac{p_2}{D_2} \tag{5 II}$$

(Lorentz-Lorenz'sche Formel, modifiziert vom Verfasser);

III. $R = \overset{\mathrm{III}}{R}$, $q = \gamma$ gesetzt:

$$\frac{n^2-1}{D} \cdot \frac{1-\gamma c}{1-c} (p_1 + p_2) = \frac{n_1^2 - 1}{D_1} p_1 + \frac{n_2^2 - 1}{D_2} p_2 \tag{5 III}$$

(Newton-Laplace'sche Formel, modifiziert vom Verfasser); für $q = 1$ oder $c = 0$ fallen diese Formeln mit den nichtmodifizierten Formeln zusammen. Dies ist jedoch, wie im IV. Kapitel

an der Hand der Tabellen gezeigt werden wird, in Wirklichkeit nur selten annähernd der Fall.

§ 5. Rechnerische Verwertung der Fundamentalgleichung (4).

Die Fundamentalgleichung (4)

$$R_v = R(1-qc) = R_1 + (R_2 - R_1)\frac{v_2}{v_1+v_2}$$

enthält sechs Veränderliche. Man kann daher, wenn fünf derselben in irgendeiner Kombination vorgegeben sind, aus dieser Relation die sechste berechnen.

Wirkliche praktische Bedeutung kommt nur den folgenden zwei Kombinationen zu:

A. Berechnung des Refraktionsvermögens R, beziehungsweise des Brechungsexponenten n eines Gemisches, wenn durch Messung ermittelt sind: R_1, R_2 die Refraktionsvermögen der Komponenten des Gemisches, der Prozentgehalt $\frac{v_2}{v_1+v_2}$, die Volumkontraktion c und der Proportionalitätsfaktor q für irgendein anderes Mischungsverhältnis derselben Mischung.

B. Berechnung des Prozentgehaltes $\frac{v_2}{v_1+v_2}$ der Mischung, wenn durch Messung vorgegeben sind: R_1, R_2, R, q und die Bestandteile von c, also D, D_1, D_2.

Geringere praktische Bedeutung hat dagegen:

C. die Berechnung der Volumkontraktion c irgend eines Mischungsverhältnisses, wenn bekannt sind R, R_1, R_2, $\frac{v_2}{v_1+v_2}$ und q für irgendein anderes Mischungsverhältnis derselben Mischung.

Die Berechnung von R_1 oder R_2 bei vorgegebenen übrigen fünf Veränderlichen hat dagegen keinen Sinn, da die Kenntnis von q bereits die Kenntnis von R_v, somit auch von R_1 und R_2 involviert [siehe Bedingungsgleichung (3)].

III. Anwendungen.

§ 6. Berechnung von Brechungsexponenten nach den neuen Mischungsformeln.

Wenn man aus der Fundamentalgleichung (4) das Refraktionsvermögen R des Gemisches berechnet, so kommt man zu dem Ausdruck:

$$R = \frac{R_v}{1-qc} = \frac{1}{1-qc}\left[R_1 + (R_2 - R_1)\frac{v_2}{v_1+v_2}\right]. \qquad (6)$$

Um nun aus dieser Formel die wirklichen Brechungsexponenten auszuwerten, ist es notwendig, einen bestimmten Ausdruck für das Refraktionsvermögen, also einen der Ausdrücke $\overset{\mathrm{I}}{R}, \overset{\mathrm{II}}{R}, \overset{\mathrm{III}}{R}$ auszuwählen.

a) Für das Beer-Landolt-Gladstone'sche

$$\overset{\mathrm{I}}{R} = n-1, \quad \overset{\mathrm{I}}{R}_1 = n_1 - 1, \quad \overset{\mathrm{I}}{R}_2 = n_2 - 1$$

wollen wir entsprechend p. 954 den Proportionalitätsfaktor $q = \alpha$ nennen. Dann folgt

$$n-1 = \frac{\overset{\mathrm{I}}{R}_v}{1-\alpha c}, \quad \text{also} \quad n = \frac{1-\alpha c + \overset{\mathrm{I}}{R}_v}{1-\alpha c}, \qquad (6')$$

wobei

$$\overset{\mathrm{I}}{R}_v = n_1 - 1 + (n_2 - n_1)\frac{v_2}{v_1+v_2};$$

dies ist die von Pulfrich abgeleitete und von Buchkremer und mir experimentell betätigte Formel.

b) Für den Lorentz-Lorenz'schen Ausdruck

$$\overset{\mathrm{II}}{R} = \frac{n^2-1}{n^2+2}, \quad \overset{\mathrm{II}}{R}_1 = \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}, \quad \overset{\mathrm{II}}{R}_2 = \frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}$$

erhält man die von mir bereits in der § 3 zitierten früheren Arbeit abgeleitete Formel.

Es ergibt sich nämlich, $q = \beta$ gesetzt:

$$\overset{\mathrm{II}}{R} = \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{\overset{\mathrm{II}}{R}_v}{1-\beta c},$$

$$n^2(1-\beta c-\overset{\text{II}}{R_v}) = 1-\beta c+2\overset{\text{II}}{R_v},$$

$$n = \sqrt{\frac{1-\beta c+2\overset{\text{II}}{R_v}}{1-\beta c-\overset{\text{II}}{R_v}}}; \qquad (6^{\text{II}})$$

hiebei bedeutet

$$\overset{\text{II}}{R_v} = \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2} - \left(\frac{n_2^2-1}{n_2^2+2} - \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\right)\frac{v_2}{v_1+v_2}.$$

Die Brauchbarkeit dieser Formel (6^{II}) ist in der § 3 zitierten Arbeit von mir an zwei Versuchsreihen demonstriert worden und wird in den Tabellen des IV. Abschnittes an noch mehr Beobachtungsreihen des näheren geprüft werden.

c) Wählt man endlich das Newton-Laplace'sche $\overset{\text{III}}{R} = n^2-1$, also $\overset{\text{III}}{R_1} = n_1^2-1$, $\overset{\text{III}}{R_2} = n_2^2-1$, $q = \gamma$ gesetzt, so erhält man

$$n^2-1 = \frac{\overset{\text{III}}{R_v}}{1-\gamma c} \quad \text{und} \quad n = \sqrt{\frac{1-\gamma c+\overset{\text{III}}{R_v}}{1-\gamma c}}, \qquad (6^{\text{III}})$$

wobei

$$\overset{\text{III}}{R_v} = \overset{\text{III}}{R_1} + (\overset{\text{III}}{R_2} - \overset{\text{III}}{R_1})\frac{v_2}{v_1+v_2} = n_1^2-1+(n_2^2-n_1^2)\frac{v_2}{v_1+v_2}.$$

Auch diese, bisher noch nicht abgeleitete Formel ergibt die Brechungsexponenten eines Gemisches in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung wieder, wie in den Kolumnen Δ^{III} der Tabellen des IV. Abschnittes gezeigt werden wird.

§ 7. Berechnung des Prozentgehaltes $\frac{v_1}{v_1+v_2}$ einer Mischung.

Wie schon in § 5, *B*, bemerkt, kann unsere Fundamentalbeziehung (4) auch benützt werden, um das Mischungsverhältnis $\frac{v_2}{v_1+v_2}$ einer Mischung auszurechnen. Ich schlage hierzu einen formal ähnlichen Weg ein, wie in meiner § 3 zitierten Arbeit über die Modifikation der Lorentz'schen Mischungsformel.

Formel (4) lautet in anderer Schreibweise:

$$(R-R_v)D = (D-D_v)Rq.$$

Daraus folgt unter Benützung der entsprechenden Definitionsgleichungen (1) und (3):

$$\left[R-R_1-(R_2-R_1)\frac{v_2}{v_1+v_2}\right]D = \left[D-D_1-(D_2-D_1)\frac{v_2}{v_1+v_2}\right]Rq$$

oder

$$\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{(D-D_1)Rq-(R-R_1)D}{(D_2-D_1)Rq-(R_2-R_1)D}; \qquad (7)$$

hierbei bedeutet R irgendeine der schon oft erwähnten Formen des Refraktionsvermögens $\overset{\text{I}}{R}$, $\overset{\text{II}}{R}$ oder $\overset{\text{III}}{R}$ — während in meiner vorhin erwähnten früheren Arbeit unter R ausdrücklich das Lorentz'sche $\overset{\text{II}}{R} = \frac{n^2-1}{n^2+2}$ verstanden war.

Formel (7) kann also je nach Wahl der Ausdrücke $\overset{\text{I}}{R}$, $\overset{\text{II}}{R}$, $\overset{\text{III}}{R}$ in folgender Weise modifiziert angesetzt werden:

I. $R = \overset{\text{I}}{R}$, $q = \alpha$

$$\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{(D-D_1)(n-1)\alpha-(n-n_1)D}{(D_2-D_1)(n-1)\alpha-(n_2-n_1)D}. \qquad (7^{\text{I}})$$

II. $R = \overset{\text{II}}{R}$, $q = \beta$

$$\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{(D-D_1)\frac{n^2-1}{n^2+2}\beta-\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}-\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\right).D}{(D_2-D_1)\frac{n^2-1}{n^2+2}\beta-\left(\frac{n_2^2-1}{n_2^2+2}-\frac{n_1^2-1}{n_1^2+2}\right).D}. \qquad (7^{\text{II}})$$

III. $R = \overset{\text{III}}{R}$, $q = \gamma$

$$\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{(D-D_1)(n^2-1)\gamma-(n^2-n_1^2)D}{(D_2-D_1)(n^2-1)\gamma-(n_2^2-n_1^2)D}. \qquad (7^{\text{III}})$$

Alle diese drei Modifikationen der Formel (7) setzen nun voraus die Messung der Größen n, n_1, n_2, ferner der Bestandteile von c, also D, D_1, D_2 und die Kenntnis des Proportionalitätsfaktors q für irgend ein anderes Mischungsverhältnis derselben Mischung.

§ 8. Berechnung der Volumkontraktion.

Aus der Fundamentalgleichung (4) kann man natürlich auch die Volumkontraktion ausrechnen:

$$c = \frac{1}{q} \frac{R-R_v}{R}. \tag{8}$$

Auch die wirkliche Dichte D des Gemisches kann man hieraus ableiten. Denn nach (2) ist:

$$c = 1 - \frac{D_v}{D} = \frac{1}{q} \frac{R-R_v}{R},$$

also

$$\frac{D_v}{D} = \frac{qR-R+R_v}{qR},$$

$$D = \frac{D_v qR}{qR-R+R_v} = \frac{\left[D_1 + (D_2-D_1)\frac{v_2}{v_1+v_2}\right] Rq}{qR-R+R_v}; \tag{9}$$

auch hier kann für R, beziehungsweise R_v irgend einer der üblichen drei Ausdrücke für das Refraktionsvermögen eingesetzt werden. Den Formeln (8) und (9) kommt wenig praktische Bedeutung zu, weil die direkte Messung von c oder D einfacher ist.

§ 9. Eine physikalische Veranschaulichung des Pulfrich'schen Proportionalitätsfaktors α.

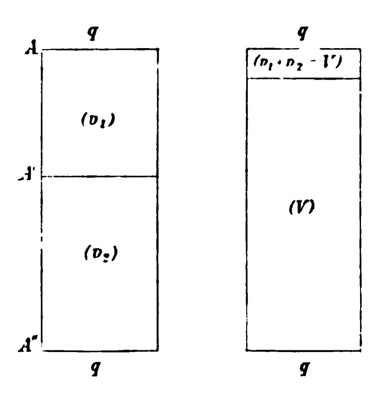
Durchläuft ein Lichtstrahl eine Reihe von verschiedenen Medien M_1, M_2..., so bleibt nach dem Landolt'schen Prinzip die Zeit, die das Licht zum Passieren dieser Medien benötigt, immer gleich, in welcher Reihenfolge immer man dieselben anordnen mag.

Wallot[1] nahm an, daß dieses Prinzip auch auf Mischungen übertragbar sein müsse, d. h. er setzte die Zeit, die der Strahl zum Durchsetzen der beiden ungemischten Substanzen benötigt,

[1] Wallot, Ann. der Physik, *11*, 605 (1903).

gleich der Zeit, die das Licht zum Passieren der gemischten Volumina und des infolge Volumkontraktion eventuell entstandenen »leeren« Raumes ober der Mischung braucht.

Denken wir uns also eine Röhre vom Querschnitt q, die ihrer Längsachse nach von einem Lichtbündel durchsetzt wird (siehe die Figur). Die ungemischten Substanzen haben die Volumina v_1 und v_2, die Mischung das Volumen V. Die Scheidewände bei A und A'' seien fest, die bei A' wegnehmbar. Wird



letztere weggezogen, so nimmt die Mischung ein von (v_1+v_2) im allgemeinen verschiedenes Volumen V ein, z. B. sei

$$V < v_1+v_2.$$

Dann verbleibt ober der Mischung der leere Raum

$$v_1+v_2-V.$$

Man erhält so für die Zeit, die das Licht zum Durchlaufen der Röhre A—A'' braucht:

$$\frac{1}{\Gamma q}[n_1 v_1+n_2 v_2] = \frac{1}{\Gamma q}[1.(v_1+v_2-V)+nV];$$

hierbei bedeutet Γ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$(n-1)V = (n_1-1)v_1+(n_2-1)v_2;$$

dies ist genau die Mischungsformel (I) von Beer, Landolt und Gladstone. Wie schon in der Einleitung erwähnt, gilt dieselbe

nur in ziemlich grober Annäherung. Nur bei einigen wenigen Mischungen ist die Gleichung genauer gültig.

Die Beer'sche Formel stimmt am schlechtesten bei Mischungen, wo starke Volumkontraktion auftritt. Da in der eben reproduzierten Wallot'schen elementaren Herleitung dieser Formel Volumänderungen schon berücksichtigt sind, bleibt nur folgende Annahme übrig:

Das Landolt'sche Prinzip betreffs der Vertauschbarkeit der Medien (siehe p. 959) ist auf Mischungen, also auf intramolekulare Verhältnisse nicht anwendbar.

Bei der Berechnung der Zeit, die das Licht zum Passieren der Substanzen im ungemischten, beziehungsweise gemischten Zustande benötigt, ist also allgemeiner anzunehmen, daß die Zeiten nicht ganz gleich, sondern um ein Zeitteilchen τ verschieden sind.

Mit anderen Worten: Der Lichtstrahl erleidet beim Passieren der Mischung eine positive oder negative Verzögerung τ gegen die ursprüngliche Durchlaufszeit der Substanzen im ungemischten Zustande.

Diese Annahme scheint mir nicht nur berechtigt, sondern auch notwendig, wenn man ermißt, welch komplizierte Veränderung der Anordnung der Moleküle beim Mischen zweier Flüssigkeiten eintreten mag (etwa Deformation der Moleküle durch ungleichmäßige Verteilung der Anziehungskräfte der Nachbarmoleküle, Änderung des Raumerfüllungskoeffizienten u. dgl.).

Demnach setzen wir die Zeit, die der Lichtstrahl zum Passieren der Röhre AA'' im Zustande [1], d. h. vor der Mischung, benötigt, gleich der Zeit, die der Strahl beim Durchlaufen der Röhre nach der Mischung (im Zustande [2]) benötigt, vermehrt um ein positives oder negatives Zeitteilchen τ.

$$\frac{1}{\Gamma q}[n_1 v_1 + n_2 v_2] = \frac{1}{\Gamma q}[1 . (v_1 + v_2 - V) + n V] + \tau. \qquad (10)$$

Setzt man nun τ proportional dem Refraktionsvermögen $\overset{I}{R} = n - 1$ und der gesamten Volumänderung C, also

$$\tau = \frac{1}{\Gamma q}(1-\alpha)(n-1)C, \qquad (11)$$

wobei $1-\alpha$ eine vorläufig noch gar nicht näher bezeichnete Konstante bedeutet, so folgt nach (2):

$$\tau = \frac{1}{\Gamma q}(1-\alpha)(n-1)(v_1+v_2)c = \frac{1}{\Gamma q}(1-\alpha)(n-1)\cdot\frac{V}{1-c}c.$$

Setzt man dies in (10) ein, so ergibt sich:

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 = (v_1+v_2-V)+nV+(n-1)(1-\alpha)V\frac{c}{1-c}$$

oder

$$(n_1-1)v_1+(n_2-1)v_2 = (n-1)V\left[1+\frac{c}{1-c}(1-\alpha)\right],$$

$$\overset{\text{I}}{R}_1 v_1 + \overset{\text{I}}{R}_2 v_2 = \overset{\text{I}}{R}V\cdot\frac{1-\alpha c}{1-c}.$$

Dies ist identisch mit der Pulfrich'schen Mischungsformel (5^1). Dadurch rechtfertigt sich auch unsere an sich ganz willkürlich angesetzte Definitionsgleichung (11) für τ. Das α ist mit dem Pulfrich'schen α identisch.

Das Ergebnis hat natürlich nur formalen Charakter.

Aus (11) folgt:

$$\alpha = 1 - \frac{\Gamma q}{(n-1)C}\cdot\tau,$$

d. h. die Größe der Abweichung des Pulfrich'schen Proportionalitätsfaktors α von Eins ist direkt proportional der Verzögerung, die der Lichtstrahl beim Durchsetzen des komplizierteren Molekülkomplexes der Mischung entgegen dem Landolt'schen Prinzip erfährt.

Für $\tau = 0$ ist $\alpha = 1$; dann gilt die Beer'sche Mischungsformel (I).

Für $c = 0$ ist natürlich zugleich auch $\tau = 0$.

IV. Prüfung der Formeln an dem vorhandenen Beobachtungsmaterial.

§ 10. Übersicht.

Um die im II. und III. Abschnitt entwickelten Formeln einer strengen Erprobung an dem vorliegenden Beobachtungsmaterial zu unterziehen, habe ich in den folgenden Tabellen vor allem eine von den verschiedensten Gesichtspunkten geleitete sorgfältige Auswahl von Beobachtungsreihen über Flüssigkeitsmischungen getroffen.

Demnach sind hauptsächlich folgende Typen von Mischungen zusammengestellt worden:

Elektrolyt mit Elektrolyt,
Elektrolyt mit Isolator,
Isolator mit Isolator.

Ferner Mischungen mit großer, andere mit geringer Kontraktion oder Dilatation des Volumens, Mischungen von Flüssigkeiten, deren Dichten oder deren Brechungsexponenten sehr viel oder sehr wenig differieren. Endlich zog ich auch Salzlösungen in den Kreis meiner Betrachtungen, wobei immer die gesättigte Lösung als die eine Komponente, das Lösungsmittel als die zweite Komponente angenommen ist.

Eine Durchsicht der reichhaltigen experimentellen Literatur über Mischungen und Salzlösungen ließ die etwaige Inangriffnahme neuer Beobachtungsreihen als nicht erforderlich erscheinen.

Die in den Tabellen benützten Beobachtungsdaten sind den experimentellen Untersuchungen von Wüllner (1868), van der Willigen (1869), F. Ketteler (1888), L. Buchkremer (1890) und meinen eigenen (1905) entnommen. Der Name des Beobachters nebst zugehörigem Literaturnachweis ist bei jeder Tabelle ausdrücklich vermerkt.

Die Berechnungen nach der Pulfrich'schen Formel, welche von Buchkremer und mir bereits bei den meisten der in den Tabellen angeführten Mischungen ausgeführt und veröffentlicht waren, sind des Vergleiches und der Einheitlichkeit wegen nochmals mitgeteilt.

Die in den Tabellen angewendeten Bezeichnungen sind meist vom II. Abschnitt her noch geläufig. Zu bemerken wäre noch: Mit Δ ist die Differenz des beobachteten und des berechneten Brechungsexponenten in Einheiten der fünften Dezimale bezeichnet. Der rechts oben angehängte Index I, II oder III bedeutet die Form des Refraktionsvermögens $\overset{\mathrm{I}}{R}$, $\overset{\mathrm{II}}{R}$, $\overset{\mathrm{III}}{R}$, die bei der Berechnung verwendet wurde, also z. B. Δ^{I} die Differenz des beobachteten und des nach der Pulfrich'schen Formel (6^{I}) berechneten Brechungsexponenten.

Die Anhängung von »$\alpha = 1$« oder »$\beta = 1$« oder »$\gamma = 1$« soll andeuten, daß sich die betreffenden Differenzen Δ auf die entsprechenden, nicht modifizierten Formeln I, II, III (siehe p. 948) beziehen.

Es bedeutet also z. B. $\Delta^{\mathrm{II}}_{\beta = 1}$ die Differenz des beobachteten und des nach der nicht modifizierten Lorentz'schen Formel [(5^{II}), worin $\beta = 1$ zu setzen ist] berechneten Brechungsexponenten.

§ 11. Diskussion der Tabellen.

Zunächst will ich zeigen, daß die Fundamentalbeziehung (4)

$$\frac{R-R_v}{R} = q.c$$

tatsächlich bei allen Typen von Mischungen mit genügender Annäherung erfüllt ist, welche von den drei Formen des R man auch wählen mag.

Ferner, daß die Kontraktionen des Refraktionsvermögens

$$\frac{R-R_v}{R}$$

stets das gleiche Vorzeichen haben, wie die Kontraktion des Volumens $\frac{D-D_v}{D}$, also der Proportionalitätsfaktor q (beziehungsweise das jeweilige spezielle α, β, γ) immer eine positive Zahl ist.

Weiters soll in diesem Paragraphen gezeigt werden, daß die in § 6 besprochene Anwendung der Fundamentalbeziehung auf Berechnung von Brechungsexponenten irgendeines Mischungsverhältnisses tatsächlich einen Fortschritt gegenüber den alten Mischungsformeln darstellt, von denen bekanntlich jede nur für eine bestimmte Klasse von Mischungen gute Resultate liefert, bei anderen hingegen gar nicht stimmt. Bei Berechnung von Brechungsexponenten nach den neuen Formeln beträgt die durchschnittliche Abweichung nicht über 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale.

Diese durchschnittliche Abweichung wird bei keiner der Mischungen überschritten.

Tabelle 1 (Alkohol—Schwefelkohlenstoff).

Interessant ist diese Mischung in mehrfacher Hinsicht. Erstens weichen die Dichten und auch die Brechungsexponenten der beiden Komponenten stark voneinander ab und auch hinsichtlich der Dispersion zeigen die beiden Substanzen starke Verschiedenheit.

Weiters zeigt sich bei dieser Mischung eine beträchtliche Dilatation des Volumens mit sehr regelmäßigem Verlauf, wie man aus der graphischen Darstellung (Tafel) ersieht.

Die »Kontraktionen des Refraktionsvermögens«

$$\frac{\overset{\mathrm{I}}{R}-\overset{\mathrm{I}}{R}_v}{\overset{\mathrm{I}}{R}},\quad \frac{\overset{\mathrm{II}}{R}-\overset{\mathrm{II}}{R}_v}{\overset{\mathrm{II}}{R}},\quad \frac{\overset{\mathrm{III}}{R}-\overset{\mathrm{III}}{R}_v}{\overset{\mathrm{III}}{R}}$$

sind sämtlich negativ, aber merkwürdigerweise sehr stark voneinander verschieden. $\frac{\overset{\mathrm{II}}{R}-\overset{\mathrm{II}}{R}_v}{\overset{\mathrm{II}}{R}}$ ist bedeutend kleiner als die Volumdilatation, daher bleiben die β sehr weit unter der Einheit. Hingegen übertrifft $\frac{\overset{\mathrm{I}}{R}-\overset{\mathrm{I}}{R}_v}{\overset{\mathrm{I}}{R}}$ und noch mehr $\frac{\overset{\mathrm{III}}{R}-\overset{\mathrm{III}}{R}_v}{\overset{\mathrm{III}}{R}}$ die Volumdilatation ganz bedeutend. Dementsprechend sind α und γ viel größer als 1.

Daß unsere fundamentale Proportionalitätsbeziehung (4) tatsächlich erfüllt ist, sieht man sofort aus dem ganz analogen Verlauf der Kurven für $\frac{D-D_v}{D}$ und $\frac{R-R_v}{R}$ auf der Tafel. Das Maximum der Volumdilatation trifft für denselben Prozentgehalt zu, wie das der entsprechenden Größe $\frac{R-R_v}{R}$.

Da sowohl α als auch β und γ sehr weit von 1 abweichen, geben die alten, nichtmodifizierten Mischungsformeln I, II, III von Beer-Landolt, beziehungsweise Lorentz und insbesondere die von Newton-Laplace sehr schlechte Resultate. Aus den Kolumnen $\Delta^{I}_{\alpha=1}$, $\Delta^{II}_{\beta=1}$ und $\Delta^{III}_{\gamma=1}$ der Tabelle 1 ersieht man ja auch, daß die Abweichungen bei Berechnung von Brechungsexponenten nach diesen Formeln die enorme Höhe von 1200 Einheiten der fünften Dezimale erreichen.

Die Abweichungen nach den neuen Formeln sind dagegen minimal zu nennen. Bei Δ^{III} tritt zwar eine einmalige maximale Differenz von 9 Einheiten der vierten Dezimale auf; indes ist dies ein ganz vereinzelt dastehender Fall und die mittlere Abweichung für alle drei neuen Formeln übersteigt nicht die angegebene Höhe von 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale.

Tabelle 2 (Benzol—Essigsäure).

Als Mischung eines guten Isolators mit einem Elektrolyt bietet die Mischung Benzol—Essigsäure besonderes Interesse.

Die beträchtliche Volumdilatation nimmt wieder einen sehr regelmäßigen Verlauf mit einem Maximum von 1% bei etwa $\frac{v_2}{v_1+v_2} = 0\cdot5$. Ganz analog sind die Kurven $\frac{R-R_v}{R}$, nur daß hier alle $\frac{R-R_v}{R}$ größer sind als das entsprechende $\frac{D-D_v}{D}$. Deshalb sind α, β und γ größer als 1 (vergl. die Tafel).

Bei den Koeffizienten α, β, γ zeigt sich ein ganz geringer Gang mit dem Prozentgehalt, der jedoch, wie aus den Kolumnen Δ^{I}, Δ^{II}, Δ^{III} hervorgeht, die Resultate der Berechnung von Brechungsexponenten kaum beeinflußt:

Die drei neuen Formeln stimmen ziemlich gleich gut und die mittlere Abweichung der berechneten Brechungsexponenten von den beobachteten ist kleiner als 2 Einheiten der vierten Dezimale.

Von den alten (nichtmodifizierten) Formeln stimmt bei der vorliegenden Mischung die von Lorentz am besten, die von Newton-Laplace am schlechtesten; nach letzterer ergeben sich Abweichungen bis zu 530 Einheiten der fünften Dezimale (damit hängt auch zusammen, daß der Koeffizient β am wenigsten, γ am meisten von 1 verschieden ist).

Tabelle 3 (Wasser—Essigsäure).

Die Mischung Wasser—Essigsäure wurde als Type einer Verdünnungsreihe eines Elektrolyten gewählt. Bei solchen tritt meist eine starke Kontraktion des Volumens auf; in unserem Falle erreicht dieselbe einen Höchstwert von 3% des Gesamtvolumens beim Prozentgehalt $\frac{v_2}{v_1+v_2} = 0 \cdot 6$.

Die Konstanz der α, β, γ für die verschiedenen Prozentverhältnisse ist recht gut gewahrt. Da die β für die ersten zwei Prozentgehalte kleiner als Eins sind und der Mittelwert $\beta = 1 \cdot 0033$ zur Berechnung verwendet wurde, gibt für diese zwei Prozentgehalte die Lorentz'sche unmodifizierte Formel um geringes bessere Resultate als meine modifizierte. Dies ist aber gar nicht von Belang, da hierdurch die gleichmäßig gute Übereinstimmung der drei neuen Formeln mit der Beobachtung nicht gestört ist (vergl. die Kolumnen Δ^{I}, Δ^{II}, Δ^{III}).

Die alte Newton-Laplace'sche Formel (siehe $\Delta^{III}_{\gamma=1}$) gibt wieder die schlechtesten Resultate.

Da β nahezu gleich 1 ist, so deckt sich die Kurve $\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R}_v}{\overset{II}{R}}$ fast vollkommen mit der der Volumkontraktion $\frac{D-D_v}{D}$. Dagegen liegt der Scheitelpunkt und auch der ganze übrige Verlauf der Kurve $\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R}_v}{\overset{III}{R}}$ viel höher ($\gamma > 1$).

Tabelle

Alkohol—

(Wüllner, Pogg. Ann., *133*, 1 (1868).

$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	$c=\frac{D-D_v}{D}$	n	$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}}$	α	$\frac{1}{\Delta}$	$\frac{1}{\Delta_{\alpha=1}}$
0	0·79628	0	1·36676	0	—	—	—
0·39386	0·97177	−0·00880$_0$	1·47039	−0·01910	2·17	− 4·$_0$	−480·$_0$
0·57289	1·05425	−0·00922$_0$	1·52081	−0·01870	2·03	+61·$_1$	−490·$_4$
0·71135	1·12167	−0·00623$_6$	1·56279	−0·01430	2·29	+21·$_9$	−382·$_5$
1	1·26354	0	1·65268	0	—	—	—
					Mittelwert 2·16		

Tabelle

Benzol—

Buchkremer, Dissert. Bonn 1890.

0	0·87953	0	1·50001	0	—	—	—
0·17544	0·90430	−0·00575	1·47301	−0·00975	1·69	+ 7	−192
0·28614	0·92040	−0·00869	1·45704	−0·01444	1·66	+37	−253
0·35921	0·93200	−0·00993	1·44693	−0·01687	1·70	+18	−248
0·45591	0·94750	−0·01055	1·43409	−0·01808	1·71	+12	−327
0·55678	0·96490	−0·01015	1·42148	−0·01805	1·78	+19	−331
0·66276	0·98470	−0·00946	1·40872	−0·01683	1·78	−15	−348
0·88499	1·02600	−0·00390	1·38445	−0·00741	1·90	−17	−147
1	1·05050	0	1·37265	0	—	—	—
					Mittelwert 1·74		

1.

Schwefelkohlenstoff.

$t = 20°$. n für Fraunhofer'sche Linie F.

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R_v}}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R_v}}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
−0·003402	0·386	+1·6	+293·0	−0·039595	4·499	−51·4	−1201·0
−0·003551	0·385	+2·9	+348·2	−0·037900	4·111	+90·2	−1222·0
−0·002486	0·398	−3·4	+254·7	−0·027622	4·429	−23·3	− 978·0
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 0·390				Mittelwert 4·346		

2.

Essigsäure.

$t = 20°$. n für Natriumlinie.

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R_v}}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R_v}}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
−0·006855	1·192	+12·2	− 60·6	−0·013751	2·391	+ 9	− 315
−0·010020	1·153	+35·6	− 69·8	−0·019926	2·293	+45	− 429
−0·011563	1·164	+33·7	− 82·0	−0·022863	2·302	+46·5	− 484
−0·012831	1·216	+ 7·7	−112·5	−0·025189	2·388	+16	− 533
−0·012843	1·265	−16·4	−128·1	−0·025202	2·483	−19	− 534
−0·012041	1·273	−18·2	−118·7	−0·023423	2·476	−15	− 482
−0·005268	1·351	−20·0	−113·8	−0·010417	2·669	−31	− 214
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·231				Mittelwert 2·429		

Tabelle

Wasser—

(Buchkremer, Dissert. Bonn 1890).

$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	$c=\frac{D-D_v}{D}$	n	$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}}$	α	$\frac{1}{\Delta}$	$\frac{1}{\Delta_{\alpha=1}}$
0	0·99827	0	1·33313	0	—	—	—
0·14339	1·01960	+0·01402	1·34380	+0·01454	1·04	− 36	+ 34
0·31029	1·04090	+0·02603	1·35522	+0·02767	1·06	− 45	+ 78
0·44431	1·05450	+0·03205	1·36362	+0·03556	1·11	− 1	+158
0·60745	1·06530	+0·03322	1·37113	+0·03769	1·13	+ 32	+168
0·71194	1·06930	+0·03189	1·37496	+0·03651	1·14	+ 8	+177
0·83828	1 06940	+0·02581	1·37722	+0·02905	1·12	+ 16	+125
1	1·0502	0	1·37265	0	—	—	—
					Mittelwert 1·11		

Tabellen 4 bis 7 Wasser—Alkohol für $t = 15, 20, 25, 30°$.

Die Berechnungen an diesen vier Beobachtungsreihen wurden hauptsächlich ausgeführt, um zu untersuchen, ob die Koeffizienten α, β, γ sich mit der Temperatur ändern oder nicht. Die diesbezüglichen Resultate sind in § 12 besprochen.

Bekanntlich tritt bei der Mischung Wasser—Alkohol eine starke Volumkontraktion auf, welche etwa beim Mischungsverhältnis $\frac{v_2}{v_1+v_2} = 0 \cdot 5$ einen Maximalwert von über 3% des Gesamtvolumens erreicht.

Die Proportionalitätsfaktoren α, β, γ sind, wie aus allen vier Tabellen ersichtlich, genügend konstant für alle Mischungsverhältnisse, um daraus Brechungsexponenten etc. mit der geforderten Genauigkeit berechnen zu können.

3.

Essigsäure.

$t = 20°$. n für Natriumlicht.

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R_v}}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R_v}}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
+0·013466	0.9605	−27·9	−16·0	+0·016418	1·171	−35·6	+ 73
+0·025263	0·9705	−34·6	−31·0	+0·031323	1·203	−42·3	+ 168
+0·032359	1·0096	+ 8·4	+13·0	+0·040389	1·260	+ 6·2	+ 272
+0·034184	1·0290	+36·6	+41·4	+0·042961	1·293	+43·3	+ 324
+0·033022	1·0355	+44·5	+49·0	+0·041717	1·308	+58·0	+ 329
+0·026190	1·0147	+12·8	+16·5	+0·033299	1·290	+31·0	+ 251
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·0033				Mittelwert 1·254		

In sämtlichen Kolumnen Δ sieht man daher auch, daß die durchschnittliche Abweichung der nach den neuen Formeln berechneten Brechungsexponenten von den beobachteten innerhalb der von mir eingangs postulierten Grenze von 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale bleibt.

Ebenso wie bei allen andern bisher besprochenen Mischungen ist auch hier die Übereinstimmung für alle drei neuen Formeln ziemlich gleich gut.

Von den alten, nicht modifizierten Formeln stimmt für $t = 15°$ die $(n-1)$-Formel von Beer-Landolt am besten. Daher weicht auch α für $t = 15°$ am wenigsten von 1 ab. Für $t = 20$, 25 und 30° hingegen stimmt die Newton-Laplace'sche (n^2-1)-Formel besser.

Tabelle

Wasser—

(Hess, Diese Sitzungsber., Juli 1905).

$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	$c=\frac{D-D_v}{D}$	n	$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}}$	α	$\overset{1}{\Delta}$	$\overset{1}{\Delta}_{\alpha=1}$
0	0·99913	0	1·33775	0	—	—	—
0·24439	0·97133	+0·01924	1·35169	+0·01789	0·929	−28	−49
0·46076	0·94118	+0·03155	1·36337	+0·03080	0·976	+ 7	−28
0·64940	0·90273	+0·03006	1·36877	+0·02899	0·964	− 7	−41
0·83049	0·85785	+0·01947	1·37125	+0·02015	1·040	+50	+28
1	0·80889	0	1·36906	0	—	—	—
					Mittelwert 0·977		

Tabelle

Wasser—

(Hess, Diese Sitzungsber., Juli 1905).

0	0·99823	0	1·33739	0	—	—	—
0·24522	0·96957	+0·01934	1·35075	+0·01699	0·878	−12	− 84
0·46190	0·93858	+0·03179	1·36164	+0·02850	0·896	− 3	−122
0·65046	0·89944	+0·03029	1·36703	+0·02727	0·900	0	−114
0·83132	0·85393	+0·01965	1·36934	+0·01858	0·945	+33	− 41
1	0·80447	0	1·36757	0	—	—	—
					Mittelwert 0·900		

4.

Alkohol.

$t = 15°$. (n für Fraunhofer'sche Linie F).

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R}_v}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R}_v}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
$+0\cdot01630_2$	0·8473	−31	−117	$+0\cdot02028_7$	$1\cdot054_4$	− 37	+ 33
$+0\cdot02794_1$	0·8856	− 1	−151	$+0\cdot03511_2$	1·1129	− 4	+ 116
$+0\cdot02621_9$	0·8722	$-16\cdot_5$	−163	$+0\cdot03310_6$	1·1013	− 15	+ 100
$+0\cdot01821_8$	0·9357	$+41\cdot_5$	− 57	$+0\cdot02331_6$	1·1975	− 46	+ 124
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 0·8852				Mittelwert $1\cdot116_6$		

5.

Alkohol.

$t = 20°$. (n für Fraunhofer'sche Linie F).

0	—	—	—	0	—	—	—
$+0\cdot01549_2$	0·8010	−15	−153	$+0\cdot01927_8$	0·9968	−21	− 2
$+0\cdot02586_9$	0·8137	−11	−247	$+0\cdot03248_5$	1·0219	−10	$+ 22\cdot_5$
$+0\cdot02468_1$	0·8148	$- 7\cdot_5$	−237	$+0\cdot03114_5$	1·0282	$- 3\cdot_5$	+ 28
$+0\cdot01676_7$	0·8533	−17	−121	$+0\cdot02122_8$	1·0803	+33	+ 53
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 0·8207				Mittelwert 1·0318		

Tabelle

Wasser—

(Hess, Diese Sitzungsber., Juli 1905).

$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	$c=\frac{D-D_v}{D}$	n	$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}}$	α	$\overset{1}{\Delta}$	$\overset{1}{\Delta}_{\alpha=1}$
0	0·99707	0	1·33684	0	—	—	—
0·24605	0·96781	+0·01984	1·34969	+0·01653	0·878	−33	−118
0·46303	0·93605	+0·03225	1·36019	+0·02790	0·865	−18	−162
0·65148	0·89617	+0·03060	1·36526	+0·02656	0·868	−14	−153
0·83195	0·85006	+0·01984	1·36740	+0·01812	0·914	+25	− 64
1	0·80009	0	1·36557	0	—	—	—
					Mittelwert 0·881		

Tabelle

Wasser—

(Hess, Diese Sitzungsber., Juli 1905).

0	0·99567	0	1·33624	0	—	—	—
0·24690	0·96605	+0·02042	1·34888	+0·01694	0·829	− 14	−124
0·46415	0·93351	+0·03281	1·35880	+0·02759	0·841	− 14	−194
0·65251	0·89293	+0·03102	1·36355	+0·02618	0·844	− 7	−181
0·83259	0·84622	+0·02007	1·36557	+0·01814	0·904	+ 40	− 72
1	0·79576	0	1·36351	0	—	—	—
					Mittelwert 0·854		

6.

Alkohol.

$t = 25°$. (n für Fraunhofer'sche Linie F).

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R}_v}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R}_v}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
+0·01508$_4$	0·760	− 22	−188	+0·01876$_5$	0·946	−29	− 35
+0·02532$_6$	0·785	− 5	−287	+0·03179$_1$	0·986	− 7	− 15
+0·02405$_3$	0·786	− 3	−275	+0·03034$_1$	0·991	− 1	− 8
+0·01636$_8$	0·825	+ 29	−145	+0·02075$_1$	1·046	+34·$_5$	+ 30
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 0·798				Mittelwert 0·9922		

7.

Alkohol.

$t = 30°$. (n für Fraunhofer'sche Linie F).

0	—	—	—	0	—	—	—
+0·01542$_4$	0·7554	− 15	−197	+0·01923$_5$	0·9420	− 21	− 37
+0·02504$_0$	0·7632	− 15	−313	+0·03146$_3$	0·9589	− 17	− 43
+0·02369$_4$	0·7638	− 14	−307	+0·02990$_0$	0·9639	− 11	− 36
+0·01636$_5$	0·8154	+ 34	−134	+0·02075$_3$	1·0340	+ 38	+ 22
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 0·7744				Mittelwert 0·9747		

Tabelle

Terpentinöl—

(Hess, Diese Sitzungsber., Juli 1905).

$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	$c=\frac{D-D_v}{D}$	n	$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}}$	α	$\frac{1}{\Delta}$	$\frac{1}{\Delta_{\alpha=1}}$
0	0·86136	0	1·46635	0	—	—	—
0·19672	0·86344	−0·00265	1·47115	−0·00360	1·360	0	−45
0·39139	0·86609	−0·00456	1·47651	−0·00587	1·287	+19	−59
0·59418	0·87071	−0·00439	1·48308	−0·00600	1·367	0	−79
0·79170	0·87646	−0·00281	1·49054	−0·00399	1·418	− 8	−58
1	0·88355	0	1·49938	0	—	—	—
					Mittelwert* 1·364		

Tabelle

Terpentinöl—

(Hess, Diese Sitzungsber., Juli 1905).

0	0·86136	0	1·46913	0	—	—	—
0·19672	0·86344	−0·00265	1·47427	−0·00363	1·370	0	−46
0·39139	0·86609	−0·00456	1·48000	−0·00581	1·270	+20	−60
0·59418	0·87071	−0·00439	1·48697	−0·00593	1·351	+ 2	−75
0·79170	0·87646	−0·00281	1·49478	−0·00397	1·414	− 7	−57
1	0·88355	0	1·50402	0	—	—	—
					Mittelwert* 1·364		

* Für alle Farben.

8.

Benzol.

$t = 15°$. (n für Fraunhofer'sche Linie C).

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R_v}}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R_v}}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
-0·00297$_4$	1·122$_8$	- 1	-18	-0·00444$_0$	1·675$_8$	0	- 71
-0·00479$_4$	1·0532	+20	-13	-0·00715$_2$	1·568$_5$	+18	- 103
-0·00493$_9$	1·1249	- 2	-31	-0·00738$_7$	1·6827	- 2	- 121
-0·00328$_0$	1·1673	- 8	-27	-0·00493$_8$	1·7554	-10	- 87
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·1164				Mittelwert 1·6706		

9.

Benzol.

$t = 15°$. (n für Fraunhofer'sche Linie D).

0	—	—	—	0	—	—	—
-0·00298$_4$	1·126$_0$	- 2	-18	-0·00449$_7$	1·6970	- 4	- 73
-0·00476$_4$	1·044$_7$	+16	-11	-0·00717$_7$	1·5738	+19	- 105
-0·00486$_2$	1·1075	0	-27	-0·00734$_8$	1·6739	0	- 120
-0·00325$_4$	1·1580	- 8	-26	-0·00494$_8$	1·7590	-10	- 89
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·1091				Mittelwert 1·6759		

10.

Benzol.

$t = 15°$. (n für Fraunhofer'sche Linie F).

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R_v}}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R_v}}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
-0·00297$_3$	1·1219	- 2	-18	-0·00460$_3$	1·7370	- 2	- 79
-0·00477$_4$	1·0468	+15	-12	-0·00737$_7$	1·6177	+18	- 115
-0·00482$_1$	1·0982	+ 2	-25	-0·00748$_1$	1·7042	+ 2	- 128
-0·00325$_1$	1·1570	- 9	-26	-0·00507$_0$	1·8044	-11	- 95
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·1060				Mittelwert 1·7158		

11.

Benzol.

$t = 15°$. (n für Fraunhofer'sche Linie G').

0	—	—	—	0	—	—	—
-0·00288$_9$	1·0902	+ 1	-14	-0·00460$_3$	1·7372	+ 2	- 80
-0·00470$_6$	1·0319	+18	- 8	-0·00746$_3$	1·6367	+21	- 120
-0·00487$_7$	1·1109	- 3	-29	-0·00774$_7$	1·7648	- 3	- 127
-0·00327$_6$	1·1659	-11	-29	-0·00523$_5$	1·8629	-13	- 103
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·0997				Mittelwert 1·7504		

Tabelle

Wasser—Chlor-

(Van der Willigen, Arch. Mus. Teyl. I, II, III).

$\frac{v_2}{v_1+v_2}$	D	$c=\frac{D-D_v}{D}$	n	$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}}$	α	$\frac{1}{\Delta}$	$\frac{1}{\Delta_{\alpha=1}}$
0	0·99677	0	1·33251	0	—	—	—
0·3752	1·02597	+0·00256	1·35098	+0·00231	0·90	0	+31
0·4577	1·03202	+0·00277	1·35495	+0·00254	0·92	+ 2	+36
0·5676	1·04004	+0·00290	1·36015	+0·00255	0·88	− 2	+32
0·7811	1·05399	+0·00182	1·36980	+0·00143	0·78	+ 2	+20
1	1·06757	0	1·37947	0	—	—	—
					Mittelwert 0·9		

Tabelle

Wasser—Chlor-

(Van der Willigen, Arch. Mus. Teyl. I, II, III).

0	0·99737	0	1·33259	0	—	—	—
0·3332	1·14348	+0·01060	1·37392	+0·01203	1·13	−12	+54
0·5297	1·22407	+0·01120	1·39633	+0·01309	1·17	0	+93
0·7191	1·29697	+0·00808	1·41611	+0·00968	1·20	+11	+67
1	1·39945	0	1·44313	0	—	—	—
					Mittelwert 1·17		

12.

ammoniumlösung.

$t = 26 \cdot 3°$. (n für Na-Linie).

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R_v}}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R_v}}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
0	—	—	—	0	—	—	—
+0·002632	1·028	+1·5	+2·8	+0·002158	0·843	−0·4	+ 161
+0·002870	1·036	+2·5	+3·4	+0·002410	0·870	−1·7	+ 177
+0·002915	1·005	−0·8	+0·7	+0·002514	0·867	+2·2	+ 185
+0·001785	0·981	−2·7	−1·4	+0·001474	0·810	+2·1	+ 114
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·0125				Mittelwert 0·848		

13.

calciumlösung.

$t = 25°$. (n für Natriumlinie).

0	—	—	—	0	—	—	—
+0·01298	1·2245	− 12	+ 101	+0·010843	1·0229	−14·5	+ 8
+0·01398	1·2482	− 2	+ 126	+0·012018	1·0730	+ 3	+ 28
+0·01036	1·2822	+ 12	+ 109	+0·008888	1·0992	+10	+ 29
0	—	—	—	0	—	—	—
	Mittelwert 1·2516				Mittelwert 1·0650		

Tabellen 8 bis 11. Terpentinöl—Benzol. $t = 15°$.

Die in den Tabellen 8 bis 11 behandelte Mischung Terpentinöl—Benzol (n für C, D, F und G'-Linie) wurde aufgenommen als Type einer Mischung zweier Isolatoren. Die Resultate betreffs der Änderung der Koeffizienten α, β, γ mit der Wellenlänge des angewandten Lichtes werden weiter unten (§ 13) diskutiert.

Die Volumdilatation ist sehr gering und verläuft regelmäßig (siehe die Tafel). Die Konstanz der Koeffizienten α, β, γ ist auch hier gut gewahrt, daher auch die Übereinstimmung der nach den neuen Formeln sich ergebenden Brechungsexponenten mit den beobachteten vorzüglich (vergl. die Kolumnen Δ^{I}, Δ^{II}, Δ^{III}).

Von den alten Formeln stimmt hier durchwegs die Lorentz'sche $\frac{n^2-1}{n^2+2}$-Formel am besten (siehe Kolumne $\Delta^{II}_{\beta=1}$), die von Newton am schlechtesten. Deshalb ist wiederum β am wenigsten, γ am meisten von 1 verschieden.

Tabelle 12. Wasser—Chlorammoniumlösung. $t = 26 \cdot 3°$.

Als zweite Komponente dieser Mischung ist nicht Chlorammonium selbst, sondern gesättigte Chlorammoniumlösung angenommen.

Trotzdem sich Dichten und Brechungsexponenten der beiden Bestandteile sehr wenig unterscheiden und auch die Volumkontraktion sehr gering ist, geben die alte Newton'sche (n^2-1)-Formel und die Beer-Landolt'sche ($n-1$)-Formel schlechte Resultate. Die Lorentz'sche Formel stimmt vollkommen.

Die drei neuen Formeln jedoch stimmen ganz gleichmäßig ebenso gut mit der Beobachtung überein. Die Konstanz der α, β, γ für die verschiedenen Prozentgehalte ist gewahrt.

Tabelle 13. Wasser—Chlorcalciumlösung. $t = 25°$.

Diese Mischung wurde als zweiter Repräsentant einer Salzlösung gewählt. Trotz der starken Volumkontraktion von in maximo 1% des Gesamtvolumens stimmt hier die alte

Newton'sche n^2—1-Formel recht gut (γ nahe an 1), die Beer-Landolt'sche und Lorentz'sche dagegen sehr schlecht.

Der vielleicht vorhandene ganz geringe Gang der α, β, γ mit dem Prozentgehalt (der sich übrigens auch bei anderen Salzlösungen zeigt) hat auf die Resultate der Berechnung von Brechungsexponenten nach den neuen Formeln keinen Einfluß. Letztere stimmen, wie man den Kolumnen Δ^{I}, Δ^{II}, Δ^{III} entnimmt, vorzüglich mit den beobachteten Werten überein.

Die Koeffizienten α, β, γ sind hier sämtlich größer als 1, daher liegen auch die Scheitelpunkte der Kurven $\frac{R-R_v}{R}$ höher als der der Volumkontraktionskurve $\frac{D-D_v}{D}$ (siehe die Tafel).

Ich glaube somit für Flüssigkeitsgemische heterogenster Natur den Nachweis erbracht zu haben, daß die von mir aufgestellte allgemeine Beziehung

$$\frac{R-R_v}{R} = qc$$

für alle drei Formen $\overset{\mathrm{I}}{R}$, $\overset{\mathrm{II}}{R}$, $\overset{\mathrm{III}}{R}$ tatsächlich mit einer Annäherung erfüllt ist, welche die Berechnung von Brechungsexponenten nach den daraus resultierenden neuen Formeln auf durchschnittlich 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale genau gestattet.

Von einer zahlenmäßigen Prüfung der Formeln (7), (8), (9) auf p. 958 und 959 zur Berechnung der Volumprozente, der Kontraktion (beziehungsweise der Dichte) am vorliegenden Beobachtungsmaterial glaube ich ganz absehen zu dürfen. Die in den Tabellen gesammelten Beobachtungsdaten stellen doch ein in sich geschlossenes, durch gewisse Bedingungsgleichungen verknüpftes Zahlenmaterial vor (vergl. § 5); da die Eignung der neuen Formeln zur Berechnung von Brechungsexponenten nun sichergestellt ist, ist damit auch die Möglichkeit, mit derselben absoluten Genauigkeit die Größen $\frac{v_2}{v_1+v_2}$, $\frac{D-D_v}{D}$ oder D nach den betreffenden Formeln (7), (8), (9) zu berechnen, bereits erwiesen.

§ 12. Untersuchung der Abhängigkeit der Koeffizienten α, β, γ von der Temperatur.

Der Bestimmung von Brechungsexponenten bei Flüssigkeitsmischungen sind von Natur aus enge Grenzen hinsichtlich der Temperatur vorgesteckt.

Den rein experimentellen Schwierigkeiten des Konstanthaltens der Temperatur kann durch Umspülen des Flüssigkeitsprismas mit Hilfe einer Warmwasserleitung abgeholfen werden, wie ich es in meiner ersten Arbeit (siehe Zitat auf p. 949) auch ausgeführt habe.

Eine unvermeidliche Fehlerquelle bilden hingegen die ganz unkontrollierbaren Änderungen des Prozentgehaltes der Gemische, wenn deren Komponenten nur einigermaßen verschiedenen Flüchtigkeitsgrad besitzen.

Das in der Literatur vorliegende sehr spärliche Beobachtungsmaterial über Flüssigkeitsmischungen bei verschiedenen Temperaturen ist wegen der letzterwähnten Fehlerquelle nicht immer ganz einwandfrei.

Ich zog es vor, meine eigenen Messungen vom Jahre 1905 an der Mischung Wasser—Alkohol zur Berechnung zu verwenden, da bei derselben die denkbar peinlichsten Vorsichtsmaßregeln beobachtet worden waren.

Ein kleiner Auszug aus den Tabellen 4 bis 7 wird die Übersicht bedeutend erleichtern.

Betrachten wir zunächst den Gang der Volumkontraktion mit der Temperatur, z. B. beim dritten Gemische Wasser—Alkohol.

Wasser—Alkohol.

	$t =$			
	15°	20°	25°	30°
$\frac{D-D_v}{D}$	+0·03006	+0·03029	+0·03060	+0·3102

Die Volumkontraktion nimmt also mit steigender Temperatur zu. Gerade umgekehrt verhalten sich bei dieser Mischung die Kontraktionen des Refraktionsvermögens.

Es ergab sich nämlich (wieder für den dritten Prozentgehalt der Tabellen 4 bis 7):

Wasser—Alkohol.

	15°	20°	25°	30°
$\frac{\overset{I}{R}-\overset{I}{R}_v}{\overset{I}{R}}$	+0·02899	+0·02727	+0·02656	+0·02618
$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R}_v}{\overset{II}{R}}$	+0·02622	+0·02468	+0·02405	+0·02369
$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R}_v}{\overset{III}{R}}$	+0·03311	+0·03115	+0·03034	+0·02990

Die notwendige Folge des entgegengesetzten Ganges der Kontraktionen $\frac{R-R_v}{R}$ und $\frac{D-D_v}{D}$ bei der Mischung Wasser—Alkohol ist natürlich, daß auch die entsprechenden Quotienten α, β, γ einen Gang mit der Temperatur aufweisen, wie man aus der folgenden Zusammenstellung ersieht:

Wasser—Alkohol.

	15°	20°	25°	30°
α	0·977	0·900	0·881	0·854
β	$0{\cdot}885_2$	$0{\cdot}820_7$	0·798	$0{\cdot}774_4$
γ	$1{\cdot}116_6$	$1{\cdot}031_8$	$0{\cdot}992_2$	$0{\cdot}974_7$

Die Koeffizienten α, β, γ nehmen alle mit zunehmender Temperatur stetig ab, doch ist diese Änderung sehr gering. Würden wir z. B. unsere Konstanten α, β, γ für $t = 20°$ bestimmt haben und für dieselbe Mischung bei 30° zur Berechnung von Brechungsexponenten verwenden, so würden die Abweichungen Δ^{I}, Δ^{II}, Δ^{III} kaum um durchschnittlich eine Einheit der vierten Dezimale erhöht werden, wie man sich durch direktes Einsetzen leicht überzeugen kann.

Ein einmalig bei irgend einer Temperatur t bestimmter Koeffizient α, β oder γ wird daher auch bei Berechnungen an derselben Mischung für eine Temperatur $t \pm 10°$ noch ausreichend genaue Resultate liefern.

Die Mischung Wasser—Alkohol stellt übrigens bezüglich der Änderung der α, β, γ mit der Temperatur einen Extremfall dar. Bei anderen Mischungen liegen die Verhältnisse weit günstiger.

Buchkremer (l. c.) findet z. B. für ein Wüllner'sches Gemisch Alkohol—Glyzerin

bei 10°	$\alpha = 1 \cdot 047$,
» 20	$1 \cdot 050$,
» 30	$1 \cdot 050$.

Da sich das Pulfrich'sche α hier so wenig ändert, bleibt auch unser β und γ praktisch konstant. Bei Alkohol—Glyzerin nimmt sowohl die Volumkontraktion $\frac{D-D_v}{D}$ als auch die des Refraktionsvermögens

$$\frac{\overset{I}{R}-\overset{I}{R}_v}{\overset{I}{R}}$$

mit steigender Temperatur zu.

Bei der Mischung Alkohol—Schwefelkohlenstoff (Wüllner) ergibt sich nach Buchkremer

für $t = 10°$	$\alpha = 2 \cdot 15$,
» 20	$2 \cdot 03$,
» 30	$1 \cdot 93$.

Wieder erfolgt hier die Änderung des $\frac{D-D_v}{D}$ im gleichen Sinne ~~wie die des~~

$$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}};$$

beide nehmen mit steigender Temperatur zu, die Volumkontraktion $\frac{D-D_v}{D}$ jedoch viel stärker. Daraus erklärt sich der geringe Gang des Pulfrich'schen α mit der Temperatur.

Durch die eben erwähnten Resultate Buchkremer's werden unsere oben gezogenen Schlußfolgerungen vollinhaltlich bestätigt. Innerhalb der gewöhnlichen Temperaturgrenzen für Bestimmungen von Brechungsexponenten können die Koeffizienten α, β, γ als praktisch konstant betrachtet werden.

§ 13. Untersuchung der Abhängigkeit der Koeffizienten α, β, γ von der Wellenlänge des angewandten Lichtes.

Zur Feststellung der allgemeinen Gültigkeit der Beziehung

$$\frac{R-R_v}{R} = qc$$

ist es noch unbedingt erforderlich, nachzusehen, ob dieselbe auch für jede beliebige Wellenlänge des sichtbaren Spektrums erfüllt ist, mit anderen Worten, ob sich der Quotient q, beziehungsweise das spezielle α, β, γ mit der Wellenlänge des verwendeten Lichtes merklich ändert.

Betrachten wir zunächst eine Mischung zweier Substanzen mit nicht allzu starker Dispersion, z. B. Terpentinöl—Benzol (siehe Tabellen 8 bis 11), bei welcher die Brechungsexponenten für vier weit auseinanderliegende Linien des Spektrums, nämlich C, D, F und G' bestimmt sind. Zur besseren Übersicht seien die Koeffizienten α, β, γ auszugsweise wiedergegeben (aus den Tabellen 8 bis 11):

Terpentinöl—Benzol.

Linie	α	β	γ
C	1·358	$1\cdot116_4$	$1\cdot670_6$
D	1·351	$1\cdot109_1$	$1\cdot675_9$
F	1·366	$1\cdot106_0$	$1\cdot715_8$
G'	1·382	$1\cdot099_7$	$1\cdot750_4$

Man sieht, daß die Änderung der Koeffizienten α, β, γ mit der Wellenlänge hier sehr gering ist; sie beträgt kaum 3°/₀ und man könnte unbeschadet der Genauigkeit zur Berechnung der Brechungsexponenten ein Gesamtmittel für alle Farben verwenden.

Dies ist auch für die α geschehen. Den Berechnungen in Tabelle 8 bis 11 ist ein Mittelwert $\alpha = 1\cdot36_4$ für alle Wellenlängen zugrunde gelegt und die Resultate stimmen sehr gut mit den Beobachtungen überein (siehe die betreffenden Kolumnen Δ^1).

Merkwürdig ist der Umstand, daß bei dieser Mischung die α und γ mit abnehmender Wellenlänge zunehmen, während β abnimmt.

Betrachten wir nun weiters eine Mischung zweier Substanzen, von denen eine sehr starke Disposition besitzt, z. B. Alkohol—Schwefelkohlenstoff (beobachtet von Wüllner, l. c.).

Zur Ergänzung der Tabelle 1 habe ich auch für die Linien C und G' die entsprechenden Koeffizienten α, β, γ berechnet und die Resultate in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

Hier wird der Gang der α, β, γ mit der Wellenlänge merklich, und zwar erfolgt auch hier die Änderung in stetiger Weise. Die α und γ nehmen mit abnehmender Wellenlänge zu, die β nehmen ab.

Alkohol—Schwefelkohlenstoff.

Prozentgehalt	α	β	γ
Linie *C*			
$\frac{v_2}{v_1+v_2}$ = 0·39	1·92	0·422	3·903
$\frac{v_2}{v_1+v_2}$ = 0·57	1·82	0·426	3·602
$\frac{v_2}{v_1+v_2}$ = 0·71	1·79	0·432	4·110
Mittelwert für alle Prozentgehalte	**1·849**	**0·420**	**3·975**
Linie *F*			
$\frac{v_2}{v_1+v_2}$ = 0·39	2·17	0·386	4·499
$\frac{v_2}{v_1+v_2}$ = 0·57	2·03	0·385	4·111
$\frac{v_2}{v_1+v_2}$ = 0·71	2·29*	0·398	4·429
Mittelwert für alle Prozentgehalte	**2·16**	**0·390**	**4·346**
Linie *G'*			
$\frac{v_2}{v_2+v_1}$ = 0·39	2·35	0·365	4·931
$\frac{v_2}{v_2+v_1}$ = 0·57	2·20	0·373	4·497
$\frac{v_2}{v_2+v_1}$ = 0·71	2·12	0·318	5·043
Mittelwert für alle Prozentgehalte	**2·233**	**0·352**	**4·824**

* Dem von Pulfrich (beziehungsweise Buchkremer) l. c. angeführten Wert von 1·98 liegt eine fehlerhaft bestimmte Kontraktion $\frac{D-D_v}{D}$ zugrunde.

Bei stark dispergierenden Substanzen ist also die Veränderung der Quotienten α, β, γ mit der Wellenlänge nicht mehr zu vernachlässigen und wenn man bei Berechnung von Brechungsexponenten ein Gesamtmittel für alle Farben verwenden würde, so wären die Abweichungen für extrem große oder extrem kleine Wellenlängen nicht mehr innerhalb der von mir eingangs des § 11 postulierten Fehlergrenze.

§ 14. Die »Temperaturmischungen«.

Man kann sich eine Flüssigkeit von bestimmter Temperatur als Mischung eines bestimmten Volumens derselben Flüssigkeit bei einer höheren Temperatur mit einem bestimmten anderen Volumen derselben Flüssigkeit bei einer tieferen Temperatur vorstellen. Dies ist mit dem Worte »Temperaturmischung« gemeint. Auch bei einer derartigen Mischung treten entweder positive oder negative Volumänderungen auf.

Schon Pulfrich hat (l. c.) seine Formel auf Temperaturmischungen angewendet und bei Wasser 0° bis Wasser 100° vollinhaltlich bestätigt gefunden.

Stellen wir uns vor, ein Volumen v_1 einer Flüssigkeit von der Temperatur t_1, spezifischen Wärme w_1 und der Dichte D_1 sei gemischt mit einem Volumen v_2 derselben Flüssigkeit bei einer höheren Temperatur t_2 (spezifische Wärme w_2, Dichte D_2). Die Temperatur des Gemisches sei t.

Setzt man die von der kälteren Flüssigkeit aufgenommene Wärme gleich der von der wärmeren Flüssigkeit abgegebenen, so erhält man

$$v_1 D_1 w_1 (t - t_1) = v_2 D_2 w_2 (t_2 - t); \qquad t_2 > t > t_1.$$

Hieraus berechnet sich der Anteil, den die Flüssigkeit von der Temperatur t_2 an der Mischung hat, wenn die Mischungstemperatur t erzielt werden soll, zu

$$\frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{D_1 w_1 (t - t_1)}{D_1 w_1 (t - t_1) + D_2 w_2 (t_2 - t)}.$$

Die nach dieser Formel gefundenen Zahlen für die Volumprozente sind den Berechnungen der beiden folgenden Tabellen 14 und 15 zugrunde gelegt und in ganz gleicher Weise, wie bei den übrigen Tabellen, daraus die Kontraktionen $\frac{D-D_v}{D}$, beziehungsweise

$$\frac{\overset{\mathrm{I}}{R}-\overset{\mathrm{I}}{R}_v}{\overset{\mathrm{I}}{R}} \text{ etc.}$$

abgeleitet. Desgleichen sind auch, wie bisher, in den Kolumnen Δ^{I}, Δ^{II}, Δ^{III} die Abweichungen der nach den drei neuen Formeln und in den Kolumnen $\Delta^{\mathrm{I}}_{\alpha=1}$, $\Delta^{\mathrm{II}}_{\beta=1}$, $\Delta^{\mathrm{III}}_{\gamma=1}$ die Abweichungen der nach den alten Formeln berechneten Brechungsexponenten von den beobachteten in Einheiten der fünften Dezimale verzeichnet.

Die Berechnungen sind an zwei von F. Ketteler stammenden Versuchsreihen: an Alkohol zwischen —7·85° und +76·34° und an Schwefelkohlenstoff zwischen —20° und +40° ausgeführt worden.

Bei Alkohol zeigt sich, wie man sieht, eine Dilatation des Volumens, bei Schwefelkohlenstoff eine sehr geringe Kontraktion.

Die Konstanz der Koeffizienten α, β, γ ist nicht immer ganz befriedigend zu nennen, doch reicht sie immerhin aus, um die Brechungsexponenten bei einer Zwischentemperatur t mit einer mittleren Abweichung von 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale zu berechnen (siehe Kolumne Δ^{I}, Δ^{II}, Δ^{III}). Die alten Formeln geben ebenfalls ziemlich gute Resultate, weil die Volumkontraktionen gering sind.

Die Abweichungen bleiben also auch bei den »Temperaturmischungen« gleichmäßig innerhalb der von mir gestellten Fehlergrenze und damit glaube ich auch für die sogenannten Temperaturmischungen die Anwendbarkeit und Gültigkeit meiner Formeln erwiesen zu haben.

Tabelle

Alkohol (—7·85°) mit

(F. Ketteler, Wied. Ann., *33*, 529).

Temperatur $t°$	$c=\frac{D-D_v}{D}$	n	$\frac{\frac{1}{R}-\frac{1}{R_v}}{\frac{1}{R}}$	α	$\frac{1}{\Delta}$	$\frac{1}{\Delta_{\alpha=1}}$
- 7·85	—	1·37319	—	—	—	—
12·98	-0·00336	1·36486	-0·00245	0·730	+ 2	+44
39·89	-0·00456	1·35361	-0·00307	0·673	+12	+53
51·32	-0·00398	1·34823	-0·00337	0·846	-13	+21
76·34	—	1·33630	—	—	—	—
				Mittelwert 0·750		

Tabelle

Schwefelkohlenstoff (—20°) mit

(F. Ketteler, Wied. Ann., *35*, 680).

-20	—	1·65950	—	—	—	—
-10	+0·00036	1·65158	+0·000324	0·8995	- 1	- 2
+10	+0·00099	1·63593	+0·000925	0·9340	+ 1	- 4
+30	+0·00072	1·62004	+0·000679	0·9430	+ 1	- 3
+40	—	1·61187	—	—	—	—
				Mittelwert 0·9255		

14.

Alkohol (+76·34°).

(n für Natriumlicht).

$\frac{\overset{II}{R}-\overset{II}{R_v}}{\overset{II}{R}}$	β	$\overset{II}{\Delta}$	$\overset{II}{\Delta}_{\beta=1}$	$\frac{\overset{III}{R}-\overset{III}{R_v}}{\overset{III}{R}}$	γ	$\overset{III}{\Delta}$	$\overset{III}{\Delta}_{\gamma=1}$
—	—	—	—	—	—	—	—
−0·00202	0·6003	+ 2	+55	−0·00309	0·9191	+ 3	+ 9
−0·00247	0·5413	+13	+82	−0·00394	0·8636	+13	+ 19
−0·00277	0·6948	−13	+47	−0·00425	1·0674	−14	− 8
—	—	—	—	—	—	—	—
	Mittelwert 0·6121				Mittelwert 0·9500		

15.

Schwefelkohlenstoff (+40°).

(n für Natriumlicht).

—	—	—	—	—	—	—	—
+0·00040$_9$	1·1364	+ 3	+ 4	+0·00021$_7$	0·6036	− 3	− 7
+0·00101$_7$	1·0271	− 1	+ 2	+0·00081$_0$	0·8182	+ 2	− 9
+0·00069$_9$	0·9706	− 4	+ 2	+0·00064$_8$	0·9007	+ 5	− 4
—	—	—	—	—	—	—	—
	Mittelwert 1·0447				Mittelwert 0·7742		

V. Zusammenfassung der Hauptergebnisse.

1. Durch Berechnungen an Mischungen verschiedenster Natur wurde gezeigt, daß die von mir aufgestellte Fundamentalbeziehung

$$\frac{R-R_v}{R} = qc$$

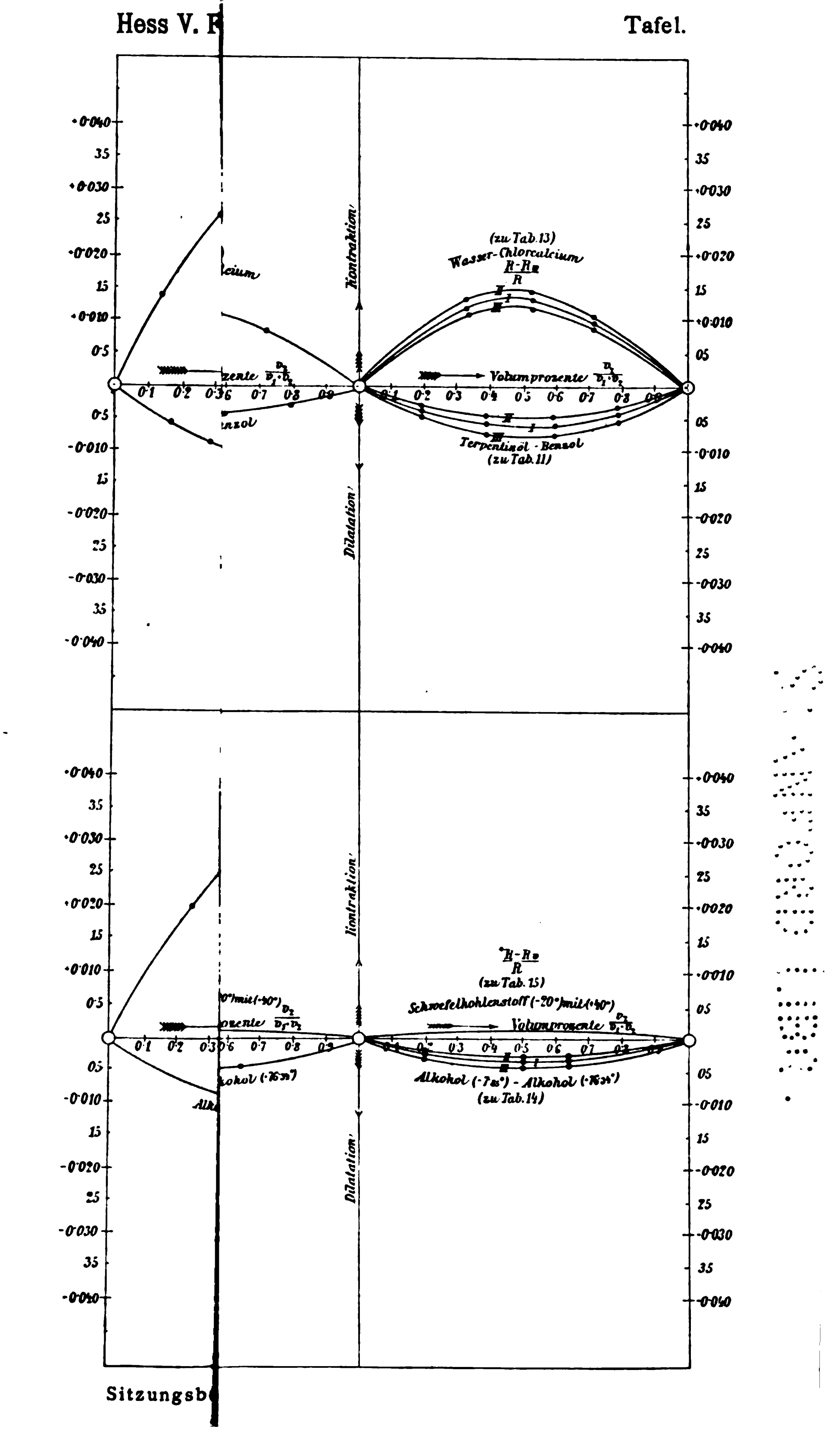
tatsächlich für alle gebräuchlichen Formen des Refraktionsvermögens R erfüllt ist, daß also das Verhältnis q der Kontraktion des Refraktionsvermögens zu der des Volumens für alle Volumverhältnisse einer Mischung eine konstante, positive Zahl ist.

2. Die aus der Fundamentalbeziehung resultierenden Mischungsformeln stimmen alle mit den Beobachtungen gleich gut überein. Die mittlere Abweichung der berechneten Brechungsexponenten von den beobachteten beträgt in maximo 1 bis 2 Einheiten der vierten Dezimale.

3. Die Fundamentalbeziehung gilt fast unabhängig von der Temperatur und von der Wellenlänge des angewandten Lichtes.

4. Die neuen Formeln gestatten auch die Berechnung der Brechungsexponenten einer Flüssigkeit bei einer Zwischentemperatur, wenn dieselben für zwei Extremtemperaturen vorgegeben sind.

5. Die von Pulfrich und mir in früheren Arbeiten aufgestellten Gleichungen sind als Spezialfälle in der obigen Fundamentalbeziehung enthalten.



(zu Tab. 13)
Wasser-Chlorcalcium
Kontraktion
Dilatation
Volumprozente
Terpentinöl - Benzol
(zu Tab. 11)
(zu Tab. 15)
Schwefelkohlenstoff (-20°) mit (+40°)
Alkohol (-7..°) - Alkohol (-76..°)
(zu Tab. 14)

Zur Kenntnis der Magnetisierungszahlen seltener Erden

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1908.)

Die Kenntnis der bemerkenswerten magnetischen Eigenschaften der seltenen Erden hat in den letzten Jahren keine wesentliche Förderung erfahren. Der Grund dafür ist der, daß die Vorbedingung hierfür, die Reindarstellung der Individuen dieser Substanzen, wegen der außerordentlichen Schwierigkeiten, die den Trennungen entgegenstehen, nur langsame Fortschritte macht.

In jüngster Zeit ist es aber C. Auer v. Welsbach[1] gelungen, die Spaltung einer dieser Erden, des Ytterbium's, in zwei neue Elemente, das Aldebaranium (Ad) mit dem Atomgewicht $\alpha = 172 \cdot 90$, und das Cassiopeium (Cp), $\alpha = 174 \cdot 23$, durchzuführen.

Dank seinem Entgegenkommen war es mir ermöglicht, an den reinsten Oxyden dieser Präparate Messungen der magnetischen Suszeptibilität nach der wiederholt beschriebenen Methode[2] mittels der eisenfreien Wage durchzuführen.

---

[1] Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien, Bd. 116, Abt. IIb, p. 1425 (1907).

[2] Ebenda, Bd. 108, Abt. IIa, p. 171 und 861 (1899); — Bd. 109, Abt. IIa, p. 284 und 400 (1900); — Bd. 110, Abt. IIa, p. 541 (1901); — Bd. 111, Abt. IIa, p. 38 (1902); — Bd. 113, Abt. IIa, p. 1007.

Die Substanzen wurden als Pulver in einer kleinen Eprouvette verwendet, die in ein Magnetfeld von rund 10000 Gauß hing. Es bedeuten im folgenden:

μ das Molekulargewicht,
g die verwendete Gewichtsmenge in Gramm,
n die Zahl der Gramm-Moleküle, die bei der jeweiligen dichteren oder lockeren Pulveranordnung in einem Liter vorhanden wäre,
k die molekulare Suszeptibilität, wobei diese auf 1 Grammmolekül im Liter bezogen ist.

Substanz	μ	g	n	$k.10^6$	$k.10^6$ für das Element
Ad_2O_3	394	0·389	1·52	18·3	Ad ∾ **9·15**
Cp_2O_3	396·5	0·151	1·12	3·78	Cp ∾ **1·9**

Es wurde bereits darauf hingewiesen,[1] daß zwischen der Atomvolumen-Atomgewichtkurve und dem magnetischen Verhalten die Relation besteht, daß den Minimis und den diesen vorangehenden Teilen obiger Kurve die stärkst magnetischen Substanzen zugeordnet sind. Dementsprechend wäre anzunehmen, daß dem Aldebaranium ein kleineres Atomvolumen zukomme als dem Cassiopeium.

Wiederholt habe ich ferners auf den großen Parallelismus zwischen der Linienzahl des Spektrums und der Magnetisierungszahl einer Substanz aufmerksam gemacht, indem den stark magnetischen die linienreichen, den diamagnetischen linienarme Spektren entsprechen. Damit steht es in gutem Einklang, daß nach C. Auer v. Welsbach[2] das Spektrum des Ad weit linienreicher ist als das des Cp.

---

1 Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien, Bd. 108, Abt. IIa, p. 895 (1899).

2 L. c., p. 1438.

Das Ytterbium,[1] dem ein Atommagnetismus $k.10^6 = 6$ zugeschrieben war, zerfällt sonach in das erheblich magnetischere Aldebaranium ($k.10^6 = 9$) und das minder magnetische Cassiopeium ($k.10^6 = 2$).

Auffallend erscheint es, daß nicht nur die Oxyde rein weiße Pulver sind, sondern überhaupt die Salze der beiden Körper nicht gefärbt sind,[2] wenn die Säure nicht gefärbt ist. Dies weicht von dem Verhalten der Salze der anderen stark magnetischen Elemente ab, da diese sich im allgemeinen durch besonders auffallende Farben bemerkbar machen (man denke an V, Cr, Mn, Fe, Co und Ni sowie an Ce, Pr, Nd, Sa, Gd, Ho, Er).

In jüngster Zeit ist es G. Urbain[3] gelungen, das Dysprosium in bedeutend reinerem Zustand zu erhalten, als dieses Element bisher bekannt war. Er hat auch eine Bestimmung des spezifischen Magnetismus eines Sesquioxyds dieser Substanz durchgeführt und erhielt, bezogen auf die Masseneinheit, für $\varkappa' = 290.10^{-6}$.

Mit Recht vergleicht er diese Zahl mit den von mir seinerzeit für Holmium angegebenen Werten. Eine Gegenüberstellung der von G. Urbain für das Dysprosium angegebenen Spektrallinien mit den von F. Exner und E. Haschek an den Holmiumpräparaten durchgeführten Spektralaufnahmen[4] zeigt nämlich, daß so gut wie sämtliche Linien des Dy in obigem Ho-Spektrum in vergleichbaren Intensitäten enthalten sind.

Es fehlen im Spektrum des Holmiums von den 96 Linien G. Urbain's bloß die »ziemlich starke« Linie bei 2955·4 und die »starke« bei 2969·2 Angström-Einheiten. Die Fehlergrenze Δ von 0·2, die G. Urbain angibt, wird ferners überschritten bei den Wellenlängen 3170·4 ($\Delta = 0·3$), 3385·9 ($\Delta = 0·7$), 3591·3 ($\Delta = 0·3$), 3594·8 ($\Delta = 0·4$). Starke Unterschiede in

---

1 Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien, Bd. 110, Abt. IIa, p. 553.

2 C. Auer v. Welsbach, l. c., p. 1436.

3 C. r. *146*, p. 922, 1908.

4 Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien, Bd. 110, Abt. IIa, p. 487 (1901).

der Angabe über die Intensitäten weisen die Linien 3221·5 und 3266·4 auf. Die sehr starke Linie 3216·7 wird von G. Urbain dem Dy, von F. Exner und E. Haschek dem Y zugeschrieben.

Zieht man die Dysprosiumlinien aus dem Ho-Spektrum heraus, so erübrigen als starke Linien der Intensität über (3) (in der Bezeichnung von F. Exner und E. Haschek) die folgenden:

3156·61	(3)	3600·52	(3)	3982·13	(5)
3282·96	(3)	3629·54	(3)	3983·86	(4)
3289·47	(4)	3672·50	(3)	3984·40	(3)
3399·10	(3)	3674·28	(3)	3991·50	(3)
3407·92	(4)	3676·78	(3)	3996·85	(3)
3413·91	(3)	3698·39	(3)	4032·66	(3)
3441·10	(3)	3753·65	(3)	4046·15	(3)
3454·44	(3)	3796·87	(3)	4050·78	(3)
3456·15	(5)	3806·46	(3)	4073·32	(3)
3474·42	(4)	3810·87	(3)	4103·48	(6)
3484·91	(3)	3836·63	(3)	4111·52	(3)
3505·59	(3)	3853·19	(3)	4128·42	(3)
3509·26	(4)	3891·16	(8)	4129·59	(3)
3563·31	(3)	3898·71	(8)	4143·26	(3)
3563·87	(3)	3923·50	(3)	4168·11	(3)
3574·33	(3)	3931·69	(4)	4218·28	(3)
3577·04	(3)	3947·10	(3)	4225·36	(3)
3585·21	(3)	3954·70	(3)		
3585·95	(3)	3957·96	(3)		

Hierzu kommen noch 178 Linien der Intensität (2) und zahlreiche schwächere.

Das Restelement, das als Begleiter des Dy im Holmium vorhanden ist, besitzt also jedenfalls selbst auch eine ziemlich beträchtliche Linienzahl und wir dürfen nach der vorerwähnten Relation annehmen, daß ihm dementsprechend eine hohe Magnetisierungszahl zukomme. Dies folgt auch daraus, daß der Atommagnetismus des reinen Dysprosium nicht sehr viel höher ist als der des Holmium.

Berechnet man nämlich aus den Angaben Urbain's für den spezifischen Magnetismus (χ') den Molekularmagnetismus nach der Formel

$$k = \frac{\mu \varkappa'}{1000}$$

und setzt für das Molekularvolumen μ des Dy_2O_3 den Wert 370 (wobei selbst Fehler um mehrere Einheiten das Resultat nicht wesentlich beeinflussen), so ergibt sich für das Molekül

$$k.10^6 = 107 \cdot 3,$$

also der Atommagnetismus für Dysprosium

$$k.10^6 = 53 \cdot 7.$$

Die von mir seinerzeit untersuchten Präparate[1] lieferten Werte des Atommagnetismus von Holmium bis zu $k.10^6 = 50$ und ich bemerkte dazu, daß dieser größte Wert noch als untere Grenze anzusehen sei.

Dazu kommt, daß die Suszeptibilität hier nicht mehr ganz unabhängig von der Feldstärke erscheint, vielmehr mit abnehmender Intensität derselben ein wenig zunimmt.

Zwei Präparate Auer v. Welsbach's, ein Holmium- und ein Dysporosiumnitrat, deren jedes von ihm aus zwei Komponenten bestehend angesehen wurde, deren eine dem Ho- und dem Dy-Präparat gemeinsam ist, die anderen aber in beiden Substanzen verschiedene sind, ergaben

für Ho ...... $k.10^6 = 50$,
» Dy ...... $k.10^6 = 46$.

Dies weist abermals darauf hin, daß der stark magnetische Bestandteil den beiden Präparaten gemeinsam ist.

Es sei bei dieser Gelegenheit erwähnt, daß ich durch die Freundlichkeit L. Haitinger's und C. Ulrich's gelegentlich die Möglichkeit hatte, metallische Pulver von Yttrium-Erbiumgemisch sowie von Erbium-Holmiumgemisch zu untersuchen. Dieselben erwiesen sich nicht wesentlich magnetischer als die Oxyde, zeigten aber deutliche, wenn auch geringe Remanenz.

---

[1] L. c., Bd. 110, Abt. IIa, p. 551. — G. Urbain berechnet aus meinen Angaben Werte von $\varkappa'$ zwischen 173 und 250. Tatsächlich ergibt die Berechnung nach obiger Formel Werte zwischen 192 und 273 und der letztere ist von seinem Werte 290 nicht ganz so verschieden.

Auch die pyrophoren Cer-Eisen- und Lanthan-Eisenlegierungen C. Auer v. Welsbach's sind relativ schwach magnetisch.

Die Unmöglichkeit, aus den Elementen dieser Gruppe hochmagnetische Legierungen zu erhalten, ist damit natürlich nicht erwiesen. Es ist anzunehmen, daß man solche erzielen könnte, wenn im Sinne der Beziehung zum Atomvolumen, die ich aufstellen konnte,[1] Präparate besonders hoher Dichte hergestellt werden könnten; denn auch die Heusler'schen Manganlegierungen zeigen in dieser Hinsicht die gleiche Beziehung und büßen an Magnetisierbarkeit erheblich ein, wenn z. B. durch Erwärmung dauernde Dichtenverminderung herbeigeführt wird.

---

[1] Sitzungsber. der kaiserl. Akad. der Wiss. in Wien, Bd. 109, Abt. IIa, p. 287 (1900).

Die Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen Koordinaten

von

F. Jung in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juni 1908.)

An anderer Stelle[1] habe ich den Begriff der »Polarableitung im räumlichen Größenfeld« eingeführt und bemerkt, daß sie je nach der Art ihrer Bildungsweise zu Größen führt, welche in der Feldgeometrie eine wichtige Rolle spielen. Es ist nämlich im Skalarfeld die Polarableitung des Skalars der Gradient des Feldes, im Vektorfeld ist die innere Polarableitung des Vektors die Divergenz, die seitliche der Rotor, die algebraische der Tensor und die dyadische der Affinor. Es wurde gezeigt, daß die Bildung der Polarableitung in rechtwinkeligen Koordinaten die Hamilton'sche Operation liefert und es wurde deshalb der Hamilton'sche Operator ∇ allgemein zur Bezeichnung der Polarableitung benützt. Man erhält den Operator ∇, indem man die Ausrechnung der Polarableitung so weit treibt, als es geschehen kann, ohne die Form der Feldgröße G dabei zu ändern. Dies ergibt in rechtwinkeligen Koordinaten eben

$$\nabla = \mathfrak{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

wo $\mathfrak{e}_x, \mathfrak{e}_y, \mathfrak{e}_z$ Einheitsvektoren in den Richtungen der Koordinatenachsen sind. Nun fragt es sich: Welchen Ausdruck wird die Polarableitung und daher ∇ in anderen Koordinaten-

[1] Ableitungsbildung im räumlichen Größenfelde. Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 56.

systemen haben? Dies soll im folgenden für rechtwinkelige, krummlinige Koordinaten beantwortet werden.

In aller Kürze sei zunächst der Begriff der Polarableitung erklärt. Die Größe G sei eine Funktion des Ortes und im allgemeinen eindeutig, endlich und stetig. Nun wählen wir einen beliebigen Punkt A und legen um ihn eine geschlossene Fläche f, deren positive Normale wir nach außen ziehen. Für diese Fläche bilden wir das Oberflächenintegral der Feldgröße $\int_\tau d\bar{f}.G$, wo $d\bar{f}$ ein Flächenelement ist, als Vektor aufgefaßt in der Normalenrichtung, und τ die Größe des von der Fläche begrenzten Rauminhaltes bedeutet, auf dessen Oberfläche sich das Integral bezieht. Zieht man nun die Fläche um den Punkt A zusammen, so ist der Grenzwert, dem die Größe

$$\nabla . G = \lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau} \int_\tau d\bar{f}.G = \frac{1}{d\tau} \int_{d\tau} d\bar{f}.G$$

für $\tau = 0$ zustrebt, die Polarableitung von G im Punkte A. Die Feldgröße G kann ein Skalar, Vektor usw. sein. Jeder Art der Produktbildung $d\bar{f}.G$ entspricht eine Art der Polarableitung. Sind $\bar{a}$ und $\bar{b}$ Vektoren, so bezeichne ich das innere Produkt mit $\bar{a}|\bar{b}$, das vektorielle oder seitliche mit $\bar{a}\times\bar{b}$, das äußere mit $\bar{a}\wedge\bar{b}$, das algebraische mit $\bar{a}\bar{b}$ oder $\bar{a}.\bar{b}$, das dyadische mit $\bar{a},\bar{b}$; soll die Art der Multiplikation unentschieden bleiben, so schreibe ich $\bar{a}.\bar{b}$ (wie beim algebraischen Produkt).

Es ist klar, daß der Begriff der Polarableitung erweitert werden kann für Felder von n Ausdehnungen. f ist dann ein Gebiet von $n-1$ Ausdehnungen oder $n-1$ter Stufe. Auch die a. a. O. eingeführten Begriffe der Achsialableitung und der Linearableitung lassen sich in dieser Weise verallgemeinern.

Nun wollen wir uns der oben gestellten Frage zuwenden. In dem räumlichen Größenfeld sei ein krummliniges Koordinatensystem gegeben. Es sind also die Felder dreier Skalare q_1, q_2, q_3, der Koordinaten, gegeben, von solcher Beschaffenheit, daß jeder Raumstelle nur eine Wertgruppe entspricht und umgekehrt. Die Niveauflächen $q_i = \text{const.}$ sind die Koordinatenflächen, ihre Schnittkurven die Koordinatenlinien. Längs jeder solchen ist somit nur eine Koordinate veränderlich. Das Raum-

element $d\tau$, für dessen Oberfläche wir das Flächenintegral bilden wollen, nehmen wir nun so, daß es vollständig von Koordinatenflächen begrenzt wird, seine Kanten daher den Koordinatenlinien angehören. Sind (q_1, q_2, q_3) die Koordinaten eines Eckpunktes A, so sind die der anderen $(q_1+dq_1, q_2, q_3), \ldots$ $\ldots (q_1+dq_1, q_2+dq_2, q_3+dq_3)$. In A ziehen wir Einheitsvektoren $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ normal zu den Koordinatenflächen nach der Seite der wachsenden Koordinaten, also übereinstimmend mit den Gradienten der q_i. Unter df_i sei ein Element der Koordinatenfläche $q_i = \text{const.}$ verstanden, dessen Vektor $d\bar{f}_i$ positiv gerechnet wird, wenn seine Richtung übereinstimmt mit der von $\bar{e}_i$. Das Oberflächenintegral für unser Raumelement $d\tau$ besteht nun aus sechs Summanden, von denen sich drei auf die Flächenelemente durch den Punkt A beziehen, die anderen drei auf die gegenüberliegenden. Die Werte der Summanden für die ersteren sind $d\bar{f}_i . G$, für die letzteren offenbar $d\bar{f}_i . G + \frac{\partial}{\partial q_i}(d\bar{f}_i . G) dq_i$, da nur je eine Koordinate geändert wird, wobei jedoch im allgemeinen sowohl $d\bar{f}_i$ als G sich ändern. Bei der Bildung des Oberflächenintegrals sind die ersten drei Summanden negativ zu nehmen, weil die Flächenvektoren bezüglich des Raumelements nach außen zu ziehen sind, also hier entgegengesetzt zu den $\bar{e}_i$. Wir erhalten demnach durch die Summierung

$$\nabla . G = \frac{1}{d\tau}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(d\bar{f}_1 . G) dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}(d\bar{f}_2 . G) dq_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(d\bar{f}_3 . G) dq_3\right],$$

was wir auch schreiben können:

$$\nabla . G = \frac{1}{d\tau}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(d\bar{f}_1 .) dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}(d\bar{f}_2 .) dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(d\bar{f}_3 .) dq_3\right] G,$$

so daß sich als erster Ausdruck für den Operator ∇ ergibt:

$$\nabla = \frac{1}{d\tau}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(d\bar{f}_1 .) dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}(d\bar{f}_2 .) dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(d\bar{f}_3 .) dq_3\right]$$
$$= \frac{1}{d\tau}\sum \frac{\partial}{\partial q_i}(d\bar{f}_i .) dq_i. \qquad (1)$$

Weiter kann man für $d\tau$ und $d\bar{f}_i$ die Ausdrücke in den Koordinaten q_i einführen. Wenn $\bar{h}_i$ der Gradient (Differentialparameter) von q_i ist,

$$\bar{h}_i = \nabla q_i,$$

und ds_i die Länge eines Bogenelements in der Richtung von $\bar{e}_i$, so ist bekanntlich[1]

$$h_i = \frac{\partial q_i}{\partial s_i},$$

also

$$ds_i = \frac{dq_i}{h_i}.$$

Wir setzen nun voraus, daß die Koordinaten q_i rechtwinkelig sind. Dann bilden die Richtungen der $\bar{e}_i$ in jedem Punkte ein rechtwinkeliges Dreikant und fallen zusammen mit den Richtungen der Koordinatenlinien. Die ds_i sind jetzt Bogenelemente dieser und es wird

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{dq_1}{h_1} \frac{dq_2}{h_2} \frac{dq_3}{h_3}$$

und

$$d\bar{f}_i = d\bar{s}_j \times d\bar{s}_k = \frac{dq_j}{h_j} \bar{e}_j \times \frac{dq_k}{h_k} \bar{e}_k$$

$$= \frac{dq_j}{h_j} \frac{dq_k}{h_k} \bar{e}_i,$$

wo $i, j, k = 1, 2, 3$ in irgendeiner zyklischen Permutation. Setzen wir ein in die Formel für ∇ und beachten, daß dq_j, dq_k als konstant zu betrachten sind der Differentiation nach q_i gegenüber, so folgt:

$$\nabla = h_i h_j h_k \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\bar{e}_i \cdot}{h_j h_k}$$

$$= h_1 h_2 h_3 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\bar{e}_1 \cdot}{h_2 h_3} + \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{\bar{e}_2 \cdot}{h_3 h_1} + \frac{\partial}{\partial q_3} \frac{\bar{e}_3 \cdot}{h_1 h_2} \right). \qquad (2)$$

[1] Vergl. z. B. a. a. O.

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_i$ sind nur im rechtwinkeligen, geradlinigen Koordinatensystem sämtlich unabhängig vom Orte. In diesem Falle ist außerdem

$$h_i = 1$$

und daher

$$\begin{aligned}\nabla &= \sum \mathfrak{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_i}\\ &= \mathfrak{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z},\end{aligned} \tag{2a}$$

wenn wir hier x, y, z statt q_1, q_2, q_3 schreiben. Das ist der bekannte Hamilton'sche Ausdruck.

Der Ausdruck (2) läßt sich umformen durch Ausführung der Differentiation

$$\nabla = h_i h_j h_k \sum \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\mathfrak{e}_i}{h_j h_k}\right) \cdot + \frac{\mathfrak{e}_i}{h_j h_k} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i}\right].$$

Wenn die Feldgröße G nicht angegeben wird, so können wir hierin nur die Differentiation im ersten Gliede weiter verfolgen. Es handelt sich da um die Änderung der Einheitsvektoren von Punkt zu Punkt, also die Drehung des Vektorendreikants der $\mathfrak{e}_i$ beim Übergang von einer Stelle zur anderen. Die betreffenden Formeln lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial q_j} &= \mathfrak{e}_j h_i \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{h_j},\\ \frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial q_i} &= -\mathfrak{e}_j h_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} - \mathfrak{e}_k h_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}.\end{aligned} \tag{3}$$

Man kann sie etwa erhalten, indem man bekannte Formeln aus der Theorie dreifach rechtwinkeliger Flächensysteme heranzieht. Für die Richtungscosinus der Tangenten der Koordinatenlinien X_i, Y_i, Z_i hat man[1] in rechtwinkeligen, geradlinigen Koordinaten

---

[1] Vergl. z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von Lukat, 1899, p. 484.

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_j} = X_j h_i \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{h_j},$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial q_i} = -X_j h_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} - X_k h_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}$$

und ebenso für Y_i, Z_i. Die Zeiger i, j, k sind zyklisch zu vertauschen. X_i, Y_i, Z_i kann man als Komponenten des Einheitsvektors $\mathfrak{e}_i$ ansehen:

$$\mathfrak{e}_i = X_i \mathfrak{e}_x + Y_i \mathfrak{e}_y + Z_i \mathfrak{e}_z$$

und daher wird

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial X_i}{\partial q_j} \mathfrak{e}_x + \frac{\partial Y_i}{\partial q_j} \mathfrak{e}_y + \frac{\partial Z_i}{\partial q_j} \mathfrak{e}_z,$$

wo i und j verschieden oder gleich sein können. Durch Einsetzen der vorigen Ausdrücke folgen dann die obigen Formeln. Ein anderer Weg[1] zu ihrer Ableitung wäre der folgende. Geht man vom Punkte A längs der Kante $d\mathfrak{s}_k$ des Raumelements $d\tau$ von der Kante $ds_i = \frac{dq_i}{h_i}$, wo i und k verschieden sind, zur gegenüberliegenden, so hat diese, verglichen mit der vorigen, den Längenüberschuß

$$\frac{\partial ds_i}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{h_i}\right) \cdot dq_i dq_k .$$

Dieser fällt in die Richtung $\mathfrak{e}_i$ und kann als Bogen angesehen werden vom Halbmesser $ds_k = \frac{dq_k}{h_k}$. Er entspricht also einer Drehung von $d\mathfrak{s}_k$ und daher auch $\mathfrak{e}_k$ um $\mathfrak{e}_j$ als Achse um den Winkel

$$\frac{1}{ds_k} \frac{\partial ds_i}{\partial q_k} dq_k = h_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{h_i}\right) dq_i$$

beim Übergang von A nach dem Endpunkt von $d\mathfrak{s}_i$, wobei sich nur q_i ändert. Die gleichzeitige Änderung von $\mathfrak{e}_k$ ist demnach

[1] Er entspricht dem Verfahren, das Love anwendet, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von Timpe, 1907, p. 650.

$$d\bar{e}_k = h_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{h_i}\right) \cdot dq_i \bar{e}_i$$

und somit

$$\frac{\partial \bar{e}_k}{\partial q_i} = \bar{e}_i h_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}.$$

Bei der eben erwähnten Drehung erhält $\bar{e}_i$ offenbar einen Zuwachs

$$-h_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{h_i}\right) \cdot dq_i \bar{e}_k,$$

und ebenso, wenn j an die Stelle von k tritt, daher im ganzen

$$d\bar{e}_i = -h_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{h_i}\right) \cdot dq_i \bar{e}_j - h_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{h_i}\right) \cdot dq_i \bar{e}_k,$$

woraus der oben gegebene Ausdruck folgt. Übrigens kann man ihn aus dem vorigen auch finden mit Hilfe der Gleichung, welche die Rechtwinkeligkeit des Dreikants der Einheitsvektoren ausdrückt:

$$\bar{e}_i = \bar{e}_j \times \bar{e}_k.$$

Aus ihr folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial q_i} \times \bar{e}_k + \bar{e}_j \times \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial q_i}$$

und weiter durch Einsetzen der Werte für die beiden Differentialquotienten rechts der frühere Ausdruck.

Nun können wir in dem zuletzt für ∇ erhaltenen Ausdruck das erste Glied in der eckigen Klammer weiter berechnen. Es ist nach (3):

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\bar{e}_i}{h_j h_k} = \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{h_j h_k} + \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_i}$$

$$= \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{h_j h_k} - \bar{e}_j \frac{1}{h_k} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} - \bar{e}_k \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}$$

und wenn wir nun in $\sum \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\bar{e}_i}{h_j h_k}$ den Koeffizienten von $\bar{e}$ bestimmen, so ergibt sich dafür der Ausdruck:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_j h_k}-\frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_k}-\frac{1}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_j}=0.$$

Es fällt also in der eckigen Klammer der erste Summand ganz weg und wir haben:

$$\begin{aligned}\nabla &= h_i h_j h_k \sum \frac{\bar{e}_i}{h_j h_k}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i}\\ &= \sum h_i \bar{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial q_i} \qquad (4)\\ &= h_1\bar{e}_1\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}+h_2\bar{e}_2\cdot\frac{\partial}{\partial q_2}+h_3\bar{e}_3\cdot\frac{\partial}{\partial q_3}.\end{aligned}$$

Kommen in der Feldgröße G die Einheitsvektoren vor, so sind bei der Berechnung der Polarableitung von G nach der eben gefundenen Formel außerdem die Gleichungen (3) heranzuziehen. Wir wollen einige Polarableitungen wirklich bilden.

Ist G ein Skalar, φ, so ist dessen Gradient

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\sum h_i\bar{e}_i\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \qquad (5)$$

Bei einem Vektor $\bar{v}$ als Feldgröße könnte man die dyadische Polarableitung berechnen und von ihr zur inneren, seitlichen und algebraischen übergehen. Doch mögen hier wenigstens die ersten beiden unmittelbar gebildet werden, weil dies bei Benützung der Formel (2) einfacher zum Ziele führt. Zunächst hat man für die innere Polarableitung oder Divergenz des Vektors

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\bar{v}=\nabla_{|}\bar{v} &= h_1h_2h_3\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\bar{e}_i|\bar{v}}{h_j h_k}\\ &= h_1h_2h_3\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{v_i}{h_j h_k} \qquad (6)\\ &= h_1h_2h_3\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{v_1}{h_1h_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{v_2}{h_3h_1}+\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{v_3}{h_1h_2}\right).\end{aligned}$$

Für die seitliche Polarableitung oder den Rotor des Vektors ergibt sich:

$$\operatorname{rot} \bar{v} = \nabla \times \bar{v} = h_1 h_2 h_3 \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\bar{e}_i \times \bar{v}}{h_j h_k}$$

$$= h_1 h_2 h_3 \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\bar{e}_k v_j - \bar{e}_j v_k}{h_j h_k}$$

und bei Ausführung der Differentiation und Berücksichtigung der Formeln (3) weiter:

$$= h_1 h_2 h_3 \sum \left(\bar{e}_k \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{v_j}{h_j h_k} - \bar{e}_j \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{v_k}{h_j h_k} + \bar{e}_i \frac{v_j}{h_j} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i} - \bar{e}_i \frac{v_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} \right).$$

Nun fassen wir die Glieder zusammen, die sich auf einen Einheitsvektor, z. B. $\bar{e}_i$, beziehen. Sein Koeffizient wird, wie sich durch entsprechende zyklische Vertauschung von i, j, k ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{v_k}{h_k h_i} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{v_j}{h_i h_j} + \frac{v_j}{h_j} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i} - \frac{v_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} = \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{v_k}{h_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{v_j}{h_j} \right).$$

Schließlich erhält man durch Einsetzen:

$$\nabla \times \bar{v} = \sum \bar{e}_i h_j h_k \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{v_k}{h_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{v_j}{h_j} \right). \qquad (7)$$

Zur Berechnung der dyadischen Polarableitung oder des Affinors des Vektors $\bar{v}$ wenden wir die Gleichung (4) an:

$$\nabla, \bar{v} = \sum h_i \bar{e}_i, \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}.$$

Hier und im Folgenden brauchen wir den Differentialquotienten eines Vektors nach einer Koordinate und finden hierfür:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} = \left(\bar{e}_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \bar{e}_j \frac{\partial v_j}{\partial q_i} + \bar{e}_k \frac{\partial v_k}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial q_i} v_i + \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial q_i} v_j + \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial q_i} v_k\right).$$

Für das zweite Glied folgt mittels der Gleichungen (3) der Ausdruck:

$$v_i\left(-\bar{e}_j h_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} - \bar{e}_k h_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}\right) + \bar{e}_i v_j h_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} + \bar{e}_i v_k h_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}$$

und demnach:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i} &= \bar{e}_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial q_i} + v_j h_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i} + v_k h_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}\right) \\ &+ \bar{e}_j \left(\frac{\partial v_j}{\partial q_i} - v_i h_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{h_i}\right) \\ &+ \bar{e}_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial q_i} - v_i h_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{h_i}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Durch Einsetzen ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \nabla, \bar{v} = \sum \Big[&\bar{e}_i, \bar{e}_i \left(h_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} - v_j \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - v_k \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_k}\right) \\ &+ \bar{e}_i, \bar{e}_j \left(h_i \frac{\partial v_j}{\partial q_i} + v_i \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_j}\right) \\ &+ \bar{e}_i, \bar{e}_k \left(h_i \frac{\partial v_k}{\partial q_i} + v_i \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_k}\right)\Big] \end{aligned} \tag{9}$$

und in geradlinigen Koordinaten:

$$\nabla, \bar{v} = \sum \left(\bar{e}_i, \bar{e}_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \bar{e}_i, \bar{e}_j \frac{\partial v_j}{\partial q_i} + \bar{e}_i, \bar{e}_k \frac{\partial v_k}{\partial q_i}\right).$$

Die neun verschiedenen Glieder, aus denen die Summe besteht, sind die »Komponenten« des Affinors $\nabla, \bar{v}$. Um den

Tensor $\nabla \bar{v}$ zu erhalten, haben wir die dyadischen Produkte der Einheitsvektoren durch algebraische zu ersetzen und entsprechend zusammenzuziehen. Man hat jetzt sechs Komponenten, von welchen die drei mit den Produkten $\bar{e}_i \bar{e}_i$ dieselben Koeffizienten haben, wie die Glieder mit $\bar{e}_i, \bar{e}_i$. Die drei anderen sind:

$$\bar{e}_j \bar{e}_k \left(h_j \frac{\partial v_k}{\partial q_j} + v_j \frac{h_k}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial q_k} + h_k \frac{\partial v_j}{\partial q_k} + v_k \frac{h_j}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial q_j} \right)$$

$$= \bar{e}_j \bar{e}_k \left(\frac{h_j}{h_k} \frac{\partial v_k h_k}{\partial q_j} + \frac{h_k}{h_j} \frac{\partial v_j h_j}{\partial q_k} \right).$$

Demnach ist:

$$\nabla \bar{v} = \sum \left[\bar{e}_i \bar{e}_i \left(h_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} - v_j \frac{h_j}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} - v_k \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial h_k}{\partial q_k} \right) \right.$$

$$\left. + \bar{e}_j \bar{e}_k \left(\frac{h_j}{h_k} \frac{\partial v_k h_k}{\partial q_j} + \frac{h_k}{h_j} \frac{\partial v_j h_j}{\partial q_k} \right) \right]. \quad (10)$$

Weiter soll noch die innere und die seitliche Polarableitung eines Affinors Φ berechnet werden. Φ sei durch die dyadischen Produkte der Einheitsvektoren ausgedrückt:

$$\Phi = \Sigma \left(a_{ii} \bar{e}_i, \bar{e}_i + a_{ij} \bar{e}_i, \bar{e}_j + a_{ik} \bar{e}_i . \bar{e}_k \right) = \Sigma\, \bar{e}_i, \bar{a}_i,$$

wo

$$\bar{a}_i = a_{ii} \bar{e}_i + a_{ij} \bar{e}_j + a_{ik} \bar{e}_k .$$

Mittels der Vektoren $\bar{a}_i$ ist Φ auf dieselbe Form gebracht, wie ein Vektor $\bar{v} = \Sigma\, \bar{e}_i v_i$, nur stehen an Stelle der Skalaren v_i hier die Vektoren $\bar{a}_i$. Die Ausdrücke für die Polarableitungen können also auch jetzt verwendet werden mit $\bar{a}_i$ statt v_i und unter Beachtung der geänderten Art des Produktes, vorausgesetzt, daß bei der Ableitung der früheren Formeln aus (2) eine Umstellung solcher Faktoren unterblieben ist, welche im vorliegenden Falle nicht skalar sind. Diese Bedingung wurde erfüllt, wie man sich überzeugt. Daher ist:

$$\nabla'\Phi = h_1 h_2 h_3 \sum \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\bar{a}_i}{h_j h_k}$$

$$= h_1 h_2 h_3 \sum \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\bar{e}_i \frac{a_{ii}}{h_j h_k} + \bar{e}_j \frac{a_{ij}}{h_j h_k} + \bar{e}_k \frac{a_{ik}}{h_j h_k}\right),$$

was nach der Formel für $\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_i}$ zu berechnen ist. Man erhält:

$$\nabla_{|}\Phi = h_1 h_2 h_3 \sum \bar{e}_i \Bigg(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{a_{ii}}{h_j h_k} + \frac{a_{ij}}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{h_i} + \frac{a_{ik}}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{h_i}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{a_{ji}}{h_k h_i} - \frac{a_{jj}}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_j} \tag{11}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{a_{ki}}{h_i h_j} - \frac{a_{kk}}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_k}\Bigg).$$

In geradlinigen Koordinaten ist

$$\nabla|\Phi = \sum \bar{e}_i\left(\frac{\partial a_{ii}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ji}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_k}\right), \tag{11a}$$

wie sich auch leicht unmittelbar finden läßt.

Endlich hat man

$$\nabla\times\Phi = h_1 h_2 h_3 \sum \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\bar{e}_k, \bar{a}_j - \bar{e}_j, \bar{a}_k}{h_j h_k}.$$

Es ist:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\bar{e}_k, \bar{a}_j}{h_j h_k} = \frac{\partial \bar{e}_k}{\partial q_i}, \frac{\bar{a}_j}{h_j h_k} + \bar{e}_k, \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\bar{a}_j}{h_j h_k}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (8):

$$= \bar{e}_i \frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{h_i}, (\bar{e}_i a_{ji} + \bar{e}_j a_{jj} + \bar{e}_k a_{jk})$$
$$+ \bar{e}_k, \Bigg[\bar{e}_i\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{a_{ji}}{h_j h_k} + \frac{a_{ij}}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{h_i} + \frac{a_{jk}}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{h_i}\right)$$
$$+ \bar{e}_j\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{a_{jj}}{h_j h_k} - \frac{a_{ji}}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{h_i}\right)$$
$$+ \bar{e}_k\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{a_{jk}}{h_j h_k} - \frac{a_{ji}}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{h_i}\right)\Bigg].$$

Durch Vertauschung von j und k erhält man hieraus den Ausdruck für

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\bar{e}_j, \bar{a}_k}{h_j h_k}.$$

Bestimmen wir nun die Koeffizienten von $(\bar{e}_i, \bar{e}_i)$, $(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$, $(\bar{e}_i, \bar{e}_k)$, was durch geeignete zyklische Vertauschung der Zeiger ermöglicht wird, so erhalten wir bei Zusammenfassung jener Glieder, welche denselben Koeffizienten $a_{ii}, \ldots$ des Affinors enthalten, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\nabla\times\Phi = h_1 h_2 h_3 \sum \Bigg[\bar{e}_i, \bar{e}_i \Bigg\{ &-\left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{a_{ji}}{h_j} - \frac{a_{jk}}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_k}\right) \\ &+\left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{a_{ki}}{h_k} - \frac{a_{kj}}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_j}\right)\Bigg\} \\ +\bar{e}_i, \bar{e}_j \Bigg\{ &-\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{a_{jj}}{h_j} + \Bigg(\frac{a_{jk}}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{h_k} \\ &+ \frac{a_{ki}}{h_k}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{a_{kj}}{h_k} + \frac{a_{kk}}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{h_j}\Bigg)\Bigg\} \\ +\bar{e}_i, \bar{e}_k \Bigg\{ &-\Bigg(\frac{a_{ji}}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{1}{h_k} + \frac{a_{jj}}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{1}{h_k} \\ &+ \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{a_{jk}}{h_j} + \frac{a_{kj}}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{h_j}\Bigg) + \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{a_{kk}}{h_k}\Bigg\}\Bigg]. \qquad (12)\end{aligned}$$

Für geradlinige Koordinaten bekommt man hieraus oder auch einfach unmittelbar

$$\begin{aligned}\nabla\times\Phi = \sum \bar{e}_i, \Bigg[\bar{e}_i\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k}\right) + \bar{e}_j\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jj}}{\partial q_k}\right) \\ + \bar{e}_k\left(\frac{\partial a_{kk}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_k}\right)\Bigg]. \qquad (12a)\end{aligned}$$

Wenn man statt des Affinors Φ einen Tensor T hat, so bekommt man die Ausdrücke für die innere und seitliche Polarableitung dieses, indem man ihn als symmetrischen Affinor

auffaßt und die eben gefundenen Formeln anwendet. Der Ausdruck für Φ geht in jenen für T über, wenn

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad a_{jk} = a_{kj}$$

gesetzt wird. Die Ausdrücke für $\nabla | T$ und $\nabla \times T$ erfahren hiedurch aber keine Vereinfachung denen von $\nabla | \Phi$ und $\nabla \times \Phi$ gegenüber, wie leicht zu bemerken.

Über die Helligkeitsverhältnisse der vier Sternschnuppenkometen (1861 I, 1862 III, 1866 I und Biela)

von

Dr. J. Holetschek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1908.)

Die Untersuchung einer langen Reihe von Kometen[1] hat immer bestimmter erkennen lassen, daß durch die Reduktion der beobachteten Helligkeiten H auf dieselbe Distanz von der Sonne und von der Erde ($r = 1 \cdot 0$, $\Delta = 1 \cdot 0$) Anhaltspunkte zur Vergleichung der Kometen untereinander gewonnen werden können. Nach und nach erhielt diese Rangsordnung auch noch eine innerliche Berechtigung durch den immer deutlicher hervortretenden Umstand, daß die reduzierte Helligkeit eines Kometen H_1 in Verbindung mit seiner Periheldistanz q einen ziemlich sicheren Schluß auf die zu erwartende Helligkeitsänderung und Schweifentwicklung gestattet, daß sie also gewissermaßen als die Fähigkeit eines Kometen zur Helligkeitssteigerung und Schweifbildung angesehen werden kann oder überhaupt als Inbegriff dessen, was der betreffende Komet an schweifbildender Kraft und Materie besitzt.

Es liegt nun nahe, noch einen Schritt weiter zu gehen und, wenn auch nur versuchsweise, anzunehmen, daß auch die Kometenmassen überhaupt zueinander in nahezu demselben Verhältnis stehen wie die reduzierten Helligkeiten; wenigstens bei Kometen mit nicht weit voneinander verschiedenen Periheldistanzen.

---

[1] Denkschriften der math.-naturw. Klasse der kaiserl. Akad. der Wissenschaften, Bd. 63 und 77.

Eine solche Erweiterung erscheint besonders angezeigt bei denjenigen Kometen, die wegen ihres auffälligen Zusammenhanges mit den bekannten periodischen Sternschnuppenschwärmen ein eigenartiges Interesse darbieten, da es gewiß sehr erwünscht ist, nachsehen zu können, ob die Helligkeitsgrade, d. h. also die hypothetischen Massen dieser Kometen, mit der Reichhaltigkeit oder einer anderen Eigentümlichkeit der zugehörigen Schwärme in irgend einer Beziehung stehen oder zu stehen scheinen.

Ich habe daher diese vier Kometen in derselben Weise untersucht wie die früheren und möchte hier gleich im voraus bemerken, daß sich der Perseidenkomet 1862 III als der ansehnlichste und der Leonidenkomet 1866 I als der unansehnlichste herausstellt.

Indem ich nun darangehe, die Untersuchungen selbst mitzuteilen, möchte ich auch noch vorausschicken, daß ich nebst den Helligkeiten so wie früher auch die Dimensionen der Kometen untersucht und miteinander vergleichbar gemacht habe. Die meist in Bogenminuten ausgedrückten Angaben über den scheinbaren Durchmesser D wurden auf dieselbe Distanz von der Erde, und zwar auf $\Delta = 1 \cdot 0$ reduziert (D_1) und aus der scheinbaren Schweiflänge C wurde die wahre Länge L_c wieder unter der Annahme berechnet, daß der Schweif in der geradlinigen Verlängerung des Radiusvektors gelegen war, also nach der Formel

$$L_c = \frac{\Delta \sin C}{\sin(\gamma - C)},$$

worin γ der in dem ebenen Dreieck Erde—Komet—Sonne von den Distanzen r und Δ eingeschlossene Winkel am Kometen ist; derselbe kann aus

$$\cos\gamma = \frac{r^2 + \Delta^2 - R^2}{2r\Delta}$$

berechnet werden oder auch aus

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-r)(s-\Delta)}{s(s-R)}},$$

wo

$$s = \frac{1}{2}(r+\Delta+R)$$

ist.

Komet 1861 I.

Der Komet der Lyriden (Aprilmeteore).

Periheldurchgang am 3. Juni ($q = 0 \cdot 92$), Annäherung an die Erde am 5. Mai bis $\Delta = 0 \cdot 335$.

Dieser zuerst von Thatcher in New-York am 4. April entdeckte und hierauf am 28. April von Baeker in Nauen mit bloßen Augen aufgefundene Komet wurde vor dem Perihel auf der nördlichen Hemisphäre bis 25. Mai und nach demselben auf der südlichen vom 30. Juli bis 6. September beobachtet; zur Bestimmung seines Helligkeitsgrades können aber nur einige Angaben aus der ersten Periode seiner Sichtbarkeit verwendet werden.

Nach einer Bemerkung des Entdeckers (Monthly Notices. Vol. 21, p. 193) wäre die Helligkeit vom 9. bis 20. April ungefähr dieselbe geblieben, was aber wohl nur in einem entfernten Grade richtig sein dürfte, da der Komet während dieser Zeit sowohl der Sonne als der Erde wesentlich näher gekommen ist. Am 20. April erschien er nach der Angabe desselben Beobachters in einem $4^1/_2$ zölligen Fernrohr bei 30facher Vergrößerung so hell wie der große Sternhaufen im Perseus oder die Nebulosität im Krebs für das unbewaffnete Auge, welche Vergleichung aber zur Rechnung nicht mit Sicherheit verwendet werden kann. Pape hat seiner letzten Bahnbestimmung, durch welche insbesondere das Aufsuchen des Kometen auf der Südhemisphäre erleichtert werden sollte, die Bemerkung beigefügt, daß die Helligkeit am 10. April ungefähr 6. Größe gewesen ist (Monthly Notices, Vol. 21, p. 241).

Die erste bestimmte Helligkeitsangabe ist vom 30. April, an welchem Tage der Komet nach W. Förster in Berlin von der Helligkeit eines Sternes 4. bis 5. Größe war (Astr. Nachr., Bd. 55).

Vom 4. Mai können zwei Helligkeitsangaben benützt werden. Nach einer Mitteilung vom Observatorium Downs

Road, Clapton (Monthly Notices, Vol. 21, p. 216), erschien der Komet für das bloße Auge wie ein undeutlicher Stern (indistinct star) der 2. oder 3. Größe; er war hinreichend hell, um im Gesichtsfelde bei einer Beleuchtung, welche Sterne der 6. Größe auslöschte, noch gut gesehen zu werden. Im dunklen Felde zeigte sich ein Schweif von ungefähr 1° Länge. Pape in Altona berichtet (Astr. Nachr., Bd. 55, p. 206), daß ihm die Helligkeit des Kometen am 4. und 5. Mai etwas stärker schien als am 2.; der Komet war heller als ein Stern 4. und nicht ganz so hell wie ein Stern 3. Größe.

Damit ist aber die Zahl der verwendbaren Helligkeitsangaben auch schon erschöpft. Dieselben sollen nun auf $r = 1 \cdot 0$, $\Delta = 1 \cdot 0$ reduziert werden. Die zu dieser Reduktion nötigen Zahlen können der folgenden Zusammenstellung entnommen werden, welche einen Überblick über den Lauf des Kometen gibt (Bahnbestimmung von Oppolzer im 49. Bande dieser Sitzungsberichte). Die Zahlen gelten für 12^h mittl. Zeit Greenwich).

1861	α	δ	log r	log Δ	5 log $r\Delta$
April 4.....	263°	+55°	0·139	9·922	+0·3
10.....	260	59	0·116	9·845	—0·2
20.....	230	67	0·078	9·696	—1·1
28.....	177	63	0·047	9·572	—1·9
Mai 4.....	148	45	0·025	9·526	—2·2
16.....	127	+ 5	9·989	9·646	—1·8
25.....	120	—11	9·971	9·784	—1·2
Juli 30.....	102	36	0·131	0·179	+1·6
Aug. 18.....	98	41	0·200	0·196	+2·0
Sept. 6.....	89	—47	0·261	0·200	+2·3

Für den Zeitraum, aus welchem Beobachtungen der Schweiflänge vorliegen, soll hier auch noch der Winkel γ angegeben werden.

1861	γ
April 28.....	64°
Mai 4.....	72
16.....	82

Reduktion der Helligkeiten:

1861	H	5 log $r\Delta$	H_1
April 10...	(6^m)	$-0·2$	(6^m2)
30...	4·5	$-2·1$	6·6
Mai 4...	{3·3 / 2·5}	$-2·2$	{5·5 / 4·7}

In den Zahlen H_1 ist zwar ein Gang, nämlich eine Zunahme der Helligkeit von 6^m6 bis etwa 5^m1 zu erkennen, aber wegen der geringen Menge und der geringen Sicherheit der Angaben möchte ich, solange aus dem Gang selbst keine Folgerungen gezogen werden, als reduzierte Helligkeit des Kometen einfach einen Mittelwert, etwa 5^m6, ansetzen.

Eine längere Betrachtung erfordern die Angaben über das Aussehen und die Dimensionen des Kometen.

Der Komet erschien als ein ziemlich runder Nebel mit einer helleren zentralen Verdichtung ohne eigentlichen Kern und brachte es nur zu einer wenig bedeutenden Schweifentwicklung. Gegen die Ränder zu scheint er recht lichtschwach gewesen zu sein, was insbesondere daraus geschlossen werden darf, daß der scheinbare Durchmesser von verschiedenen Beobachtern auffallend verschieden angegeben worden ist; von den einen, namentlich im April, nur mäßig, nämlich $2'$ oder $3'$, von anderen dagegen, namentlich im Mai, zu $^1/_3$ eines Grades; nach einer Bemerkung von Secchi, der den Kometen zu Rom am 10. und 12. Mai beobachtet hat, wäre derselbe sogar so groß erschienen wie die Praesepe im Krebs, was also auf einen noch viel größeren Durchmesser schließen läßt. Allerdings war der Komet im Mai in einer ziemlich bedeutenden Erdnähe, aber die Divergenzen werden auch nach der Reduktion der beobachteten Durchmesser D auf $\Delta = 1·0$ nicht zufriedenstellend herabgemindert.

1861			D	D_1
April	4	Thatcher (New-York)	2'	1'7
	10 u. 11	Ferguson (Washington) ...	2	1·4
	17	Peters (Clinton)	>10	$>5·5$
	20	Thatcher	3	1·5
	29	Peters	14—15	5·2

1861			D	D_1
Mai	4	Schönfeld (Mannheim)...	16'?	5'4
	4	Baxendell (Manchester)..	22	7·4
	9	Reslhuber (Kremsmünster)	20	7·1
	10	Fearnley (Christiania) ...	15—20	6·4
	13	Baxendell..............	20	8·0
	16	Schmidt (Athen)	7—8	3·3
	17	Schönfeld..............	> 4	> 1·8
Aug.	18	Mann (Cap d. g. H.)......	2	3·1

Der Grund der Divergenzen darf natürlich darin gesucht werden, daß die kleineren Dimensionen mit schwächeren Instrumenten oder unter wenig günstigen Luftverhältnissen, die größeren dagegen mit stärkeren Instrumenten oder unter besonders günstigen Umständen gesehen und beobachtet worden sind. So verfügte z. B. C. H. F. Peters in Clinton U. S. über ein großes und gutes Fernrohr.

Es hat daher eigentlich jede Durchmesserangabe ihre Berechtigung, doch sollte dafür gesorgt sein, daß dieselben untereinander vergleichbar werden, und es wäre in dieser Beziehung sehr zweckdienlich, wenn in solchen Fällen, ähnlich wie es häufig bei Schweifbeobachtungen geschieht, zwei oder nach Umständen auch noch mehr Angaben gemacht werden würden, so zwar, daß zunächst angegeben wird, bis zu welchem Durchmesser der Kometennebel in dem benützten Fernrohr ganz leicht, und andrerseits, bis wohin er nur unter besonders günstigen Luftverhältnissen oder bei besonderer Aufmerksamkeit zu erkennen ist; denn das recht dankenswerte, aber doch einseitige Bestreben, den Durchmesser der Nebelhülle oder die Länge des Schweifes möglichst weit zu verfolgen, gewinnt erst dann seine naturgemäße Vervollständigung, wenn auch noch Angaben oder Andeutungen über die Dimension der ersten, hellsten Partie gemacht werden.

Will man sich mit einem Mittelwerte begnügen, so erscheint es geraten, den größeren Zahlen ein größeres Gewicht zu geben als den kleineren und man wird dadurch auf ungefähr $D_1 = 5'5$ geführt.

Über die Entwicklung des Schweifes erfahren wir einiges aus den Beobachtungen von Peters in Clinton (Astr. Nachr., Bd. 60). Am 17. April zeigte der Kern und die Koma eine Anschwellung in der von der Sonne abgewandten Richtung. Am 29. April erschien der Komet für das bloße Auge nur wie ein nebeliger Stern, da der Schweif im Vergleich dazu ziemlich schwach war; damit ist also gesagt, daß der Schweif mit bloßen Augen nicht zu sehen war. Mit 90facher Vergrößerung konnte er aber mit Sicherheit 3° weit verfolgt werden; ein blasser, schmaler Streif von nur 5′ Breite oder $^1/_3$ des Durchmessers der Koma, welcher 14′ oder 15′ groß geschätzt wurde.

Am 4. Mai konnte der Komet von Peters bei sehr günstigen Luftverhältnissen beobachtet werden, wobei sich unter anderem zeigte, daß der Schweif hinter dem Kopf zu beginnen schien und zunächst im ersten Teile seiner Spur ziemlich hell war, dann aber schmäler wurde und in einem Abstande von ungefähr $^3/_4$ eines Grades kaum zu sehen war, schließlich jedoch sich wieder verbreiterte wie ein schmaler Fächer, mit einer hellen Phosphoreszenz bei ungefähr 2° Abstand; die ganze Länge des Schweifes wurde auf 3° geschätzt.

Von zwei anderen Beobachtern dagegen, die den Kometen an demselben Tage in Europa, allerdings wegen der großen Meridiandifferenz zwischen Europa und Nordamerika fast sechs Stunden früher, gesehen haben, ist von einer solchen Diskontinuität in der Helligkeit des Schweifes nichts bemerkt worden. Nach Schönfeld in Mannheim (Astr. Nachr., Bd. 55, p. 213) konnte die Nebelhülle 8′ weit, der gerade Schweif über 1° weit vom Kern aus verfolgt werden; dieser Beobachter scheint also hauptsächlich nur die erste, offenbar hellere Partie des Schweifes ins Auge gefaßt zu haben. Von E. Kayser in Danzig (Astr. Nachr., Bd. 57, p. 21) wurde der Schweif an demselben Tag etwa $3^1/_2$° lang gesehen und erschien einfach als Strich; am 7. Mai zeigte er sich nur mehr als ein schwacher Schimmer von $1^1/_2$° Länge.

Rechnet man aus den Angaben über die scheinbare Schweiflänge vom 29. April und 4. Mai unter der schon

angegebenen Voraussetzung, daß der Schweif in der geradlinigen Verlängerung des Radiusvektors lag, die wahre Länge, so ergibt sich für jeden dieser beiden Tage ziemlich übereinstimmend $L_c = 0·02$, also nur $^1/_{50}$ der Entfernung der Erde von der Sonne.

Komet 1862 III.

Der Komet der Perseiden (Augustmeteore).

Periheldurchgang am 23. August ($q = 0·96$), Annäherung an die Erde am 30. August bis $\Delta = 0·34$.

Der Komet erschien, als er, hoch im Norden stehend, in der zweiten Hälfte des Juli von mehreren Beobachtern aufgefunden wurde, schon als ein recht ansehnlicher Nebel, der bald auch mit bloßen Augen gesehen werden konnte, so am 24. Juli von Schiaparelli in Mailand, am 25. von Tuttle in Cambridge U. S., am 31. von Bruhns in Leipzig, und entwickelte im August bei stetig steigender Helligkeit einen mit bloßen Augen erkennbaren, aber nicht sehr hellen Schweif. J. Schmidt in Athen hat ihn bezüglich seiner Gestalt und Helligkeit vom 9. August bis 21. September mit einziger Ausnahme des 18. September jeden Tag beobachtet[1] und von diesen Beobachtungen sind hier insbesondere die des Gesamtlichtes des Kernes und der Nebelhülle von Wichtigkeit. Ich habe sie wegen ihrer besonders großen Menge in fünftägige Mittel zusammengefaßt und bei der Reduktion die zu den mittleren Tagen gehörenden Distanzen benützt. Die Distanzen konnten sämtlich der in der Inauguraldissertation von F. Hayn enthaltenen Ephemeride entnommen werden.

1862	α	δ	[illegible]	[illegible]	5 log rΔ	H	H_1
Juli 24—31	[illegible]	—[illegible]	[illegible]	[illegible]	—[illegible]	[illegible]	[illegible]
Aug. 5	[illegible]	73	[illegible]	9·961	—0·2	5	5·2
9—13	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—[illegible]	3·9	[illegible]
14—18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—[illegible]	3·2	4·4
19—23	[illegible]	72	9·984	[illegible]	—[illegible]	2·3	4·1
24—28	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—2·3	[illegible]	4·4
29—Sept. 2	[illegible]	—[illegible]	[illegible]	[illegible]	—2·4	2·4	[illegible]
Sept. 3—7	[illegible]	—2	[illegible]	[illegible]	—2·0	3·2	5·2
8—12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—1·4	3·9	5·3
13—17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	—[illegible]	[illegible]	4·9
18—21	[illegible]	—[illegible]	[illegible]	[illegible]	—0·3	4·5	4·8

[1] Astronomische Beobachtungen über Kometen. Publications de l'observatoire [illegible] Tome [illegible]; zum Teil auch in Astr. Nachr., Bd. 59, Nr. 1395.

Das Maximum der reduzierten Helligkeit ist also $4^{m}1$ oder, wenn auch noch die beiden benachbarten Zahlen mitberücksichtigt werden, $4^{m}3$. Es trifft in jedem Falle sehr nahe mit der Zeit des Periheldurchganges zusammen.

Was in Europa nach der Mitte des September beobachtet wurde, ist wegen des schon sehr tiefen Standes des Kometen nicht mehr genau.

Die wenigen anderen Angaben über den Helligkeitseindruck des Kometenkopfes, insbesondere die von Winnecke in Pulkowa,[1] von denen die vom 5. August oben mitbenützt worden ist, und die vom Kap der guten Hoffnung,[2] wo der Komet vom 30. August bis 27. Oktober beobachtet worden ist, kommen den Schätzungen von Schmidt so nahe, daß durch ihre Mitberücksichtigung an den erhaltenen Zahlen nichts mehr geändert wird.

In den Notizen zu den Kapbeobachtungen heißt es unter anderem, daß der Kopf des Kometen am 11. September in einem Opernglas so hell wie ein Stern der 3. oder 4. Größe und am 12. September für das bloße Auge ungefähr 4. Größe, der Kern dagegen am 9. und 11. September 9. Größe war. Am 19. September war der Komet schon schwächer, am 22. viel schwächer und am 2. Oktober bei hellem Mondschein sowohl an Größe als an Helligkeit sehr reduziert; Durchmesser 3′. Nachdem er am 27. Oktober zum letztenmal beobachtet und am 31. nochmals gesehen worden war, konnte er am 6. November nicht mehr gefunden werden.

Schmidt hat auch bezüglich der Helligkeit des Kernlichtes systematische Beobachtungen angestellt und dabei beträchtliche Schwankungen gefunden (Mitte August $7^{m}4$ bis $8^{m}7$, Ende August $6^{m}7$ bis $10^{m}4$, Mitte September $9^{m}0$ bis $11^{m}0$), die durch Annahme einer Periode von 2·7 Tagen untereinander in Einklang gebracht werden können. Winnecke hat jedoch in seiner schon erwähnten Publikation über diesen Kometen (p. 34) die Angaben von Schmidt über die Helligkeit

---

[1] Pulkowaer Beobachtungen des hellen Kometen von 1862; Mémoires der Petersburger Akademie, 7. Serie, 7. Bd.

[2] Memoirs of the R. Astr. Society, London, Vol. 32.

des Kernes als irrig bezeichnet, da dieser Beobachter mit dem ihm zur Verfügung stehenden, relativ kleinen Fernrohr den eigentlichen Kern nur in seltenen Fällen gesehen haben könne und für den Kern an manchen Tagen die beträchtlich hellere Anfangspartie der Ausstrahlung genommen haben dürfte.

Was die Größe des Kometenkopfes betrifft, so konnte wegen der eigenartigen Verbindung des Schweifes mit der Koma kein einheitlicher Wert abgeleitet werden. Während man sonst gewohnt ist, die Kometen parabolisch oder elliptisch am Scheitel abgerundet zu sehen, so daß die Koma in diesem Stadium der Schweifentwicklung nicht als selbständiges Glied erkannt wird, behielt die Koma bei diesem Kometen, wie insbesondere Schmidt hervorgehoben hat, sehr lange ihre selbständige kreisrunde Gestalt, wobei sie links und rechts über die Seitenränder des Schweifes übergriff. Aus einer längeren Reihe von Bemerkungen verschiedener Beobachter ergibt sich als scheinbarer Durchmesser des Kopfes, auf $\Delta = 1\cdot0$ reduziert, im Mittel 6·3 Bogenminuten. Schmidt hat hauptsächlich den Scheitelradius der Koma bestimmt und es ergab sich, daß dieser Halbmesser, auf $\Delta = 1$ reduziert, 5′ groß erschien, so daß sich also für den Durchmesser unter sonst gleichen Umständen 10′ ergeben würde.

Der Schweif des Kometen war zwar mit bloßen Augen zu sehen, aber nach den Angaben fast aller Beobachter und so insbesondere auch nach den Bemerkungen von Schmidt ungeachtet seiner ansehnlichen Länge sehr lichtschwach und nur in seinen unteren Teilen einigermaßen auffällig; der Gesamteindruck des Kometen war infolgedessen, wie Schmidt weiter bemerkt, nicht bedeutend und vielleicht geringer als bei den Kometen 1845 III (Juni), 1853 III (August, September), 1860 III (Juni, Juli). Als größte Länge des Schweifes hat Schmidt am 27. August 25° beobachtet. Von Tuttle konnte der Schweif am 2. September sogar bis 30° verfolgt werden; er war jedoch, wie der Beobachter bemerkt, schon nach dem 10. Grade so schwach, daß er einem an solche Beobachtungen nicht gewöhnten Beschauer entgangen wäre (Astr. Nachr., Bd. 59, p. 187).

Rechnet man aus diesen Angaben die wahre Länge des Schweifes, so findet man:

1862	Δ	γ	c	L_c
August 27...	0·355	86° 44′	25°	0·17
Sept. 2...	0·361	84 3	{ 30	0·22
			10	0·07

Komet 1866 I.

Der Komet der Leoniden (Novembermeteore).

Periheldurchgang am 11. Jänner ($q = 0·976$), Annäherung an die Erde am 21. Dezember 1865 bis $\Delta = 0·194$.

Dieser Komet erweist sich unter den vier Sternschnuppenkometen als der unbedeutendste und war auch unter den Kometen überhaupt einer der schwächsten, indem er hauptsächlich nur infolge einer beträchtlichen Erdnähe für uns sichtbar geworden und selbst da ein bloß im Fernrohr auffälliges Objekt gewesen ist. Er erschien während des ganzen Beobachtungszeitraumes (19. Dezember 1865 bis 9. Februar 1866) als ein runder, gegen die Mitte schwach verdichteter Nebel von mäßiger Größe, ohne einen bestimmt wahrnehmbaren Kern und ohne nennenswerte Schweifbildung. Nur von W. Tempel, der ihn am 19. Dezember 1865 (in der Nähe des Sternes β im Kleinen Bären) unter dem klaren Himmel von Marseille entdeckt hat, ist er größer und ansehnlicher gesehen worden als von anderen Beobachtern; es heißt nämlich in der Entdeckungsanzeige, daß der Komet einen runden, in der Mitte etwas verdichteten Nebel von 12′ Durchmesser zeigte und zuweilen einen Schweif von ungefähr $^1/_2$° Länge vermuten ließ.

Es sollen zunächst sämtliche Durchmesserangaben D zusammengestellt und zur besseren Vergleichung auf $\Delta = 1·0$ reduziert werden (D_1).

1865/66			D	D_1
Dez. 19	....	Marseille	12′	2′4
21, 22	....	Wien	5	1·0
26	....	Leipzig	2	0·6
Jänner 4 und 6	....	»	2	1·2
14	....	Clinton	1?	0·9
Mitte Jänner	....	Athen	2·75	2·8

Daß sich der Durchmesser des Kometen nicht nur nach der Beobachtung aus Marseille, sondern auch nach der aus Athen wesentlich größer ergibt als nach den anderen, darf hier ebenso wie dort einer besonderen Klarheit des Himmels zugeschrieben werden.

Gibt man den größeren Zahlen ein etwas größeres Gewicht als den kleineren, so kann unter Rücksichtnahme auf alle Zahlen $D_1 = 1'8$ angesetzt werden.

Bezüglich der Helligkeit des Kometen ist man nur auf nebensächliche Bemerkungen angewiesen, doch läßt sich aus denselben trotzdem bei Berücksichtigung aller Umstände ein verhältnismäßig sicherer Zahlenwert ableiten. Zu diesem Zwecke sollen aber vorerst noch einige Angaben über den Lauf des Kometen angeführt werden (Bahnbestimmung von Oppolzer im 53. Bande dieser Sitzungsberichte).

1865/66		α	δ	$\log r$	$\log \Delta$	$5 \log r\Delta$
Dez. 19·5	.....	236°	+77°	0·020	9·317	−3·3
23·5	.....	340	50	0·011	9·344	−3·2
31·5	.....	352	13	9·997	9·661	−1·7
Jänner 8·5	.....	354	+ 3	9·992	9·874	−0·7
16·5	.....	355	− 2	9·995	0·015	+0·1
24·5	.....	355	− 4	0·007	0·116	+0·6
Febr. 9·5	.....	356	− 7	0·048	0·249	+1·5

Aus diesen Zahlen ist zunächst zu ersehen, daß der Komet während des Beobachtungszeitraumes, wenn sich seine Helligkeit nur nach dem quadratischen Verhältnis der Distanzen geändert hat, ein Helligkeitsintervall von 4^m8, also fast fünf Größenklassen durchlaufen hat. Das ist ungefähr der Spielraum für die teleskopische Sichtbarkeit eines Objektes, welches

mit einem der zu jener Zeit meist im Gebrauch stehenden Refraktoren (4 bis 6 Zoll) von der größten teleskopischen Helligkeit, also von nahe 6^m0, bis zu der geringsten, bei der es noch zu beobachten war, verfolgt worden ist, und dieser Umstand liefert einen sehr brauchbaren Beitrag zur Beurteilung des Helligkeitsgrades des Kometen.

Betrachtet man, um zunächst die mutmaßliche Endhelligkeit zu ermitteln, die Beobachtungsnotizen aus der letzten Zeit der Sichtbarkeit des Kometen, so findet man, daß die Beobachtungen nicht ausschließlich wegen der Lichtschwäche des Gestirnes aufgehört haben, sondern auch wegen seines schon ziemlich tiefen Standes am Abendhimmel, wobei sich auch das Zodiakallicht als störend erwies. Von Schmidt in Athen ist der Komet am 8. Februar, als er bei $\alpha = 356°$, $\delta = -7°$ stand, bei nur $12^1/_2°$ Höhe beobachtet worden. Daß er in dieser Zeit noch nicht zu den allerschwächsten Objekten gehört haben kann, darf auch daraus gefolgert werden, daß er am 8. und 9. Februar auch noch in Wien, also unter minder günstigen atmosphärischen Verhältnissen gesehen, beziehungsweise beobachtet worden ist. Von d'Arrest in Kopenhagen, der den Kometen im Februar nur mehr am 3. und 5. beobachtet hat, ist bemerkt worden, daß derselbe an diesen letzten Abenden wegen tiefen Standes und heller Dämmerung schwierig zu sehen war, obgleich die Mitte seines Nebels noch nicht unter einen Stern 11. oder 12. Größe gesunken war. Für den Kometen überhaupt ist also jedenfalls eine größere Helligkeit als die hier angegebene anzunehmen, und dies auch schon darum, weil d'Arrest, wie man z. B. aus der Vergleichung seiner Nebelbeobachtungen mit denen von Schönfeld findet, kleine Sterne wesentlich schwächer geschätzt hat, als man sie bei anderen Beobachtern angegeben findet. Es erscheint nach diesen Überlegungen berechtigt, die Helligkeit des Kometen für die letzten Beobachtungstage nahe an 10^m5 und jedenfalls bedeutender als bei 11^m0 anzunehmen, so daß also die reduzierte Helligkeit nahe an 9^m0 und gewiß bedeutender als 9^m5 ist.

Fragt man andrerseits nach der größten Helligkeit, die der Komet gezeigt haben dürfte, so ist zwar zunächst darauf zu

achten, daß man den Kometen als einen teleskopischen bezeichnet findet, doch ist mit Rücksicht auf das große, von ihm durchlaufene Helligkeitsintervall (4^m8) und auf seine mutmaßliche Endhelligkeit auch die Vermutung nicht abzuweisen, daß er, wenn auch teleskopisch, doch unter den teleskopischen Objekten zu den ansehnlichsten gehört hat, ja, es ist sogar nicht unwahrscheinlich, daß er zur Zeit seiner größten Helligkeit, also noch im Dezember, für bessere Augen bei einiger Aufmerksamkeit ohne Fernrohr zu erkennen gewesen wäre; es ist daher zu bedauern, daß J. Schmidt, der ein sehr lichtempfindliches Auge hatte und auf die eventuelle Erkennung eines ansehnlicheren teleskopischen Gestirnes ohne Fernrohr mit Vorliebe achtete, von der Entdeckung des Kometen erst im Jänner Nachricht erhalten hat, als die Helligkeit infolge zunehmender Entfernung von der Erde schon beträchtlich kleiner geworden war. Nimmt man als größte Helligkeit 6^m0 an, so ergibt sich als reduzierte Helligkeit 9^m3 und selbst wenn man sich erlaubt, eine noch bedeutendere Maximalhelligkeit, etwa 5 bis $5^1/_2{}^m$ anzunehmen, erhält man als reduzierte Helligkeit noch immer einen Wert, welcher den schon oben abgeleiteten nur wenig übertrifft, nämlich etwa 8^m5; weiter aber darf man wohl nicht mehr gehen.

Da also die reduzierte Helligkeit auf Grund dieser Betrachtungen einerseits nicht geringer als 9^m5, andrerseits nicht bedeutender als 8^m5 ist, erscheint sie in der Tat verhältnismäßig eng begrenzt und kann in der Nähe von $H_1 = 9^m0$ angenommen werden.

Es soll noch hervorgehoben werden, daß der Komet am 7. Jänner von Prof. E. Weiß in Wien unerwartet hell gesehen worden ist, nachdem er auch schon von H. C. Vogel zu Leipzig am 4. und 6. Jänner als sehr hell bezeichnet worden war. Es scheint, daß sich durch diese Helligkeitssteigerung, wenn sie wirklich reell war und nicht vielleicht bloß durch eine größere Klarheit der Luft oder die jetzt eingetretene Mondlosigkeit des Abendhimmels (nachdem am 1. Jänner Vollmond gewesen war) verursacht worden ist, die größte Annäherung des Kometen an die Sonne (Periheldurchgang am 11. Jänner) bemerkbar gemacht hat, wenngleich der Grad der

Annäherung kein bedeutender war, indem r von 1·05 nur bis 0·98 abgenommen hat. Jedenfalls kann aber diese Wirkung der Sonne keine lang andauernde gewesen sein, da der Komet von der zweiten Hälfte des Jänner an ziemlich allgemein schon als sehr lichtschwach bezeichnet ist.

Da nun also dieser Komet an sich gewiß wenig bedeutend war und hauptsächlich darum zu einem wenigstens einigermaßen ansehnlichen Objekt geworden ist, weil sein Periheldurchgang in eine Jahreszeit fiel, durch welche eine beträchtliche Annäherung an die Erde ermöglicht wurde, so erscheint die Folgerung gerechtfertigt, daß er in einer anderen Jahreszeit und insbesondere im Sommer nur schwer oder vielleicht gar nicht gefunden worden wäre.

Es durfte daher nicht sonderlich befremden, daß der Komet 1866 I bei der für 1899 oder eines der benachbarten Jahre erwarteten Wiederkehr unbemerkt geblieben ist; er kann sich den Nachforschungen entzogen haben, ohne daß er deshalb verschwunden zu sein braucht.

Komet Biela.

Der Komet der Andromediden oder Bieliden.

Für den Biela'schen Kometen bietet sich zunächst aus der Erscheinung von 1772 (T am 16. Februar bei $q = 0·99$, Annäherung an die Erde Mitte März bis $\Delta = 0·62$) die Bemerkung von Montaigne dar, daß der Komet bei seiner Entdeckung am 8. März mit bloßen Augen nicht wahrzunehmen war und sein Kern höchstens wie ein Stern der 6. Größe erschien. Da die Gesamthelligkeit des Kometen nach diesen zwei Angaben vermutlich zwischen der 6. und 7. Größe gewesen ist und an dem genannten Tage $\log r \doteq 0·014$, $\log \Delta = 9·796$, also $5 \log r\Delta = -1·0$ war, kann als reduzierte Helligkeit ein zwischen 7^m0 und 8^m0 liegender Wert, also etwa 7^m5, angenommen werden.

Aus der Bemerkung des Entdeckers, daß der Komet am 8. März einen der Sonne entgegengesetzten Schweif von 4 bis 5′ Länge hatte, ergibt sich als wahre Länge der sehr kleine Betrag $L_c = 0·001$.

Was die späteren Erscheinungen des Biela'schen Kometen betrifft, so hat bereits Prof. v. Hepperger bei seiner Bestimmung der Masse dieses Kometen (diese Sitzungsber., Bd. 115) die am sichersten verwendbaren Helligkeitsangaben aus den Erscheinungen 1846 und 1852 zur Ableitung der reduzierten Helligkeit benützt und dabei Werte gefunden, welche dem obigen recht nahe kommen; es sollen nunmehr auch andere Helligkeitsangaben und insbesondere die aus den anderen Erscheinungen herangezogen werden, damit sodann versucht werden kann, aus der Gesamtheit der Erscheinungen einen Mittelwert abzuleiten.

In der Erscheinung 1805/06 (T am 2. Jänner 1806 bei $q = 0 \cdot 91$) ist der Komet in eine außerordentlich bedeutende Erdnähe gekommen ($\Delta = 0 \cdot 037$ am 8. Dezember 1805), so daß er einige Zeit ein auch dem bloßen Auge auffälliges Objekt gewesen ist.

Gut verwendbar sind die Helligkeitsangaben von Huth in Frankfurt a. d. Oder, welcher den Kometen unabhängig von der zu Marseille schon am 10. November gelungenen ersten Auffindung am 22. November entdeckt und mehrere Male mit dem in der Nähe stehenden großen Andromedanebel verglichen hat (Astr. Jahrbuch, 1809, p. 131).

An dem genannten Tage war der Komet nur ein wenig matter als der Andromedanebel und konnte auch mit bloßen Augen als ein Stern 5. oder 6. Größe gesehen werden; angenommen 5^m5. Am 23. November war er wieder mit bloßen Augen zu sehen als ein matter Nebelfleck, nicht viel matter als der große in der Andromeda, mit dem er wegen seiner Nähe sehr wohl verglichen werden konnte (5^m3?). Durchmesser des ganzen Kometen im Fernrohr 6 bis 7′. Am 26. November konnte er mit bloßen Augen sehr deutlich gesehen werden, ebenso hell und groß wie der genannte Nebel (5^m0). Am 30. November war er ungeachtet des nahen und hellen Mondes (erstes Viertel) mit bloßen Augen gleich zu finden und ebenso deutlich zu sehen wie der Nebel; in den Fernrohren erschien er beträchtlich heller als derselbe (4^m?). Durchmesser 20′. Zum 1. Dezember ist folgendes bemerkt: »Wenn ich die Hand zwischen Auge und Mond halte, sehe

ich den Kometen ganz deutlich, viel größer und heller als den Nebel bei ν in der Andromeda (4?).«

Am 8. Dezember war der Komet nach Olbers in Bremen (a. a. O., p. 136) trotz seines schon sehr südlichen Standes ($\delta = -23°$) mit bloßen Augen sehr schön zu sehen und blieb selbst noch nach Aufgang des Mondes (Vollmond am 6. Dezember) dem bloßen Auge sichtbar. Auch nach einer Angabe von Gauß, der sich damals noch in Braunschweig befand (a. a. O., p. 138), war er an diesem Tage dem bloßen Auge gut sichtbar, und zwar etwa mit der Helligkeit eines Sternes 3. oder 4. Größe.

Während der Komet an den hier genannten Beobachtungsorten von jetzt an wegen seines immer mehr südlich gewordenen Standes ($\delta = -75°$ am 15. Dezember) nicht mehr weiter beobachtet werden konnte, war er inzwischen für die Südhemisphäre sichtbar geworden und dort ist er tatsächlich auf Isle de France einige Tage gesehen und auch beobachtet worden (Mitteilung von A. Winnecke in der Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft, 15. Jahrgang). Hier sei nur bemerkt, daß der Komet von den ersten Auffindern (am 10. Dezember) als ein schöner Nebelstern bezeichnet worden ist und infolge seiner bedeutenden Erdnähe sehr groß und auffällig erschien, so zwar, daß sein Durchmesser von einem Beobachter bei Hinzurechnung der lichtschwächeren Randpartien auf 45′ geschätzt wurde und selbst die hellste, schon beim Beginn der Abenddämmerung sichtbare Partie 20 bis 25′ im Durchmesser hatte; man unterschied dieselbe schon sehr gut, als man noch kaum die Sterne der 7. Größe wahrnehmen konnte. Am 18. Dezember konnte der Komet nicht mehr gefunden werden.

Es ist nicht mit Sicherheit zu entnehmen, ob die Durchmesserbestimmungen mit bloßen Augen oder mit dem Fernrohr gemacht sind, aber man wird durch die ungewöhnliche Größe an eine Bemerkung von Schröter (Lilienthal bei Bremen) erinnert, nach welcher der Komet am 8. Dezember bei seiner geringen Elevation über dem Horizont mit unbewaffneten Augen als ein großer rundlicher Lichtnebel, beinahe so groß als der Mond, ins Gesicht gefallen ist; diese

Größe war jedoch, wie Schröter weiter bemerkt, eine Täuschung, die bei dergleichen nebeligen matten Gegenständen gewöhnlich stattfindet, und in der Tat ergab sich bei der teleskopischen Beobachtung ein bedeutend kleinerer scheinbarer Durchmesser, nämlich nur $5^1/_8{}'$. Trotz dieser Bemerkungen wird man die letztere Größe nur als einen Minimalwert ansehen dürfen.

Die Reduktion der beobachteten, beziehungsweise hier angenommenen Helligkeitszahlen ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung:

1805	H	log r	log Δ	5 log $r\Delta$	H_1
Nov. 22 ...	5^m5	0·040	9·164	−4·0	9^m5
23 ...	5·3	0·037	9·139	−4·1	9·4
26 ...	5·0	0·028	9·055	−4·6	9·6
30 ...	4?	0·015	8·921	−5·3	9·3
Dez. 1 ...	4?	0·012	8·881	−5·5	9·5
8 ...	{3, 4}	9·993	8·579	−7·1	{10·1, 11·1}

Die Werte der Distanzen r und Δ konnten für diese sowie für jede der späteren Erscheinungen direkt den betreffenden Bahnbestimmungen des Biela'schen Kometen von Prof. v. Hepperger (diese Sitzber., Bd. 107, 109, 112) entnommen werden.

Daß aus der Schätzung vom letzten Tage ein wesentlich geringerer Helligkeitsgrad folgt als aus den früheren, kann nicht befremden, wenn man beachtet, daß der Komet am 8. Dezember für das nördliche Deutschland nur mehr eine kleine Höhe erreicht hat (höchstens 15°) und daher jedenfalls sehr geschwächt erschienen ist. Auch muß berücksichtigt werden, daß bei der Beobachtung der Gesamthelligkeit eines unter einem großen Durchmesser erscheinenden nebeligen Objektes keine besondere Genauigkeit zu erwarten ist, und überdies muß es als fraglich bezeichnet werden, ob bei einer so beträchtlichen Erdnähe die Reduktion der Helligkeiten nach dem Verhältnis der Quadrate der Distanzen noch zulässig ist. Übrigens beruhen alle diese Helligkeitszahlen nur auf Annahmen oder unsicheren Schätzungen und es gebührt daher eigentlich keiner ein größeres oder kleineres Gewicht als den anderen;

zieht man die zwei letzten zusammen, so erhält man im Mittel $H_1 = 9^m6$.

Reduziert man die verschiedenen Angaben über den scheinbaren Durchmesser auf $\Delta = 1 \cdot 0$, so zeigt sich recht klar, daß kein ernstlicher Widerspruch zwischen denselben besteht, wenn man annimmt, daß bei den kleineren Zahlen nur die leicht sichtbare hellere Partie, bei den größeren dagegen auch noch die äußere, viel schwächere, zur Beobachtung gelangt ist.

1805	D	D_1
Nov. 23.....	6—7'	0'9
30.....	20	1·7
Dez. 8.....	> 5½ (?)	> 0·2
10.....	{ 20—25	0·8
	45	·7

Gibt man den größeren Zahlen das doppelte Gewicht, so erhält man $D_1 = 1'4$.

Aus der Erscheinung des Kometen im Jahre 1826 (T am 18. März bei $q = 0 \cdot 90$, Annäherung an die Erde am 18. April bis $\Delta = 0 \cdot 96$) sind keine bestimmten Helligkeitsbeobachtungen überliefert, doch ist aus den indirekten Angaben zu entnehmen, daß der Komet, wenn auch nicht mit bloßen Augen, so doch immerhin so gut zu sehen war, daß er unter den nur im Fernrohr sichtbaren Gestirnen zu den helleren gehörte. Biela selbst hat, nachdem er den Kometen vom 27. Februar bis zum 12. März so oft als möglich beobachtet hatte, folgendes bemerkt (Astr. Nachr., 4. Bd.): Der Komet scheint heller oder augenfälliger zu werden und hat das Ansehen des Encke'schen Kometen vom vorigen Sommer. Nach einer Bemerkung von Schwerd in Speier war der Komet am 10. März einem ziemlich hellen Nebelfleck ähnlich mit einem Durchmesser von 2'. Nach Harding in Göttingen war er am 11. März sehr leicht im Sucher zu erkennen und schien am 14. bei hellem Mondlicht einen kleinen Schweif zu zeigen (a. a. O., p. 435).

Nach diesen Angaben ist der Komet in der Zeit vom 10. bis 12. März wenn auch nicht heller als 6. bis 7. Größe, so doch andrerseits gewiß nicht schwächer als 8. bis 9. Größe,

also in der Nähe der 7. oder 8. Größe gewesen und die reduzierte Helligkeit liegt unter dieser Annahme, da in diesen Tagen $\log r = 9\cdot96$, $\log \Delta = 0\cdot05$, also $5 \log r\Delta$ sehr nahe an 0·0 war, ebenfalls nahe bei 7^m0 oder 8^m0.

Die Reduktion der Durchmesserangabe vom 10. März führt, da $\Delta = 1\cdot13$ war, auf $D_1 = 2'3$.

Aus der Erscheinung im Jahre 1832 (T am 26. November bei $q = 0\cdot88$, Annäherung an die Erde am 24. Oktober bis $\Delta = 0\cdot55$) bieten sich zunächst zwei Angaben von J. Herschel dar, der den Kometen zu Slough mit einem lichtstarken, 20füßigen Reflektor zuerst am 23. September (am Morgen des 24.) und den nächstfolgenden Tag beobachtet und sodann am 3. November (Morgen des 4.) und den nächstfolgenden Tag wiedergesehen hat (Memoirs of the R. Astr. Society, Vol. 6). Am ersten Tag zeigte sich der Komet als ein ansehnlicher Nebel von $2^1/_2$ bis 3' Durchmesser und einem solchen Helligkeitsgrade, daß er auf einen Platz unter den von W. Herschel in die erste Klasse eingereihten hellen Nebeln Anspruch machen konnte. Am 3. November erschien er als ein großer und sehr heller Nebel, dessen Lichteindruck nach der Ansicht des Beobachters wenigstens 100mal der eines Nebels der zweiten Klasse war, von denen beim ersten azimutalen Suchen zwei bemerkt worden waren. Durchmesser des Kometen reichlich 4'; in der folgenden Nacht 5'.

Nach der letzten Helligkeitsschätzung wäre, wenn sie buchstäblich genommen werden dürfte, der Komet am 3. November um mindestens fünf Größenklassen heller gewesen als einer der bemerkten Nebelflecke, und zwar würde sich, da die Nebel der zweiten Klasse nach meinen Beobachtungen im allgemeinen in die 11. Größenklasse der Fixsterne einzureihen sind ($10^1/_2$ bis $11^1/_2{}^m$), für den Kometen nahezu die 6. Größe ergeben. Die Schätzung muß jedoch sowohl wegen ihrer Einseitigkeit als auch wegen des außerordentlich großen Helligkeitsabstandes zwischen den zu vergleichenden Gestirnen als eine höchst unsichere bezeichnet werden, aber jedenfalls läßt sie auf eine beträchtliche Helligkeit des Kometen schließen, so daß, wenn auch nicht gerade die 6., so doch immerhin die 7. oder 8. Größe angenommen werden darf.

Im Gegensatz zu diesen Angaben von J. Herschel haben die anderen Beobachter, welche mit wesentlich kleineren Instrumenten die zur Bahnberechnung dienlichen Positionen bestimmt haben, fast durchgehends bemerkt, daß der Komet wegen seiner Lichtschwäche schwierig zu beobachten war. So schreibt Lambert Mayer (Annalen der k. k. Sternwarte in Wien, XIII), daß der Komet, von welchem am 20. Oktober nur eine Spur zu ahnen gewesen war, selbst am 3. November noch sehr lichtschwach gewesen ist und erst von da an bis zum 20. November, also gegen das Perihel hin, an Lichtstärke bedeutend zugenommen hat, so daß die Beobachtungen vom 20. bis 30. November einiges Zutrauen verdienen. Besser war es in Dorpat (W. Struve), wo der neunzöllige Fraunhofer'sche Refraktor benützt werden konnte. Dort wurde übrigens der Komet am 20. Oktober im Sucher aufgefunden; Durchmesser 3′. Zum 28. November ist bemerkt, daß der Komet an Licht zugenommen hatte und auffallend hell war (Astr. Nachr., Bd. 12, Nr. 266 und 267).

Nach einer Bemerkung von Henderson, der den Kometen am Kap der guten Hoffnung zunächst vom 18. bis 27. November und dann noch vom 26. Dezember bis zum 3. Jänner des nächsten Jahres beobachtet hat, war derselbe nahe so hell wie der Encke'sche am 9. Juni 1832 (Astr. Nachr., Bd. 11, p. 296) oder, wie es in einer anderen Mitteilung heißt (Memoirs of the R. Astr. Society, Vol. 6, p. 159), vielleicht etwas heller als der genannte Komet zu der Zeit, in welcher er am Kap im Juni zuerst gesehen wurde (Juni 2 bis 8). Von dieser Vergleichung könnte man, da der Encke'sche Komet von Mossotti in Buenos Ayres am 2. und 6. Juni 1832 mit einem Stern 7. bis 8. Größe verglichen worden ist (Astr. Nachr., Bd. 10, p. 254), nach meiner Ansicht in der Weise Gebrauch machen, daß für den Biela'schen Kometen in der zweiten Novemberhälfte, etwa am 27. November, die 7. und für einen Tag der zweiten Beobachtungsperiode, etwa am 26. Dezember, die 8. Größe angenommen wird.

Versucht man es, auch für die früheren der mitgeteilten Angaben bestimmte Zahlen anzusetzen, so scheint es, daß

man dem Gesamthelligkeitseindruck des Kometen durch die folgende Wahl ziemlich nahe kommt.

1832	*H*	log *r*	log Δ	5 log *r*Δ	H_1
Sept. 23....	9^m	0·113	9·870	—0·1	9^m1
Okt. 20....	8	0·020	9·744	—1·2	9·2
Nov. 3....	7—8	9·977	9·758	—1·3	8·8
27....	7	9·944	9·869	—0·9	7·9
Dez. 26....	8	0·000	9·993	0·0	8·0

Als reduzierte Helligkeit würde sich demnach aus der ersten Zeit sehr nahe die 9., aus der letzten die 8. Größe und im Mittel etwa 8^m6 ergeben.

Reduktion der Durchmesserangaben von J. Herschel, beziehungsweise W. Struve:

1832	*D*	D_1
Sept. 23	$2^1/_2$—3′	2′0
Okt. 20	3	1·7
Nov. 3	4	2·3
4	5	2·9
		Mittel 2·2

Aus der Erscheinung des Kometen im Jahre 1846 (*T* am 11. Februar bei $q = 0·86$, Annäherung an die Erde am 20. März bis $\Delta = 0·37$), in welcher er bekanntlich als Doppelkomet erschien, bietet sich der Umstand dar, daß der Komet von zwei Beobachtern mehrere Tage mit bloßen Augen gesehen werden konnte, und zwar von J. Schmidt in Bonn und Reslhuber in Kremsmünster. Der erstere schreibt zum 26. Februar (Astr. Nachr., Bd. 24, p. 259): Der Komet war dem freien Auge sichtbar, ebenso an den folgenden Tagen, bis der Mond wieder erschien (erstes Viertel am 4. März). Am 6. März konnte der kleinere der beiden Nebel wegen des Mondlichtes kaum erkannt werden; sein Durchmesser war höchstens 3′, während der des großen mindestens 10′ hatte. Nach dem Vollmond (13. März) war der Begleiter so klein und lichtschwach geworden, daß ihn der Beobachter am 30. März, als der Durchmesser höchstens 30″ betrug, nur momentan aus dem dunklen

Himmelsgrunde hervorschimmern sah; auch der Hauptkomet nahm jetzt nach und nach so ab, daß die Beobachtungen mit dem 13. April geschlossen werden mußten. Nach Reslhuber konnte man den größeren Kometen am 20. März und die folgenden Tage bis 30. März mit freiem Auge erkennen (Astr. Nachr., Bd. 25, p. 278).

Daß der Komet schon in der Mitte des Februar recht ansehnlich gewesen sein muß, geht auch daraus hervor, daß Maury in Washington am 18. Februar beide Kometen mit einem gewöhnlichen Fernrohr (with a common spy glass) gesehen hat (Astr. Nachr., Bd. 24, p. 138).

Wird nun für jeden der von den zwei Beobachtern angegebenen Grenztage die 6. Größe angenommen, so erhält man:

1846	H	$\log r$	$\log \Delta$	$5 \log r\Delta$	H_1
Februar 26	6^m	9·950	9·654	−2·0	8^m0
März 4 (?)	6	9·965	9·619	−2·1	8·1
20	6	0·017	9·570	−2·1	8·1
30	6	0·054	9·595	−1·8	7·8

Die reduzierte Helligkeit H_1 liegt also unter dieser Annahme sehr nahe an 8^m0. Dem Wortlaut der Berichte zufolge bezieht sie sich nicht so sehr auf die Summe, als vielmehr auf den größeren der beiden Köpfe.

Der auf $\Delta = 1 \cdot 0$ reduzierte Durchmesser D_1 ist nach den zwei Angaben vom 6. März für den kleineren Kometen 1'2, für den größeren 4'1.

Jeder der beiden Kometenköpfe zeigte einen Schweif, welche parallel waren und die gewöhnliche, von der Sonne abgewandte Richtung hatten. Die Länge des einen der beiden Schweife war nach einer Bemerkung aus Washington am 22. Februar 45'; daraus ergibt sich, da an diesem Tage $\log \Delta = 9 \cdot 680$ und der Winkel $\gamma = 88° 48'$ war, als wahre Länge 0·006.

Aus der wenig günstigen Erscheinung des Biela'schen Kometen im Jahre 1852 (T am 23. September bei $q = 0 \cdot 86$), in welcher er der Erde nicht näher kam als bis $\Delta = 1 \cdot 4$ (am 1. September) und überdies nur in kleinen Höhen kurz vor der

Morgendämmerung beobachtet werden konnte, bietet sich die auch schon von Prof. v. Hepperger benützte Angabe von O. Struve in Pulkowa dar, daß der Totaleindruck der Helligkeit des Kometen — und zwar des nördlich vorangehenden Kopfes — nahezu gleich der des Vergleichssternes war. Dieser Stern ist B. D. $+10°$ 2036 und zur Helligkeit 9^m0 geschätzt. Da an dem genannten Tage $\log r = 9 \cdot 937$, $\log \Delta = 0 \cdot 168$, also $5 \log r\Delta = 0 \cdot 52$ war, ergibt sich als reduzierte Helligkeit des beobachteten Kometenkopfes 8^m5 und, wenn man für den anderen Kopf, der zwar nicht an diesem Tage, wohl aber am 20. September erkannt wurde, dieselbe Helligkeit annimmt, für beide Köpfe zusammen 7^m7. Dieser Wert kann jedoch, da der zweite Kopf nur am 20. September nahe so hell wie der erste, sonst aber merklich schwächer war, nur als Maximalwert bezeichnet werden; jedenfalls erscheint aber die reduzierte Helligkeit durch die hier abgeleiteten zwei Werte begrenzt und darf somit in der Nähe von 8^m1 angenommen werden.

Die bedeutendste Dimension des jeweilig größten der beiden Köpfe war nahezu 1 Minute; daraus ergibt sich, da Δ nahe an $1 \cdot 5$ war, $D_1 = 1'5$.

Nachdem nun alle sechs beobachteten Erscheinungen des Biela'schen Kometen untersucht sind, sollen die wahrscheinlichsten Werte der reduzierten Helligkeit und ebenso die für den scheinbaren Durchmesser und für die wahre Schweiflänge gefundenen Zahlen hier übersichtlich zusammengestellt werden.

Jahr der Erscheinung	H_1	D_1	L_c
1772......	7^m5	—	0 001
1805/06...	9·6	1'4	0
1826......	7·5	2·3	?
1832......	8·6	2·2	0
1845/46...	{8·0, << 8·0} 8·0 (?)	{4·1, 1·2}	0·006
1852......	{8·5, < 8·5} 8·1 (?)	{1·5, < 1·5}	0

Die Helligkeitswerte H_1 sind voneinander weniger verschieden, als ich erwartet hätte, und zwar so wenig, daß man sagen kann, sie gehen nicht weiter auseinander als manche Schätzungen eines Fixsternes in verschiedenen Sternkatalogen. Es sind zwar Schwankungen zu bemerken, doch sind dieselben so klein und die Zahlen so wenig sicher, daß man aus ihnen eine ernstliche Folgerung wohl nur dann ziehen könnte, wenn man auch noch die Helligkeiten des Kometen in den zwischenliegenden Erscheinungen kennen würde. Jedenfalls sind die Helligkeitswerte soweit konstant, daß man sagen kann, es finde sich in der Gesamthelligkeit des Kometen nichts, was auf eine Katastrophe, also insbesondere auf das Ausbleiben oder Unsichtbarwerden des Kometen nach 1852 schließen lassen würde.

Eine Unterbrechung der Kontinuität ist dagegen bei den Dimensionen und bei der Schweiflänge in der Erscheinung 1845/46 bestimmt ausgesprochen.

Stellt man jetzt die für alle vier Kometen gefundenen Resultate in Kürze zusammen und ordnet die Kometen nach der Größe der reduzierten Helligkeiten, so erhält man die folgende Übersicht, in welcher auf den Umstand, daß der Schweif des zuerst genannten Kometen mit bloßen Augen gesehen werden konnte, durch Beisetzung eines Sternchens (*) aufmerksam gemacht ist.

Komet	q	H_1	D_1	L_c
1862 III (Perseiden)	0·96	4^m3	6'3	0·20*
1861 I (Lyriden)	0·92	5·6	5·5	0·02
Biela (Andromediden) ...	(0·90)	(8·1)	(2·0)	1772 : 0·001 1846 : 0·006
1866 I (Leoniden)	0·98	9·0	1·8	0 ?

Es ist also auf Grund der Helligkeitswerte H_1 der Perseidenkomet der ansehnlichste; ihm folgt zunächst, nämlich um etwa eine Größenklasse schwächer, der Komet der Lyriden und erst nach einem viel größeren Helligkeitsintervall folgen die zwei schwächsten Kometen, so zwar, daß der Biela'sche der vorletzte und der Leonidenkomet der letzte ist.

Dasselbe Verhältnis zeigt sich auch, wie man bei der Vergleichung von H_1 mit D_1 sofort bemerkt, bezüglich der Dimensionen, indem die hellsten Kometen auch die größten und andrerseits die schwächsten die kleinsten waren.

Besonders wichtig erschien es mir noch nachzusehen, ob sich diese vier Kometen auch bezüglich des Zusammenhanges der Schweifentwicklung L_c mit dem Helligkeitsgrad H_1 und der Annäherung an die Sonne q nahe so verhalten haben wie andere Kometen oder ob sie in dieser Beziehung vielleicht eine auffallende Abweichung erkennen lassen. Vergleicht man zu diesem Zwecke diese Kometen mit anderen, welche von mir bereits untersucht sind und wozu sich in erster Linie natürlich diejenigen eignen, deren Periheldistanzen nahe so groß sind wie bei diesen Kometen (0·86 bis 0·98), so findet man bald, daß sich diese vier Kometen in jeder Beziehung unter die anderen einreihen lassen, daß also eine Abweichung von der allgemeinen Regel nicht nachzuweisen ist.

Was zunächst den Kometen 1862 III betrifft, der es bei einer Annäherung an die Sonne bis $q = 0{\cdot}96$ und $H_1 = 4^m3$ zur Entwicklung eines zwar nur mäßig langen und wenig hellen, aber doch mit bloßen Augen sichtbaren Schweifes gebracht hat, so kann derselbe bezüglich dieser Größen ohne Zwang in eine Kometentabelle, die einerseits nach q, andrerseits nach H_1 und L_c fortschreitet, eingeordnet werden. Eine solche Tabelle, die Kometen bis 1799 enthaltend, findet sich am Schlusse der zweiten meiner oben zitierten Kometenabhandlungen (Denkschriften der mathem.-naturw. Klasse, 77. Bd.).

Auch beim Kometen 1861 I, der es bei $q = 0{\cdot}92$ und $H_1 = 5^m6$ bloß zur Entwicklung eines kurzen und nur teleskopisch sichtbaren Schweifes gebracht hat, findet man, daß durch Einreihung desselben in das erwähnte Kometentableau keine Diskontinuität entsteht. Dasselbe gilt von dem schwächsten Kometen, nämlich 1866 I, der bei einer Annäherung an die Sonne bis $q = 0{\cdot}98$ und $H_1 = 9^m0$ so gut wie gar keine Schweifentwicklung gezeigt hat.

Es scheint also, daß diese drei Kometen, auch wenn sie Sternschnuppenschwärme abgegeben haben, von der ihrem

Helligkeitsgrad entsprechenden Fähigkeit zur Schweifentwicklung nichts eingebüßt haben.

Auch der Biela'sche Komet hat sich im allgemeinen so verhalten wie andere mit nahezu denselben Werten der Periheldistanz und der reduzierten Helligkeit, doch ist bei ihm zwischen den verschiedenen Erscheinungen insofern eine Differenz vorhanden, als in einigen eine Schweifentwicklung beobachtet werden konnte (1772 und 1826 eine sehr geringe, 1846 eine wesentlich bedeutendere und sogar an jedem der beiden Köpfe), in anderen dagegen nicht. Sucht man trotz dieser Verschiedenheit alle Erscheinungen des Schweifes unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt zu bringen, so drängt sich die Annahme auf, daß in den ersten Erscheinungen noch etwas von der ursprünglichen Schweifbildungsfähigkeit des Kometen vorhanden war, was sich jedoch nur mehr wenig bemerkbar machen konnte, indem bloß aus zwei — allerdings nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden — Erscheinungen von einem Schweif berichtet wird und daß sodann in der Erscheinung 1845/46 durch eine infolge der Trennung des Kometen entstandene Auslösung von gewissen Kräften die Schweifbildung abermals begünstigt worden ist, sich aber nur mehr kurze Zeit bemerkbar machen konnte, indem sie bei der nächsten Erscheinung schon wieder erloschen war.

Vielleicht ist es doch etwas mehr als bloße Unsicherheit, daß sich aus den Erscheinungen des Biela'schen Kometen von 1772 und 1826, in denen eine wenn auch nur geringe Schweifbildung beobachtet worden ist, als reduzierte Helligkeit die größten Werte (7^m5) ergeben haben, während sich aus der Erscheinung von 1805/06, in welcher der Komet trotz bedeutender Erdnähe bestimmt ohne Schweif und völlig rund gesehen worden ist, der kleinste Wert (9^m6) ergeben hat.

Es scheinen also die für diese vier Kometen gefundenen Helligkeitswerte nicht nur durch die ziemlich verläßlichen Rechnungsgrundlagen, sondern in einem entfernteren Grade auch dadurch gesichert zu sein, daß sich die Schweifentwicklung der Kometen zu ihrer Helligkeit nahe so verhalten hat,

wie dies nach den bei anderen Kometen gemachten Erfahrungen zu erwarten ist.

Fragt man nun zum Schlusse nach Beziehungen zwischen den vier Sternschnuppenschwärmen und den Helligkeitsgraden der zugehörigen Kometen, so ist die auffallendste wohl die, daß die mit den zwei hellsten und ansehnlichsten Kometen ($H_1 = 4^m3$ und 5^m6) in Zusammenhang stehenden Schwärme (Perseiden und Lyriden) Jahr für Jahr in ziemlich gleicher Stärke wiederkehren, wenn sich auch in der letzten Zeit eine geringe Abnahme bemerkbar zu machen scheint, und daß dagegen die mit den zwei schwächsten Kometen ($H_1 = 8^m1$ und 9^m0) in Zusammenhang stehenden (Andromediden und Leoniden) nicht Jahr für Jahr in gleicher Stärke, sondern nach längeren Zeiträumen in besonderer Stärke und Reichhaltigkeit beobachtet worden sind, so zwar, daß die Intervalle sehr nahe der Umlaufszeit der betreffenden Kometen entsprechen.

Damit hängt auch die nachstehende Folgerung zusammen. Wenn es richtig ist, daß eine Kometenmasse dem Helligkeitsgrade des betreffenden Kometen angenähert proportional ist und die Sternschnuppenschwärme nicht nur durch Kometen entstanden sind, sondern durch dieselben auch jetzt noch erhalten und bereichert werden, so ist ein solcher Zufluß am reichlichsten bei den mit dem mächtigsten Kometen zusammenhängenden Perseiden zu erwarten, in einem merklich geringeren Grade bei den Lyriden — vorausgesetzt, daß ein solcher Schwarm der Erdbahn hinreichend nahe bleibt — und am wenigsten bei den Leoniden.

Es wird bei der nächsten Wiederkehr irgendeines dieser Kometen von besonderer Wichtigkeit sein, durch Beobachtung und Vergleichung seiner Helligkeit mit der gegenwärtigen festzustellen, ob sie nahezu dieselbe geblieben oder vielleicht wesentlich anders geworden ist. Wenn auch die Folgerung vom Helligkeitsgrad auf die Kometenmasse nicht völlig zutreffend sein sollte, so wird eine solche Gegenüberstellung der Helligkeitswerte doch gewiß einen wichtigen Beitrag zur Untersuchung der Frage liefern, ob ein wesentlicher Verlust an Kometenmaterie stattgefunden hat oder nicht.

Durch diese Bestimmung der Helligkeitsverhältnisse der vier Sternschnuppenkometen scheint also eine neue Seite zur Vergleichung der periodischen Meteorschwärme mit den zugehörigen Kometen gefunden zu sein und die abgeleiteten Helligkeitszahlen (4^m3, 5^m6, 8^m1, 9^m0) sind soweit gesichert, daß sie auch beim Bemerkbarwerden irgendeiner anderen Beziehung zwischen diesen Schwärmen und ihren Kometen mit einiger Zuversicht als Anhaltspunkte zur Vergleichung herangezogen werden können.

Über das Verhalten von Isolatoren im elektrostatischen Drehfeld

von

Anton Lampa.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1908.)

In meiner Abhandlung »Über Rotationen im elektrostatischen Drehfeld«[1] habe ich gezeigt, daß ein Isolator, auch wenn derselbe keine Leitfähigkeit besitzt, in einem elektrostatischen Drehfeld ein Drehungsmoment erfährt, wenn er die Eigenschaft der »viskosen Hysteresis« zeigt, also seine Polarisation hinter der Feldintensität zeitlich zurückbleibt. Dieser Untersuchung wurde aber keine spezielle Annahme über das Gesetz der viskosen Hysteresis zugrunde gelegt. Inzwischen hat v. Schweidler gezeigt,[2] daß die bisher einzige präzise Formulierung der Erscheinung der dielektrischen Nachwirkung, die Theorie von Pellat, einen geeigneten Ausgangspunkt für die theoretische Formulierung des anomalen Verhaltens der Dielektrika bilde. In den folgenden Zeilen soll nun die Rotation, welche dielektrische Medien im elektrostatischen Drehfeld zeigen, vom Standpunkt der Pellat'schen Theorie betrachtet werden.

Das wirksame Drehfeld werde durch zwei zueinander senkrechte Wechselfelder erzeugt, deren Intensitäten durch Ausdrücke von der Form $E \cos \gamma t$ und $E \sin \gamma t$, worin E eine Konstante ist, gegeben seien. Zu betrachten ist das Verhalten eines Dielektrikums, dessen Dielektrizitätskonstante mit D

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXV, Abt. IIa, Dezember 1906.

[2] v. Schweidler, Studien über die Anomalien im Verhalten der Dielektrika. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXVI, Abt. IIa, 1907.

bezeichnet werden soll. Dieses Dielektrikum habe auch eine Ohm'sche Leitfähigkeit λ. Die Umgebung dieses Dielektrikums sei wieder ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante D' und der Leitfähigkeit λ'. Wirkt nun auf die beiden Dielektrika ein elektrostatisches Feld, so werden in ihnen sowohl Verschiebungsströme als auch Leitungsströme hervorgerufen. Es möge nun die Verschiebung senkrecht zur Trennungsfläche der beiden Dielektriken mit ν, respektive ν', die Leitungsströmung senkrecht zur Trennungsfläche in denselben mit i, respektive i' bezeichnet werden. Die Normale auf die Trennungsfläche denken wir uns von dem inneren Dielektrikum gegen das umgebende gerichtet. Wir haben dann in der Richtung der Normalen eine Strömung:

im eingeschlossenen Dielektrikum: $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \nu}{\partial t} + i,$

im umgebenden Dielektrikum: $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \nu'}{\partial t} + i'.$

Die Differenz dieser Größen an einem bestimmten Punkte der Trennungsfläche gibt dann die Zunahme der Elektrizitätsmenge pro Flächeneinheit an diesem Punkte der Trennungsfläche, d. h. also die Zunahme der Flächendichte σ an dieser Stelle in der Zeiteinheit. Wir haben demnach:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial \nu'}{\partial t}\right) + i - i'. \tag{1}$$

Andrerseits ist die Flächendichte bestimmt durch den Sprung der Normalkraft beim Hindurchgang durch die Oberfläche. Bezeichnen wir die Normale mit n, das Potential des induzierenden Feldes mit Φ, das Potential der auf der Oberfläche des inneren Dielektrikums induzierten Flächenbelegung mit φ, so ist die Normalkraft im inneren Dielektrikum

$$N = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \tag{2}$$

im äußeren Dielektrikum

$$N' = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n}, \tag{3}$$

und

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}(N'-N) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right). \quad (4)$$

Da ferner $i = \lambda N$ und $i' = \lambda' N'$, so kann Gleichung (1) geschrieben werden:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\nu - \nu') + \lambda N - \lambda' N' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right). \quad (6)$$

Nun ist nach der Pellat'schen Hypothese[1]

$$\frac{\partial\nu}{\partial t} = D\frac{\partial N}{\partial t} + \alpha(\varepsilon D N - \nu), \quad (7)$$

$$\frac{\partial\nu'}{\partial t} = D'\frac{\partial N'}{\partial t} + \alpha'(\varepsilon' D' N' - \nu'); \quad (8)$$

hierin sind α, ε, α', ε' Materialkonstanten der beiden Dielektriken; ε gibt das Verhältnis des bei Einwirkung eines konstanten Feldes sich ausbildenden stationären Endwertes der viskosen Verschiebung zu der normalen Verschiebung, α ist der reziproke Wert der Relaxationszeit der viskosen Verschiebung. Die Dielektrizitätskonstante ist im Maxwell'schen Sinne genommen, so daß die normale Verschiebung durch das Produkt aus Dielektrizitätskonstante und Feldintensität gegeben ist.

Durch die Gleichungen (2), (3), (6), (7), (8), zu welchen noch die Gleichungen $\Delta\Phi = \Delta\varphi = \Delta\varphi' = 0$ hinzukommen, ist das Verhalten der Dielektriken vollkommen bestimmt. Wegen der letzteren Gleichungen auf meine erste Abhandlung verweisend, wende ich mich nun der Betrachtung des speziellen Falles zu, daß das innere Dielektrikum Kugelgestalt habe. Der Radius der Kugel sei R, ihr Mittelpunkt werde zum Anfangspunkt des Koordinatensystems gewählt. Man kann dann das Wechselfeld in der X-Richtung durch ein Potential $\Phi_x = -\frac{a}{R}x\cos\gamma t$, das Wechselfeld in der Y-Richtung durch

[1] Siehe die genannte Abhandlung von v. Schweidler.

ein Potential $\Phi_y = -\frac{a}{R} y \sin \gamma t$ darstellen, worin a eine Konstante bedeutet.

Wir untersuchen zunächst die Wirkung des Wechselfeldes in der X-Richtung. Führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir setzen

$$x = \rho \cos \omega \sin \vartheta$$
$$y = \rho \sin \omega \sin \vartheta$$
$$z = \rho \cos \vartheta,$$

so wird $\Phi_x = -\frac{a}{R} \rho \cos \omega \sin \vartheta \cos \gamma t.$

Wir machen den Ansatz

$$\varphi_x = \frac{a}{R} \rho \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \gamma t + B_x \cos \gamma t)$$
$$\varphi'_x = a R^2 \frac{1}{\rho^2} \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \gamma t + B_x \cos \gamma t).$$

Bei der Bestimmung der Konstanten A_x und B_x ist es nicht notwendig, den Faktor $\frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta$ mitzuführen. Da die Richtung der Normalen n mit der Richtung des Radiusvektors ρ zusammenfällt, ist nämlich für $\rho = R$ (die Oberfläche der Kugel)

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial \rho} = -\frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta \cos \gamma t$$
$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial \rho} = \frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \gamma t + B_x \cos \gamma t)$$
$$\frac{\partial \varphi'_x}{\partial n} = \frac{\partial \varphi'_x}{\partial \rho} = -2 \frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta \, (A_x \sin \gamma t + B_x \cos \gamma t);$$

diese drei Ausdrücke enthalten denselben von der Zeit unabhängigen Faktor $\frac{a}{R} \cos \omega \sin \vartheta$. Die weitere Rechnung kann daher so geführt werden, als ob

$$\Phi_x = -\rho \cos \gamma t$$
$$\varphi_x = \rho \, (A_x \sin \gamma t + B_x \cos \gamma t)$$
$$\varphi'_x = \frac{R^2}{\rho^2} (A_x \sin \gamma t + B_x \cos \gamma t$$

wäre. Durch Substitution dieser Werte in die Gleichungen (2) und (3) und Einsetzung der so gewonnenen Ausdrücke in (7) und (8) ergibt sich, daß ν und ν' in der Form $a \sin \gamma t + b \cos \gamma t$ dargestellt werden können, wobei a und b Konstanten sind, welche von A_x, B_x, α, ε, γ, respektive A_x, B_x, α', ε', γ abhängen. Durch Substitution der Werte von Φ_x, φ_x, φ'_x, ν und ν' in (6) erhält man dann zwei Bestimmungsgleichungen für A_x und B_x, da die Faktoren von $\sin \gamma t$ und $\cos \gamma t$ einzeln gleich Null sein müssen. Man erhält auf diese Weise die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\left[-4\pi(2\lambda'+\lambda) + \frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2} D\gamma + 2\frac{\gamma\alpha'(1-\varepsilon')}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\gamma\right] A_x + \\
\quad \gamma\left[3 + \frac{\alpha^2\varepsilon+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2} D + 2\,\frac{\alpha'^2\varepsilon'+\gamma^2}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\right] B_x - \\
\quad \gamma\left[\frac{\alpha^2\varepsilon+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2} D - \frac{\alpha'^2\varepsilon'+\gamma^2}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\right] = 0 \\
-\gamma\left[3 + \frac{\alpha^2\varepsilon+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2} D + 2\,\frac{\alpha'^2\varepsilon'+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2} D'\right] A_x + \\
\quad \left[-4\pi(2\lambda'+\lambda) + \frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2} D\gamma + 2\frac{\gamma\alpha'(1-\varepsilon')}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\gamma\right] B_x - \\
\quad \left[4\pi(\lambda'-\lambda) + \frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2} D\gamma - \frac{\gamma\alpha'(1-\varepsilon')}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\gamma\right] = 0,
\end{array}\right\} \quad (9)$$

die wir der Kürze wegen schreiben wollen:

$$\left.\begin{array}{r}
l A_x + m B_x = F \\
-m A_x + l\, B_x = G.
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Das Potential des Wechselfeldes in der Y-Richtung ist

$$\Phi_y = -\frac{a}{R}\, y \sin \gamma t = -\frac{a}{R}\, \rho \sin \omega \sin \vartheta \sin \gamma t.$$

Wir machen den Ansatz:

$$\varphi_y = \frac{a}{R}\, \rho \sin \omega \sin \vartheta\, (A_y \sin \gamma t + B_y \cos \gamma t)$$

$$\varphi'_y = a R^2 \frac{1}{\rho^2} \sin \omega \sin \vartheta\, (A_y \sin \gamma t + B_y \cos \gamma t).$$

Da man Φ_y auch schreiben kann:

$$\Phi_y = -\frac{a}{R}\rho \sin\omega \sin\vartheta \cos\gamma t',$$

wobei $\gamma t' = \gamma t - \frac{\pi}{2}$, muß der Ansatz

$$\varphi_y = \frac{a}{R}\rho \sin\omega \sin\vartheta\,(A_x \sin\gamma t' + B_x \cos\gamma t')$$

$$\varphi'_x = aR^2\frac{1}{\rho^2}\sin\omega \sin\vartheta\,(A_x \sin\gamma t' + B_x \cos\gamma t')$$

ebenfalls genügen. Es muß daher sein:

$$A_y \sin\gamma t + B_y \cos\gamma t = A_x \sin\gamma t' + B_x \cos\gamma t' = -A_x \cos\gamma t + B_x \sin\gamma t$$

oder

$$\left.\begin{aligned} A_y &= B_x \\ B_y &= -A_x. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Die direkte Berechnung von A_y und B_y ergibt dasselbe Resultat.

Da die Dichte der induzierten Schicht gegeben ist durch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial\varphi'}{\partial\rho}\right)_{\rho=R},$$

so ergibt das Wechselfeld in der X-Richtung die Dichte:

$$\sigma_x = \frac{3a}{4\pi R}\cos\omega \sin\vartheta (A_x \sin\gamma t + B_x \cos\gamma t) = \frac{3a}{4\pi R}\cos\omega \sin\vartheta \,.\, M,$$

das Wechselfeld in der Y-Richtung die Dichte:

$$\sigma_y = \frac{3a}{4\pi R}\sin\omega \sin\vartheta (B_x \sin\gamma t - A_x \cos\gamma t) = \frac{3a}{4\pi R}\sin\omega \sin\vartheta \,.\, N.$$

Die durch das Drehfeld induzierte Dichte ist

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y = \frac{3a}{4\pi R}\sin\vartheta (M \cos\omega + N \sin\omega).$$

Das auf die Kugel vom Drehfeld ausgeübte Drehungsmoment $\mathfrak{D}$ ist dann [siehe meine erste Abhandlung, Gleichung (34)]:

$$\mathfrak{D} = a^2 R (M \sin \gamma t - N \cos \gamma t) = a^2 R . A_x.$$

Berechnet man aus den Gleichungen (10), respektive (9) den Wert von A_x, so erhält man:

$$\mathfrak{D} = a^2 R \gamma \frac{\left(\frac{\alpha^2 \varepsilon + \gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2} D - \frac{\alpha'^2 \varepsilon' + \gamma^2}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\right)\left[-4\pi(2\lambda'+\lambda) + \frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2} D\gamma + 2\frac{\gamma\alpha'(1-\varepsilon')}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\gamma\right) - \left(3 + \frac{\alpha^2\varepsilon+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2} D + 2\frac{\alpha'^2\varepsilon'+\gamma^2}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\right)\left[4\pi(\lambda'-\lambda) + \frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2} D\gamma - \frac{\gamma\alpha'(1-\varepsilon')}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\gamma\right]}{\left[-4\pi(2\lambda'+\lambda) + \frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2} D\gamma + 2\frac{\gamma\alpha'(1-\varepsilon')}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\gamma\right]^2 + \gamma^2\left(3 + \frac{\alpha^2\varepsilon+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2} D + 2\frac{\alpha'^2\varepsilon'+\gamma^2}{\alpha'^2+\gamma^2} D'\right)^2}. \qquad (12)$$

Ist $\mathfrak{D}$ positiv, so sucht das Drehfeld die Kugel mitzunehmen oder umgekehrt, die Drehung der Kugel in einem ruhenden Felde wird gehemmt, das Drehungsmoment ist hemmend; ist $\mathfrak{D}$ negativ, so sucht das Drehfeld die Kugel entgegengesetzt seinem eigenen Drehungssinn zu bewegen; eine rotierende Kugel im ruhenden Felde erhält in diesem Falle eine Winkelbeschleunigung, das Drehfeld ist treibend. Das Drehungsmoment hängt ferner von der Drehungsgeschwindigkeit des Feldes ab. Bedeutet τ die Umlaufsdauer des Feldes, so ist $\gamma = \frac{2\pi}{\tau}$ und für unendlich kleine Umlaufszeiten ($\tau = 0$) ist somit $\gamma = \infty$. Hiermit erhält man $\mathfrak{D}_{\tau=0} = 0$. Ebenso ist $\mathfrak{D}_{\tau=\infty} = 0$ (ruhendes Feld).

Wie durch Spezialisierung des Ausdruckes (12) hervorgeht, genügt das Vorhandensein einer Leitfähigkeit, um ein von Null verschiedenes Drehungsmoment zu erhalten. Setzt man nämlich $\alpha = \alpha' = 0$, so folgt:

$$\mathfrak{D} = 4\pi a^2 R\gamma \frac{(D'-D)(2\lambda'+\lambda)-(2D'+D+3)(\lambda'-\lambda)}{16\pi^2(2\lambda'+\lambda)^2+\gamma^2(2D'+D+3)^2}.$$

Dieser Ausdruck entspricht der Formel (35) meiner ersten Abhandlung. Auch er liefert, auf die Beobachtungen v. Lang's[1] angewendet, im ganzen großen Übereinstimmung mit dem Experiment, nach welchem Quarz, Hartgummi und Paraffin in Äther, Chloroform und Xylol ein treibendes, in Benzol, Toluol, Oliven- und Rizinusöl ein hemmendes Drehungsmoment erfahren. Eine Ausnahme bilden Hartgummi in Toluol und Paraffin in den letztgenannten vier Flüssigkeiten. Für die Kombination Hartgummi-Toluol ergibt sich ein sehr kleiner Wert des negativen Drehungsmomentes; eine geringfügige Vergrößerung des Wertes der Leitfähigkeit von Toluol würde schon ein positives Drehungsmoment ergeben. (Die Werte der Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der genannten Stoffe sind in meiner ersten Abhandlung mitgeteilt.)

Ist das äußere Medium das Vakuum (oder nicht ionisierte Luft), so ist $D' = 1$ und $\alpha' = \lambda' = 0$ zu setzen und man erhält:

$$\mathfrak{D} = -6a^2 R\gamma \frac{-4\pi\lambda+\frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2}D\gamma}{\left(-4\pi\lambda+\frac{\gamma\alpha(1-\varepsilon)}{\alpha^2+\gamma^2}D\gamma\right)^2+\gamma^2\left(5+\frac{\alpha^2\varepsilon+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}D\right)^2}. \tag{13}$$

Dieser Ausdruck lehrt, daß das Drehungsmoment, welches auf die dielektrische Kugel ausgeübt wird, sowohl durch ihre Leitfähigkeit als auch durch ihre dielektrische viskose Hysteresis bedingt ist. Das Vorzeichen dieses Drehungsmomentes kann positiv oder negativ sein.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CXV, Abt. IIa, März 1906.

Die Pellat'sche Hypothese erklärt also das Verhalten der Isolatoren im Drehfeld qualitativ. v. Schweidler hat (l. c.) gezeigt, daß sich durch eine Erweiterung derselben nicht nur eine qualitative, sondern auch eine quantitative Anpassung an die verschiedenen Formen des anomalen Verhaltens der Dielektrika erzielen läßt, bis auf einen Punkt: die Drehungsmomente im Drehfeld erweisen sich auch nach der modifizierten Theorie, in welcher das Drehungsmoment durch eine Summe von Ausdrücken von der Form (13) dargestellt wird, proportional zu $a^2 R$ oder, da $\frac{a}{R} = E$ (= Amplitude der Feldstärke) ist, proportional zum Quadrat der Amplitude der Feldstärke, während einige Beobachter Proportionalität zu E^n gefunden haben, wo $n = 1 \cdot 5$ bis $1 \cdot 96$ war. Dieser Punkt bedarf noch einer weiteren Aufklärung.

Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität einiger Quellen Oberösterreichs

(I. Mitteilung)

von

Max Bamberger.

Aus dem Laboratorium für anorganische Chemie an der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1908.)

Durch zahlreiche eingehende Untersuchungen[1] ist erwiesen, daß viele aus Granit entspringende Wässer hohe Radioaktivität besitzen, und es erschien daher von Interesse, einige Quellen des südböhmischen Hauptgranitstockes in bezug auf ihre Radioaktivität zu prüfen.

Herr Rittmeister v. Polzer-Hoditz machte mich aufmerksam, daß auf seiner Besitzung bei Schloß Tannbach[2] in einer Kapelle eine Quelle entspringt, neben welcher vor vielen Jahren eine Badeanstalt[3] errichtet war.

Dr. A. v. Härdtl[4] erwähnt auch diese Quelle, hält sie für eisenhaltig und gibt die Temperatur derselben mit 9° R. an.

---

[1] G. v. d. Borne, Die radioaktiven Mineralien, Gesteine und Quellen. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, *2* (1905), 77.

[2] Schloß Tannbach befindet sich im Gerichtsbezirk Prägarten (unteres Mühlviertel), in der Nähe des Ortes Guttau.

[3] In einem Almanach aus den fünfziger Jahren beschreibt der oberösterreichische Dichter O. Prechtler Bad Tannbach und erwähnt, »daß die Heilkraft der Quelle sich, von den kompetenten Ärzten geprüft, durch viele Jahre als äußerst wohltätig bewährte und mancher Gichtkranke, mit Krücken sich zur Stelle schleppend, hat das Haus ganz genesen verlassen«. Der Arzt von Guttau, Herr Mehr, der die Quelle seit zirka 50 Jahren kennt, bestätigt die oben gemachten Angaben Prechtler's.

[4] Dr. A. v. Härdtl, Die Heilquellen und Kurorte des österreichischen Kaiserstaates und Oberitaliens, p. 385, Wien 1862, Braumüller.

Die Bestimmung der Radioaktivität erfolgte mit dem Fontaktoskop[1] von C. Engler und H. Sieveking.[2]

Da sich die in Rede stehende Quelle als stark radioaktiv erwies, wurde die Untersuchung auf eine größere Anzahl von Quellen im Umkreis[3] von Tannbach ausgedehnt, welche sämtlich aus Granit entspringen.

Die in der nachfolgenden Tabelle (p. 1057 bis 1059) verzeichneten Zahlen geben den für einen Liter Wasser direkt beobachteten oder, da in vielen Fällen geringere Wassermengen genommen wurden, den für einen Liter umgerechneten Potentialabfall in Volt pro eine Stunde unter Berücksichtigung des Normalverlustes und der im Versuchswasser zurückbleibenden Emanation an.

Wie aus der mitgeteilten Tabelle hervorgeht, besitzt die Quelle beim Teiche des Schlosses Tannbach bedeutende Aktivität und schließt sich an die stark radioaktiven Quellen[4] Österreichs an.

Es wurde versucht, einen Anhaltspunkt zu gewinnen, ob die Aktivität der in Rede stehenden Quelle (47·0 bis 52 Macheeinheiten) von dem Gehalt an Radiumverbindungen oder anderer radioaktiver Stoffe herrührt.

1, 2 Zeitschrift für anorganische Chemie, *53* (1907), 1. Sämtliche Bestimmungen wurden mit einem und demselben Apparat ausgeführt und betrug die Kapazität des von der Firma Günther & Tegetmeyer in Braunschweig gelieferten Elektroskops (Nr. 2220) 13·9.

3 Der Umkreis um die bei Tannbach und Guttau untersuchten Quellen beträgt zirka 10 *km*. Zieht man Kefermarkt und Bründl bei St. Oswald mit in Betracht, so ist die umschriebene Ellipse zirka 30 *km* lang.

4 Joachimthal 33 bis 185 Macheeinheiten (H. Mache und St. Meyer, Monatshefte für Chemie, *26* [1905], 618).

Bad Gasteiner Thermen 0·31 bis 155 Macheeinheiten (l. c. 357).

Eisenquelle in Karlsbad 38·4 Macheeinheiten (l. c. 606).

Mühlbrunnen (vordere Quelle) in Karlsbad 31·5 Macheeinheiten (l. c. 606).

Magenquelle in Froy, Tirol, 51 Macheeinheiten (Monatshefte für Chemie, *29* [1908], 317).

Andersdorfer kalte Quellen 17·6 bis 28·6 Macheeinheiten (R. Ehrenfeld, Untersuchungen über die Radioaktivität mährischer und schlesischer Heilquellen und Mineralbrunnen. In: Festschrift zur Erinnerung an die Feier des 50jährigen Bestandes der Landes-Oberrealschule in Brünn).

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Mache-einheiten $i \times 10^3$
		1908				
Tannbach	Mühlviertel	23. V.	Alte Badequelle in der Kapelle[1]	10·0	1568	20·2
»	»	9. VI.	» » » » »	10·0	1465	19·0
»	»	24. V.	Alte Badequelle außerhalb der Kapelle[2] .	10·0	1796	23·0
»	»	8. VI	» » » » » ..	9·0	1514	19·5
»	»	24. V.	Quelle[3] beim Teiche des Schlosses Tannbach[4]	8·0	4050	52·0
»	»	24. V.		8·0	3963	51·0
»	»	8. VI.		9·0	3758	48·4
»	»	9. VI.		9·0	3645	47·0
»	»	24. V.	Ziehbrunnen für Trinkwasser von Schloß Tannbach	10·0	975·3	12·6
»	»	8. VI.		8·0	1040·2	13·4
»	»	8. VI.	Ziehbrunnen im Keller des Wirtschaftsgebäudes von Schloß Tannbach	8·5	953·5	12·0

[1] Es sei bemerkt, daß der Normalverlust in der Kapelle ein besonders hoher war (40 Volt).

[2] Der Abdampfrückstand beträgt pro Liter 0·075 *g*.

[3] Der Abdampfrückstand beträgt pro Liter 0·0815 *g*.

[4] Die Bestimmungen im Monat Juni wurden nach starken andauernden Regengüssen vorgenommen.

Örtlichkeit		Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Mache-einheiten $i \times 10^3$
Tannbach	Mühlviertel	1908 24. V.	Quelle im Brunnenhäuschen westlich von Tannbach	9·0	855·4	11·0
»	»	24. V.	Quelle beim unteren Zaunerhaus	9·0	2070	27·0
»	»	8. VI.	» » » »	8·5	1735	22·3
»	»	7. VI.	Brunnenquelle beim Zulehner	10·5	546	7·2
»	»	7. VI.	Zulehnerwasserleitung	9·0	217	2·8
»	»	7. VI.	Drainagewasser	8·5	230·3	2·9
»	»	7. VI.	Quelle am Steg am Wege nach Guttau	9·0	612·7	7·9
»	»	8. VI.	Wasser des Teiches bei Schloß Tannbach	15·5	154·0	2·0
Guttau	»	7. VI.	Marktbrunnen, neue Leitung	10·5	494·2	6·4
»	»	7. VI.	» alte Leitung	11·0	666·6	8·5

»	»	7. VI.	Quelle im Hause des Färbermeisters Josef Zöttl	9·0	511·0	6·5
»	»	7. VI.	Quelle der Schulwasserleitung	9·5	667·7	8·6
»	»	7. VI.	Wasser des Teiches östlich von Guttau	14·0	127·0	1·6
Hundsdorf	»	8. VI.	Giftquelle bei Tannbach-Leithen	10·5	133·6	1·7
»	»	8. VI.	Untere Quelle im Danedergraben	9·0	614	8·0
»	»	8. VI.	Obere » » »	7·5	1087	14·0
»	»	8. VI.	Quelle beim Rechenmacher A. Lesterl in Hundsdorf	12·0	717·7	9·2
Kefermarkt	»	6. VI.	Quelle in der Nähe des Bahnhofes	9·0	56	0·7
»	»	6. VI.	Dorfbrunnen	13·0	1104·2	14·2
Schäferhof	»	6. VI.	Ziehbrunnen beim Überlacknerhof	8·0	120·0	1·5
Bad Bründl bei St. Oswald	»	9. VI.	Quelle in der Kapelle	7·0	1361	17·5
	»	9. VI.	Wasser aus dem Bassin, einige Meter von der Kapelle entfernt	7·0	1359·4	17·5
	»	9. VI.	Nutzwasserquelle in der Nähe des Badhauses	7·5	111·7	1·4

Die Bestimmung der Abklingung der induzierten Aktivität ergab, daß diese in einer Stunde auf die Hälfte des Anfangswertes sinkt, daß also die Natur des im Wasser gelösten Stoffes von Radiumemanation herrühren dürfte.

Die Versuche, um zu ermitteln, wie viel von der Aktivität des Wassers nach kurzem Kochen, beziehungsweise nach dem Erwärmen auf 40° übrig bleibt, ergaben nachstehende Resultate:[1]

	Temperatur	Potentialabfall	Macheeinheiten
Quellwasser vom Teiche...	8·0	4050	52
» » » ...	100·0	251	3·2
» » » ...	40·0	2192	28·0

Über die geologischen Verhältnisse der näheren Umgebung von Tannbach und Guttau sowie über die mineralogischen Bestandteile des Mühlviertler Granits erhalte ich von Herrn Chefgeologen Prof. A. Rosiwal die folgende Mitteilung:

»Die Umgebung von Guttau, Schloß Tannbach und Kefermarkt in Oberösterreich ist zirka 20 bis 25 *km* nördlich von Mauthausen inmitten des weitausgedehnten südböhmischen Hauptgranitstockes gelegen, dessen geologische Verhältnisse F. E. Suess jüngst wieder in übersichtlicher Weise geschildert hat.[2]

Er bildet den südlichen Teil des großen böhmisch-mährisch-westschlesischen Urgebirgshorstes und umfaßt auch das ganze nördliche Oberösterreich und nordwestliche Niederösterreich bis über die Donauenge von Grein hinaus, wo sich dann, in meridionaler Richtung über das niederösterreichische Waldviertel streichend, die vielfach wechselnden Gesteine der krystallinischen Schieferhülle anschließen.

---

[1] Um festzustellen, ob das Wasser radioaktive Substanz selbst gelöst enthält, wurden einige Liter des Wassers von der Quelle beim Teich einige Minuten abgekocht und dann in verschlossenen Flaschen 24 Tage stehen gelassen.

Bei der Untersuchung war keine Emanation nachzuweisen.

Das von Tannbach am 10. August 1908 nach Steinhof (Pitztal) versandte Wasser zeigte am 14. August 18·2 und am 9. September 4 Mache-Einheiten.

[2] Bau und Bild Österreichs. I. Teil: Die böhmische Masse. Wien 1903, Tempsky. Vgl. II. und III. Abschnitt.

Innerhalb dieses weiten Granitgebietes treten nur an wenigen Stellen Reste der krystallinischen Schieferhülle auf. Teile derselben finden sich z. B. als Gneisschollen an den Rändern der Gallneukirchen-Lungitzer Tertiärmulde (im Gusental), also erst in so großer Entfernung von unserem Gebiet, daß sie für den Zirkulationsbereich der dortigen Quellwässer nicht mehr in Betracht kommen.

Immerhin können aber kleinere Schollenrelikte von Gneis dem Granit lokal aufgelagert oder in demselben eingeschlossen sein, wie ein mitvorkommendes Belegstück aus den Tannbacher Feldern beweist. Der geologische Charakter aller Quellen in dem Gebiet zwischen Guttau und Kefermarkt wird aber nach dem Gesagten, wie ein Blick auf jede geologische Karte lehrt, derjenige spezifischer Granitwässer sein.

Die Mehrzahl der von Prof. Bamberger an Ort und Stelle (Tannbach) gesammelten Gesteinsproben gehört dem von C. Peters bei seiner ersten Beschreibung der oberösterreichischen Granite[1] als »Var. *a*, Granit von unregelmäßiger Struktur« bezeichneten Hauptgesteine des genannten Granitstockes an. Es ist ein durchwegs grobkörniger Biotitgranit, der indessen in der Korngröße seiner Bestandteile — namentlich der Feldspate — ziemlich stark wechselt und in allen Proben durch die vorhandenen großen Orthoklaskrystalle und -zwillinge die bekannte porphyrartige Struktur aufweist.

Die makroskopische Charakteristik stimmt vollständig mit dem schon von Peters gegebenen Befund[2] überein; nur wäre zu bemerken, daß hornblendeführende Varietäten in den vorhandenen Probestücken fehlen. Bei mikroskopischer Durchsicht stellt sich die Zusammensetzung des grobkörnigen Granits approximativ, wie folgt, heraus:

Quarz		zirka	25%	des	Volumens
Orthoklas, Oligoklas	Feldspate	»	65%	»	»
Biotit		»	10%	»	»

[1] Jahrb. der k. k. Geol. Reichsanst., 1852, 4. Heft, p. 75.

[2] Ebenda, 1853, 2. Heft, p. 14 und 15 des Separatabdruckes.

Accessoria: Apatit, Eisenerze; Zirkon, Rutil, die beiden ersteren in Mengen von kaum 1%, letztere unter 1‰.

Das Hauptgestein ist somit für Granite relativ reich an Biotit, der den ausschließlichen Glimmerbestandteil bildet, da Muscovit nur sekundär in den Feldspaten in äußerst geringer Menge vorkommt. Zumeist an den Biotit gebunden ist der für die gegenständlichen Untersuchungen besonders wichtige Erzgehalt des Gesteins. Die Eisenerze sind entweder opak, dann unregelmäßig begrenzt und zum Teile in der Art entwickelt, wie sie sonst bei Graniten dem Ilmenit (Titaneisen) zugeschrieben wird, oder in hexagonaler Blättchenform, teils opak (Ilmenit), teils rot durchscheinend (Eisenglanz). Das Mitvorkommen von Magnetit konnte an pulverisiertem und geschlämmtem, beziehungsweise in dem am meisten radioaktiven, zentrifugierten Schwermaterial durch magnetische Sonderung und durch leichte Löslichkeit in HCl sichergestellt werden. Das Vorhandensein von Kiesen wird durch den chemischen Nachweis von Cu (Spur) in obigem Material wahrscheinlich.

Die optische Vermessung mehrerer Dünnschliffe ergab an totalem Erzgehalt 1·4—5·2, im Mittel 3 Volumpromille.

Der zweite Granittypus Peters', jener der »klein- bis feinkörnigen« Granite, ist in der allgemein bekannten Ausbildungsweise der in mehr oder weniger mächtigen Gängen und Stöcken innerhalb der grobkörnigen Granite auftretenden »Pflastergranite« vertreten.

Hier scheinen es nach den vorliegenden wenigen Stücken feinkörnige Ganggranite von geringer Mächtigkeit zu sein, welche im obgenannten grobkörnigen Biotitgranit aufsetzen. Eines der Stücke zeigt ein solches Gangtrumm von nur 2 bis 3 *cm* Mächtigkeit. Zwei Proben liegen aus der Gegend von St. Oswald vor; sie sind feinkörniger als etwa der Mauthausener Pflastergranit und haben deutliche Anklänge einer Parallelstruktur durch die Neigung der Biotitblättchen, sich den Gangflächen parallel zu stellen. Petrographisch können diese Proben als feinkörnige Mikroklin-Oligoklas-Granitite bezeichnet werden, die unter dem Mikroskop häufig die granophyrische Durchwachsung von Mikroklin und Quarz zeigen.

Akzessorien wie beim grobkörnigen Granit, doch sind diese Ganggranite ärmer an Erz (Titaneisen), ebenso an Biotit als ersterer.

Auch die dritte Varietät der Peters'schen Granittypen, glimmerarmer Pegmatit, findet sich in dem Aufsammlungsmaterial in einzelnen Proben in der bekannten sehr grobkörnigen Ausbildungsform vor, wie sie in allen Granitgebieten beobachtet wird.

Es bleibt noch zu erwähnen, daß ein Stück der Aufsammlungen Prof. Bamberger's auch die Gegenwart von Gneis im Guttauer Quellrayon nachweist. Es ist der in der Schieferhülle weitverbreitete feinkörnige Biotitgneis, welcher sich in einem Dünnschliff aus dem vorliegenden Stücke als stark flaseriger, biotitreicher Sillimanitgneis erwies. Der mikroskopisch erkennbare Erzgehalt dieses Gesteins ist fast Null.«

Zur Bestimmung der Aktivität des Mühlviertler grobkörnigen Granits[1] wurde der von C. Engler und H. Sieveking für feste Stoffe angegebene Apparat[2] verwendet und sei gleich bemerkt, daß die unten angegebenen Zahlen natürlich nicht Anspruch auf völlige Genauigkeit erheben können. Doch dürften sie für die Vergleichung der Aktivität der verschiedenen Gesteine und deren Komponenten doch immerhin brauchbar sein.

In den folgenden Tabellen sind für verschiedene Proben die Aktivitätszahlen, welche sich auf 125 *g* Substanz und eine Stunde Beobachtungszeit unter Berücksichtigung des Normalverlustes erstrecken, zusammengestellt:

Mühlviertler grobkörniger Granit 31·6 bis 53·0	Mühlviertler feinkörniger Granit 4·3—17·0
Grobkörniger Pegmatit 5·3	Verwitterter Granit aus der Sandgrube bei Schloß Tannbach 3·5 bis 8·6
Dunkler fetter Letten aufliegend auf zersetztem Granit, aus der Nähe von Schloß Tannbach 127—162	Aufgelockerter Granitgrus aus Tannbach 31·3

[1] Das spezifische Gewicht des grobkörnigen Mühlviertler Granites beträgt 2·591.

[2] Zeitschrift für anorganische Chemie, *53* (1907), 8.

Da das Radium nicht gleichmäßig in den Gesteinen verteilt zu sein scheint, wurde nach der Methode von R. J. Strutt[1] versucht, eine mechanische Trennung der Komponenten des Granits unter Zuhilfenahme von Bromoform (spez. Gew. 2·9) vorzunehmen.

Der mit einer Mahlmühle und durch Siebe höchst fein verteilte Mühlviertler grobkörnige Granit wurde in Eprouvetten mit Bromoform übergossen und das Ganze gut durchgeschüttelt.

Nach kurzer Zeit schied sich am Boden der Proberöhre ein dunkles, fast schwarzes Pulver (Fraktion *A* Glimmer und Erze) ab, während an der Oberfläche der Flüssigkeit eine heller gefärbte Fraktion *B* (Quarz und Feldspathe) zu bemerken war.

Damit diese Fraktionierung rascher vor sich gehe, wurden die mit dem Granitpulver und Bromoform beschickten Eprouvetten in einer Zentrifugalmaschine rotieren gelassen. Diese Methode hat sich sehr gut bewährt und konnten in kürzester Zeit reichliche Mengen der zwei Fraktionen gewonnen werden.

Die Quantität[2] der Fraktion *A* betrug zirka 9%.

Die Aktivitätszahlen dieser beiden Schlämmprodukte lassen erkennen, daß die Aktivität des grobkörnigen Granits zum größten Teile durch die eingesprengten Minerale (Glimmer und Erze) bedingt ist.

Über die Resultate der weiteren Untersuchung dieser zwei Fraktionen wird in einer späteren Mitteilung berichtet werden.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Herrn Rittmeister v. Polzer-Hoditz, der mich bei den Versuchen auf Schloß Tannbach aufs liebenswürdigste unterstützte, den verbindlichsten Dank auszusprechen.

[1] Proc. Royal Soc. London, 78, Serie *A*, p. 150 bis 153.

[2] R. J. Strutt, l. c., verwendete 65 *g* Granit zur mechanischen Trennung; von diesen sanken 7·5 *g* zu Boden und diese besaßen mehr als die Hälfte der gesamten Radioaktivität des ganzen Materials.

Beiträge zur Kenntnis der Radioaktivität einiger Quellen des Semmeringgebietes

von

Max Bamberger.

Aus dem Laboratorium für anorganische Chemie an der k. k. Technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1908.)

In ganz ähnlicher Weise wie vor kurzem eine größere Anzahl von Mineralquellen Tirols[1] in bezug auf ihre Radioaktivität untersucht wurden, wurde die Prüfung einiger Quellen des Semmerings auf ihren Emanationsgehalt vorgenommen.

Die Füllung der Proben konnte nicht direkt am Quellursprung bewerkstelligt werden, sondern erfolgte in den Quellschächten, wobei auf die möglichst blasenfreie Entnahme des Wassers gesehen wurde. Nur der »Johannesbrunnen« war am Ursprung direkt zugänglich.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate, die bei der Untersuchung der Quellen[2] ermittelt wurden.

---

[1] Monatshefte für Chemie, *29* (1908), 317.

[2] H. Mache und St. Meyer untersuchten die Radioaktivität einiger Quellen der südlichen Wiener Thermenlinie und fanden die Aktivität des Johannesbades zu Baden zu 4·54 Macheeinheiten (Monatshefte für Chemie, *26* [1905], 894).

Örtlichkeit	Datum der Bestimmung	Nähere Angabe des Ortes der Entnahme des Wassers und Bezeichnung der Quelle	Temperatur in Celsiusgraden	Gestein	Potentialabfall in Volt minus Normalverlust pro Liter und Stunde	Macheeinheiten $i \times 10^8$
Semmering	1908 23. IV.	Rauschquelle (in der Nähe des Südbahnhotels)	5·0	Semmeringkalk	21·6	0·28
»	29. VI.	Rauschquelle (in der Nähe des Südbahnhotels)	5·0	»	9·3	0·12
»	29. VI.	Braschquelle (in der Nähe des Südbahnhotels)	5·0	»	67·0	0·86
»	24. IV.	Gemeinde- oder untere Ochnerquelle	2·0	—	84·5	1·1
»	24. IV.	Obere Ochnerquelle der Südbahn	4·0	Quarzphyllit (sericitisch)	174·3	2·2
»	29. VI.	» » » »	5·5	Quarzphyllit (sericitisch)	312·0	4·0
»	29. VI.	Obere Ochnerquelle,[1] Ursprung (Johannesbrunn)	5·0	Quarzphyllit (sericitisch)	242·7	3·1
»	24. IV.	Holzapfelwaldquelle	2·0	Quarzphyllit (sericitisch)	398·0	5·1
»	29. VI.	»	5·0	Quarzphyllit (sericitisch)	377·0	4·8
»	23. IV.	Wasser der Holzapfelwaldquelle aus dem Brunnenhaus in der Nähe des Südbahnhotels	2·0	—	72·6	0·9
»	29. VI.	Wasser der Holzapfelwaldquelle aus dem Brunnenhaus in der Nähe des Südbahnhotels	7·0	—	95·0	1·2
»	24. IV.	Meiereiquelle	6·0	Semmeringkalk	89·4	1·1
»	24. IV.	Liechtensteinquelle	6·0	»	89·4	1·1

Semmering (Thalhof)	28. VI.	Schacht *A* (ober dem Jagdhaus) I. Quelle	5·5	Quarzphyllit (sericitisch)	656·2	8·4
		Schacht *A* (ober dem Jagdhaus) II. Quelle	6·0		148·7	2·0
» »	28. VI.	Schacht *B* (ober dem Jagdhaus)	7·0		129·2	1·7
» »	28. VI.	Schacht *C* (ober dem Jagdhaus) I. Quelle	6·0		147·3	1·9
		Schacht *C* (ober dem Jagdhaus) II. Quelle	6·0		110·5	1·4
» »	25. IV.	Schacht *D* (Fürstenbrunnenquelle)[2]	4·0	Quarzphyllit mit dunklem Glimmer	366·4	4·7
» »	28. VI.	» *D* »	6·0		439·4	5·6
» »	25. IV.	» *D* (Talhofquelle)[3]	3·5		158·3	2·0
» »	28. VI.	» *D* »	6·0		123·2	1·6
Semmering	26. IV.	Hauptreservoir[4] beim Südbahnhotel	2·0	—	83·2	1·0
»	25. IV.	Eisenquelle im inneren Adlitzgraben	6·0	Semmeringkalk	64·0	0·82
Semmering (Maria-Schutz)	27. IV.	Quelle hinter dem Altar der Kirche	5·0	Unter den Schuttmassen Semmeringkalk	37·5	0·5
	27. IV.	Warme Quelle unter der Myrtenbrücke	9·0	Semmeringkalk	96·7	1·2
	27. IV.	Quelle bei der Myrtenbrücke	5·0	»	45·0	0·6

[1] Die obere Ochnerquelle wird gebildet aus dem »Johannesbrunn« und einigen anderen nicht mehr zugänglichen Quellen.

[2, 3] Die Wässer von den Schächten *A*, *B*, *C* vereinigen sich in dem Schacht *D* und bilden dort die Fürstenbrunnen- und Talhofquelle.

[4] In das Hauptreservoir fließen die obere Ochner-, sowie die Holzapfelwaldquelle

Es ist nicht ohne Interesse, hervorzuheben, daß die aus Quarzphyllit stammenden Wässer größere Aktivität zeigen, was ja schon bei der Untersuchung der Quellen des Bades Froy[1] im Villnöstal beobachtet wurde. Die aus Kalk kommenden Quellen besitzen nur eine sehr geringe Aktivität.

Es wurde versucht, den sehr fein gepulverten Quarzphyllit durch Bromoform[2] in seine Komponenten zu zerlegen. Nach dem Schütteln und Zentrifugieren des Pulvers mit genannter Substanz schied sich am Boden der Eprouvette ein schweres schwarzes glimmeriges Schlämmprodukt[3] ab, das sich leicht von der darüber befindlichen Fraktion trennen ließ.

Nachdem die Ausbeute an der erstgenannten Substanz eine sehr geringe ist und daher größere Mengen von Phyllit zur Gewinnung derselben aufgearbeitet werden müssen, werden die Aktivitätszahlen für die beiden Fraktionen in einer späteren Publikation mitgeteilt werden.

Die Aktivitätszahl für den Quarzphyllit, berechnet auf 125 *g* Substanz und eine Stunde Beobachtungszeit unter Berücksichtigung des Normalverlustes, ergab den Wert 14·9.

Herrn Hofrat Dr. F. Toula, der die große Güte hatte, mir einiges über die geologischen Verhältnisse des Semmeringgebietes mitzuteilen, sowie Herrn Dr. R. Ender, Kurarzt des Südbahnhotels Semmering, dem ich die Anregung zu dieser Untersuchung verdanke, sage ich den verbindlichsten Dank.

[1] Die Magenquelle in Froy hat 51 Macheeinheiten (Monatshefte für Chemie, 29 [1908], 317).

[2] R. J. Strutt, Proc. Royal Soc. London, 78, Serie *A*, p. 150 bis 153.

[3] Die Ausbeute an abschlämmbarer Substanz beträgt zirka 1·3 Prozent.

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIX.

Untersuchung über die Existenz einer 26 tägigen Periode der luftelektrischen Zerstreuung

von

Dr. **Viktor Conrad.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1908.)

Bei dem hohen Interesse, das vielleicht Beziehungen zwischen luftelektrischen und erdmagnetischen Elementen erwecken könnten, hat der Verfasser versucht, einige längere Beobachtungsreihen der luftelektrischen Zerstreuung auf eine 26tägige Periode zu untersuchen. Der Verfasser war sich hierbei zweier schwerwiegender Gegengründe wohl bewußt: Erstens der Tatsache, daß heute die 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente keineswegs mehr als so sichergestellt angenommen wird, als man dies vor 20 Jahren getan hat. In erster Linie hat ja, wie bekannt, A. Schuster[1] mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich nachzuweisen bemüht, daß eine 26tägige Periode keine Kausalperiode, sondern höchstens eine Interferenzperiode wirklich existierender anderer Variationen ist. Der zweite Gegengrund war der, daß, wie man aus dem Folgenden sehen wird, die Beobachtungsreihen, die zur Berechnung zur Verfügung standen, für den angestrebten Zweck sehr kurze waren.

Wenn man dennoch wenigstens eine formale Beziehung zwischen den erdmagnetischen und luftelektrischen Beobachtungen finden wollte, so war der hier eingeschlagene Weg

---

[1] Philosoph. Mag. 395, 1898.

wohl der einzige, der zum Ziele führen konnte. Einerseits wurde eine große Anzahl von erdmagnetischen Beobachtungsreihen mittels dieser Methode behandelt, andrerseits beansprucht wohl mit Recht die Schuster'sche Methode eine bedeutend höhere Anzahl von Beobachtungen, als sie in der Tat zur Verfügung stehen.

Gerade was die relativ geringe Anzahl von Beobachtungen betrifft, so fand der Verfasser in einer Abhandlung von J. Liznar »Über die 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente in hohen magnetischen Breiten«,[1] die mit so ausgezeichnetem Erfolg durchgeführt wurde, den Mut, ebenfalls sich an eine nur kurze Beobachtungsreihe heranzuwagen.

Die Methode war die von Hornstein, die später J. Liznar bei seinen vielfachen Untersuchungen über die 26tägige Periode der erdmagnetischen Elemente verwendet hat. Man ordnet die zur Verfügung stehenden Tageswerte des Elementes, das man untersuchen will, vor allem nach Gruppen von 24, 25, 26, 27 und 28 Tagen. Bezeichnet man die fortlaufenden Beobachtungen mit a_1, a_2 etc. bis a_z (wobei z das größte Vielfache von n bedeutet, das von der Zahl der vorhandenen Beobachtungen subtrahiert einen Rest kleiner als n ergibt), so wird das Gruppierungsbild allgemein durch folgende Tafel dargestellt:

$$\begin{array}{lll} a_1, & a_2 & \ldots\ldots a_n \\ a_{n+1}, & a_{n+2} & \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{2n+1}, & a_{2n+2} & \ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{z-n+1}, & a_{z-n+2} & \ldots\ldots a_z \end{array}$$

Es werden nun die Mittel

$$A_1 = (a_1 + a_{n+1} + a_{2n+1} + \ldots + a_{z-n+1}) : \frac{z}{n} \text{ etc.}$$

gebildet und so die Werte A_1, A_2 etc. bis A_n gewonnen.

Für $n = 24, 25, \ldots 28$ stellt man die A-Werte in einer Fourier'schen Reihe dar, die man beim ersten Gliede abbricht. Man erhält so für jede Periodendauer eine Gleichung von der Form:

[1] Diese Sitzungsber., Abt. II, 1887, p. 394.

$$Z = Z_0 + Z_1 \sin\left(\alpha_1 + \frac{360}{n} x\right).$$

Die Amplituden Z_1 der untersuchten Perioden werden im allgemeinen von ungleicher Größe sein. Man denkt sich dieselben in ein Koordinatensystem eingetragen, bei dem die Periodendauer die Abszisse, die zugehörige Amplitude die Ordinate darstellt. Legt man mittels der Methode der kleinsten Quadrate durch diese Punkte eine Kurve, die uns durch die Gleichung

$$\mathfrak{A} = \alpha + \beta(n-25) + \gamma(n-25)^2$$

dargestellt wird, und setzen wir dann den Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{A}}{dn} = 0$, so erhalten wir jenen Wert N (Periodendauer), dem die größte Amplitude entspricht. Es wird dann angenommen, daß der so gefundene Wert N auch die wahrscheinlichste Periodendauer darstellt.

Es wurden drei Beobachtungsreihen der Untersuchung unterworfen:

1. Die Beobachtungen der luftelektrischen Zerstreuung von Herrn P. F. Schwab in Kremsmünster, die von Herrn P. B. Zölss[1] bearbeitet und publiziert wurden.

2. Zerstreuungsmessungen von Herrn E. Mazelle in Triest ausgeführt und bearbeitet.[2]

3. Zerstreuungsmessungen, die gelegentlich eines 24stündigen Beobachtungsdienstes an der Zentralanstalt für Meteorologie in Wien abwechselnd von allen wissenschaftlichen Beamten der genannten Anstalt durchgeführt wurden.

I.

In Kremsmünster hat Herr P. F. Schwab vom 1. November 1903 bis zum 31. August 1904 fast ohne Unterbrechung mehreremal im Tage die Zerstreuung beider Vorzeichen gemessen. Diese Reihe schien in jeder Weise besonders für den vorliegenden Zweck geeignet zu sein, da nicht nur ein

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 114, Abt. IIa, 1905, p. 189.

[2] Ebenda, p. 399.

einziger, hervorragend guter Beobachter die Messungen vorgenommen hat, sondern überdies noch eine größere Anzahl von Beobachtungen zu einem Tagesmittel zusammengezogen werden konnten. Von nicht geringer Bedeutung für die Güte der Beobachtungen ist auch die luftelektrisch vollkommen einwandfreie Lage der Kremsmünsterer Sternwarte.

Im Anhang der oben angeführten Abhandlung von P. B. Zölss sind die Beobachtungen in extenso publiziert. Wie früher angedeutet, wurden sämtliche an einem Tage gemessenen Werte der positiven und negativen Zerstreuung zu einem Tagesmittel der mittleren Zerstreuung vereinigt. Die folgende Tabelle I gibt die auf diese Weise gewonnenen Werte. Die Zahlen stellen den prozentuellen Ladungsverlust pro Minute dar. Die wenigen interpolierten Werte sind durch Klammern ausgezeichnet.

Die in Tabelle I[1] angeführten Werte reichen für 11 Perioden aus; dieselben wurden, wie früher beschrieben, nach Gruppen von 24, 25, 26, 27, 28 Tagen geordnet und die mit $A_1, A_2 \ldots$ etc. bezeichneten Mittel gebildet. Diese wurden dann nach der bekannten Formel

$$\frac{a+2b+c}{4}$$

ausgeglichen.

Die darauffolgende Tabelle II enthält die ausgeglichenen Werte von A und die Abweichungen vom Mittel.

Man erhält auf Grund dieser Werte für Kremsmünster folgende Gleichungen:

$$24 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 1\cdot06+0\cdot028 \sin\left(47° 44'+\frac{360}{n_1}x\right),$$

$$25 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 1\cdot06+0\cdot048 \sin\left(82° \; 1'+\frac{360}{n_2}x\right),$$

$$26 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 1\cdot06+0\cdot050 \sin\left(127° 18'+\frac{360}{n_3}x\right),$$

[1] Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle Herrn Hofrat Prof. Dr. J. M. Pernter meinen aufrichtigen Dank dafür auszusprechen, daß er mir bei der Berechnung der Tafeln etc. die Hilfe des Herrn Assistenten Dr. Rudolf Schneider in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte, dem ich für seine Bemühung bestens danke.

$$27 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 1\cdot06 + 0\cdot033 \sin\left(177° \, 22' + \frac{360}{n_4} x\right),$$

$$28 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 1\cdot06 + 0\cdot018 \sin\left(96° \, 51' + \frac{360}{n_5} x\right).$$

Stellt nun, wie bereits erwähnt, die Gleichung

$$\mathfrak{A} = \alpha + \beta(n-25) + \gamma(n-25)^2$$

die Beziehung zwischen der Amplitude $\mathfrak{A}$ der obigen Gleichungen und der Periodendauer n dar, in der wir die Konstanten α, β, γ mit der Methode der kleinsten Quadrate berechnen sollen, so erhalten wir für diese Größen die Normalgleichungen:

$$5\alpha + 5\beta + 15\gamma = 17\cdot68,$$
$$5\alpha + 15\beta + 35\gamma = 14\cdot01,$$
$$15\alpha + 35\beta + 99\gamma = 36\cdot71.$$

Es lautet dann die endgültige Beziehung:

$$\mathfrak{A} = 0\cdot04545 + 0\cdot00917(n-25) - 0\cdot00642(n-25)^2.$$

Der Wert $\mathfrak{A}$ erreicht sein Maximum für

$$N = \mathbf{25\cdot72 \text{ Tage}}.$$

II.

In Triest wurden die Beobachtungen nahezu sämtlich von Herrn Direktor E. Mazelle angestellt; es mußten jedoch hier die Einzelmessungen direkt zur Untersuchung verwendet werden, da nur einmal des Tages um die Mittagszeit gemessen wurde. Die Beobachtungszeit dauert ohne Unterbrechung vom 1. März 1902 bis zum 30. November 1903: es sind dies 22 Perioden. Das luftelektrische Klima des Triester Beobachtungsortes ist durch die Nähe der Stadt wohl nicht mehr so hervorragend günstig wie jenes von Kremsmünster. Auch die äußerst zahlreichen Boratage mit ihren abnorm hohen Zerstreuungswerten sind vielleicht geeignet, subtilere Erscheinungen zu unterdrücken.

Tabelle III enthält entsprechend der Tabelle I die verwendeten Werte der mittleren Zerstreuung in Triest, wie dieselben in der zitierten Abhandlung von Herrn E. Mazelle publiziert worden sind. Tabelle IV gibt die ausgeglichenen Gruppenwerte A und die Abweichungen vom Mittel ebenso für Triest, wie dies in Tabelle II für Kremsmünster geschehen ist.

Tabelle I.

Mittlere Zerstreuung in Kremsmünster.

Datum	1903		1904							
	November	Dezember	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August
1.	(1·45)	0·59	0·97	1·03	0·98	0·77	1·53	0·88	0·86	1·33
2.	(1·33)	0·87	0·71	1·07	0·64	1·00	0·99	1·32	0·98	1·24
3.	1·21	0·80	1·13	0·96	1·21	0·85	1·18	1·32	1·00	1·21
4.	1·25	0·73	0·62	0·46	1·22	0·85	1·20	1·35	1·28	(1·05)
5.	(1·10)	0·94	1·14	0·96	1·34	0·89	(1·15)	1·37	1·03	0·89
6.	0·95	0·93	0·89	1·12	1·42	1·18	1·09	0·79	0·79	1·06
7.	0·96	0·70	0·86	1·02	1·22	0·84	0·95	1·11	1·14	1·49
8.	1·51	1·02	0·90	1·01	1·07	0·88	1·46	0·77	1·15	1·57
9.	1·00	0·68	0·92	0·95	1·05	0·89	1·33	1·33	1·08	1·46
10.	0·88	0·85	1·16	0·85	0·84	0·99	0·95	1·08	0·64	1·56
11.	0·92	0·54	0·75	1·04	1·02	0·82	1·23	1·22	0·98	1·49
12.	0·78	0·96	0·56	0·78	0·91	0·77	0·81	1·17	0·96	1·23
13.	(1·01)	0·95	0·59	0·84	1·84	0·79	0·74	1·11	1·03	0·97
14.	1·25	0·94	1·57	1·02	1·18	1·00	0·93	1·15	0·90	1·18

15.	(1·13)	1·21	1·19	1·42	0·94	1·21	1·11	1·02	1·04	1·39
16.	1·01	1·33	0·64	1·03	0·87	1·18	1·02	1·17	1·21	1·20
17.	1·37	1·63	0·58	0·95	0·98	1·16	0·96	1·48	1·26	1·23
18.	1·05	1·25	(0·70)	0·65	0·85	1·43	1·15	1·46	1·53	1·47
19.	0·94	0·78	0·82	0·83	0·74	1·07	1·62	0·82	0·77	0·81
20.	0·90	0·86	0·97	0·62	0·65	1·22	0·80	1·08	1·03	0·67
21.	1·46	0·90	0·91	1·49	0·81	0·95	0·66	1·32	1·15	1·38
22.	1·37	(1·23)	1·10	1·25	0·73	1·41	1·38	0·74	0·79	1·14
23.	(1·15)	1·55	1·12	1·19	0·84	1·53	1·36	0·87	0·79	1·38
24.	0·94	1·04	1·18	0·67	1·22	1·14	0·98	0·57	1·28	0·91
25.	1·62	1·16	0·67	1·01	1·35	1·06	1·16	1·22	1·32	1·25
26.	1·26	1·27	0·82	0·71	1·65	1·50	0·87	1·39	1·28	1·04
27.	0·76	0·95	0·57	0·74	1·08	1·62	1·05	0·96	1·29	1·00
28.	1·03	1·24	1·26	1·18	0·91	0·56	1·64	0·79	1·22	0·99
29.	1·52	1·26	0·72	1·22	0·88	0·66	(1·45)	1·03	1·18	1·14
30.	1·74	1·07	1·06		(1·05)	0·76	(1·25)	0·94	0·97	1·22
31.		1·29	1·09		1·22		1·05		1·14	1·07

Tabelle II.

	24		25		26		27		28	
	A	Abweich.	*A*	Abweich.	*A*	Abweich.	*A*	Abweich.	*A*	Abweich.
0	1·07	+0·01	1·17	+0·11	1·06	+0·00	1·10	+0·04	1·14	+0·08
1	1·08	+ ·02	1·08	+ ·02	1·08	+ ·02	1·09	+ ·03	1·14	+ ·08
2	1·08	+ ·02	1·06	·00	1·13	+ ·07	1·06	·00	1·07	+ ·01
3	1·09	+ ·03	1·08	+ ·02	1·16	+ ·10	1·04	− ·02	1·06	·00
4	1·10	+ ·04	1·07	+ ·01	1·06	·00	1·02	− ·04	1·10	+ ·04
5	1·10	+ ·04	1·03	− ·03	0·98	− ·08	1·00	− ·06	1·08	+ ·02
6	1·10	+ ·04	1·05	− ·01	1·00	− ·06	1·02	− ·04	1·09	+ ·03
7	1·08	+ ·02	1·12	+ ·06	1·05	− ·01	1·04	− ·02	1 12	+ ·06
8	1·04	− ·02	1·14	+ ·08	1·06	·00	0·99	− ·07	1·10	+ ·04
9	1·04	− ·02	1·10	+ ·04	1·01	− ·05	0·98	− ·08	1·05	− ·01
10	1·06	·00	1·02	− ·04	0·98	− ·08	1·06	·00	1·00	− ·06
11	1·03	− ·03	0·95	− ·11	0·95	− ·11	1·13	+ ·07	0·93	− ·13
12	1·02	− ·04	0·99	− ·07	0·96	− ·10	1·10	+ ·04	0·92	− ·14

13	1·04	— ·02	1·04	— ·02	1·01	— ·05	1·04	— ·02	1·05	— ·01
14	1·00	— ·06	1·00	— ·06	1·04	— ·02	1·05	— ·01	1·14	+ ·08
15	0·97	— ·09	1·00	— ·06	1·09	+ ·03	1·11	— ·05	1·10	+ ·04
16	1·04	— ·02	1·05	— ·01	1·10	+ ·04	1·14	— ·08	1·06	·00
17	1·10	+ ·04	1·02	— ·04	1·06	·00	1·08	— ·02	1·07	+ ·01
18	1·07	+ ·01	0·99	— ·07	1·04	— ·02	1·02	— ·04	1·10	+ ·04
19	1·03	— ·03	1·06	·00	1·06	·00	1·06	·00	1·06	·00
20	1·04	— ·02	1·14	+ ·08	1·13	+ ·07	1·14	+ ·08	1·04	— ·02
21	1·07	+ ·01	1·14	+ ·08	1·21	+ ·15	1·10	+ ·04	1·09	+ ·03
22	1·08	+ ·02	1·06	·00	1·17	+ ·11	1·00	+ ·04	1·09	+ ·03
23	1·06	·00	1·06	·00	1·07	+ ·01	0·98	— ·08	1·06	·00
24	—	—	1·16	+ ·10	1·04	— ·02	1·08	+ ·02	1·05	— ·01
25	—	—	—	—	1·05	— ·01	1·16	+ ·10	1·02	— ·04
26	—	—	—	—	—	—	1·12	+ ·06	1·01	— ·05
27	—	—	—	—	—	—	—	—	1·05	— ·01
Mittel	1·06	—	1·06	—	1·06	—	1·06	—	1·06	—

Tabelle III*a*.

Mittlere Zerstreuung in Triest 1902.

	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember
1.	0·25	0·42	0·56	0·75	0·58	0·48	0·35	0·30	1·57	0·27
2.	0·72	0·22	0·88	0·52	0·47	0·59	0·53	0·39	0·87	0 22
3.	0·63	0·39	0·56	0·38	0·59	0·43	0·68	0·77	0·88	0·37
4.	1·26	0·22	0·51	0·61	0·33	0·76	0·65	0·73	0·50	1·22
5.	0·67	0·30	1·66	0·50	0·38	0·53	0·50	1·49	0·20	2·81
6.	0·63	0·43	0·69	0·43	0·34	0·37	0·53	0·22	0·31	1·92
7.	0·43	3·08	0·72	0·39	0·53	0·45	0·54	0·49	0·21	1·15
8.	0·73	0·77	1·00	0·61	0·49	0·62	0·72	0·46	0·22	0·31
9.	0·50	0·96	1·31	0·91	0·52	1·16	0·52	0·23	0·28	0·67
10.	0·78	0·29	0·51	0·35	0·55	0·91	0·52	0·32	0·87	1·01
11.	0·72	0·28	0·46	0·38	0·84	0·39	0·44	0·22	0·63	1·16
12.	0·35	0·24	0·50	0·66	0·58	1·05	0·78	0·23	0·63	0·43
13.	0·66	0·60	0·45	0·65	0·66	0·69	0·51	0·50	0·79	0·36
14.	0·40	0·46	0·31	0·69	0·55	0·37	0·59	0·31	1·01	0·42

15.	0·42	0·29	1·24	0·51	0·40	0·45	1·35	0·35	0·87	0·73
16.	0·29	0·35	0·57	0·65	0·58	0·42	0·63	0·44	1·14	0·43
17.	0·62	0·40	0·51	0·49	0·70	0·55	0·36	0·31	1·67	0·28
18.	0·48	0·85	0·35	0·42	0·51	0·43	1·05	0·47	1·57	0·26
19.	0·39	1·19	0·62	0·43	0·49	0·41	0·78	0·20	1·45	0·20
20.	0·35	0·76	0·45	0·70	0·62	0·39	0·80	0·49	0·83	0·15
21.	0·38	0·39	0·48	0·39	0·41	1·74	0·46	0·30	1·50	0·25
22.	0·24	0·47	0·41	0·45	0·64	1·10	0·92	0·34	1·37	0·71
23.	0·49	0·50	0·81	0·42	0·46	0·50	1·09	0·94	0·66	1·05
24.	0·83	0·68	0·64	0·30	0·47	0·70	0·72	0·46	0·48	0·36
25.	0·51	0·54	0·31	0·51	0·69	0·56	0·42	0·89	0·36	0·25
26.	0·34	0·54	0·47	1·03	0·67	0·49	0·74	0·88	0·46	0·26
27.	0·68	0 42	0·40	0·56	0·45	0·45	0 67	0·51	1·24	0·29
28.	0·31	2·00	0·46	0·50	0·29	0·65	0·99	1·85	0·35	0·32
29.	0·31	1·26	0·46	0·45	0·87	0·39	2·83	1·63	0·21	0·15
30.	0·31	1·45	0·53	0·50	0·33	0·70	0·39	0·39	0·15	0·27
31.	1·03		0·37		0·42	0·57		1·62		0·32

Tabelle III*b*.

Mittlere Zerstreuung in Triest 1903.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November
1.	1·00	0·21	0·30	0·56	0·28	0·39	0·40	0·44	0·54	0·50	1·29
2.	0·31	0·27	0·23	0·36	0·46	0·32	0 66	0·36	0·48	0·51	0·34
3.	0·84	2·01	0·27	0·30	0·52	0·37	0·41	0·33	0·86	0·56	1·44
4.	0·17	0·79	0·33	0·76	0 38	0·71	0·44	0·45	1·01	0·55	0 70
5.	0·29	0·41	0·41	0·27	0·51	0·86	0·60	0·53	0·57	0·39	0·85
6.	0·20	0·45	0·37	0·45	0·38	0·46	0·44	0·47	1·18	0·55	1·03
7.	0·20	0·37	1·89	0·51	0·34	0·44	0·67	0·69	0·73	0·56	0·37
8.	0·24	0 25	0·85	0·25	0·34	0·73	0·44	0 63	0·96	0·24	0·79
9.	0·26	0·25	1·39	0·67	0·72	0·42	0·42	0·50	0·55	0 37	0·36
10.	0·29	0·28	1·31	0·34	0·65	0·45	0·37	0·47	0·56	1·70	0·45
11.	0·16	0·30	0·57	0·35	1·02	0·44	0·45	1·05	0·61	0·48	0·30
12.	0·42	0·20	0·63	0·36	0·60	0·31	0·40	0·53	0·84	0·26	0·44
13.	1·41	0·28	0·87	0·56	0·48	0·37	0·45	0·54	0·37	0·22	0·43
14.	1·99	0·35	0·42	1·63	0·35	0·57	0·31	0·55	0·70	0·83	0·35

15.	1·48	0·27	0·45	0·59	0·43	0·44	0·43	0·55	0·38	0·45	0·21
16.	1·18	1·69	0·44	0·28	0·53	0·51	0·41	0·68	0·43	0·26	0·26
17.	0·79	0·61	1·60	1·80	0·41	0·36	0·46	0·91	0·15	0·53	0·18
18.	1·04	0·45	0·58	0·49	0·53	0·39	0·49	0·69	1·03	0·52	0·23
19.	0·80	0·29	1·19	0·65	0·55	0·39	0·47	0·81	0·44	0·58	0·58
20.	0·61	0·36	0·67	0·53	0·48	0·52	0·42	0·58	1·06	0·48	0·30
21.	0·51	0·34	0·43	0·56	0·46	0·24	1·05	0·38	0·85	0·47	0·61
22.	0·83	0·31	0·34	0·23	0·45	0·51	0·40	0·55	0·80	0·28	0·35
23.	0·30	0·46	0·47	0·49	0·38	0·52	0·54	0·39	0·57	0·65	0·36
24.	0·79	0·23	0·53	0·49	0·53	0·54	0·34	0·54	0·65	0·91	0·38
25.	0·94	0·48	0·45	0·78	0·37	0·33	0·47	0·51	0·64	0·49	0·18
26.	0·41	0·22	0·33	0·38	0·45	0·38	0·38	0·84	0·56	0·36	0·70
27.	0·23	0·22	0·44	0·47	0·56	0·49	0·50	0·97	0·44	0·36	0·37
28.	0·25	0·23	0·36	0·46	0·41	0·50	0·60	0·34	0·38	0·28	0·23
29.	0·24		0·35	0·56	0·97	0·54	0·46	0·43	0·34	0·27	0·25
30.	0·23		0·82	0·41	0·85	0·55	0·50	0·81	0·40	0·51	0·30
31.	0·20		1·92		0·42		0·31	0·46		0·99	

Tabelle IV.

	24		25		26		27		28	
	A	Abweich.	A	Abweich.	A	Abweich.	A	Abweich.	A	Abweich.
0.	0·56	—0·02	0·49	—0·10	0·51	—0·07	0·57	—0·02	0·55	—0·04
1.	0·60	+ ·02	0·50	— ·09	0·56	— ·02	0·62	+ ·03	0·52	— ·07
2.	0·63	+ ·05	0·54	— ·05	0·57	— ·01	0·66	+ ·07	0·60	+ ·01
3.	0·62	+ ·04	0·58	— ·01	0·60	+ ·02	0·62	+ ·03	0·64	+ ·05
4.	0·61	+ ·03	0·62	+ ·03	0·64	+ ·06	0·61	+ ·02	0·60	+ ·01
5.	0·59	+ ·01	0·62	+ ·03	0·64	+ 06	0·55	— ·04	0·57	— ·02
6.	0·58	·00	0·58	— ·01	0·63	+ ·05	0·50	— ·09	0·57	— ·02
7.	0·57	— ·01	0·55	— ·04	0·66	+ ·08	0·50	— ·09	0·56	— ·03
8.	0·54	— ·04	0·59	·00	0·64	+ ·06	0·53	— ·06	0·61	+ ·02
9.	0·54	— ·04	0·62	+ ·03	0·61	+ ·03	0·62	+ ·03	0·70	+ ·11
10.	0·57	— ·01	0·62	+ ·03	0·64	+ ·06	0·64	+ ·05	0·70	+ ·11
11.	0·61	+ ·03	0·66	+ ·07	0·66	+ ·08	0·62	+ ·03	0·63	+ ·04
12.	0·62	+ ·04	0·70	+ ·11	0·62	+ ·04	0·56	— ·03	0·60	+ ·01

13.	0·61	+ ·03	0·65	+ ·06	0·60	+ ·02	0·50	— ·09	0·58	— ·01
14.	0·61	+ ·03	0·60	+ ·01	0·56	— ·02	0·56	— ·03	0·56	— ·03
15.	0·61	+ ·03	0·57	— ·02	0·51	— ·07	0·61	+ ·02	0·59	·00
16.	0·60	+ ·02	0·56	— ·03	0·54	— ·04	0·59	·00	0·66	+ ·07
17.	0·59	+ ·01	0·56	— ·03	0·57	— ·01	0·56	— ·03	0·64	+ ·05
18.	0·55	— ·03	0·57	— ·02	0·58	·00	0·55	— ·04	0·56	— ·03
19.	0·54	— ·04	0·59	·00	0·61	+ ·03	0·55	— ·04	0·57	— ·02
20.	0·59	+ ·01	0·60	+ ·01	0·60	+ ·02	0·61	+ ·02	0·62	+ ·03
21.	0·59	+ ·01	0·59	·00	0·52	— ·06	0·68	+ ·09	0·63	+ ·04
22.	0·56	— ·02	0·57	— ·02	0·50	— ·08	0·72	+ ·13	0·58	— ·01
23.	0·54	— ·04	0·57	— ·02	0·55	— ·03	0·68	+ ·09	0·54	— ·05
24.	—	—	0·54	— ·05	0·56	— ·02	0·56	— ·03	0·52	— ·07
25.	—	—	—	—	0·51	— ·07	0·54	— ·05	0·49	— ·10
26.	—	—	—	—	—	—	0·57	— ·02	0·52	— ·07
27.	—	—	—	—	—	—	—	—	0·57	— ·02
Mittel	0·58	—	0·59	—	0·58	—	0·59	—	0·59	—

Aus den Werten der Tabelle IV erhält man folgende Gleichungen:

$$24 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 0\cdot58+0\cdot006 \sin\left(292°\, 58'+\frac{360}{n_1}x\right),$$

$$25 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 0\cdot58+0\cdot046 \sin\left(291°\, 11'+\frac{360}{n_2}x\right),$$

$$26 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 0\cdot58+0\cdot047 \sin\left(334°\, 16'+\frac{360}{n_3}x\right),$$

$$27 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 0\cdot59+0\cdot024 \sin\left(133°\, 42'+\frac{360}{n_4}x\right),$$

$$28 \text{ Tage} \ldots \quad Z = 0\cdot59+0\cdot042 \sin\left(301°\, 33'+\frac{360}{n_5}x\right).$$

Als Normalgleichungen für die Größen $\alpha\,\beta\,\gamma$ der Gleichung

$$\mathfrak{A} = \alpha+\beta(n-25)+\gamma(n-25)^2$$

wurden gefunden:

$$5\alpha+\ \ 5\beta+15\gamma = 0\cdot1645,$$
$$5\alpha+15\beta+35\gamma = 0\cdot2148,$$
$$15\alpha+35\beta+99\gamma = 0\cdot5250$$

und daraus:

$$\mathfrak{A} = 0\cdot033+0\cdot015(n-25)-0\cdot005(n-25)^2.$$

Das Maximum der Amplitude $\mathfrak{A}$ stellt sich bei der Periodendauer

$$N = 26\cdot51 \text{ Tage}$$

ein.

III.

Über die Untersuchung der Wiener Beobachtungen liegt eine vorläufige Mitteilung[1] vor. Das damals publizierte günstige Resultat, das eine Periode von 26·2 Tagen aufweist, erscheint mir neuerdings nicht einwandfrei zu sein, so daß ich glaube,

---

[1] Anzeiger der Wiener Akademie, Nr. XIX, vom 12. Juli 1906.

besser von einer Publikation der Untersuchung der Wiener Beobachtungen absehen zu sollen. Wenn man sogar von den Inhomogenitäten der Beobachtungsreihe, die unausbleiblich durch so viele verschiedene Beobachter — wie eingangs bemerkt — entstehen müssen, absieht, so würden auch noch andere Gründe (die ungünstige luftelektrische Lage etc.) die Beweiskraft der aus den Wiener Beobachtungen abgeleiteten Resultate abschwächen.

Zusammenfassung.

Aus dem Vorausgegangenen ist zu ersehen, daß die luftelektrische Zerstreuung in Kremsmünster eine Periode von 25·72 Tagen aufweist, in Triest eine solche von 26·51 Tagen. Die Amplitude beträgt in Kremsmünster 4·7% des Mittelwertes, in Triest 8·1%, ist also jedesfalls recht klein. Das Mittel aus beiden Periodenlängen beträgt **26·11** Tage, was immerhin als eine merkwürdig gute Übereinstimmung mit jenem Werte anzusehen ist, den J. Liznar als Mittelwert einer großen Anzahl solcher Untersuchungen angibt, nämlich 25·97 Tage.

Es möge nur nochmals bemerkt werden, daß dem Verfasser die von anderen an der Methode vielfach gehegten Zweifel nicht unbekannt geblieben sind und daß mit den Resultaten dieser Arbeit keineswegs ein direkter und primärer Zusammenhang zwischen luftelektrischen (Vertikalstrom?) und erdmagnetischen Elementen behauptet werden soll. Tatsache jedoch scheint zu sein, daß hier eine merkwürdige formale Übereinstimmung im Verhalten der beiden Phänomene existiert. Dabei muß bemerkt werden, daß es hier mehr oder minder gleichgültig ist, ob wir es mit einer Zufalls-, Interferenz- oder reellen Periode zu tun haben. Lange Zeit einwandfrei fortgeführte Registrierungen der Leitfähigkeit oder des Vertikalstromes in der Atmosphäre werden vielleicht zu einer schärferen Erkenntnis dieser interessanten Beziehungen führen.

Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

Dimmer G., Über die Polarisation des Lichtes bei der inneren Diffusion. (I. Mitteilung.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 913—924.

Polarisation des Lichtes bei der inneren Diffusion. (I. Mitteilung.)
Dimmer G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 913—924.

Diffusion, innere. Über die Polarisation bei derselben. (I. Mitteilung.)
Dimmer G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 913—924.

Rutherford E., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. III. Untersuchungen über die Radiumemanation. I. Volumen der Emanation.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 925—942.

Emanation, Volumen derselben. Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. III.
Rutherford E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 925—942.

Ramsay W., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. IV. Beobachtungen über die Unbeständigkeit des Radiumbromids.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 943—946.

Radiumbromid, Beobachtungen über die Unbeständigkeit desselben. Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. IV.
Ramsay W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 943—946.

Hess V. F., Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Dimmer G., Über die Polarisation des Lichtes bei der inneren Diffusion. (I. Mitteilung.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 913—924.

Polarisation des Lichtes bei der inneren Diffusion. (I. Mitteilung.)
Dimmer G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 913—924.

Diffusion, innere. Über die Polarisation bei derselben. (I. Mitteilung.)
Dimmer G., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 913—924.

Rutherford E., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. III. Untersuchungen über die Radiumemanation. I. Volumen der Emanation.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 925—942.

Emanation, Volumen derselben. Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. III.
Rutherford E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 925—942.

Ramsay W., Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. IV. Beobachtungen über die Unbeständigkeit des Radiumbromids.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 943—946.

Radiumbromid, Beobachtungen über die Unbeständigkeit desselben. Mitteilungen der Radium-Kommission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. IV.
Ramsay W., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 943—946.

Hess V. F., Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Refraktionsvermögen, Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen.
Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Mischungen, Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen.
Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Volumkontraktion, Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen.
Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Meyer St., Zur Kenntnis der Magnetisierungszahlen seltener Erden.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 995—1000.

Magnetisierungszahlen seltener Erden.
Meyer St., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 995—1000.

Seltene Erden, Magnetisierungszahlen.
Meyer St., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 995—1000.

Jung F., Die Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen Koordinaten.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1001—1014.

Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen Koordinaten.
Jung F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1001—1014.

Koordinaten, Die Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen —.
Jung F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1001—1014.

Refraktionsvermögen, Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen

Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Mischungen, Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen.

Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Volumkontraktion, Über eine allgemeine Beziehung zwischen Volumkontraktion und den drei üblichen Formen des Refraktionsvermögens bei Flüssigkeitsgemischen.

Hess V. F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 947—994.

Meyer St., Zur Kenntnis der Magnetisierungszahlen seltener Erden.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 995—1000.

Magnetisierungszahlen seltener Erden.

Meyer St., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 995—1000.

Seltene Erden, Magnetisierungszahlen.

Meyer St., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 995—1000.

Jung F., Die Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen Koordinaten.

Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1001—1014.

Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen Koordinaten.

Jung F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1001—1014.

Koordinaten, Die Polarableitung in rechtwinkeligen, krummlinigen —.

Jung F., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1001—1014.

Holetschek J., Über die Helligkeitsverhältnisse der vier Sternschnuppenkometen (1861 I, 1862 III, 1866 I und Biela).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1015—1043.

Helligkeitsverhältnisse der vier Sternschnuppenkometen (1861 I, 1862 III, 1866 I und Biela).
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1015—1043.

Sternschnuppen, Helligkeitsverhältnisse der vier Sternschnuppenkometen (1861 I, 1862 III, 1866 I und Biela).
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1015—1043.

Kometen, Helligkeitsverhältnisse der vier Sternschnuppenkometen (1861 I, 1862 III, 1866 I und Biela).
Holetschek J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1015—1043.

Lampa A., Über das Verhalten von Isolatoren im elektrostatischen Drehfeld.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1045—1053.

Elektrostatisches Drehfeld, Einwirkung auf Isolatoren.
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1045—1053.

Isolatoren, Verhalten derselben im elektrostatischen Drehfeld.
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1045—1053.

Drehfeld, elektrostatisches, Einwirkung auf Isolatoren.
Lampa A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1045—1053.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. VIII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über einen Grenzwertsatz

von

Edmund Landau in Berlin.

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Oktober 1908.)

Im § 1 meiner Abhandlung: »Über den Zusammenhang einiger neuerer Sätze der analytischen Zahlentheorie« (Bd. 115 dieser Sitzungsberichte) habe ich, von der Tschebyschef'schen Identität

$$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

ausgehend, unter Benutzung der speziellen Bedeutung der Funktionen $\psi(x)$, $T(x)$ und der zuerst von mir bewiesenen Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -1$$

elementar bewiesen, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

ist. Dahinter steckt, wie mir bei wiederholtem Studium meiner damaligen Arbeit kürzlich auffiel, folgender neuer allgemeiner Grenzwertsatz, der fast von aller Zahlentheorie frei ist:

Es sei $\psi(x)$ eine für alle $x \geqq 1$ definierte Funktion und die ihr durch die Gleichung[1]

$$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

---

[1] Unter $\sum\limits_{n=u}^{v}$ verstehe ich die Summe $\sum\limits_{n=[u]}^{[v]}$, wenn u und v nicht ganzzahlig sind.

für $x \geqq 1$ zugeordnete Funktion möge folgende zwei Bedingungen erfüllen:

Erstens soll

$$T(x) = x \log x + ax + O(\rho(x))$$

sein, wo a eine Konstante ist, $\rho(x)$ eine von einem gewissen $x = \xi$ $(\geqq 1)$ an positive, monoton zunehmende Funktion, für welche das Integral

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x^2}\,dx$$

konvergiert.

Zweitens soll $T(x)$ in jedem endlichen Intervall $(1 \ldots y)$ von beschränkter Schwankung sein, d. h. für jedes $y > 1$ gebe es ein G derart, daß bei jeder Wahl von Zwischenpunkten $x_1, \ldots, x_\nu$ $(1 \leqq x_1 < \ldots < x_\nu \leqq y)$ die Schwankungssumme

$$|T(x_1) - T(x_2)| + |T(x_2) - T(x_3)| + \ldots + |T(x_{\nu-1}) - T(x_\nu)| < G$$

ist.

Dann ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Vorbemerkung: Vor dem Beweise will ich auf mehrere wichtige Spezialfälle dieses Satzes aufmerksam machen, deren jeder den Fall des Primzahlproblems (den ich l. c. behandelt habe und wo

$$T(x) = \sum_{n=1}^{x} \log n = x \log x - x + O(\log x)$$

ist) noch in sich enthält.

Die erste Voraussetzung über $T(x)$ ist gewiß in folgenden Fällen erfüllt:

$$\rho(x) = \log x, \quad \rho(x) = x^{\vartheta} (0 < \vartheta < 1), \quad \rho(x) = \frac{x}{\log^2 x},$$

$$\rho(x) = \frac{x}{\log^{1+\delta} x} (\delta > 0) \text{ etc.}$$

Die zweite Voraussetzung ist insbesondere in folgenden zwei Fällen erfüllt:

1. Wenn für $g \leqq x < g+1$ (g ganz) $\psi(x)$ jedesmal konstant ist. Denn dann ist offenbar auch $T(x)$ jedesmal für $g \leqq x < g+1$ konstant, also im Intervall $(1 \ldots y)$ von beschränkter Schwankung.

2. Wenn für $1 \leqq x < x'$ stets $T(x) \leqq T(x')$ ist, also insbesondere, wenn dort stets $0 \leqq \psi(x) \leqq \psi(x')$ ist.

Beweis des Satzes: Es bezeichne $V(y)$ für $y > 1$ die obere Grenze der Schwankungssumme von $T(x)$ im Intervall $(1 \ldots y)$ und sei 0 für $y \leqq 1$. Dann ist für $y < y'$

$$V(y) \leqq V(y').$$

Wegen der Konvergenz von

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x^2}\, dx$$

ist mit Rücksicht auf

$$\int_x^{2x} \frac{\rho(u)}{u^2}\, du \geqq \frac{\rho(x)}{4x^2} \cdot x = \frac{\rho(x)}{4x} \qquad (x \geqq \xi)$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\rho(x)}{x} = 0,$$

also

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(x)}{x \log x} = 1$$

und daher wegen

$$V(y) \geqq |T(y) - T(1)|$$

$$\lim_{y=\infty} V(y) = \infty.$$

Es sei für alle $x \geqq 1$ die Funktion $z = z(x)$ als die Hälfte der oberen Grenze der Werte y definiert, für welche

$$V(y) \leqq \log x$$

ist. Dann ist

$$V(z) \leqq \log x$$

und

$$\lim_{x=\infty} z = \infty.$$

Wegen

$$V(\sqrt{x}) \geqq |T(\sqrt{x}) - T(1)|$$

und

$$\lim_{x=\infty} \frac{T(\sqrt{x})}{\frac{1}{2}\sqrt{x}\log x} = 1$$

ist von einem gewissen $x = \alpha$ an

$$\xi < z < \sqrt{x}.$$

Aus

$$T(x) = \sum_{m=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{m}\right)$$

ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{x} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) \sum_{m=1}^{\frac{x}{n}} \psi\left(\frac{x}{nm}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{x} \psi\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{n|k} \mu(n) = \psi(x),$$

also für $x \geqq \alpha$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\frac{x}{z}} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n=\frac{x}{z}+1}^{x} \mu(n) T\left(\frac{x}{n}\right) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Hierin ist

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n=1}^{\frac{x}{z}} \mu(n) \left(\frac{x}{n} \log \frac{x}{n} + a\frac{x}{n}\right) + O \sum_{n=1}^{\frac{x}{z}} \rho\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= (x \log x + ax) g\left(\frac{x}{z}\right) - xf\left(\frac{x}{z}\right) + O \sum_{n=1}^{\frac{x}{z}} \rho\left(\frac{x}{n}\right),$$

wo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n) \log n}{n},$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n}$$

gesetzt ist. Bekanntlich ist

$$f(x) = -1+\{1\},$$

$$g(x) = \left\{\frac{1}{\log x}\right\},$$

also, da hier $\frac{x}{z} > \sqrt{x}$ ist und andrerseits $\rho\left(\frac{x}{n}\right)$ für alle $n \leqq \frac{x}{z}$ wegen $\frac{x}{n} \geqq z > \xi$ positiv ist und mit wachsendem n monoton abnimmt,

$$\sum\nolimits_1 = (x \log x + ax)\left\{\frac{1}{\log(\sqrt{x})}\right\} - x(-1+\{1\}) + O(\rho(x)) + O\int_1^{\frac{x}{z}} \rho\left(\frac{x}{u}\right) du$$

$$= x+\{x\}+O\left(x\int_z^x \frac{\rho(v)}{v^2}\, dv\right)$$

$$= x+\{x\},$$

da

$$\lim_{x=\infty} \int_z^x \frac{\rho(v)}{v^2}\, dv = 0$$

ist.

Für Σ_2 schließe ich mit Rücksicht auf den bekannten Satz

$$M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) = \left\{\frac{x}{\log x}\right\}$$

folgendermaßen:

$$\sum_2 = \sum_{n=\frac{x}{z}+1}^{x} (M(n)-M(n-1))T\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=\frac{x}{z}+1}^{x-1} M(n)\left(T\left(\frac{x}{n}\right)-T\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)$$

$$-M\left(\frac{x}{z}\right)T\left(\frac{x}{\left[\frac{x}{z}\right]+1}\right)+M(x)\,T\left(\frac{x}{[x]}\right)$$

$$= \left\{\frac{x}{\log x}\sum_{n=\frac{x}{z}+1}^{x-1}\left|T\left(\frac{x}{n}\right)-T\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right\}$$

$$+\left\{\frac{x}{\log x}\left|T\left(\frac{x}{\left[\frac{x}{z}\right]+1}\right)\right|\right\}+\left\{\frac{x}{\log x}\left|T\left(\frac{x}{[x]}\right)\right|\right\}$$

$$= \left\{\frac{x}{\log x}V(z)\right\}+\left\{\frac{x}{\log x}V(z)\right\}+\left\{\frac{x}{\log x}\right\}$$

$$= \left\{\frac{x}{\log x}\log x\right\}$$

$$= \{x\}.$$

Daher ergibt sich

$$\psi(x) = \sum_1 + \sum_2 = x + \{x\},$$

was zu beweisen war.

Luftelektrische Zerstreuung, Untersuchung über die Existenz einer 26tägigen Periode derselben. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität, XXIX.

Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1069—1085.

Periode, 26tägige, der luftelektrischen Zerstreuung, Untersuchung über die Existenz derselben. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIX.

Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1069—1085.

konstantes γ (nämlich für alle $\gamma > 8$) beweisen und werde dies in der vorliegenden Arbeit darlegen.

Nach dem Gesagten könnte man die neue Untersuchung für unproduktiv halten, weil es ja für den Fortschritt der Wissenschaft gleichgültig ist, ob man die vorhandenen Hilfsmittel in vollem Umfange anwendet oder nicht. Meine vorliegende Arbeit führt jedoch aus folgendem Grunde zu einem bisher noch niemals bewiesenen Satze von großer Allgemeinheit. In der Theorie der Primideale weiß man von den zugehörigen analytischen Funktionen nicht, ob sie in der ganzen Ebene existieren oder nicht; man ist also a fortiori nicht in der Lage, die klassischen Hadamard'schen Sätze über ganze Funktionen anzuwenden. Es sind also nur meine (in einem beschränkten Gebiete der Ebene operierenden) Methoden anwendbar, und ich bin eben in der vorliegenden Arbeit mit diesen zu einem bisher unerreichten Ziele gelangt. Die Analogie mit dem Spezialfalle der arithmetischen Progression im Körper der rationalen Zahlen ist so groß, daß ich im folgenden überhaupt nur von diesem Falle rede; für die Idealklassen darf ich mich damit begnügen, den Kenner meiner Arbeit:[1] »Über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen eines algebraischen Zahlkörpers« darauf aufmerksam zu machen, daß für eine Idealklasse im allgemeinsten Sinne des dritten Teiles jener Arbeit nunmehr bewiesen ist: Die Anzahl ihrer Primideale mit Norm $\leqq x$ ist

$$= \frac{1}{h}\int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\sqrt[\gamma]{\log x}}\right),$$

wo γ eine beliebige Zahl > 8 bedeutet.

§ 1.

Es habe $L_\nu(s)$ die bekannte Bedeutung.[2] Dann ist für $s = \sigma + ti$, $\sigma > 1$

---

[1] Mathematische Annalen, Bd. 63, p. 145 bis 204 (1907).

[2] Vgl. p. 508 meiner anfangs zitierten Arbeit.

Luftelektrische Zerstreuung, Untersuchung über die Existenz einer 26tägigen Periode derselben. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität, XXIX.

Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1069—1085.

Periode, 26tägige, der luftelektrischen Zerstreuung, Untersuchung über die Existenz derselben. Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität. XXIX.

Conrad V., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1069—1085.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. VIII. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

$$|L_\nu(s)| = e^{\sum\limits_{p,m}^{\nu} \frac{\cos(\omega(p^m) - mt\log p)}{p^{m\sigma}}}$$

$$\geqq e^{-\frac{a_0}{a_1}\sum\limits_{p,m}^{\nu}\frac{1}{mp^{m\sigma}} - \frac{a_2}{a_1}\sum\limits_{p,m}^{\nu}\frac{\cos(2\omega(p^m) - 2mt\log p)}{mp^{m\sigma}} - \cdots - \frac{a_q}{a_1}\sum\limits_{p,m}^{\nu}\frac{\cos(q\omega(p^m) - qmt\log p)}{mp^{m\sigma}}}$$

$$= \frac{1}{(L_1(\sigma))^{\frac{a_0}{a_1}} |L_{\nu_2}(\sigma+2ti)|^{\frac{a_2}{a_1}} \cdots |L_{\nu_q}(\sigma+qti)|^{\frac{a_q}{a_1}}},$$

folglich für $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 3$

$$|L_\nu(\sigma+ti)| > \frac{(\sigma-1)^{\frac{a_0}{a_1}}}{c_{10}\log^{\frac{a_2+\cdots+a_q}{a_1}} t},$$

also auf Grund der für $1 < \sigma \leqq 2$, $t \geqq 3$ gültigen Relation[1]

$$|L_\nu'(s)| < c_{11}\log^2 t$$

$$|L_\nu(1+ti)| > \frac{(\sigma-1)^{\frac{a_0}{a_1}}}{c_{10}\log^{\frac{a_2+\cdots+a_q}{a_1}} t} - c_{11}(\sigma-1)\log^2 t$$

$$= \frac{(\sigma-1)^{\frac{a_0}{a_1}}}{c_{10}\log^{\frac{a_2+\cdots+a_q}{a_1}} t}\left(1 - c_{10}c_{11}(\sigma-1)^{\frac{a_1-a_0}{a_1}}\log^{\frac{2a_1+a_2+\cdots+a_q}{a_1}} t\right)$$

Wird hierin

$$\sigma = 1 + \left(\frac{1}{2c_{10}c_{11}}\right)^{\frac{a_1}{a_1-a_0}} \frac{1}{\log^{\frac{2a_1+a_2+\dots+a_q}{a_1-a_0}} t}$$

gesetzt, was bei den gestatteten Annahmen $c_{10} > 1$, $c_{11} > 1$ für alle $t \geqq 3$ zwischen 1 und 2 liegt, so ergibt sich für $t \geqq 3$

$$|L_\nu(1+ti)| > \frac{1}{c_{12}} \frac{1}{\log^{\frac{a_2+\dots+a_q}{a_1}} t \,.\, \log^{\frac{a_0}{a_1}\frac{2a_1+a_2+\dots+a_q}{a_1-a_0}} t} = \frac{1}{c_{12}} \frac{1}{\log^{\frac{2a_0+a_2+\dots+a_q}{a_1-a_0}} t}.$$

(1) ist also für alle

$$\gamma > \frac{2a_0+a_2+\dots+a_q}{a_1-a_0} + 3 = \frac{a_0+a_1+a_2+\dots+a_q}{a_1-a_0} + 2$$

bewiesen.

Die spezielle Ungleichung

$$5+8\cos\alpha+4\cos 2\alpha+\cos 3\alpha = (1+\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)^2 \geqq 0 \qquad (5)$$

liefert somit (1) für alle

$$\gamma > \frac{5+8+4+1}{8-5} + 2 = 8.$$

---

[1] Vgl. p. 512 meiner anfangs zitierten Arbeit.

§ 3.

Es wäre nun von Interesse, die untere Grenze U von

$$\frac{a_0+a_1+a_2+\ldots+a_q}{a_1-a_0} = \frac{g(0)}{a_1-a_0}$$

für alle Funktionen (3) mit den Nebenbedingungen (4) zu bestimmen. Nach (5) ist jedenfalls

$$U \leqq 6.$$

Ich kenne zwar den Wert von U nicht, kann aber zu dem seinerzeit[1] gegebenen Beweise von

$$U \geqq \frac{\pi}{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}} = 4\cdot587\ldots$$

einiges hinzufügen. Ich werde beweisen:

erstens, daß nicht nur stets

$$\frac{a_0+a_1+\ldots+a_q}{a_1-a_0} \geqq 5,$$

d. h.

$$U \geqq 5$$

ist, sondern sogar stets

$$\frac{a_0+a_1+a_2}{a_1-a_0} \geqq 5;$$

zweitens, daß 5 die genaue untere Grenze von

$$\frac{a_0+a_1+a_2}{a_1-a_0}$$

(bei beliebigem q) ist;

drittens, daß

$$U \geqq 2+\frac{16}{9}\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 5\cdot224\ldots$$

ist.

---

[1] Vgl. p. 191 meiner Arbeit: »Beiträge zur analytischen Zahlentheorie«. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26, p. 169 bis 302 (1908).

I) Es ist stets

$$3-4\cos\alpha+\cos 2\alpha = 2-4\cos\alpha+2\cos^2\alpha$$
$$= 2(1-\cos\alpha)^2 \geqq 0,$$

also für jedes $g(\alpha)$ im Sinne von (3), (4)

$$0 \leqq \int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)(3-4\cos\alpha+\cos 2\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (a_0+a_1\cos\alpha+\ldots+a_q\cos q\alpha)(3-4\cos\alpha+\cos 2\alpha)\,d\alpha$$

$$= a_0.6\pi - a_1.4\pi + a_2.\pi;$$

daher ist

$$a_2 \geqq 4a_1-6a_0,$$

$$a_0+a_1+a_2 \geqq 5a_1-5a_0,$$

$$\frac{a_0+a_1+a_2}{a_1-a_0} \geqq 5,$$

also a fortiori stets

$$\frac{a_0+a_1+\ldots+a_q}{a_1-a_0} \geqq 5,$$

d. h.

$$U \geqq 5.$$

II) Ich behaupte, daß 5 die untere Grenze von

$$\frac{a_0+a_1+a_2}{a_1-a_0}$$

ist, und habe nach Annahme von $\delta > 0$ ein $g(\alpha)$ anzugeben, wo

$$\frac{a_0+a_1+a_2}{a_1-a_0} < 5+\delta$$

ist. Es ist für $0 < r < 1$

$$\Re\left(\frac{1+re^{i\alpha}}{1-re^{i\alpha}}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha+r^2} > 0,$$

also, da für $|x| < 1$

$$\frac{1+x}{1-x} = 1+2x+2x^2+\ldots \tag{6}$$

ist,

$$1+2r\cos\alpha+2r^2\cos 2\alpha+\ldots > 0;$$

daher ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe (6) auf dem Kreise $|x| = r$ bei passender Wahl der (nur von r abhängigen) Zahl q identisch in α

$$1+2r\cos\alpha+2r^2\cos 2\alpha+\ldots+2r^q\cos q\alpha > 0.$$

Hierin ist

$$\frac{a_0+a_1+a_2}{a_1-a_0} = \frac{1+2r+2r^2}{2r-1}.$$

Dies hat für $r = 1$ den Limes 5; r kann daher so nahe an 1 gewählt werden, daß

$$\frac{a_0+a_1+a_2}{a_1-a_0} < 5+\delta$$

ist.

III) Es ist

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)\,d\alpha,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$a_1-a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\alpha)(2\cos\alpha-1)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(\alpha)(2\cos\alpha-1)\,d\alpha.$$

Wegen

$$g(\alpha) \geqq 0$$

ist der Integrand $\geqq 0$ für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{3}$, dagegen $\leqq 0$ für $\frac{\pi}{3} \leqq \alpha \leqq \pi$. Daher ist

$$\pi(a_1 - a_0) \leqq \int_0^{\frac{\pi}{3}} g(\alpha)(2\cos\alpha - 1)\,d\alpha$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sum_{\nu=0}^{q} a_\nu \cos\nu\alpha(2\cos\alpha - 1)\,d\alpha$$

$$= \sum_{\nu=0}^{q} b_\nu a_\nu, \tag{7}$$

wo

$$b_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\nu\alpha(2\cos\alpha - 1)\,d\alpha$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(\nu-1)\alpha - \cos\nu\alpha + \cos(\nu+1)\alpha)\,d\alpha$$

gesetzt ist. Hierin ist

$$b_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\alpha - 1)\,d\alpha = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 0\cdot684\ldots,$$

$$b_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0\cdot614\ldots,$$

$$b_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0\cdot433\ldots.$$

Von allen folgenden b_ν $(\nu \geqq 3)$ behaupte ich, daß

$$b_\nu < b_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{8}$$

ist. Es ist für $\nu \geqq 3$

$$b_\nu = \frac{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{3}}{\nu-1} - \frac{\sin\frac{\nu\pi}{3}}{\nu} + \frac{\sin\frac{(\nu+1)\pi}{3}}{\nu+1},$$

also für $\nu \equiv 0 \pmod{3}$, $\nu \geqq 3$

$$b_\nu = \pm\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\nu-1} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\nu+1}\right) \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu+1}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{\nu^2-1} \leqq \frac{\sqrt{3}}{8},$$

für $\nu \equiv 1 \pmod{3}$, $\nu \geqq 4$

$$b_\nu = \pm\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\nu} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\nu+1}\right) \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2\nu(\nu+1)} \leqq \frac{\sqrt{3}}{40},$$

für $\nu \equiv 2 \pmod{3}$, $\nu \geqq 5$

$$b_\nu = \pm\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\nu-1} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\nu}\right) \leqq \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2(\nu-1)\nu} \leqq \frac{\sqrt{3}}{40}.$$

Aus (7) und (8) folgt

$$\pi(a_1-a_0) \leqq b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2(a_2 + \ldots + a_q)$$
$$= \frac{b_0+b_1}{2}(a_0 + \ldots + a_q) + \frac{b_0-b_1}{2}(a_0-a_1)$$
$$-\left(\frac{b_0+b_1}{2} - b_2\right)(a_2 + \ldots + a_q),$$

$$\left(\pi + \frac{b_0-b_1}{2}\right)(a_1-a_0) \leqq \frac{b_0+b_1}{2}(a_0 + \ldots + a_q)$$
$$-\left(\frac{b_0+b_1}{2} - b_2\right)(a_2 + \ldots + a_q).$$

Nun ist einerseits

$$\frac{b_0+b_1}{2}-b_2>0,$$

andrerseits wegen

$$0\leqq g(\pi)=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^q a_q$$

$$a_1-a_0\leqq a_2-a_3+\ldots+(-1)^q a_q\leqq a_2+a_3+\ldots+a_q.$$

Daher ergibt sich weiter

$$\left(\pi+\frac{b_0-b_1}{2}\right)(a_1-a_0)\leqq\frac{b_0+b_1}{2}(a_0+\ldots+a_q)$$
$$-\left(\frac{b_0+b_1}{2}-b_2\right)(a_1-a_0);$$

$$\left(\pi+\frac{b_0-b_1}{2}+\frac{b_0+b_1}{2}-b_2\right)(a_1-a_0)\leqq\frac{b_0+b_1}{2}(a_0+\ldots+a_q),$$

$$\frac{a_0+\ldots+a_q}{a_1-a_0}\geqq\frac{\pi+b_0-b_2}{\frac{b_0+b_1}{2}}=\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{3}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{8}\sqrt{3}}$$

$$=2+\frac{16}{9}\frac{\pi}{\sqrt{3}}=5\cdot224\ldots,$$

$$U\geqq 2+\frac{16}{9}\frac{\pi}{\sqrt{3}}=5\cdot224\ldots.$$

Über einige Grundwasserspiegel

von

Philipp Forchheimer,

k. M. k. Akad.

(Mit 10 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Oktober 1908.)

Für Grundwasser, welches sich mit geringem Gefälle in gleichförmigem, durchlässigem Boden über einer wagrechten undurchlässigen Schicht bewegt, gilt[1] bekanntlich, wenn z die Höhe des Spiegels über der undurchlässigen Schicht bezeichnet, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(z^2)}{\partial y^2}=0,$$

wonach die Isohypsen (Schichtenkurven, Höhenlinien) des Spiegels sogenannte »isothermische Kurvenscharen« bilden und man durch isogonale Abbildung eines Schichtenkurvenplanes neue Spiegelpläne erhalten kann. Einige solche Spiegel betreffende Aufgaben, für deren Lösung ein praktisches Bedürfnis vorliegt, sollen im Nachfolgenden behandelt werden.

Fassung durch zwei in einer Geraden liegende gleich große Schlitze.[2]

Um den betreffenden Spiegel abzuleiten, werde auf jenen zurückgegriffen, den die Fassung mittels eines einzigen

[1] Ph. Forchheimer, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover, 32 (1886), p. 544. — Ders. in Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV, 20, Hydraulik, p. 454.

[2] Den Anlaß zur Behandlung dieser und der unmittelbar folgenden Aufgabe gab eine Anfrage von G. Fantoli in Mailand.

Schlitzes verursacht. Dieser befinde sich auf der x-Achse eines Achsenkreuzes mit seinen Endpunkten in den Entfernungen x_1

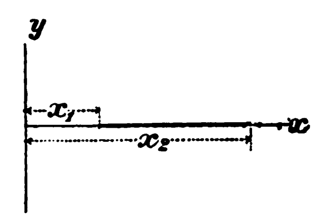


Fig. 1.

und x_2 vom Ursprung; er liefert dann als Höhenkurven Ellipsen von der Gleichung

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+y^2} = \text{konst}$$

oder

$$\sqrt{(x-x_1+iy)(x-x_1-iy)}+\sqrt{(x-x_2+iy)(x-x_2-iy)} = \text{konst.}$$

Setzt man hier zum Zwecke der isogonalen Abbildung

$$x \pm iy = (X \pm iY)^2, \quad x_1 = f^2, \quad x_2 = F^2,$$

wobei X und Y die Bildkoordinaten bedeuten, so erhält man

$$\sqrt{[(X+iY)^2-f^2][(X-iY)^2-f^2]}+$$
$$+\sqrt{[(X+iY)^2-F^2][(X-iY)^2-F^2]} = \text{konst.}$$

Der Ausdruck unter dem ersten Wurzelzeichen kann auch

$$(X+iY+f)(X+iY-f)(X-iY+f)(X-iY-f) =$$
$$= [(X+f)^2+Y^2][(X-f)^2+Y^2]$$

und der Ausdruck unter dem zweiten Wurzelzeichen in einer entsprechenden Form geschrieben werden, wonach sich die ganze Gleichung in

$$\sqrt{[(X-f)^2+Y^2][(X+f)^2+Y^2]}+$$
$$+\sqrt{[(X-F)^2+Y^2][(X+F)^2+Y^2} = \text{konst} \quad (1)$$

umwandeln läßt. Die vier Klammerausdrücke bedeuten nun die Abstände von den vier festen Punkten

$$X = \pm f, \; Y = 0 \text{ und } X = \pm F, \; Y = 0$$

und bezeichnet man diese Abstände mit

$$S_1,\ S_2,\ R_1 \text{ und } R_2,$$

so kann man Gleichung (1) zu

$$R_1 R_2 + S_1 S_2 = \text{konst} \tag{2}$$

vereinfachen, in der die einzelnen Höhenkurven verschiedenen Werten der Konstanten entsprechen. Man erhält die Gleichung

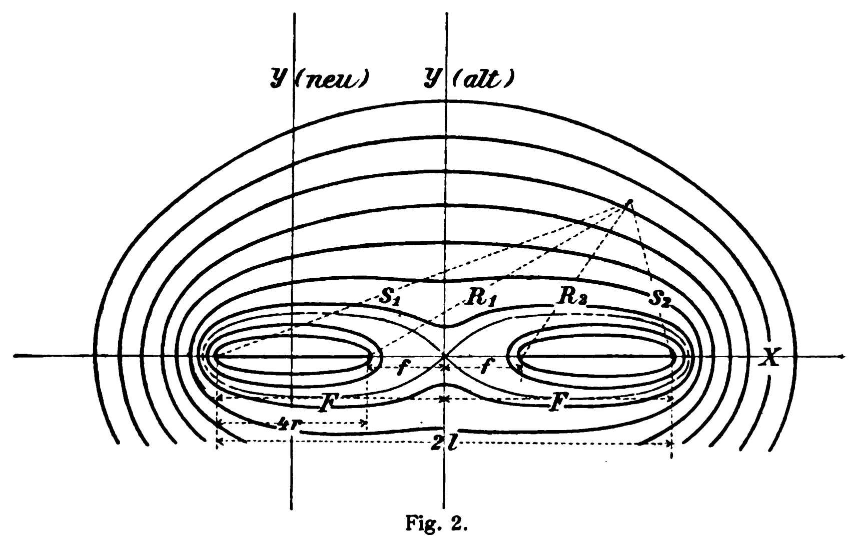


Fig. 2.

des Grundwasserspiegels ohne willkürliche Konstante, indem man auf die für Entnahme aus einem einzigen Schlitz geltende Spiegelgleichung

$$z^2 - h^2 = \frac{Q}{k\pi} \log \text{nat} \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - f_0^2}}{f_0} \tag{3}$$

zurückgreift, in der

k die Durchlässigkeit des Bodens,

r_1, r_2 die Abstände von den Schlitzenden,

f_0 die Schlitzlänge,

Q die Entnahme durch die Fassungsanlage und daher auch die Zuströmung aus dem Unendlichen und

h die Spiegelhöhe (Wassertiefe) im Schlitz bedeutet. Die Gleichung (3) liefert, wenn dieselben Umformungen vorgenommen werden, die zu (2) führen, zunächst

$$z^2 - h^2 = \frac{Q}{k\pi} \log \text{nat} \frac{R_1 R_2 + S_1 S_2 + \sqrt{(R_1 R_2 + S_1 S_2)^2 - (F^2 - f^2)^2}}{F^2 - f^2}.$$

doch ist zu bemerken, daß bei dieser Abbildung die Zuströmung aus dem Unendlichen und die Entnahme eine Verdoppelung erfährt: soll Q wieder den Bezug aus der **gesamten** Anlage bedeuten, so ist daher noch durch 2 zu teilen, das heißt

$$z^2-h^2=$$
$$=\frac{Q}{2k\pi}\log\text{nat}\frac{R_1R_2+S_1S_2+\sqrt{(R_1R_2+S_1S_2)^2-(F^2-f^2)^2}}{F^2-f^2} \quad (4)$$

zu schreiben. Fig. 2 stellt den durch (4) ausgedrückten, bei Entnahme aus 2 Schlitzen entstehenden Grundwasserspiegel dar. Die Höhenkurve, welche durch den Ursprung geht, hat die Gleichung

$$R_1R_2+S_1S_2=f^2+F^2,$$

welche für Punkte in der Ursprungsnähe, also für sehr kleine x und y in

$$f\sqrt{f^2-2x^2+2y^2}+F\sqrt{F^2-2x^2+2y^2}=f^2+F^2,$$

also in $x=\pm y$ übergeht, wonach die durch den Ursprung gehende Kurve hier mit den Koordinatenachsen Winkel von $\pm 45°$ einschließt.[1]

Fassung durch einen Schlitz und einen in seiner Verlängerung liegenden Brunnen.

Verschiebt man das Achsenkreuz des eben berechneten Planes in der X-Richtung, bis die neue Ordinatenachse durch die Mitte des einen Schlitzes geht, bezeichnet man nunmehr die Schlitzlänge mit

$$4r=F-f,$$

(während der Abstand der Schlitzmitten

$$2l=F+f$$

genannt werden möge) und bildet man den Spiegel ab,[2] indem man

$$X+iY=x+iy+\frac{r^2}{x+iy},\quad X-iY=x-iy+\frac{r^2}{x-iy}$$

---

[1] Für $f=0$, also $S_1=S_2=S$, werden die Kurven zu Ellipsen, wonach Ellipsen. $R^2+S_1S_2=F^2$ haben.

[2] Vergl. G. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, p. 140 f.

Fig. 3.

Fig. 4.

setzt, so werden um den Schlitz beschriebene convocale Ellipsen als Kreise wiedergegeben, die den neuen Ursprung als gemeinsamen Mittelpunkt haben. Dabei gilt, wie aus der Addition und Subtraktion der vorstehenden Ausdrücke hervorgeht,

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{x+iy} + \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{x-iy} = x\left(1+\frac{r^2}{x^2+y^2}\right) \\ Y &= y + \frac{1}{2i}\cdot\frac{r^2}{x+iy} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{r^2}{x-iy} = y\left(1-\frac{r^2}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

Bei dieser Abbildung wird für das Unendliche $X = x$ und $Y = y$, so daß im Unendlichen kongruente Höhenpläne entstehen und bei gleichem Wasserbezug Q aus dem Unendlichen jedes Bild gleiche Höhe z wie sein Urbild enthält. Man kann hiernach die Höhe eines jeden Punktes x, y des neuen Grundwasserspiegels aus den entsprechenden Koordinaten X, Y ermitteln, ohne die etwas lange neue Spiegelgleichung selbst abzuleiten, deren Aufstellung übrigens keine besondere Schwierigkeit bietet. Aus (5) folgt für $y = 0$

$$X = x\left(1+\frac{r^2}{x^2}\right) \quad \text{oder} \quad x = \frac{X}{2} \pm \sqrt{\frac{X^2}{4} - r^2}, \quad (6)$$

worin für die praktische Aufgabe nur das + Zeichen zu beachten ist. Zufolge (6) kommen die vier Schlitzpunkte

$$X = -2r \quad 2r \qquad 2(l-r) \qquad 2(l-r)$$

nach

$$x = -r \qquad r \quad x_1 = (l-r) + \sqrt{l(l-2r)} \quad x_2 = l + r + \sqrt{l(l+2r)}$$ (

und wird der ganze (zweite) zwischen $2(l-r)$ und $2(l+r)$ liegende Schlitz wieder als Schlitz, und zwar von x_1 bis x_2 abgebildet; anders der erste Schlitz. Da nämlich für

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichungen (5) in

$$X = 2x, \quad Y = 0$$

übergehen, entspricht ihm als Bild ein Kreis vom Halbmesser r. Der Bildplan zeigt also einen Brunnen vom Halbmesser r und einen Schlitz von der Länge

$$x_2 - x_1 = 2r + \sqrt{l(l+2r)} - \sqrt{l(l-2r)}. \tag{8}$$

Sind die Abmessungen x_1 und x_2 gegeben, so kann man aus ihnen r und l berechnen, da aus (7) die Gleichungen

$$x_1^2 - 2x_1 l + 2rx_1 + r^2 = 0 \quad \text{und} \quad x_2^2 - 2x_2 l - 2rx_2 + r^2 = 0$$

hervorgehen, deren Lösung, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$r = \sqrt{x_1 x_2}\,\frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}, \quad l = \frac{(x_1 + x_2)^2}{2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} \tag{9}$$

lautet. Man ist also imstande, für jeden Punkt x, y den gleich hohen X, Y zu bestimmen und dann die Höhe nach (4) zu berechnen. Die Figuren (3) und (4) stellen den Urplan und seine Abbildung dar.

Bisher wurde angenommen, daß Schlitz und Brunnen gleiche Mengen $\frac{Q}{2}$ beziehen; sollen hingegen die Entnahmen verschieden sein, und zwar

$$\frac{Q_1}{2} \text{ aus dem Brunnen, } \frac{Q_2}{2} \text{ aus dem Schlitz,}$$

so konstruiere man zwei Spiegel, einen für Schlitz und Brunnen und die Gesamtentnahme Q_1, und einen zweiten für den Sickerschlitz allein und die (positive oder negative) Entnahme $\frac{Q_2 - Q_1}{2}$, wobei man jedesmal voraussetze, daß der Schlitzspiegel die Höhe h über der undurchlässigen Schicht haben solle. Werden die Höhen der beiden Grundwasseroberflächen mit z_1 und z_2 bezeichnet, so gilt für den zweiten Spiegel

$$z_2^2 - h^2 = \frac{Q_2 - Q_1}{2\pi k} \log \text{nat} \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (x_2 - x_1)^2}}{x_2 - x_1}, \tag{10}$$

worin unter r_1 und r_2 die Abstände eines Punktes von den Schlitzendpunkten zu verstehen ist, und für den endgültigen Spiegel, wenn er ebenfalls im Schlitz die Höhe h annehmen soll,

$$z^2 = z_1^2 + z_2^2 - h^2. \tag{11}$$

Daß er, streng genommen, nicht längs aller Brunnenumfangspunkte gleiche Höhe aufweist, ist von geringer Bedeutung. Weniger zulässig wäre es, den ersten Spiegel für Schlitz und Brunnen mit einer Entnahme Q_2, den zweiten für

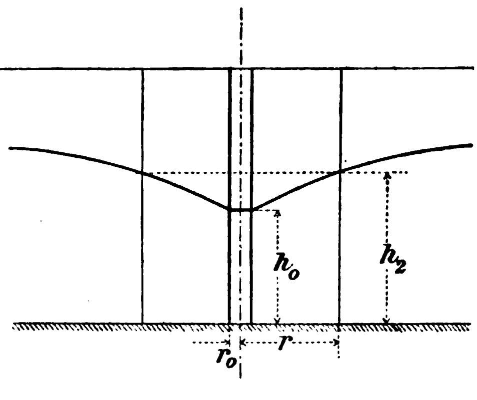


Fig. 5.

einen Einzelschacht und die Entnahme $\frac{Q_1 - Q_2}{2}$ zu bilden und dann wieder den Ausdruck (11) zu gebrauchen, weil dies für die einzelnen Punkte des Schlitzes zu stärker abweichenden Wasserständen führen würde.

Ist der Brunnenhalbmesser nicht r, sondern

$$r_0 < \sqrt{x_1 x_2}\,\frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$$

und würde bei einem Halbmesser r der Brunnenwasserstand h_2 sein, so ist er tatsächlich nur h_0 und fällt das Wasser von r bis r_0 nach bekannter Gleichung derart, daß

$$h_2^2 - h_0^2 = \frac{\frac{1}{2} Q_1}{\pi k} \log \text{nat} \frac{r}{r_0}$$

beträgt.

Fassung durch eine Brunnenreihe.

In einer Ptolemäischen Polarkarte wird die Erdoberfläche so dargestellt, daß die Parallelkreise wieder Kreise bilden, und zwar mit dem Pol als gemeinschaftlichen Mittelpunkt, die Meridiane aber Strahlen, die vom Pol ausgehen. Wird nun eine solche Karte in Mercator'scher Projektion umgezeichnet, so liefert sie, streng genommen, unendlich viele Streifen, von denen jeder ein Bild des Pols enthält.[1] Es ist klar, daß die mathematische Beziehung der beiden Karten, auf Grundwasserströmung angewendet, einen Einzelbrunnen zu einer Brunnenreihe werden läßt. Die mathematische Ableitung soll hier nicht durchgeführt, sondern sofort die Endgleichung angesetzt und dann nachgesehen werden, ob sie die für tiefes Grundwasser geltende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt und was für einen Strömungsfall sie ausdrückt. Besagte Endgleichung lautet:

$$z = \frac{\alpha a}{2\pi} \log \text{nat} \left[e^{2\pi \frac{x}{a}} - 2e^{\pi \frac{c+x}{a}} \cos \pi \frac{y}{a} + e^{2\pi \frac{c}{a}} \right]. \tag{12}$$

Zunächst ist ersichtlich, daß für y, $y+2a$, $y+4a$ usw. die nämlichen Werte von z wiederkehren, dann daß für $x = c$, $y = 0$ die Höhe z des Grundwasserspiegels über der wagrechten undurchlässigen Schicht zu $-\infty$ wird, daß also (12) sich auf eine endlose Reihe Brunnen bezieht, die in Abständen $2a$ aufeinander folgen. Es wird ferner für $x = \infty$ die Wassertiefe z unendlich groß, für $x = -\infty$ unabhängig von y zu

$$h = \frac{\alpha a}{2\pi} \log \text{nat}\, e^{2\pi \frac{c}{a}} = \alpha c$$

und für $x = c$, $y = a$ zu

$$\frac{\alpha a}{2\pi} \log \text{nat}\, 4 e^{2\pi \frac{c}{a}} = \alpha c + \frac{\alpha a}{\pi} \log \text{nat}\, 2 = h + \frac{\alpha a}{\pi} \log \text{nat}\, 2,$$

---

[1] G. Holzmüller, Isogonale Verwandtschaften, p. 237.

wonach sich in der Mitte zwischen zwei Brunnen der Spiegel um

$$\frac{\alpha a}{\pi} \log \text{nat}\, 2$$

höher erhebt, als er sich in negativ unendlicher Entfernung einstellt. Ebenso ist leicht zu ersehen, daß die gleiche Höhe $h = \alpha c$ in der Brunnenlinie $x = c$ in den Entfernungen $\pm \frac{a}{3}$ von den Brunnenmitten sowie oberhalb der Brunnen in den Punkten $x = c + \frac{a}{\pi} \log \text{nat}\, 2$, $y = 0$, $2a$ usw. wiederkehrt. Durch Differenzieren von (12) erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha \cdot \frac{e^{2\pi \frac{x}{a}} - e^{\pi \frac{c+x}{a}} \cos \pi \frac{y}{a}}{e^{2\pi \frac{x}{a}} - 2e^{\pi \frac{c+x}{a}} \cos \pi \frac{y}{a} + e^{2\pi \frac{c}{a}}}, \tag{13}$$

wonach die Spiegelneigung im positiv Unendlichen α, ferner in der Mitte zwischen zwei Brunnen (also für $x = c, y = a$)

$$\alpha \cdot \frac{e^{2\pi \frac{c}{a}} + e^{2\pi \frac{c}{a}}}{e^{2\pi \frac{c}{a}} + 2e^{2\pi \frac{c}{a}} + e^{2\pi \frac{c}{a}}} = \frac{\alpha}{2}$$

beträgt und im negativ Unendlichen zu Null wird. Darnach bedeutet die Spiegelgleichung (12), daß im Unendlichen das Wasser unter der Neigung α zuläuft und jede Breiteneinheit Strom daselbst, wenn k wieder die Durchlässigkeit bedeutet,

$$q = k\alpha z$$

führt, worin z die als wenig veränderlich betrachtete Grundwassertiefe bedeutet. Sämtliches Wasser wird durch Brunnen aufgenommen, deren jeder

$$2k\alpha z a$$

liefert, so daß im negativ Unendlichen vollständige Ruhe herrscht. Die Höhe, die dort der Spiegel über der undurchlässigen Schicht annimmt, hängt nicht von den Brunnen, sondern

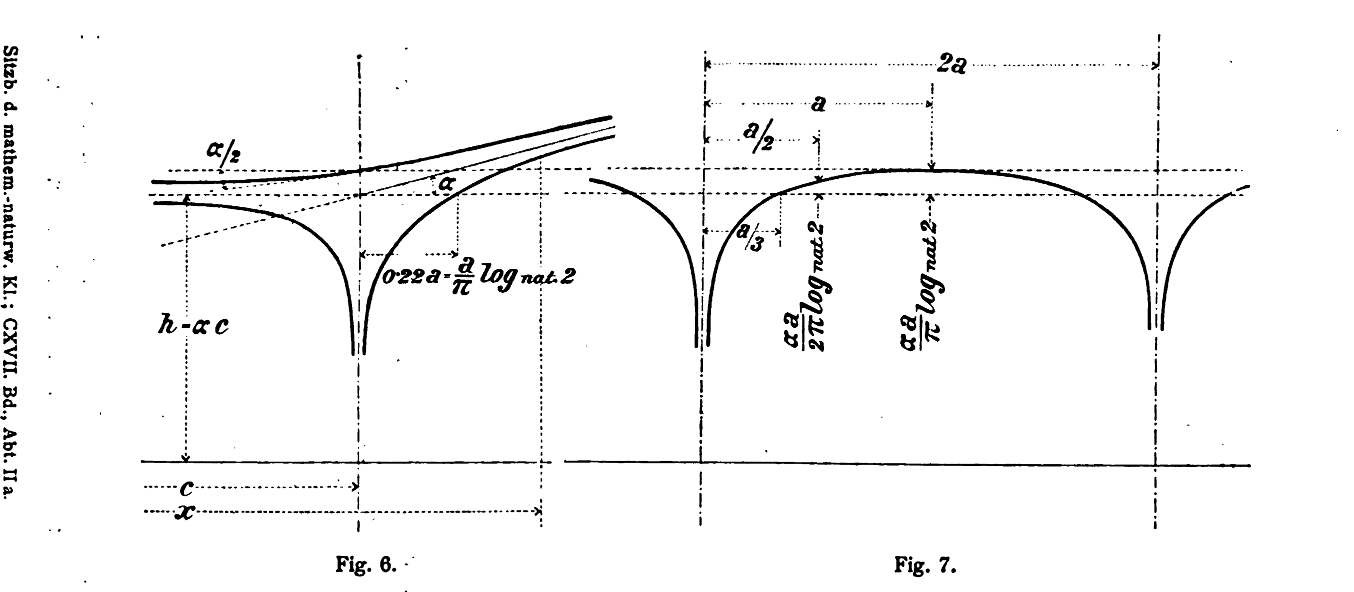


Fig. 6.

Fig. 7.

von den dortigen hydrologischen Verhältnissen, z. B. dem Vorhandensein eines Gewässers, ab, welches verhindert, daß der Spiegel des Grundwassers tiefer als der Gewässerspiegel sinke. Die dortige Höhe

$$h = \alpha c$$

setzt also den Wert von c fest.

Nimmt die Brunnenreihe nicht alles Wasser auf, strömt also durch die Breiteneinheit durchschnittlich noch

$$q_1$$

weiter, während aus dem Brunnen q geschöpft wird, so muß der Spiegel gegen früher überall um

$$\alpha_1 = \frac{q}{kz}$$

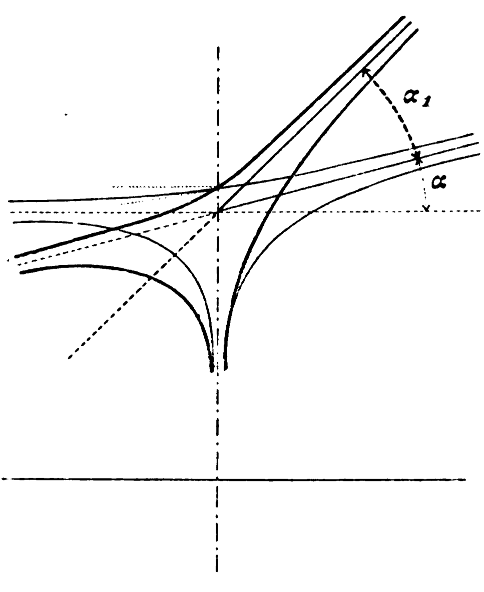


Fig. 8.

steiler sein. Die absolute Spiegelhöhe hängt wieder von den Verhältnissen im negativ Unendlichen ab. Wird hingegen aus den Brunnen um q_2 mehr gepumpt als im positiv Unendlichen hinzufließt, so muß dieses q_2 dem negativ Unendlichen entnommen werden. Die Spiegelneigung erfährt dabei gegen (13) überall eine Verminderung um

$$\alpha_2 = \frac{q_2}{kz},$$

so daß sie (vergl. Fig. 9) jenseits der Brunnen vielfach negativ wird und die Brunnenreihe zu einer Art tiefen Rinne wird.

Breite des Einzugsgebietes eines Brunnens.

Zuweilen ist es, namentlich hygienischer Erwägung wegen, wünschenswert zu wissen, wie breit bei einem Brunnen, der sowohl vom Binnenland als auch vom Flusse aus gespeist wird, der Binnenstreifen ist, aus dem er Wasser bezieht. Wird

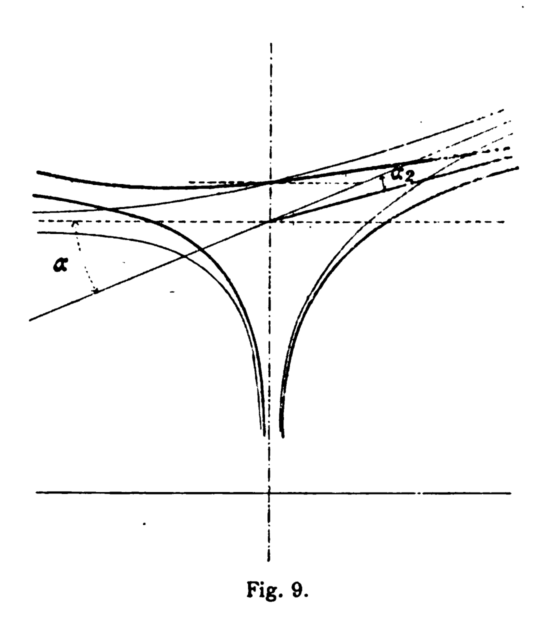


Fig. 9.

angenommen, daß der Grundwasserstrom senkrecht zum Flusse gerichtet sei und daß

q_0 die Ergiebigkeit der Breiteneinheit Grundwasserstrom,

Q die Menge, die man in der Zeiteinheit aus dem Brunnen schöpft,

b die Entfernung des Brunnens vom Ufer,

R die Entfernung eines Punktes x, y von der Brunnenmitte,

S seine Entfernung von jenem Punkte, der bezüglich des Ufers das Spiegelbild der Brunnenmitte darstellt,

h die Höhe des Flußspiegels über der wagrechten undurchlässigen Schicht,

z die Höhe über der undurchlässigen Schicht im allgemeinen

bedeute, so gilt für den Grundwasserspiegel[1]

$$\pi k(z^2-h^2)=2\pi q_0 y+Q\log\text{nat}\,R-Q\log\text{nat}\,S \qquad (14)$$

und daher für einen durch den Brunnen senkrecht zum Ufer geführten lotrechten Schnitt ($x=0$)

$$\pi k(z^2-h^2)=2\pi q_0 y+Q\log\text{nat}\,(y-b)-Q\log\text{nat}\,(y+b).$$

Ist Q im Vergleich zu q_0 sehr klein, so bezieht der Brunnen nur Binnenwasser; wird die Entnahme Q erhöht, so tritt offenbar zuerst unter der betrachteten Schnittlinie Flußwasser ein, und zwar im Augenblick, in dem die Tangente der Schnittlinie am Ufer wagrecht wird. Das geschieht, wenn für $y=0$

$$2\pi kz\frac{\partial z}{\partial y}=2\pi q_0+\frac{Q}{y-b}-\frac{Q}{y+b}=0$$

wird, oder für

$$Q=\pi b q_0,$$

also wenn so viel geschöpft wird, wie ein Grundwasserstreifen von der Breite πb Wasser führt.

Wenn man aus dem Brunnen in der Zeiteinheit eine Menge

$$Q>\pi b q_0$$

schöpft, so dringt nicht nur aus dem Binnenlande, sondern auch vom Ufer aus Wasser in ihn ein, und zwar zwischen zwei Punkten, in denen

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

sein muß. Gleichung (14) läßt sich auch in der Form

$$\pi k(z^2-h^2)=2\pi q_0 y+\frac{Q}{2}\log\text{nat}\,[x^2+(y-b)^2]-$$
$$-\frac{Q}{2}\log\text{nat}\,[x^2+(y+b)^2]$$

---

[1] Ph. Forchheimer, Zeitschr. d. österr. Ingenieur- und Architekten-vereines, *50* (1898), p. 631.

schreiben und darnach gibt die Differentiation die Beziehung

$$2\pi k z \frac{\partial z}{\partial y} = 2\pi q_0 + Q\frac{y-b}{R^2} - Q\frac{y+b}{S^2},$$

die für die beiden Uferpunkte in

$$0 = 2\pi q_0 - \frac{bQ}{b^2+x^2} - \frac{bQ}{b^2+x^2}$$

oder, wenn die betreffenden Abszissen mit $\pm x_1$ bezeichnet werden, in

$$x_1 = \sqrt{b\left(\frac{Q}{\pi q_0} - b\right)} \tag{15}$$

übergeht. Die durch die zwei eben gefundenen Uferpunkte gehenden Stromfäden sind die äußersten, die, aus dem Unend-

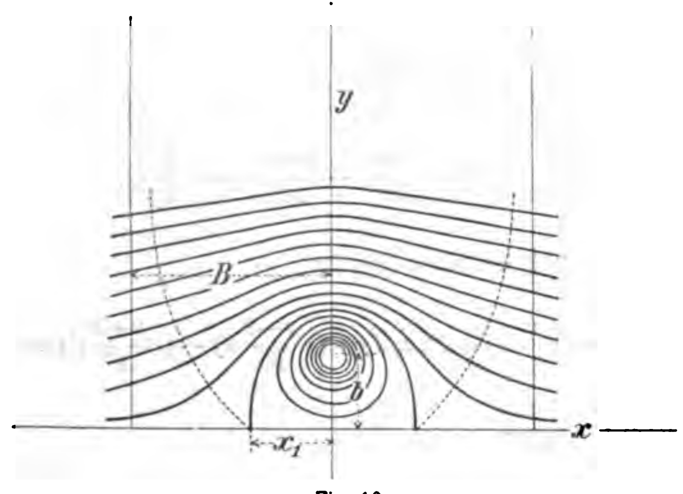


Fig. 10.

lichen kommend, noch in den Brunnen statt in den Fluß münden. Die allgemeine Gleichung der Strömungslinien lautet im gegebenen Falle

$$2\pi q_0 x + Q \text{ arc tang}\frac{y+b}{x} - Q \text{ arc tang}\frac{y-b}{x} = \text{konst} = \varphi, \tag{16}$$

wie daraus hervorgeht, daß sie die zwei Bedingungen erfüllt,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad (17)$$

zu machen und für $\frac{dy}{dx}$ einen Wert liefert, der dem aus Gleichung (14) für die Höhenkurven hervorgehenden Werte negativ reziprok ist. Nachstehend sei der bezügliche Nachweis erbracht. Es ist:

$$R^2 = x^2 + (y-b)^2 \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y-b}{R}$$

$$S^2 = x^2 + (y+b)^2 \qquad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{x}{S} \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{y+b}{S}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2\pi q_0 - \frac{Q(y+b)}{S^2} + \frac{Q(y-b)}{R^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Qx}{S^2} - \frac{Qx}{R^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2Qx\left(\frac{y+b}{S^4} - \frac{y-b}{R^4}\right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

womit (17) erfüllt ist. Nach (14) ist

$$Q\frac{x}{R^2}dx - Q\frac{x}{S^2}dx + 2\pi q_0\,dy + Q\frac{y-b}{R^2}dy - Q\frac{y+b}{S^2}dy = 0,$$

nach (16) hingegen

$$2\pi q_0\,dx - \frac{Q(y+b)}{S^2}dx + \frac{Q(y-b)}{R^2}dx + \\ + \frac{Qx}{S^2}dy - \frac{Qx}{R^2}dy = 0, \qquad (18)$$

also $\frac{dy}{dx}$ in der Tat reziprok und mit entgegengesetztem Zeichen wie nach (14).

Nach (16) gilt für die genannten Uferpunkte

$$\pm \text{konst} = 2\pi q_0 x_1 + 2Q \text{ arc tang } \frac{b}{x_1},$$

wonach die durch diese Punkte gehenden Strömungslinien die Gleichung

$$2\pi q_0 x + Q \text{ arc tang} \frac{y+b}{x} - Q \text{ arc tang} \frac{y-b}{x} =$$
$$= \pm 2\left(\pi q_0 x_1 + Q \text{ arc tang } \frac{b}{x_1}\right)$$

besitzen und ihre unendlich fernen Punkte im Abstande

$$\pm\left(x_1 + \frac{Q}{\pi q_0} \text{ arc tang } \frac{b}{x_1}\right)$$

von der y-Achse liegen, die gesuchte Breite des den Brunnen speisenden Streifens im Unendlichen also

$$2B = 2\sqrt{b\left(\frac{Q}{\pi q_0} - b\right)} + 2\frac{Q}{\pi q_0} \text{ arc tang} \frac{b}{\sqrt{b\left(\frac{Q}{\pi q_0} - b\right)}}$$

beträgt. Zur Festlegung der Grenzströmungslinien diene weiter folgendes. Wird $Q:\pi q_0$ gemäß (15) durch b und x_1 ausgedrückt, so geht (18) in

$$\left[R^2 S^2 + (S^2 - R^2)\frac{x_1^2+b^2}{2b} y - (S^2+R^2)\frac{x_1^2+b^2}{2}\right] dx =$$
$$= (S^2 - R^2)\frac{x_1^2+b^2}{2b} x\,dy$$

oder in

$$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + b^2x^2 - b^2y^2 + x_1^2y^2 - x^2x_1^2 - b\,x_1^2)\,dx =$$
$$= (2x_1^2xy + 2b^2xy)\,dy$$

über, welcher Ausdruck sich in der Nähe der betrachteten Uferpunkte, also für

$$x = x_1 + \xi, \quad y = \eta,$$

worin ξ und η kleine Größen bedeuten, bei Vernachlässigung höherer Potenzen von ξ und η zu

$$(2x_1^3\xi + 2b^2x_1\xi)\,dx = (2x_1^3\eta + 2b^2x_1\eta)\,dy$$

oder zu

$$\xi\,dx = \eta\,dy$$

vereinfacht, wonach die Strömungslinien an der Grenze des Einzugsgebietes, also in $x = \pm x_1$ das Ufer unter 45° schneiden.

Über die Störung der Wirkung eines radioaktiven Gases in einem geschlossenen Raume durch einen für die Wirkung undurchlässigen, hineinragenden zylindrischen Stab

von

J. Nabl.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Oktober 1908.)

Wir denken uns in einem allseits begrenzten Gefäße ein Gemisch zweier Gase im Gleichgewicht. Das eine Gas (etwa Luft), bezeichnen wir als die inaktive Komponente, während wir dem zweiten Gase, der aktiven Komponente (etwa Emanation), gewisse Wirkungen zuschreiben, die im folgenden bestehen mögen:

Es sollen die Teilchen des aktiven Gases — die sich im übrigen ganz so wie die Moleküle der kinetischen Gastheorie benehmen und die wir uns der Einfachheit halber ausdehnungslos als bloße Punkte vorstellen — innerhalb einer Sphäre von endlichem Radius R auf die Moleküle des inaktiven Gases eine gewisse, radial ausstrahlende Wirkung (etwa Ionisation) ausüben. In einem bestimmten Volumen ist dann die Wirkung der aktiven Komponente proportional der Anzahl der Wirkungssphären, die dieses Volumen erfüllen. Bezeichnen wir demnach die pro Volumeneinheit überall gleiche Anzahl der aktiven Partikel mit ρ, so ist innerhalb eines Volumens v die Wirkung proportional der Größe:

$$v\rho\frac{4R^3\pi}{3}.$$

Wir denken uns des weiteren einen zylindrischen Stab (etwa eine Elektrode) von der Länge l und dem Radius $\delta < R$,

dessen Material für die Wirkung, die von den Partikeln ausgeht, undurchlässig ist, in das Gefäß hineinragend. Es frägt sich nun, inwieweit die Anwesenheit des Stabes die Wirkung der aktiven Partikel beeinflußt.

Es ist von vornherein klar, daß sich die Wirkung des Stabes auf einen zylindrischen Raum von der Länge l des Stabes (die Störungen an den Stabenden wollen wir außer Betracht lassen) und dem Radius $R+\delta$ erstreckt, dessen Achse mit der Stabachse zusammenfällt. In diesem Raume wäre bei Abwesenheit des Stabes die Wirkung der aktiven Partikel proportional der Größe:

$$\omega = (R+\delta)^2 \pi l \rho \frac{4R^3\pi}{3}.$$

Die Anwesenheit des Stabes nun modifiziert diese Größe in folgender Weise:

Erstens entfallen die Wirkungssphären aller derjenigen Partikel, die sich in dem Raume befanden, der nunmehr vom Stabvolumen eingenommen wird; d. h. der Betrag:

$$\omega_1 = \delta^2 \pi l \rho \frac{4R^3\pi}{3}.$$

Zweitens durchstoßt der Stab die Wirkungssphären aller derjenigen Partikel, deren Achsenabstand zwischen δ und $R+\delta$ liegt. Hierdurch entsteht innerhalb jeder durchstoßenen Wirkungssphäre, teils durch die bloße Anwesenheit des Stabes, teils durch dessen Schattenwirkung, ein Raum, der bezüglich der Aktion der betreffenden Partikel unwirksam ist und den wir den »unwirksamen Raum innerhalb der Wirkungssphäre« nennen wollen. Bezeichnen wir den unwirksamen Raum einer Partikel, die von der Stabachse die Entfernung a hat mit Ω, so gibt es in dem ringförmigen Volumelement vom Querschnitt $da\,dl$ und dem Radius a im ganzen $2\pi a\rho\, da\, dl$ Partikel, aus deren Wirkungssphären *je* das Volumen Ω als unwirksam herausgeschnitten wird. Hat demnach der Stab die Länge l, so beträgt der gesammte, durch die Anwesenheit des Stabes der Wirksamkeit entzogene, Sphärenanteil:

$$\omega_2 = 2\pi\rho l \int_{\delta}^{R+\delta} \Omega a\, da.$$

Wenn also die Wirkung des aktiven Gases innerhalb des Zylinders vom Radius $R+\delta$ bei Abwesenheit des Stabes gemessen war durch:

$$i = \mu\omega,$$

wobei μ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, so sinkt dieselbe durch die Anwesenheit des Stabes auf:

$$i' = \mu(\omega - \omega_1 - \omega_2)$$

und es ist demnach:

$$i' = \left(1 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega}\right) i.$$

Die Frage ist damit auf die Bestimmung von Ω und die Berechnung von $\int \Omega a\, da$ zurückgeführt.

Wir wollen zunächst daran gehen, den unwirksamen Raum Ω innerhalb der Wirkungssphäre einer Partikel, die sich im Abstande a von der Stabachse befindet, zu berechnen.

Dieser Raum besteht einerseits aus dem innerhalb der Wirkungssphäre befindlichen Stabstück, andrerseits aus dem Kernschatten des Stabes im Innern der Wirkungssphäre.

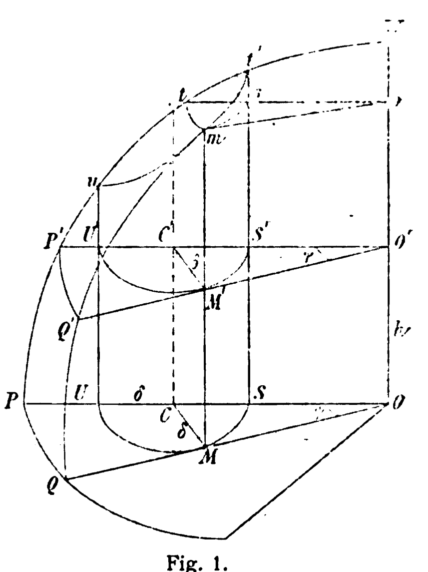


Fig. 1.

Hierbei wollen wir die Verhältnisse zunächst innerhalb eines Oktanten der Wirkungssphäre betrachten, wie sie in Fig. 1 wiedergegeben sind. In diesem Falle ist der unwirksame Raum begrenzt:

Durch das Ebenenstück MQm, welches seinerseits wiederum begrenzt wird durch die Gerade Mm, längs welcher eine durch OO' gelegte Ebene den Zylinder berührt, durch den größten Kreisbogen Qm, in welchem die genannte Ebene die Wirkungssphäre schneidet und durch das Tangentenstück MQ.

Ferner durch das Kugeloberflächenstück $PQmt$, welches durch die beiden größten Kreisbogen PQ und Pt, sowie durch den Parallelkreisbogen mt (Radius $om = OM$) und den größten Kreisbogen mQ begrenzt wird; hierzu kommt noch das Kugeloberflächenstückchen mtt', welches der Zylinder oberhalb omt herausschneidet.

Sodann durch das Zylinderoberflächenstück: $MSt'mM$ und endlich durch das Ebenenstück: PSt'.

Zum Zwecke der Berechnung des unwirksamen Raumes denken wir uns nun im Abstand $OO' = h$ eine Ebene parallel zur Ebene OPQ gelegt. So ist dann $P'Q'M'S'C'U' = f(h)$ der Querschnitt des unwirksamen Raumes im Abstand h von der Grundebene und der unwirksame Raum innerhalb des Oktanten ist dann gegeben durch

$$\int_0^{h_0} f(h)\,dh,$$

wobei die obere Grenze noch zu bestimmen ist. In Fig. 2 sind die Schnitte in der Ebene OPW und in der hierzu senkrechten Ebene $O'P'Q'$ herausgezeichnet; es ist:

$$OO' = CC' = h, \quad OC = O'C' = a,$$

woraus folgt:

$$O'P' = \sqrt{R^2 - h^2}, \quad O'M' = OM = \sqrt{a^2 - \delta^2}$$

$$\varphi = \arc\cos\frac{\delta}{a}, \quad \psi = \arc\sin\frac{\delta}{a},$$

somit ist:

$$f(h) = \frac{R^2 - h^2}{2}\arc\sin\frac{\delta}{a} - \frac{\delta}{2}\sqrt{a^2 - \delta^2} + \frac{\delta^2}{2}\arc\cos\frac{\delta}{a}\,.$$

Es handelt sich nunmehr darum, festzustellen, innerhalb welcher Grenzen uns die so gefundene Funktion $f(h)$ tatsächlich den Querschnitt des unwirksamen Raumes darstellt, beziehungsweise um die Ermittlung der oberen Grenze h_0.

Man erkennt ohneweiters, daß für $h = Uu = \sqrt{R^2 - (a+\delta)^2}$ der Querschnitt noch durch $f(h)$ dargestellt wird (Fig. 3, I); allein auch für größere h ist dies noch der Fall, wie man leicht

an Fig. 3, II, ersehen kann, woselbst der Querschnitt für ein $h > Uu$ wiedergegeben ist. Der Grenzfall ist in Fig. 3, III, wiedergegeben; hier geht der Querschnitt gerade durch jenen Punkt m, in welchem die Berührungsgerade Mm die Kugel durchstoßt; somit ist dorten:

$$h = Mm = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - (a^2 - \delta^2)}.$$

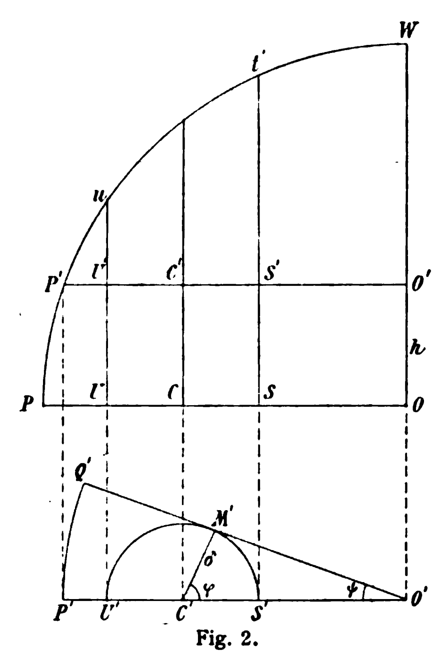
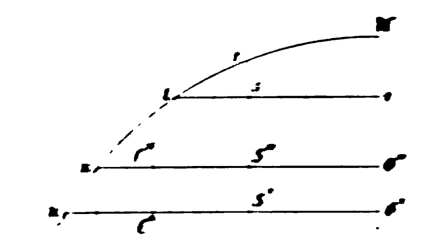


Fig. 2.

Für diesen Wert des h gibt $f(h)$ den Querschnitt des unwirksamen Raumes noch richtig wieder; für ein $h > \sqrt{R^2 - (a^2 - \delta^2)}$ aber ändert sich die Funktionsform, die den Querschnitt des unwirksamen Raumes darstellt, wie wir sofort sehen werden. Somit stellt der eben gefundene Wert die obere Grenze für h dar, d. h. es ist:

$$h_0 = \sqrt{R^2 - (a^2 - \delta^2)}.$$

In Rücksicht darauf, daß unsere Betrachtung nur für den Oktanten galt und in Rücksicht darauf, daß die Ebenen OPW und OPQ Symmetrieebenen des nicht verfügbaren Raumes sind, ergibt sich demnach der Hauptteil des unwirksamen Raumes als:



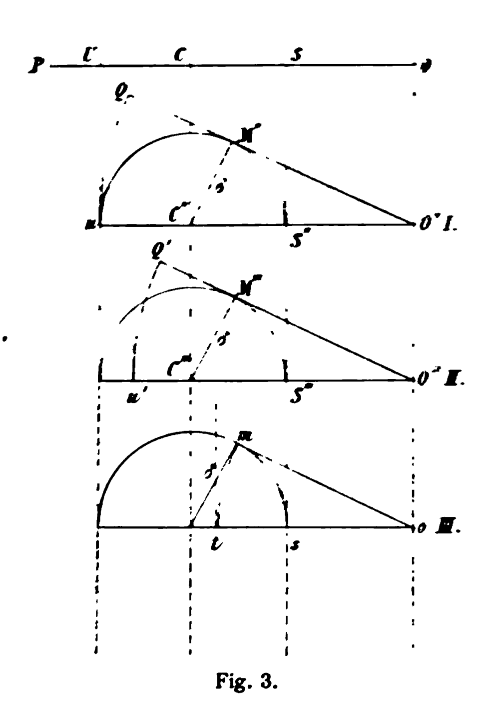


Fig. 3.

$$\Omega_1 = 2\int_0^{\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}} \left\{(R^2-h^2)\arcsin\frac{\delta}{a} - \delta\sqrt{a^2-\delta^2} + \right.$$

$$\left. + \delta^2 \arccos\frac{\delta}{a}\right\} dh =$$

$$= 2\left\{\left(R^2\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)} - \frac{\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}^{\,3}}{3}\right)\arcsin\frac{\delta}{a} - \right.$$

$$\left. - \delta\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}\sqrt{a^2-\delta^2} + \delta^2\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}\arccos\frac{\delta}{a}\right\}.$$

Hierzu kommt nunmehr noch das vierfache Volumen des oberhalb der Ebene *omt* gelegenen zylinderhufartigen Gebildes *mstt'*, welches für ein zwischen den Grenzen *Mm* und *St'* gelegenes h den unwirksamen Raum repräsentiert und dessen Querschnitt eben nicht mehr durch $f(h)$ darstellbar ist. In Fig. 4

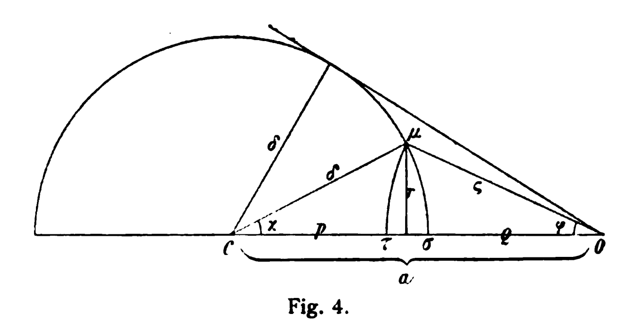


Fig. 4.

ist der Querschnitt $\mu\tau\sigma$ des unwirksamen Raumes für ein solches zwischen *Mm* und *St'* gelegenes h herausgezeichnet.

Man findet leicht:

$$\rho = \sqrt{R^2 - h^2}$$

und

$$\mu\tau\sigma = \varphi(h) = \frac{\delta^2}{2} \operatorname{arc} \chi + \frac{1}{2}(R^2 - h^2) \operatorname{arc} \varphi - \frac{1}{2} r a,$$

ferner ergibt sich:

$$p = \frac{1}{2a}\{a^2 + (\delta^2 - R^2 + h^2)\}$$

$$q = \frac{1}{2a}\{a^2 - (\delta^2 - R^2 + h^2)\}$$

$$r = \frac{1}{2a}\sqrt{-(R^2 - \delta^2 - h^2)^2 + 2a^2(R^2 - \delta^2 - h^2) + 4a^2\delta^2 - a^4}$$

$$\chi = \operatorname{arc} \cos \frac{p}{\delta} = \operatorname{arc} \cos \frac{a^2 - (R^2 - \delta^2 - h^2)}{2a\delta}$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \cos \frac{q}{\rho} = \operatorname{arc} \cos \frac{a^2 + (R^2 - \delta^2 - h^2)}{2a\sqrt{R^2 - h^2}}.$$

Man erhält somit schließlich:

$$\varphi(h)=\frac{1}{2}\Big\{\delta^2 \arccos\frac{a^2-(R^2-\delta^2-h^2)}{2a\delta}+$$

$$+(R^2-h^2)\arccos\frac{a^2+(R^2-\delta^2-h^2)}{2a\sqrt{R^2-h^2}}-$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-(R^2-\delta^2-h^2)^2+2a^2(R^2-\delta^2-h^2)+4a^2\delta^2-a^4}\Big\}.$$

Nachdem nun die untere Grenze für h in diesem Falle $Mm=\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}$ und die obere $St'=\sqrt{R^2-(a-\delta)^2}$ ist, so ergibt sich für den noch fehlenden Teil des unwirksamen Raumes der Ausdruck:

$$\Omega_2=4\int_{\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}}^{\sqrt{R^2-(a-\delta)^2}}\varphi(h)\,dh.$$

Es handelt sich nun um die Durchführung der einzelnen Integrationen, die sich ziemlich kompliziert gestaltet. Wir setzen der Kürze halber:

$$-(R^2-\delta^2-h^2)^2+2a^2(R^2-\delta^2-h^2)+4a^2\delta^2-a^4=H,$$

$$\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}=h_u,\quad \sqrt{R^2-(a-\delta)^2}=h_0$$

und wenden auf die beiden ersten Glieder in $\varphi(h)$ die partielle Integration an; wir erhalten dann:

$$\Omega_2=2\Big|\delta^2 h\arccos\frac{a^2-(R^2-\delta^2-h^2)}{2a\delta}+$$

$$+\left(R^2h-\frac{h^3}{3}\right)\arccos\frac{a^2+(R^2-\delta^2-h^2)}{2a\sqrt{R^2-h^2}}\Big|_{h_u}^{h_0}+$$

$$+4\delta^2\int_{h_u}^{h_0}\frac{h^2dh}{\sqrt{H}}+\frac{2}{3}\int_{h_u}^{h_0}\frac{(3R^2h^2-h^4)(a^2-R^2-\delta^2-h^2)}{(R^2-h^2)\sqrt{H}}dh-$$

$$-\int_{h_u}^{h_0}\sqrt{H}\,dh.$$

Mit Rücksicht auf:

$$\frac{(3R^2h^2-h^4)(a^2-R^2-\delta^2-h^2)}{R^2-h^2}=$$

$$=h^4+h^2(a^2-3R^2-\delta^2)-2R^2(a^2-\delta^2)+\frac{2R^4(a^2-\delta^2)}{R^2-h^2}$$

und

$$H = -h^4 + 2h^2(R^2 - \delta^2 - a^2) - \{R^4 - 2R^2(a^2+\delta^2) + (a^2-\delta^2)^2\}$$

erhält man schließlich:

$$\Omega_2 = 2\left| \delta^2 h \arc\cos\frac{a^2-(R^2-\delta^2-h^2)}{2a\delta} + \left(R^2 h - \frac{h^3}{3}\right)\arc\cos\frac{a^2+(R^2-\delta^2-h^2)}{2a\sqrt{R^2-h^2}}\right|_{h_u}^{h_0} +$$

$$+\frac{5}{3}\int_{h_u}^{h_0}\frac{h^4\,dh}{\sqrt{H}} + \frac{2(4a^2-6R^2+8\delta^2)}{3}\int_{h_u}^{h_0}\frac{h^2\,dh}{\sqrt{H}} + \frac{3R^4+3(a^2-\delta^2)-10R^2a^2-2R^2\delta^2}{3}\int_{h_u}^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{H}} +$$

$$+\frac{4R^4(a^2-\delta^2)}{3}\int_{h_u}^{h_0}\frac{dh}{(R^2-h^2)\sqrt{H}}$$

Mittels einer geeigneten Transformation ist es nunmehr nicht schwer, die einzelnen auftretenden Integrale auf ihren Charakter zu prüfen. Es ist:

$$\sqrt{H} = \sqrt{(h^2-h_1^2)(h_2^2-h^2)},\quad \text{wobei}\quad h_1 = +\sqrt{R^2-(a+\delta)^2}\quad \text{und}\quad h_2 = \sqrt{R^2-(a-\delta)^2}$$

ist. Hiebei ist zu beachten, daß:

$$h_1 < h_u < h_0 = h_2,$$

somit $\sqrt{H}$ im ganzen Intervall h_u bis h_0 reell ist. Wir machen nunmehr die Substitution:

$$h^2 = \frac{h_1^2}{1-\varkappa^2 z^2},\qquad \varkappa = \frac{\sqrt{h_2^2-h_1^2}}{h_2} = \frac{2\sqrt{a\delta}}{\sqrt{R^2-(a-\delta)^2}}.$$

Demzufolge ist:

$$z^2 = \frac{h^2 - h_1^2}{h_2^2 - h_1^2} \frac{h_2^2}{h^2},$$

d. h. es ist innerhalb des ganzen Intervalls h_u bis h_0 stets $z \leqq 1$.

Infolge der Substitution gehen die Grenzen h_u und h_0 über in

$$z_u = \sqrt{\frac{(a+\delta)\{R^2-(a-\delta)^2\}}{2a(R^2-a^2+\delta^2)}} \text{ und } z_0 = \frac{h_2^2-h_1^2}{h_2^2-h_1^2} \frac{h_2^2}{h_2^2} = 1.$$

Und die fraglichen Integrale nehmen die Form an:

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{H}} = \frac{1}{h_2} \int_{z_u}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{h^2 dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_1^2}{h_2} \int_{z_u}^{1} \frac{dz}{(1-\varkappa^2 z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{h^4 dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_1^4}{h_2} \int_{z_u}^{1} \frac{dz}{(1-\varkappa^2 z^2)^2\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{dh}{(R^2-h^2)\sqrt{H}} = \frac{1}{R^2 h_2} \int_{z_u}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} +$$

$$+ \frac{h_1^2}{R^2 h_2 (R^2-h_1^2)} \int_{z_u}^{1} \frac{dz}{\left(1-\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2} z^2\right)\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Setzt man nun noch $z = \sin\varphi$, $\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi} = \Delta(\varphi)$, so gehen die Grenzen über in:

$$\varphi_u = \arcsin z_u = \arcsin \sqrt{\frac{(a+\delta)\{R^2-(a-\delta)^2\}}{2a(R^2-a^2+\delta^2)}}$$

und

$$\varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

und man hat:

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{H}} = \frac{1}{h_2} \int_{\varphi_u}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{h^2 dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_1^2}{h_2} \int_{\varphi_u}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-\varkappa^2 \sin^2\varphi)\Delta\varphi}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{h^4 dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_1^4}{h_2} \int_{\varphi_u}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-\varkappa^2 \sin^2 \varphi)^2 \Delta(\varphi)}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{dh}{(R^2-h^2)\sqrt{H}} = \frac{1}{R^2 h^2} \int_{\varphi_u}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} +$$

$$+ \frac{h_1^2}{R^2 h_2 (R^2-h_1^2)} \int_{\varphi_u}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1-\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2}\sin^2\varphi\right)\Delta(\varphi)}.$$

Nachdem nun allgemein:

$$\int_{\varphi_u}^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\varphi_u}$$

ist, so drückt sich Ω_2 durch vollständige und unvollständige elliptische Integrale erster und dritter Art der Legendre'schen Normalform aus. Vermöge einer bekannten Reduktionsformel aus der Theorie der elliptischen Integrale hat man noch:

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\varkappa^2 \sin^2 \varphi)^2 \Delta(\varphi)} = -\frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi \Delta(\varphi)}{3(1-\varkappa^2)(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)^2} -$$

$$-\frac{1}{3(1-\varkappa^2)} \int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{2(2-\varkappa^2)}{3(1-\varkappa^2)} \int \frac{d\varphi}{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}.$$

Somit reduzieren sich die vier fraglichen Integrale schließlich auf die Ausdrücke:

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{H}} = \frac{1}{h_2} \left\{F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\varkappa, \varphi_u)\right\}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{h^2 dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_1^2}{h_2} \left\{\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0(\varkappa, -\varkappa^2, \varphi_u)\right\}$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{h^4 dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_1^4}{h_2} \left[-\left|\frac{\varkappa^2 \sin\varphi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{3(1-\varkappa^2)(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)^2}\right|_{\varphi_u}^{\frac{\pi}{2}} -\right.$$

$$-\frac{1}{3(1-\varkappa^2)}\left\{F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\varkappa, \varphi_u)\right\} +$$

$$\left. + \frac{2(2-\varkappa^2)}{3(1-\varkappa^2)}\left\{\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0(\varkappa, -\varkappa^2, \varphi_u)\right\}\right]$$

$$\int_{h_u}^{h_0} \frac{dh}{(R^2-h^2)\sqrt{H}} = \frac{1}{R^2 h_2}\left\{F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\varkappa, \varphi_u)\right\} + \\ + \frac{h_1^2}{R^2 h_2 (R^2-h_1^2)}\left\{\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2}, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2}, \varphi_u\right)\right\}.$$

Hierbei sind mit dem Symbol F, beziehungsweise Π_0 wie üblich das Legendre'sche elliptische Integral erster, beziehungsweise dritter Art bezeichnet.

Führt man die so gewonnenen Ausdrücke für die Integrale in Ω_2 ein und beachtet, daß für $h = h_0$ die beiden integrierten Bestandteile sowie auch $\frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi \Delta(\varphi)}{3(1-\varkappa^2)(1-\varkappa^2 \sin^2\varphi)^2}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verschwinden. So erhält man endlich:

$$\Omega_2 = -2\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}\left\{\delta^2 \arccos\frac{\delta}{a} + \frac{1}{3}(2R^2+a^2-\delta^2)\arcsin\frac{\delta}{a}\right\} + \frac{5h_1^4\varkappa^2 \sin\varphi_u \cos\varphi_u}{9h_2(1-\varkappa^2)\Delta^3(\varphi_u)} + \\ + \left[\frac{4R^2(a^2-\delta^2)}{3h_2} + \frac{3R^4+3(a^2-\delta^2)^2-10R^2a^2-2R^2\delta^2}{3h_2} - \frac{5h_1^4}{9h_2(1-\varkappa^2)}\right]\left\{F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\varkappa, \varphi_u)\right\} + \\ + \left[\frac{10(2-\varkappa^2)h_1^4}{9(1-\varkappa^2)h_2} + \frac{4h_1^2(2a^2-3R^2+4\delta^2)}{3h_2}\right]\left\{\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right)\right\} + \\ + \frac{4R^2h_1^2(a^2-\delta^2)}{3h^2(R^2-h_1^2)}\left\{\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2}, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Die Untersuchung ist somit auf Auswertung des Integrals

$$\int_{\delta}^{R+\delta} (\Omega_1 + \Omega_2) a \, da$$

zurückgeführt, wobei natürlich eine Untersuchung vorangehen müßte, ob die für Ω_1 und Ω_2 gefundenen Funktionsformen tatsächlich auch für den in Betracht kommenden Bereich von $\delta \leqq a \leqq R + \delta$ überall den unwirksamen Raum darstellen.

Ein Blick auf den für Ω_2 gefundenen Ausdruck zeigt, daß eine Durchführung der Integration wenig aussichtsreich wäre, da sich ja diese Größe in sehr komplizierter Weise durch vollständige und unvollständige elliptische Integrale erster und dritter Art ausdrückt. Andrerseits ist, wie schon eine oberflächliche Überlegung an der Hand der Fig. 1 lehrt, der Einfluß von Ω_2 auf die Summe $\Omega_1 + \Omega_2$ nur ein sehr kleiner, und zwar ceteris paribus um so kleiner, je kleiner δ ist. Es ist ja Ω_2 offenbar nur ein kleiner Bruchteil des Zylinders

$$2\delta^2\pi \left(\sqrt{R^2-(a-\delta)^2} - \sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}\right).$$

Nehmen wir nun $R = 4\,cm$ (range der α-Strahlen) und $\delta = 1\,cm$, so haben wir den Fall eines relativ sehr großen δ, d. h. den Fall, wo sich Ω_2, falls es von Einfluß wäre, sehr bemerkbar machen müßte; wählen wir ferner eine mittlere Lage der Partikel gegen den zylindrischen Stab, also $a = 2\,cm$, so erhalten wir

$$\Omega_2 = \varepsilon \,.\, 1 \cdot 68013\,cm^3,$$

wobei ε ein kleiner echter Bruch ist. Unter den gleichen Annahmen erhält man:

$$\Omega_1 = 39 \cdot 11159\,cm^3.$$

Also es ist, wie eine nur oberflächliche Schätzung zeigt, selbst in dem ungünstigen Falle eines relativ großen δ der Einfluß von Ω_2 auf die Summe $\Omega_1 + \Omega_2$ nur ein kleiner; denn nachdem ε jedenfalls kleiner als $^1/_2$ ist, so liegt dieser Einfluß noch unter $2\,^0/_0$.

Nachdem aber die Frage nach dem Einfluß von Ω_2 für die gegenwärtige Untersuchung von großem Werte ist, so wollen wir uns nicht mit dieser oberflächlichen Untersuchung

begnügen, sondern Ω_2 für den eben postulierten Spezialfall $R = 4\,cm$, $a = 2\,cm$, $\delta = 1\,cm$, genau berechnen.

Wir erhalten in diesem Falle:

$$\Omega_2 = -44\cdot66269 + 12\cdot04929\left\{F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\varkappa, \varphi_u\right)\right\} -$$
$$-42\cdot57413\left\{\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \varphi_u\right)\right\} +$$
$$+12\cdot85257\left\{\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2}, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2\varkappa^2}{R^2-h_1^2}, \varphi_u\right)\right\}.$$

Hierbei handelt es sich zunächst um Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals erster Art:

$$F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) = K,$$

wobei der Modul $\varkappa = 0\cdot7302969$ ist.

Am besten ist es, hierzu die bekannte rasch konvergierende Entwicklung aus der Theorie der elliptischen Funktionen zu benützen:

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^2.$$

Hierbei ist:

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + \ldots$$

und

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\varkappa'}}{1+\sqrt{\varkappa'}} \quad \text{und} \quad \varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}.$$

Man findet auf diese Art:

$$K = 1\cdot88339.$$

Das unvollständige Integral $F(\varkappa, \varphi_u)$ mit dem gleichen Modul $\varkappa = 0\cdot7302969$ und der Amplitude $\varphi_u = 68°\,28'\,31\cdot7''$ berechnet sich am einfachsten nach der Methode der wachsenden Moduln und abnehmenden Amplituden, die sich bekanntlich auf die Landen'sche Substitution gründet; man hat dann:

$$F(\varkappa, \varphi_u) = l\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)\sqrt{\frac{\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\ldots}{\varkappa}},$$

wobei:

$$\varkappa_1 = \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa},\ \varkappa_2 = \frac{2\sqrt{\varkappa_1}}{1+\varkappa_1}, \ldots \text{ und } \lim \varkappa_n = 1$$

ist. Ferner:

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi_u) = \varkappa \sin\varphi_u,\ \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \varkappa_1 \sin\varphi_1 \ldots \lim \varphi_n = \Phi.$$

Man erhält auf diese Art in unserem Falle:

$$F(\varkappa, \varphi_u) = 1\cdot 34692$$

und somit:

$$F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) - F(\varkappa, \varphi_u) = 0\cdot 53647.$$

Weniger einfach gestaltet sich die Berechnung der elliptischen Integrale dritter Art. Falls man nicht zur Auswertung mittels mechanischer Quadratur seine Zuflucht nehmen will, ist es am besten, diese Integrale auf elliptische Funktionen zurückzuführen. Bezeichnet man mit $\varkappa$, λ, φ, Modul, Parameter und Amplitude, so hat man bekanntlich ganz allgemein:

$$\Pi_0(\varkappa, \lambda, \varphi) = u + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} c}{\Delta \operatorname{am} c} \Pi(u, c).$$

Hierbei ist der Kürze halber:

$$u = F(\varkappa, \varphi), \quad c = \int_0^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\varkappa}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

gesetzt, während tg am c und Δ am c die bekannten Amplitudenfunktionen sind und $\Pi(u, c)$ die elliptische Funktion dritter Art, welche definiert ist durch

$$\Pi(u, c) = u \frac{\Theta'(c)}{\Theta(c)} + \frac{1}{2} l \frac{\Theta(u-c)}{\Theta(u+c)},$$

Hierbei ist:

$$\Theta(c) = 1 - 2q \cos\frac{\pi c}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi c}{K} - 2q^9 \cos\frac{3\pi c}{K} + \ldots$$

die bekannte Jacobische Transzendente; q und K haben die gleiche Bedeutung wie oben bei der Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals erster Art.

Die Berechnung von $\Pi_0(\varkappa, -\varkappa^2, \varphi_u)$ stellt sich sonach als Spezialfall des allgemeinen Falles für $\lambda = -\varkappa^2, \varphi = \varphi_u$ heraus; ferner ergibt sich:

$$c = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = K.$$

Es nimmt also auch c den Wert K an und wir haben zunächst:

$$\sin \operatorname{am} K = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Delta \operatorname{am} K = \sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} K} = \sqrt{1-\varkappa^2} = \varkappa'$$

$$\cos \operatorname{am} K = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Man findet ferner leicht:

$$\Theta'(K) = \frac{2\pi q}{K}\sin\pi - \frac{4\pi q^4}{K}\sin 2\pi + \frac{6\pi q^9}{K}\sin 3\pi - \ldots = 0.$$

Des weiteren ist $\Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ und da die Transzendente Θ die reelle Periode $2K$ besitzt:

$$\Theta(u-K) = \Theta(u+K), \quad \text{somit} \quad l\frac{\Theta(u-K)}{\Theta(u+K)} = 0$$

und demzufolge:

$$\Pi(u, K) = 0.$$

Wir erhalten sonach zunächst:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) = u + \frac{1}{\varkappa'}\,\frac{\Pi(u,K)}{\cos \operatorname{am} K}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\Pi(u,K)}{\cos \operatorname{am} K} = \frac{0}{0}.$$

Es muß also zunächst dieser Ausdruck berechnet werden, d. h. man hat zu berechnen:

$$\frac{\Pi(u,K)}{\cos \operatorname{am} K} = \left(\frac{\frac{d}{dc}\Pi(u,c)}{\frac{d}{dc}\cos \operatorname{am} c}\right)_{c=K}.$$

Man findet leicht:

$$\left(\frac{d}{dc}\Pi(u,c)\right)_{c=K} = u\,\frac{\Theta''(K)}{\Theta(K)} - \frac{\Theta'(u-K)}{\Theta(u+K)}$$

$$= -u\sqrt{\frac{2\pi^5}{K^5}}(q+4q^4+9q^9+\ldots) - \frac{\Theta'(u-K)}{\Theta(u+K)}.$$

Ferner ist:

$$\left(\frac{d}{dc}\cos\operatorname{am} c\right)_{c=K} = -\sin\operatorname{am} K\Delta\operatorname{am} K = -\varkappa',$$

somit also:

$$\left(\frac{\frac{d}{dc}\Pi(u,c)}{\frac{d}{dc}\cos\operatorname{am} c}\right)_{c=K} = \frac{u}{\varkappa'}\sqrt{\frac{2\pi^5}{K^5}}(q+4q^4+9q^9+\ldots) + \frac{1}{\varkappa'}\,\frac{\Theta'(u-K)}{\Theta(u+K)}$$

und somit endlich:

$$\Pi_0(\varkappa, -\varkappa^2, \varphi_u) = u\left\{1 + \frac{1}{\varkappa'^2}\sqrt{\frac{2\pi^5}{K^5}}(q+4q^4+9q^9+\ldots)\right\} + $$

$$+ \frac{1}{\varkappa'^2}\,\frac{\Theta'(u-K)}{\Theta(u+K)}.$$

Um nun noch $\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right)$ zu berechnen, haben wir überall statt u K zu schreiben und zu bedenken, daß $\Theta'(o) = 0$ ist; wir erhalten dann:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) = K\left\{1 + \frac{1}{\varkappa'^2}\sqrt{\frac{2\pi^5}{K^5}}(q+4q^4+9q^9+\ldots)\right\}$$

und somit endlich:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0(\varkappa, -\varkappa^2, \varphi_u) =$$

$$= (K-u)\left\{1 + \frac{1}{\varkappa'^2}\sqrt{\frac{2\pi^5}{K^5}}(q+4q^4+9q^9+\ldots)\right\} - \frac{1}{\varkappa'^2}\,\frac{\Theta'(u-K)}{\Theta(u+K)}$$

$$= 1{\cdot}09555.$$

Die Berechnung von:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \varphi_\varkappa\right)$$

bildet den Spezialfall $\lambda = -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2 = -\frac{R^2}{(a+\delta)^2}\varkappa^2$ des allgemeinen Falles; hier ist:

$$c = \int_0^{\frac{\sqrt{-\lambda}}{\varkappa}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = \int_0^{\frac{R}{a+\delta}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} =$$

$$= \int_0^{4/3} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

d. h. es wird c durch ein Integral dargestellt, welches der Form nach elliptisch erster Art, dessen obere Grenze aber größer als 1 ist. Hier führt die Substitution $\zeta = {}^3/_4$ an der oberen Grenze zum Ziele; man erhält zunächst:

$$c = \int_0^{\frac{1}{\zeta}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} +$$

$$+ \int_1^{\frac{1}{\zeta}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = K + \int_1^{\frac{1}{\zeta}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

In dem letzten Integral setzen wir nun:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa'^2 x^2}},$$

wobei wiederum $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$ ist.

Wir erhalten dann:

$$c = K + \frac{1}{i}\int_0^{\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\varkappa'}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2 x^2)}} = K - ib,$$

wobei

$$b = \int_0^{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\varkappa'}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2 x^2)}} = \int_0^{0\cdot 9682457} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2 x^2)}} =$$
$$= F(0\cdot 6831300,\ 75^\circ\, 31'\, 20\cdot 9'') = 1\cdot 48393$$

ist. Führt man den so gefundenen Wert von c in die allgemeine Formel ein, so erhält man zunächst für:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} c}{\Delta \operatorname{am} c}\right)_{c = Ki - b} = -\frac{i \Delta \operatorname{am}(b, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(b, \varkappa') \cos \operatorname{am}(b, \varkappa')},$$

ferner ist:

$$\Pi(u, K - ib) = -\Pi(u, K + ib).$$

Somit erhalten wir also:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2 - h_1^2}\varkappa^2, \varphi_u\right) =$$
$$= u + \frac{\Delta \operatorname{am}(b, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(b, \varkappa') \cos \operatorname{am}(b, \varkappa')}\, i\,\Pi(u, K + ib).$$

Nun folgt in Rücksicht auf bekannte Eigenschaften der elliptischen Funktion dritter Art:

$$i\,\Pi(u, K + ib) =$$
$$= u\left\{Z(b, \varkappa') + \frac{\pi b}{2KK'} - \frac{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(b, \varkappa') \cos \operatorname{am}(b, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(b, \varkappa')}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\, l\, \frac{\Theta(u - K + ib)}{\Theta(u + K + ib)}.$$

Hierbei ist K' das vollständige elliptische Integral erster Art für den Modul $\varkappa'$ und die Transzendente Z definiert durch:

$$Z(u, \varkappa) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\}.$$

In unserem Falle ist Z selbstverständlich für das Argument b und den Modul $\varkappa'$ zu berechnen; das letztere bedeutet, daß K in K' übergeht und q in den analogen Wert q'. Desgleichen ist auch bei den vorkommenden Amplitudenfunktionen darauf Rücksicht zu nehmen, daß der Modul $\varkappa'$ ist.

Man erhält sohin:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \varphi_u\right) = u + \frac{u\Delta \operatorname{am}(b,\varkappa')}{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')}\cdot$$

$$\cdot\left\{Z(b,\varkappa') + \frac{\pi b}{2KK'} - \frac{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')}{\Delta\operatorname{am}(b,\varkappa')}\right\} +$$

$$+\frac{i}{2}\, l\, \frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u+K+ib)}\, \frac{\Delta\operatorname{am}(b,\varkappa')}{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')}\,.$$

Für den Fall des vollständigen Integrals dritter Art haben wir in diesem Ausdruck $u = K$ zu setzen; mit Rücksicht darauf, daß Θ die Periode $2K$ besitzt und eine gerade Funktion ist, haben wir dann:

$$\frac{\Theta(-ib)}{\Theta(2K+ib)} = \frac{\Theta(ib)}{\Theta(ib)} = 1, \quad \text{also} \quad \left(l\,\frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u+K+ib)}\right)_{u=K} = 0$$

und erhalten so:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) = K + \frac{K\Delta\operatorname{am}(b,\varkappa')}{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')}\cdot$$

$$\cdot\left\{Z(b.\varkappa') + \frac{\pi b}{2KK'} - \frac{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')}{(\Delta\operatorname{am} b,\varkappa')}\right\}$$

und somit schließlich:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \varphi_u\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\, l\,\frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u+K+ib)}\,\frac{\Delta\operatorname{am}(b,\varkappa')}{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')} +$$

$$+(K-u)\left\{1 + \frac{\Delta\operatorname{am}(b,\varkappa')}{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[Z(b,\varkappa') + \frac{\pi b}{2KK'} - \frac{\varkappa'^2 \sin\operatorname{am}(b,\varkappa')\cos\operatorname{am}(b,\varkappa')}{\Delta\operatorname{am}(b,\varkappa')}\right]\right\}.$$

Was nun zunächst den imaginären Teil dieses Ausdruckes anlangt, so erhält man, wenn man die Entwicklung tatsächlich durchführt:

$$\Theta(u-K-ib) = \alpha + i\beta \quad \text{und} \quad \Theta(u+K+ib) = \alpha - i\beta,$$

wobei sich ergibt:

$$\alpha = 1+2q\cos\frac{\pi u}{K}\operatorname{Cos}\frac{\pi b}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}\operatorname{Cos}\frac{2\pi b}{K}+\dots$$

$$\beta = 2q\sin\frac{\pi u}{K}\operatorname{Sin}\frac{\pi b}{K}+2q^4\sin\frac{2\pi u}{K}\operatorname{Sin}\frac{2\pi b}{K}+\dots,$$

und zwar müssen diese beiden Reihen, in denen Sin und Cos den hyperbolischen Sinus, beziehungsweise Cosinus bedeuten, konvergieren, weil Θ für jedes komplexe Argument definiert ist, sofern nur q ein reeller echter Bruch bleibt.

Man erhält demnach:

$$-\frac{i}{2}\,l\,\frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u+K+ib)} = -\frac{i}{2}\,l\cdot\frac{1+i\frac{\beta}{\alpha}}{1-i\frac{\beta}{\alpha}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}\cdot$$

Alle übrigen Ausdrücke sind leicht zu berechnen, da die Theorie der elliptischen Punktionen für sie sehr bequeme, rasch konvergierende Entwicklungen liefert. Man erhält schließlich:

$$\Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0\left(\varkappa, -\frac{R^2}{R^2-h_1^2}\varkappa^2, \varphi_u\right) = 6\cdot61765.$$

Nunmehr ist man in der Lage, Ω_2 für den betrachteten Spezialfall zu berechnen; man erhält:

$$\Omega_2 = 0\cdot2131\ cm^3.$$

In dem gleichen Spezialfall aber haben wir für Ω_2 erhalten:

$$\Omega_1 = 39\cdot1116.$$

Man sieht demnach, daß der Einfluß von Ω_2 selbst im Falle eines relativ großen δ nur ein sehr kleiner ist (zirka $0\cdot5\,^0/_0$), und dieser Einfluß wird natürlich um so kleiner, je kleiner wir δ wählen. Kleine δ, von nur wenigen Millimeter Durchmesser, sind aber in der Praxis die Regel.

Man wird daher im allgemeinen Ω_2 gegen Ω_1 vernachlässigen dürfen und hierdurch für ω_2 einen Ausdruck erhalten, der in den meisten Fällen — besonders bei kleinem δ — eine hinreichende Genauigkeit verbürgt.

Zunächst wollen wir jedoch die Rechnung noch in voller Allgemeinheit weiterführen.

a bewegt sich innerhalb der Grenzen δ und $R+\delta$; es ist somit zunächst zu untersuchen, ob der unwirksame Raum, soweit er überhaupt durch Ω_1 gegeben ist, auch tatsächlich durch die für Ω_1 aufgestellte Funktion dargestellt wird. Man sieht unmittelbar ein, daß dies nur bis zu demjenigen Werte von a der Fall ist, für welchen $\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}=0$ wird, d. h. bis zu dem Werte $a=\sqrt{R^2+\delta^2}$. Von da an ist der unwirksame Raum wiederum lediglich durch das zylinderhufartige Gebilde repräsentiert, welches bei der Berechnung von Ω_2 in Betracht kam. (Wie man sich leicht überzeugen kann, gehen ja tatsächlich an der Stelle $a=\sqrt{R^2+\delta^2}$ $\varphi(h)$ und $f(h)$ für $h=0$ ineinander über.) Nur die untere Grenze ist natürlich jetzt eine andere, nämlich $h=0$. Man findet für dieses Gebilde durch ganz analoge Betrachtungen:

$$\Omega_1'=4\int_0^{\sqrt{R^2-(a-\delta)^2}}\varphi(h)\,dh.$$

Auch die weitere Behandlung des Integrals wird ganz analog durchgeführt. Nur verschwinden jetzt bei Anwendung der partiellen Integration die integrierten Bestandteile sowohl an der unteren Grenze $h=0$ als auch an der oberen Grenze $h=h_0=\sqrt{R^2-(a-\delta)^2}$; wir erhalten:

$$\Omega_1'=\frac{5}{3}\int_0^{h_0}\frac{h^4\,dh}{\sqrt{H}}+\frac{4(2a^2-3R^2+4\delta^2)}{3}\int_0^{h}\frac{h^2\,dh}{\sqrt{H}}+$$
$$+\frac{3R^4+3(a^2-\delta^2)-10R^2a^2-2R^2\delta^2}{3}\int_0^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{H}}+$$
$$+\frac{4R^4(a^2-\delta^2)}{3}\int_0^{h_0}\frac{dh}{(R^2-h^2)\sqrt{H}}.$$

Hierbei ist wiederum:

$$\sqrt{H}=\sqrt{(h^2-h_1^2)(h_2^2-h^2)}$$

und

$$h_1=+\sqrt{R^2-(a+\delta)^2},\quad h_2=+\sqrt{R^2-(a-\delta)^2}=h_0.$$

Nun ist aber in dem in Betracht kommenden Intervall $\sqrt{R^2+\delta^2} \leqq a \leqq R+\delta$ h_1 offenbar imaginär, also $h_1 = i\chi_1$, wobei $\chi_1 = \sqrt{(a+\delta)^2-R^2}$ ist: und zwar ist dies schon von dem Werte $a = R-\delta$ angefangen der Fall.

Demzufolge machen wir die Substitution:

$$h = h_2\sqrt{1-z^2} \quad \text{und} \quad \varkappa = \frac{h_2}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}}\,.$$

Die Grenzen gehen hierbei über in:

$$z_u = 1 \quad \text{und} \quad z_0 = 0.$$

Unsere Integrale nehmen dann die Form an:

$$\int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{H}} = -\frac{1}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$\int_0^{h_0} \frac{h^2\,dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_2^2}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} -$$

$$- \frac{h_2^2}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$\int_0^{h_0} \frac{h^4\,dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_2^4}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} -$$

$$- \frac{2h_2^4}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} +$$

$$+ \frac{h_2^4}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_0^1 \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

$$\int_0^{h_0} \frac{dh}{(R^2-h^2)\sqrt{H}} =$$

$$= \frac{1}{(R^2-h_2^2)\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \int_0^1 \frac{dz}{\left(1+\frac{h_2^2}{R^2-h_2^2}z^2\right)\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}\,.$$

Setzt man nun wiederum $z = \sin\varphi$, so erhält man teils direkt, teils unter Benutzung bekannter Rekkursionsformeln:

$$\int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{H}} = \frac{1}{\sqrt{\chi_1^2+h_3^2}} F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^{h_0} \frac{h^2\,dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_2^2}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \left\{\frac{\varkappa^2-1}{\varkappa^2} F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\varkappa^2} E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\int_0^{h_0} \frac{h^4\,dh}{\sqrt{H}} = \frac{h_2^4}{\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \left\{\frac{3\varkappa^4-5\varkappa^2+2}{3\varkappa^4} F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2(2\varkappa^2-1)}{3\varkappa^4} E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\int_0^{h_0} \frac{dh}{(R^2-h^2)\sqrt{H}} = \frac{1}{(R^2-h^2)\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \Pi_0\left(\varkappa, \frac{h_2^2}{R^2-h_2^2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Setzt man diese Werte für die Integrale ein, so erhält man nach einigen Zusammenfassungen schließlich:

$$\Omega_1' = \frac{1}{3\varkappa^4\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \left\{\frac{5h_2^4(3\varkappa^4-5\varkappa^2+2)}{3} + \right.$$
$$\left. +4h_2^2\varkappa^2(\varkappa^2-1)(2a^2-3R^2+4\delta^2)+\varkappa^4(3R^4+3(a^2-\delta^2)^2-10R^2a^2-2R^2\delta^2)\right\} F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ \frac{2h_2^2}{3\varkappa^4\sqrt{\chi_1^2-h_2^2}} \left\{\frac{5h_2^2(2\varkappa^2-1)}{3} + 2\varkappa^2(2a^2-3R^2+4\delta^2)\right\} E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4R^4(a^2-\delta^2)}{3(R^2-h_2^2)\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} \Pi_0\left(\varkappa, \frac{h_2^2}{R^2-h_2^2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Es drückt sich also Ω_1' durch vollständige elliptische Integrale aller drei Arten aus.

Wir haben bereits bemerkt, daß für das Intervall $R-\delta$ bis $R+\delta$ $h_1 = i\chi_1$, also imaginär ist; es gilt demnach für dieses Intervall auch der für Ω_2 aufgestellte Ausdruck nicht mehr, sondern ist durch einen Ausdruck Ω_2' zu ersetzen, der durch analoge Betrachtungen gewonnen wird wie der Ausdruck für Ω_1'. Es ändert sich an demselben gar nichts, als daß die obere Grenze der betreffenden auf die Legendre'sche Normalform gebrachten elliptischen Integrale nicht mehr $\frac{\pi}{2}$, sondern $\varphi_0 = \sqrt{\frac{2\delta(a-\delta)}{R^2-(a-\delta)^2}}$ ist, d. h. es drückt sich Ω_2' durch unvollständige elliptische Integrale aller drei Arten aus; auch verschwinden natürlich die integrierten Bestandteile nicht mehr an beiden Grenzen.

Man findet:

$$\begin{aligned}\Omega_2' = & -2\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}\left\{\delta^2 \arccos\frac{\delta}{a} + \frac{1}{3}(2R^2+a^2-\delta^2)\arcsin\frac{\delta}{a}\right\} + \frac{5h_2^4 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \Delta(\varphi_0)}{9\varkappa^2\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}} + \\ & + \frac{1}{3\varkappa^4\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}}\left\{\frac{5h_2^4(3\varkappa^4-5\varkappa^2+2)}{3} + 4h_2^2\varkappa^2(\varkappa^2-1)(2a^2-3R^2+4\delta^2) + \right. \\ & \left. + \varkappa^4(3R^4+3(a^2-\delta^2)^2-10R^2a^2-2R^2\delta^2)\right\} F(\varkappa, \varphi_0) + \\ & + \frac{1}{3\varkappa^4\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}}\left\{\frac{5h_2^2(2\varkappa^2-1)}{3} + 2\varkappa^2(2a^2-3R^2+4\delta^2)\right\} E(\varkappa, \varphi_0) + \\ & + \frac{4R^4(a^2-\delta^2)}{3(R^2-h_2^2)\sqrt{\chi_1^2+h_2^2}}\, \Pi_0\left(\varkappa, \frac{h_2^2}{R^2-h_2^2}, \varphi_0\right).\end{aligned}$$

Entsprechend den so gefundenen verschiedenen Funktionsformen zur Darstellung des unwirksamen Raumes ergibt sich also eine Teilung des Integrationsintervalles bezüglich a in die drei Teilintervalle:

$$\delta \text{ bis } R-\delta, \quad R-\delta \text{ bis } \sqrt{R^2+\delta^2}, \quad \sqrt{R^2+\delta^2} \text{ bis } R+\delta,$$

innerhalb welcher der unwirksame Anteil der Wirkungssphäre einer Partikel dargestellt wird durch die Funktionen:

$$\Omega_1+\Omega_2, \quad \Omega_1+\Omega_2', \quad \Omega_1',$$

wobei wir die genannten Funktionen noch in voller Allgemeinheit ableiten konnten.

Die allgemeine Lösung des gestellten Problems ist demnach zurückgeführt auf die Berechnung des Integrals:

$$\omega_2 = 2\pi\rho l \left\{ \int_\delta^{R-\delta} (\Omega_1+\Omega_2)\,a\,da + \int_{R-\delta}^{\sqrt{R^2+\delta^2}} (\Omega_1+\Omega_2')\,a\,da + \right.$$
$$\left. + \int_{\sqrt{R^2+\delta^2}}^{R+\delta} \Omega_1'\,a\,da \right\}.$$

Nachdem sich nun die Funktionen Ω_1', Ω_2 und Ω_2' durch vollständige und unvollständige elliptische Integrale aller drei Arten ausdrücken, erscheint eine Durchführung der Integration in geschlossener Form wohl als undurchführbar. Eventuell könnte man zu Reihenentwicklungen für die auftretenden elliptischen Integrale seine Zuflucht nehmen; allein wenn man bedenkt, in welch komplizierter Weise die Größen h_1, χ, h_2 und $\varkappa$ zum Teile von a abhängen, so erscheint auch dieser Weg als wenig aussichtsreich. Zum mindesten steht der erzielte Gewinn an Genauigkeit im Endresultat in gar keinem Verhältnis zu der aufgewandten Mühe und Arbeit. Zum Glück ist das alles aber auch gar nicht nötig, um eine praktisch brauchbare Formel zu erhalten. Wir haben ja gesehen, daß selbst bei einem relativ großen δ Ω_2 im Mittel gegen Ω_1 vernachlässigt werden kann; dasselbe gilt natürlich auch für Ω_2' und Ω_1', wie man mittels Durchrechnung der betreffenden Spezialfälle nachweisen könnte.

Wir wollen demgemäß in der Weiterführung der Untersuchung Ω_1', Ω_2 und Ω_2' gegen Ω_1 vernachlässigen. Nichtsdesto-

weniger war die Ableitung der allgemeinen Form dieser Funktionen keine unnötige Arbeit, da uns die Kenntnis dieser Ausdrücke in die Lage setzt, wenigstens angenähert Korrektionsglieder zu berechnen, beziehungsweise uns ein Urteil zu bilden über die Größe des begangenen Fehlers im Endresultat. Das wollen wir zum Schlusse an dem Beispiel von Ω_2 auch durchführen.

Nach Durchführung der besprochenen Vernachlässigungen reduziert sich ω_2 auf:

$$\omega_2 = 2\pi\rho l \int_\delta^{\sqrt{R^2+\delta^2}} \Omega_1\, a\, da = 2\pi\rho l \left\{ 2\int_\delta^{\sqrt{R^2+\delta^2}} \left(R^2 \sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)} - \frac{1}{3}\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)^3} \right) \arcsin\frac{\delta}{a}\, a\, da - \right.$$

$$\left. -2\delta \int_\delta^{\sqrt{R^2+\delta^2}} \sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}\sqrt{a^2-\delta^2}\, a\, da + 2\delta^2 \int_\delta^{\sqrt{R^2+\delta^2}} \sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)}\, \arccos\frac{\delta}{a}\, a\, da \right\}.$$

Setzt man nun $\sqrt{R^2-(a^2-\delta^2)} = x$, so gehen die Grenzen über in $x_u = R$ und $x_0 = 0$ und die einzelnen Integrale in:

$$2\int \left(\frac{x^4}{3} - R^2 x^2 \right) \arcsin\frac{\delta}{\sqrt{R^2+\delta^2-x^2}}\, dx = \frac{2}{15}(x^5 - 5R^2x^3) \arcsin\frac{\delta}{\sqrt{R^2+\delta^2-x^2}} -$$

$$- \frac{\delta}{60}(2x^3 + 2R^2x + 4(\delta^2-4R^2)x)\sqrt{R^2-x^2} + \frac{\delta}{60}[3R^4 + 4R^2(\delta^2-4R^2) + 8(R^2+\delta^2)(\delta^2-4R^2)] \arcsin\frac{x}{R} -$$

$$- \frac{2(R^2+\delta^2)(\delta^2-4R^2)}{15\sqrt{R^2+\delta^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\delta}{\sqrt{(R^2+\delta^2)(R^2-x^2)}}$$

$$2\delta \int x^2 \sqrt{R^2-x^2}\, dx = \frac{\delta(2x^3-R^2x)}{4}\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^4\delta}{4} \arcsin\frac{x}{R}$$

$$-2\delta^2\int x^2 \arccos\frac{\delta}{\sqrt{R^2+\delta^2-x^2}}\,dx = -\frac{2\delta^2 x^3}{3}\arccos\frac{\delta}{\sqrt{R^2+\delta^2-x^2}} - \frac{\delta^3 x\sqrt{R^2-x^2}}{3} + $$
$$+\frac{\delta^3(3R^2+2\delta^2)}{3}\arcsin\frac{x}{R} - \frac{2\delta^2(R^2+\delta^2)^2}{3\sqrt{R^2+\delta^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\delta x}{\sqrt{(R^2+\delta^2)(R^2-x^2)}}$$

und man erhält schließlich zusammenfassend:

$$\int_\delta^{\sqrt{R^2+\delta^2}}\Omega_1\, a\,da = \Big|\frac{\delta}{30}(14x^3-R^2x-12\delta^2x)\sqrt{R^2-x^2}+\frac{\delta}{30}(-15R^4+20R^2\delta^2+24\delta^4)\arcsin\frac{x}{R}+$$
$$+\frac{2(R^2+\delta^2)^2(4R^2-6\delta^2)}{15\sqrt{R^2+\delta^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\delta x}{\sqrt{(R^2+\delta^2)(R^2-x^2)}}+\frac{2}{15}(x^5-5R^2x^3)\arcsin\frac{\delta}{\sqrt{R^2+\delta^2-x^2}}-$$
$$-\frac{2\delta^2x^3}{3}\arccos\frac{\delta}{\sqrt{R^2+\delta^2-x^2}}\Big|_R^0.$$

Setzt man die Grenzen ein und zieht zusammen, so hat man endlich:

$$\omega_2 = \frac{\pi^2\rho l}{30}\{\delta(15R^4-20R^2\delta^2-24\delta^4)+16R^5-4(R^2+\delta^2)^{3/2}(4R^2-6\delta^2)\},$$

beziehungsweise:

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{1}{40R^3(R+\delta)^2}\{\delta(15R^4-20R^2\delta^2-24\delta^4)+16R^5-4(R^2+\delta^2)^{3/2}(4R^2-6\delta^2)\}.$$

Ist δ gegenüber R sehr klein, so kann man schließlich in dem für $\frac{\omega_2}{\omega}$ gefundenen Ausdruck die Glieder von der Ordnung $\frac{\delta^2}{R^2}$ vernachlässigen und erhält so einen sehr einfachen Ausdruck:

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{3\delta R}{8(R+\delta)^2}.$$

Wir wollen nunmehr die gewonnenen Formeln auf zwei Spezialfälle anwenden. Wir setzen wiederum $R = 4\,cm$ und zunächst $\delta = 1\,cm$; die beiden für $\frac{\omega_2}{\omega}$ gefundenen Formeln ergeben dann:

$$\frac{\omega_2}{\omega} = 0\cdot05654 \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2}{\omega} = 0\cdot06.$$

Selbst in dem Falle eines relativ schon recht großen δ gibt also die abgekürzte Formel das Resultat immerhin noch auf zirka 6% richtig an.

Nunmehr setzen wir $R = 4\,cm$ und $\delta = 0\cdot1\,cm$, dann ergeben die beiden Formeln:

$$\frac{\omega_2}{\omega} = 0\cdot008916 \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2}{\omega} = 0\cdot008923.$$

In diesem Falle, wo es sich also um ein kleines δ handelt, gibt die abgekürzte Formel das Resultat bis auf 0·07% richtig wieder. Daraus folgt, daß man sich bei kleinem δ unbedenklich der zweiten, abgekürzten Formel bedienen kann, während bei großem δ diese Formel das Resultat wenigstens der Größenordnung nach noch richtig wiedergibt.

Zum Schlusse wollen wir uns noch ein Urteil bilden bezüglich der Größe des Fehlers, der durch die Vernachlässigung von Ω_1', Ω_2 und Ω_2' begangen wurde.

Wir haben für den Spezialfall $R = 4\,cm$, $\delta = 1\,cm$ den Wert des Ω_2 für die mittlere Lage $a = \frac{R}{2} = 2$ numerisch berechnet; wenn wir nun diesen Mittelwert als für alle Werte des a gültig

annehmen, so wird der im ersten Integral der allgemeinen Lösung vernachlässigte Teil dargestellt werden durch:

$$0\cdot 2131 \int_{\delta}^{R-\delta} a\,da = 0\cdot 852.$$

Dieses also ist — wenigstens der Größenordnung nach — der Fehler, der in $\int_{\delta}^{R-\delta} (\Omega_1 + \Omega_2)\,a\,da$ durch Vernachlässigung des Ω_2 begangen wurde. Nun ist aber:

$$\int_{\delta}^{R-\delta} \Omega_1\,a\,da = 189\cdot 46.$$

Somit beträgt der durch Vernachlässigung von Ω_2 gemachte Fehler zirka $0\cdot 4\,\%$; in einer ähnlichen Größenlage wird sich auch der durch Vernachlässigung von Ω_1' gemachte Fehler bewegen, während der durch Vernachlässigung von Ω_2' begangene Fehler jedenfalls noch kleiner ausfallen dürfte.

Man kann demnach schätzen, daß die erste, ausführliche Formel für $\frac{\omega_2'}{\omega}$ selbst bei relativ sehr großem δ (Größenordnung 1 *cm*), das Resultat bis auf zirka $1\,\%$ richtig angibt, während man sie bei sehr kleinem δ (Größenordnung $0\cdot 1$ *cm*) praktisch als exakt gültig annehmen kann.

Es erübrigt nunmehr noch die Beantwortung der eigentlichen Ausgangsfrage. Wir hatten gefunden, daß durch die Anwesenheit eines zylindrischen Stabes vom Radius δ die Wirkung des aktiven Gases innerhalb des achsengleichen Zylinders vom Radius $R+\delta$ von i auf:

$$i' = \left(1 - \frac{\omega_1'}{\omega} - \frac{\omega_2'}{\omega}\right) i$$

sinkt.

$\frac{\omega_2'}{\omega}$ haben wir für die beiden Werte $\delta = 1$ *cm* und $\delta = 0\cdot 1$ *cm* im ersten Falle bis auf $1\,\%$ genau, im zweiten Falle praktisch vollkommen genau berechnet, und zwar haben wir erhalten:

$$\frac{\omega_2'}{\omega} = 0\cdot 05654 \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2'}{\omega} = 0\cdot 008916.$$

Für $\frac{\omega_1'}{\omega} = \frac{\delta^2}{(R+\delta)^2}$ erhalten wir in diesen beiden Fällen:

$$\frac{\omega_1'}{\omega} = 0\cdot 04 \quad \text{und} \quad \frac{\omega_1'}{\omega} = 0\cdot 0004.$$

Somit ergibt sich in diesen beiden Fällen:

$$i' = 0\cdot 9035\, i \quad \text{und} \quad i' = 0\cdot 9907\, i,$$

d. h. es sinkt die Wirkung innerhalb des Zylinders vom Radius $R+\delta$ (Rangezylinder) im ersten Falle um zirka $10^0/_0$, im zweiten Falle um zirka $1\,^0/_0$.

Über die Beziehung zwischen mittlerer freier molekularer Weglänge und dem Brechungsexponenten eines Gases

von

H. Sirk.

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. Oktober 1908.)

Im Jahre 1872 veröffentlichte Stefan[1] in seiner Arbeit »Über die dynamische Theorie der Diffusion der Gase« eine auf empirischem Wege gefundene Beziehung zwischen freier mittlerer Weglänge der Gasmolekeln L und dem Brechungsexponenten n des betreffenden Gases. Die Ansicht, daß die Molekeln Kugeln aus verdichtetem Äther darstellen, führte ihn zu der Annahme, »daß Gase mit größeren Molekülen das Licht stärker brechen, als Gase mit kleineren Molekülen. Da durch die Größe der Moleküle die mittlere Länge des Weges, den ein Molekül von einem bis zum nächsten Zusammenstoß macht, bestimmt ist, so müssen also die Gase, für welche die mittlere Weglänge einen größeren Wert hat, kleinere Brechungsquotienten besitzen«. Stefan zeigte, daß tatsächlich bei einer Reihe von Gasen einer kleineren, mittleren Weglänge ein größerer Brechungsindex entspricht. Bei sechs verschiedenen Gasen gaben nun die Produkte aus der mittleren Weglänge und dem Überschuß des Brechungsquotienten über die Einheit nahezu eine konstante Zahl, entsprechend dem Gesetz $L(n-1) = \text{konst.}$

E. Lohr[2] entdeckte dieselbe Gesetzmäßigkeit vor kurzem unabhängig von Stefan abermals auf empirischer Grundlage. Er fand so zunächst die für verschiedene Gase gültige Beziehung

1 Diese Sitzungsberichte, Bd. 65 (1872), p. 341.

2 Ebenda, Bd. 116 (1907), p. 1281.

$(n-1)q =$ konst., wo q das für die verschiedenen Gase charakteristische Produkt aus sogenanntem kritischen Druck und Funkenlänge ist. Daraus findet er unter Zuhilfenahme der von Thomson gegebenen Gleichung $\frac{L}{q} =$ konst. ebenfalls die Beziehung $L(n-1) =$ konst.

Die kinetische Gastheorie liefert uns aber die Möglichkeit, auf rechnerischem Wege eine Beziehung zwischen molekularer Weglänge und Brechungsexponenten abzuleiten. Wie schon seit langem bekannt[1], ist die absolute Anzahl der Molekeln im mm^3 Gas

$$N = \frac{1}{320 L^3 x^2}.$$

L bedeutet hier die freie Weglänge in mm und x den Raumerfüllungskoeffizienten, d. h. denjenigen Raumteil des betreffenden Gasvolumens, der wirklich von Materie erfüllt ist, also die Summe der Volumina der in der betreffenden Masse enthaltenen Molekeln, ausgedrückt durch den von der betreffenden Masse eingenommenen Raum.

Nach dem Gesetz von Avogadro ist nun für alle Gase N unter gleichen Bedingungen des Druckes und der Temperatur sehr nahe gleich groß. Es muß daher wie Nernst[2] hervorhebt, L^3x^2 für alle Gase gleich groß sein. Wie Exner[3] zuerst gezeigt hat, kann man unter anderem diese Größe aus dem Brechungsexponenten berechnen unter Zuhilfenahme der Theorie von Clausius-Mosotti über die Konstitution der Dielektrika, welche die Formel $x = \frac{K-1}{K+2}$ als Zusammenhang zwischen Dielektrizitätskonstante K und Raumerfüllungskoeffizienten gibt. Setzt man nach Maxwell $K = n^2$, so erhält man die Formel $x = \frac{n^2-1}{n^2+2}$. Da nun bei Gasen n immer sehr nahe $= 1$ ist, so wird auch sehr nahe $x = \frac{2}{3}(n-1)$. Da L^3x^2 für

---

[1] W. Nernst, Theoretische Chemie, 5. Aufl., p. 429; Vgl. auch H. Sirk, Annalen der Physik, 25, p. 894 (1908).

[2] Vgl. W. Nernst, l. c.

[3] F. Exner, diese Sitzungsberichte, 91, 2, p. 850 (1885).

verschiedene Gase unter gleichen äußeren Bedingungen gleich groß ist, so gilt dasselbe für die Größe $L^{1\cdot 5}x$. Es muß demnach auch unter gleichen äußeren Bedingungen $L^{1\cdot 5}(n-1)$ bei verschiedenen Gasen gleich groß sein. Im folgenden soll nun die Beziehung $L^{1\cdot 5}(n-1) =$ konst. an 32 verschiedenen Gasen geprüft werden.

Auswahl der Werte für L und n.

Für die Bestimmung der Größe L der mittleren freien Weglänge wurden, um die Untersuchung möglichst zu verbreitern und die einzelnen Werte möglichst gut untereinander vergleichbar zu machen, nur aus Transpirationsversuchen berechnete Werte verwendet. Sie wurden für viele Gase aus dem Werke von O. E. Meyer[1] entnommen, wo sie für den Druck von einer Atmosphäre und die Temperatur von 0° C. angeführt sind. Waren dort wie oft zwei verschiedene Beobachtungen angegeben (Messungen von Graham und Obermayer), so wurde ein Mittelwert verwendet. Der von Graham erhaltene Wert für Äthylen wurde jedoch beiseite gelassen, da sein kleiner Betrag auf eine größere Verunreinigung durch Äther hinweist, während Obermayer Vorsichtsmaßregeln angewendet hat, um sein Gas von dieser Verunreinigung zu befreien. Bei Helium wurde aber der von H. Schulze[2] angegebene Wert verwendet. Die in dem Werke von O. E. Meyer nicht enthaltenen Werte der Weglänge wurden aus den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen, und zwar wurden die Messungen von L. Meyer und Schumann[3] und von Steudel[4] verwendet. Waren die Transpirationsversuche bei höherer Temperatur als 0° gemacht worden, so wurden die in den erwähnten Tabellen enthaltenen, nach der von Winkelmann[5] gegebenen Formel auf 0° umgerechneten Werte verwendet, so daß sämtliche Weglängen auf die Temperatur von 0° C. und den Druck von 760 *mm* bezogen sind.

---

[1] O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl., p. 192 und 193.
[2] H. Schulze, Ann. d. Phys., 6, p. 309 (1901).
[3] L. Meyer und O. Schumann, Wied. Ann., 13, p. 1 (1881).
[4] V. Steudel, Wied. Ann., 16, p. 386 (1882).
[5] A. Winkelmann, Wied. Ann., 26, p. 131 (1885).

Die Werte des Brechungsindex n sind aus der Zusammenstellung von Brühl,[1] wo sie für 0° C. und 760 *mm* Druck umgerechnet sind, entnommen. Es wurden hierbei die Messungen von Mascart verwendet, die sich auf die D-Linie beziehen mit Ausnahme von C_2H_5Cl, wo die Bestimmung von Dulong (für weißes Licht, vgl. Brühl, l. c., p. 20) und von SO_2, wo der Wert von Ketteler (für die D-Linie gemessen) verwendet wurde. Waren, wie meist bei höher siedenden Substanzen, sich auf die D-Linie beziehende Messungen von Prytz und Lorenz angegeben, so wurden diese verwendet und alle übrigen Werte beiseite gelassen. Für Argon wurde der von Rayleigh, für Helium der von Ramsay und Travers angegebene Wert den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen.

Diskussion der Resultate.

In dieser Tabelle sind die einzelnen Substanzen nach steigender molekularer Weglänge geordnet, die, in Millimetern ausgedrückt, in der zweiten Kolonne dieser Tabelle angeführt ist. Die folgende Kolonne enthält die Werte für $L(n-1)10^9$ mit dem Mittelwert 38, die nächste Kolonne enthält die Werte für $L^{1\cdot 5}(n-1)10^{11}$ mit dem Mittelwert 27. Um nun die Werte der einen Kolonne besser mit denen der anderen vergleichen zu können, wurden die Werte der Kolonne für $L(n-1)10^9$ durch Multiplikation mit $\frac{27}{38}$ so reduziert, daß jetzt deren Mittelwert auch 27 beträgt. Wir sehen jetzt bei den Werten $L^{1\cdot 5}(n-1)10^{11}$ eine bessere Konstanz als bei den Werten $\frac{27}{38}L(n-1)10^9$. Bei diesen Werten ist der mittlere Fehler der einzelnen Werte $= 7\cdot 6$, bei jenen hingegen nur $= 4\cdot 0$. Daß sich die Konstanz der Größe $L^{1\cdot 5}(n-1)$ nicht deutlicher ausspricht, liegt zum Teil in der Unsicherheit der in Rechnung eingehenden Größen der molekularen Weglänge sowie des bei Gasen von 1 nur sehr wenig verschiedenen Brechungsexponenten, zum Teil in dem Umstand, daß die bei Herleitung der Formel $L^3x^2 =$ konst. gemachten Voraussetzungen in der Natur

---

[1] J. W. Brühl, Zeitschr. f. physik. Chem., 7, p. 25 (1891).

Tafel.

Substanz	$L.10^6$	$L(n-1)\,10^9$	$L^{1\cdot5}(n-1)10^{11}$	$\frac{27}{38}L(n-1)\,10^9$
C_3H_7J	29	52	28	37
CCl_4	31	55	31	39
$C_3H_5O_2(CH_3)$ ...	32	47	27	33
$C_2H_4Cl_2$	33	44	25	31
$C_2H_3O_2(C_2H_5)$ ..	33	52	30	37
C_2H_5J	35	57	34	40
C_2H_5Cl	36	39	24	28
CH_3CHCl_2	36	51	30	36
$CHCl_3$	37	53	32	38
$C_2H_3O_2(CH_3)$ ...	39	44	28	31
$CHO_2(C_2H_5)$ ...	40	48	30	34
C_2N_2	40	33	21	23
$(CH_3)_2O$	41	36	23	26
$(C_2H_5)OH$	42	37	24	26
C_2H_5Br	43	52	34	37
CH_3Cl	44	38	25	27
SO_2	47	32	22	23
$(CH_3)OH$	50	27	19	19
C_2H_4	52	38	27	27
H_2S	60	37	29	26
N_2O	63	32	26	23
CO_2	64	29	23	21
HCl	71	32	27	23
NH_3	71	27	23	19
CH_4	80	35	32	25
NO	94	28	27	20
CO	94	31	30	22
N	95	28	28	20
Ar	99	28	28	20
O	101	27	27	19
H	180	25	34	18
He	276	12	20	9
Mittelwert:		38	27	27
Mittlerer Fehler der einzelnen Werte: ...			$\pm 4\cdot 0$	$\pm 7\cdot 6$

nicht erfüllt sind.[1] Die Schwankungen der Größe $L^{1\cdot 5}(n-1)$ sind außerdem ganz unregelmäßig, während wir bei der Größe $L(n-1)$ ein Fallen mit steigender Weglänge angedeutet sehen. Daß sich dieser Gang nicht deutlicher ausspricht, hat dieselbe Ursache wie die mangelhafte Konstanz der Größe $L^{1\cdot 5}(n-1)$. Wir sehen also, daß das auf rechnerischem Wege gefundene Gesetz $L^{1\cdot 5}(n-1) =$ konst. für den Zusammenhang zwischen molekularer Weglänge und Brechungsexponenten verschiedener Gase den Vorrang verdient gegenüber dem auf empirischem Wege gefundenen Gesetz $L(n-1) =$ konst.

Hervorgehoben sei noch, daß das Gesetz $L^{1\cdot 5}(n-1) =$ konst. ein quantitativer Ausdruck des von Stefan (vgl. p. 1159) geschilderten Zusammenhanges zwischen mittlerer molekularer Weglänge und Brechungsquotienten ist. Das Gesetz ergibt sich aus der Beziehung zwischen Raumerfüllungskoeffizienten und Brechungsindex $x = \frac{n^2-1}{n^2+2}$ und der Beziehung zwischen mittlerer freier Weglänge und Raumerfüllungskoeffizienten $L^3 x^2 =$ konst.

Die Raumerfüllung, d. h. unter gleichen äußeren Bedingungen die Größe der einzelnen Molekeln, bestimmt deren freie mittlere Weglänge ebenso wie den Brechungsindex des betreffenden Gases. So erscheint durch die kinetische Gastheorie eine Betrachtungsweise gegeben, die den Zusammenhang zwischen freier mittlerer Weglänge der Molekeln und der durch sie bedingten Zähigkeit des Gases einerseits und seinem Brechungsexponenten andrerseits von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus zu überblicken gestattet.

---

[1] H. Sirk, Ann. d. Phys., Bd. 25, p. 900 (1908).

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. IX. HEFT.

ABTEILUNG II a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung, respektive Klasse vermittels der kollinear incidenten Elemente

von

Prof. Dr. **Karl Zahradník** in Brünn.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. Oktober 1908.)

Es seien zwei kollineare ebene Systeme $\varepsilon, \varepsilon'$ gegeben. P und P' seien ein Paar entsprechender Punkte, deren Verbindungslinie $\overline{PP'}$ wir mit p bezeichnen wollen, und sagen, die Gerade p sei kollinear incident mit dem Punkte P.

Umgekehrt ist mit der Geraden p der Punkt P gegeben als Schnittpunkt der Geraden p mit der ihr kollinear entsprechenden Geraden p'. Den Punkt $P \equiv p|p'$ bezeichnen wir wieder als kollinear incident mit der Geraden p. Durch jeden Punkt des Systems ε geht eine bestimmte Gerade, nämlich die kollinear incidente, und umgekehrt, auf jeder Geraden liegt ein bestimmter Punkt, nämlich der kollinear incidente Punkt. Jeder Kurve als einem Orte der Punkte P entspricht so eine andere Kurve als Einhüllende der kollinear incidenten Geraden p und umgekehrt. Im folgenden werden wir die Verwandtschaft der so entsprechenden Kurven untersuchen und dieselbe zur Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung, beziehungsweise dritter und vierter Klasse verwerten.

2. Nehmen wir das Hauptdreieck der Kollineation als Koordinatendreieck an, so wird die Kollinearität der ebenen Systeme $\varepsilon, \varepsilon'$ durch nachstehende Gleichungen ausgedrückt:

$$\varkappa x'_h = a_h x_h, \quad \mu u_h = a_h u'_h. \qquad h = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Bezeichnen wir den Einheitspunkt im System ε mit E und die Einheitsgerade im System ε' mit e', so sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 die Koordinaten der diesen Einheitselementen entsprechenden Elemente im anderen System.

Die Kollinearität der ebenen Systeme $\varepsilon, \varepsilon'$ setzen wir somit festgestellt durch die Doppelelemente und durch ein Paar entsprechender Elemente, von denen wir für das eine Element das Einheitselement des einen Systems wählen.

Als Koordinaten u_h $(h = 1, 2, 3)$ der dem Punkte $P(x_1|x_2|x_3)$ kollinear incidenten Geraden p erhalten wir

$$\lambda u_h = \frac{b_h}{x_h}, \qquad h = 1, 2, 3 \tag{2}$$

wo der Kürze halber gesetzt wurde:

$$b_1 = a_2 - a_3, \quad b_2 = a_3 - a_1, \quad b_3 = a_1 - a_2. \tag{3}$$

Als Koordinaten x_h $(h = 1, 2, 3)$ des mit der Geraden $p(u_1|u_2|u_3)$ kollinear incidenten Punktes P erhalten wir:

$$\nu x_h = \frac{b_h}{u_h}. \qquad h = 1, 2, 3 \tag{4}$$

Was die Zahlen b_h betrifft, so sind sie die Koordinaten der Geraden b, welche mit dem Einheitspunkte kollinear incident ist. Aus den Gleichungen (3) folgt

$$\Sigma b_h = 0, \quad \Sigma a_h b_h = 0, \qquad h = 1, 2, 3 \tag{5}$$

welche Gleichungen eben nur die Tatsache ausdrücken, daß die Gerade b die Verbindungslinie der Punkte E und E' ist.

Ist e' die Einheitsgerade und e die ihr kollinear entsprechende Gerade, somit $e|e'$ der ihr kollinear incidente Punkt, dann sind die Zahlen b_1, b_2, b_3, Gleichung (3), die Koordinaten des Punktes $e|e'$ und die Gleichungen (5) besagen nur, daß dieser Punkt der Schnittpunkt der Geraden e, e' ist.

Quadratische Korrelation der kollinear incidenten Elemente.

3. Die Gleichungen (2) und (4), nämlich

$$\lambda u_h = \frac{b_h}{x_h}, \quad \nu x_h = \frac{b_h}{u_h} \qquad h = 1, 2, 3$$

besagen, daß die kollinear incidenten Elemente in einer quadratischen Korrelation stehen. Einer Kurve n^{ter} Klasse als Einhüllender der Geraden p entspricht eine Kurve $2n^{ter}$ Ordnung als Ort der kollinear incidenten Punkte P. Die transformierte Kurve hat in den Hauptpunkten der Korrelation, die wir als Ecken des Koordinatendreieckes gewählt haben, n-fache Punkte. Umgekehrt entspricht einer Kurve n^{ter} Ordnung als Ort der Punkte P eine Kurve $2n^{ter}$ Klasse als Einhüllende der kollinear incidenten Geraden p, welche die Hauptgeraden der Kollineation zu n-fachen Tangenten hat.

Im nachstehenden werden wir den Fall $n = 1$ berühren und den Fall $n = 2$ näher untersuchen.

Die Gerade p geht durch einen festen Punkt S.

4. Es seien $u_h, y_h,\ h = 1, 2, 3$, die Koordinaten der Geraden p, beziehungsweise des Punktes S. Geht nun die Gerade p durch den Punkt S, so gilt

$$\Sigma u_h y_h = 0. \qquad h = 1, 2, 3$$

Ist nun P der dieser Geraden kollinear incidente Punkt, so gelten die Gleichungen (2) und wir erhalten:

$$\sum \frac{b_h y_h}{x_h} = 0.$$

Diese Gleichung ist in den x quadratisch, d. i. die kollinear incidenten Punkte P aller Geraden p, welche durch den festen Punkt S gehen, liegen auf einem Kegelschnitte, welcher dem Hauptdreiecke der Kollineation umschrieben ist und durch den festen Punkt S hindurchgeht.

Nähert sich nun der Punkt P des Kegelschnittes dem festen Punkte S unendlich nahe, so gilt dasselbe für die ihnen kollinearen Punkte P', S' und in der Grenzlage für $P \equiv S$ wird $\overline{SS'}$ Tangente des Kegelschnittes (P) im Punkte S, was ja analytisch evident ist, da der Gleichung der Tangente im Punkte S, nämlich

$$\sum_{h=1}^{3} \frac{b_h \xi_h}{y_h} = 0, \qquad h = 1, 2, 3$$

die Koordinaten y'_h des Punktes S' genügen (Gleichungen 1, 5).

Der dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel S entsprechende Kegelschnitt ist somit durch die Hauptpunkte der Kollineation, ferner durch den Punkt S und die ihm kollinear incidente Gerade $s = \overline{SS'}$ als Tangente im Punkte S gegeben.

Liegt der Punkt S auf der Seite $x_3 = \overline{U_1 U_2}$ des Hauptdreieckes, so ist

$$p \equiv u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

und

$$(P) \equiv x_3 (b_2 y_1 x_2 + b_1 y_2 x_1) = 0; \qquad (6)$$

Der Kegelschnitt (P) zerfällt in diesem Falle in die Gerade $x_3 = \overline{U_1 U_2}$ und in eine durch die Ecke U_3 des Hauptdreieckes gehende Gerade.

Die Gerade p hüllt eine Kurve zweiter Klasse ein.

5. Gegeben sei die Gleichung dieser Einhüllenden:

$$C^2 \equiv A_{11} u_1^2 + 2 A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 + 2 A_{13} u_1 u_3 + \\ + 2 A_{23} u_2 u_3 + A_{33} u_3^2 = 0. \qquad (7)$$

Der Ort der kollinear incidenten Punkte der Tangenten dieser Kurve ist eine Kurve vierter Ordnung:

$$C_4 \equiv A_{11} b_1^2 x_2^2 x_3^2 + A_{22} b_2^2 x_3^2 x_1^2 + A_{33} b_3^2 x_1^2 x_2^2 + \\ + 2 (A_{12} b_1 b_2 x_3 + A_{13} b_1 b_3 x_2 + A_{23} b_2 b_3 x_1) x_1 x_2 x_3 = 0. \qquad (8)$$

Dieselbe ist rational mit Doppelpunkten in den Hauptpunkten der Kollineation, den Ecken des Koordinatendreieckes.

Aus der Form

$$V_4 + V_3 x_3 + V_2 x_3^2 = 0, \qquad (9)$$

in welcher wir die Gleichung (8) schreiben können, ersehen wir, daß die Ecke $U_3 \equiv x_1 | x_2$ des Koordinatendreieckes ein Doppelpunkt der Kurve C_4 ist, dessen Tangenten sich aus der Gleichung

$$V_2 \equiv b_1^2 A_{11} x_2^2 + 2 b_1 b_2 A_{12} x_1 x_2 + b_2^2 A_{22} x_1^2 = 0 \qquad (10)$$

ergeben. Ebenso erhalten wir, daß die Ecken $x_2 | x_3$, $x_3 | x_1$ Doppelpunkte der Kurve C_4 sind. Dem Kegelschnitte C^2 entspricht somit mittels der quadratischen Korrelation (2) eine

rationale Kurve vierter Ordnung C_4, welche die Hauptpunkte der Kollineation zu ihren Doppelpunkten hat.

Aus der Gleichung (10) ersieht man, daß die Tangenten des Doppelpunktes $U_3 \equiv x_1|x_2$ reell sind, zusammenfallen oder imaginär konjugiert sind, je nachdem

$$\alpha_{33} = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \lesseqgtr 0 \tag{11}$$

ist, wo α_{hk} die Subdeterminante des Elementes A_{hk} der Determinante $(A_{11}A_{22}A_{33})$ bezeichnet.

Aber die Relation (11) drückt auch aus, wann der Punkt U_3 Schnittpunkt zweier reeller, zusammenfallender oder imaginärer Tangenten der Kurve C^2 ist; somit ist $U_3 \equiv x_1|x_2$ ein gewöhnlicher Knoten, ein Rückkehrpunkt oder ein isolierter Doppelpunkt der Kurve C_4, je nachdem derselbe außerhalb des Kegelschnittes C^2, am Kegelschnitte oder innerhalb des Kegelschnittes liegt.

Ist also $\alpha_{hh} < 0$, so ist U_h ein gewöhnlicher Knoten, für $\alpha_{hh} = 0$ ein Rückkehrpunkt und für $\alpha_{hh} > 0$ ein isolierter Doppelpunkt der Kurve C_4. Für $\alpha_{hh} \neq 0$, $h = 1, 2, 3$, ist C_4 von der sechsten Klasse.

6. Bezeichnen wir mit t_h, t_h' die Tangenten des Doppelpunktes U_h der Kurve C_4, so ist $(x_1 x_2 t_3 t_3') = -1$ für $A_{12} = 0$.

Analog ist $(x_2 x_3 t_1 t_1') = -1$, wenn $A_{23} = 0$ ist.

Ist nun $A_{12} = 0$, $A_{23} = 0$, so ist $\overline{U_1 U_3} = x_2$ die Polare des Punktes U_2 in bezug auf den Kegelschnitt C^2. Schreiben wir $H_2 = t_1|t_3$, $H_2' \equiv t_1|t_3'$, $K_2 \equiv t'|t_3$, $K_2' \equiv t_1'|t_3'$, so können wir sagen, die Schnittpunkte H_2, H_2', K_2, K_2' der Tangenten der Doppelpunkte U_1, U_3 der Kurve C_4 bilden, wenn $\overline{U_1 U_3}$ die Polare von U_2 in bezug auf C^2 ist, ein Viereck, für welches die Doppelpunkte U_1, U_2, U_3 sein Diagonaldreieck bilden.

Ist nun $A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$, so ist das Dreieck $U_1 U_2 U_3$ ein Polardreieck in bezug auf C^2 und die Tangenten je eines Doppelpunktes der C_4 werden durch die anderen Doppelpunkte harmonisch geteilt. Wie aus der Gleichung der Kurve C_4, nämlich

$$A_{11} b_1^2 x_2^2 x_3^2 + A_{22} b_2^2 x_3^2 x_1^2 + A_{33} b_3^2 x_1^2 x_2^2 = 0 \tag{12}$$

ersichtlich ist, besitzt dieselbe in den Hauptpunkten der Kollineation Inflexionsknoten. Ist das Koordinatendreieck, dessen Ecken Hauptpunkte der Kollineation sind, vollständig reell, so sind die A_{ik} nicht alle desselben Vorzeichens, wenn die Kurve C_4 reell sein soll. Eine Ecke des Koordinatendreieckes ist dann ein isolierter Punkt der Kurve C_4, während die übrigen zwei Knotenpunkte sind.

Die Kurve C_4 ist auch dann reell, wenn zwei Ecken des Hauptdreieckes konjugiert imaginär sind. Die Konstruktion der kollinear zugeordneten Elemente ist in diesem Falle ebenso einfach, somit auch die der kollinear incidenten Elemente, daher auch der Kurve C_4.

Erniedrigung der Klasse der transformierten Kurve C_4.

7. Ist $\alpha_{kk} = 0$, so liegt der Hauptpunkt U_k der Kollineation am Kegelschnitte C^2 und die transformierte Kurve C_4 hat in demselben einen Rückkehrpunkt und ist fünfter Klasse. Geht aber der Kegelschnitt C^2 durch zwei Hauptpunkte der Kollineation, so hat die transformierte Kurve C_4 in denselben zwei Rückkehrpunkte und ist von der vierten Klasse.

Untersuchen wir nun den Fall, wo C^2 dem Dreieck aus den Hauptpunkten der Kollineation umschrieben ist. In diesem Falle ist $\alpha_{hh} = 0$, $h = 1, 2, 3$, und die Gleichung des Kegelschnittes C^2 lautet:

$$C^2 \equiv \frac{u_1^2}{A_{23}^2} + \frac{u_2^2}{A_{13}^2} + \frac{u_3^2}{A_{12}^2} - 2\frac{u_1 u_2}{A_{13} A_{23}} - 2\frac{u_1 u_3}{A_{12} A_{23}} - 2\frac{u_2 u_3}{A_{12} A_{13}} = 0.$$

Die Gleichung der transformierten Kurve C_4, welche die Hauptpunkte der Kollineation zu Rückkehrpunkten hat und somit von der dritten Klasse ist, lautet:

$$C_4 \equiv \frac{b_1^2}{A_{23}^2} x_2^2 x_3^2 + \frac{b_2^2}{A_{13}^2} x_1^2 x_3^2 + \frac{b_3^2}{A_{12}^2} x_1^2 x_2^2 - \left(\frac{b_1 b_2}{A_{13} A_{23}} x_3 + \frac{b_2 b_3}{A_{12} A_{13}} x_1 + \frac{b_1 b_3}{A_{12} A_{23}} x_2\right) x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Die Gleichungen der Rückkehrtangenten sind:

$$r_1 \equiv \frac{b_2}{A_{13}} x_3 - \frac{b_3}{b_{12}} x_2 = 0$$

$$r_2 \equiv \frac{b_3}{A_{12}} x_1 - \frac{b_1}{A_{23}} x_3 = 0$$

$$r_3 \equiv \frac{b_1}{A_{23}} x_2 - \frac{b_2}{A_{13}} x_1 = 0.$$

Dieselben schneiden sich im Punkte $S\left(\frac{b_1}{A_{23}} \middle| \frac{b_2}{A_{13}} \middle| \frac{b_3}{A_{12}}\right)$, da

$$r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0$$

ist.

Die Gleichung der dem Punkte S kollinear incidenten Geraden s ist

$$s \equiv A_{23} x_1 + A_{13} x_2 + A_{12} x_3 = 0$$

und ihre Koordinaten somit A_{23}, A_{13}, A_{12}. Diese Gerade geht durch die Schnittpunkte der Tangenten der Punkte U_h, $h = 1, 2, 3$, des Kegelschnittes C^2 mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes $U_1 U_2 U_3$ und ist somit die Pascal'sche Gerade des auf das Dreieck $U_1 U_2 U_3$ reduzierten Pascal'schen Sechseckes. Hiermit ist die geometrische Deutung der Koeffizienten der Gleichung[1] $C^2 = 0$ gegeben, was wir auch später konstruktiv verwenden werden.

Fälle, wo die transformierte Kurve C_4 degeneriert.

8. Den Fall, wo einer oder mehrere Hauptpunkte U_1, U_2, U_3 der Kollineation Berührungspunkte der Tangenten von C^2 waren, haben wir im vorstehenden näher erörtert. Jetzt wollen wir den Fall untersuchen, wo der Kegelschnitt C^2 eine oder mehrere Seiten des Dreieckes $U_1 U_2 U_3$ zu seinen Tangenten hat.

---

[1] In Punktkoordinaten ist die Gleichung eines solchen Kegelschnittes C^2

$$\frac{x_2 x_3}{A_{23}} + \frac{x_3 x_1}{A_{13}} + \frac{x_1 x_2}{A_{12}} = 0.$$

Es sei $\overline{U_2 U_3} = x_1$ Tangente des Kegelschnittes C^2, dann muß $A_{11} = 0$, somit

$$C^2 \equiv A_{22} u_2^2 + A_{33} u_3^2 + 2 A_{23} u_2 u_3 + 2 (A_{12} u_2 + A_{13} u_3) u_1 = 0.$$

Die transformierte Kurve C_4 eines solchen Kegelschnittes zerfällt in die Gerade $x_1 = 0$ selbst und in die Kurve dritter Ordnung

$$C_3 \equiv 2 b_1 x_2 x_3 (A_{12} b_2 x_3 + A_{13} b_3 x_2) + \\ + x_1 (A_{22} b_2^2 x_3^2 + 2 A_{23} b_2 b_3 x_2 x_3 + A_{33} b_3^2 x_2^2) = 0.$$

Ist nun die Ecke $U_3 \equiv x_1 | x_2$ des Dreieckes $U_1 U_2 U_3$ der Berührungspunkt der Tangente $x_1 = 0$ des Kegelschnittes C^2, so muß $A_{11} u_1^2 + 2 A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 = 0$ ein vollständiges Quadrat sein, somit muß gelten:

$$A_{11} A_{22} - A_{12}^2 = 0,$$

aber wegen $A_{11} = 0$ geht die Bedingung über in $A_{12} = 0$. Die Gleichung von C_3 lautet in diesem Falle:

$$C_3 \equiv 2 b_1 b_3 A_{13} x_2^2 x_3 + x_1 (A_{22} b_2^2 x_3^2 + 2 A_{23} b_2 b_3 x_2 x_3 + A_{33} b_3^2 x_2^2) = 0.$$

Der Hauptpunkt der Kollineation $U_1 \equiv x_2 | x_3$ ist in beiden Fällen ein Doppelpunkt, und zwar ein Knotenpunkt oder ein isolierter Punkt, somit die Kurve C_3 von der vierten Klasse.

Ist aber auch

$$A_{22} A_{33} - A_{23}^2 = 0,$$

somit U_1 ein Punkt des Kegelschnittes C^2, so hat C_3 in diesem Punkte einen Rückkehrpunkt und ist von der dritten Klasse.

Wären zwei Seiten des Dreieckes aus den Hauptpunkten der Kollineation Tangenten des Kegelschnittes C^2, z. B. $x_1 \equiv \overline{U_2 U_3}$, $x_3 \equiv \overline{U_1 U_2}$, dann gilt $A_{11} = 0$, $A_{33} = 0$ und die transformierte Kurve C_4 zerfällt in diesem Falle in die Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und in den Kegelschnitt

$$C_2 \equiv A_{22} b_2^2 x_1 x_3 + 2 x_2 (b_1 b_2 A_{12} x_3 + b_2 b_3 A_{23} x_1 + b_3 b_1 A_{13} x_2) = 0.$$

Wären nun die Hauptpunkte der Kollineation U_3, U_1 Berührungspunkte der Tangenten $x_1 \equiv \overline{U_2 U_3}$ bezüglich $x_3 \equiv \overline{U_1 U_2}$,

so würde wie $A_{12} = 0$ so auch $A_{23} = 0$ sein und die Gleichung des Kegelschnittes C^2 lautet in diesem Falle:

$$A_{22} u_3^2 + 2 A_{13} u_1 u_3 = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes C_2, welcher mit den Geraden $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ die transformierte Kurve C_4 bildet, ist dann

$$C_2 \equiv A_{22} b_2^2 x_1 x_3 + 2 A_{13} b_1 b_3 x_2^2 = 0.$$

Sind alle Seiten des Dreieckes aus den Hauptpunkten der Kollineation Tangenten des Kegelschnittes C^2, dann ist $A_{hh} = 0$, $h = 1, 2, 3$, und seine Gleichung

$$C^2 \equiv A_{12} u_1 u_2 + A_{13} u_1 u_3 + A_{23} u_2 u_3 = 0.$$

Die transformierte Kurve C_4 besteht aus dem Hauptdreieck der Kollineation und aus der Geraden g:

$$g \equiv A_{12} \frac{x_3}{b_3} + A_{13} \frac{x_2}{b_2} + A_{23} \frac{x_1}{b_1} = 0.$$

Verwendung der quadratischen Korrelation zur Konstruktion der rationalen Kurven vierter und dritter Ordnung, respektive Klasse.

9. Eine rationale Kurve vierter Ordnung ist mit drei Doppelpunkten U_1, U_2, U_3 und weiteren fünf Punkten A, B, C, D, E gegeben. Die Doppelpunkte der Kurve nehmen wir als Hauptpunkte der Kollineation zweier Ebenen ε, ε' an.

Den Punkt J der Ebene ε können wir beliebig wählen und ihm den Punkt J' der Ebene ε' zuordnen. Hiermit ist die kollineare Beziehung der Punkte der Ebenen ε, ε' bestimmt. Konstruieren wir nun zu den gegebenen Punkten A, B, C, D, E die kollinear incidenten Geraden a, b, c, d, e. Diese Geraden bestimmen den Kegelschnitt C^2. Der Tangente t dieses Kegelschnittes entspricht kollinear die Gerade t' und der Punkt $T \equiv t | t'$ ist also kollinear incident mit der Tangente t. Der Ort der kollinear incidenten Punkte der Tangenten des Kegelschnittes C^2 ist die gesuchte Kurve C_4.

Hiermit ist die Konstruktion einer rationalen Kurve vierter Ordnung aus drei Doppelpunkten und fünf weiteren Punkten gegeben.

Da die Konstruktion eines dem gegebenen Punkte P kollinear entsprechenden Punktes P' keine Schwierigkeit bereitet, wenn zwei der Hauptpunkte konjugiert imaginär sind, so können wir auch in diesem Falle die kollinear incidente Gerade p konstruieren, somit auch die Kurve C_4, wenn zwei von den gegebenen Doppelpunkten konjugiert imaginär sind.

Sind ν von den als Doppelpunkte gegebenen Punkten Berührungspunkte der Tangenten des Kegelschnittes C^2, so ist $6-\nu$ die Klassenzahl der Kurve C_4.

Eine Kurve C_4^3 ist bestimmt, wenn wir die Rückkehrpunkte und den Schnittpunkt ihrer Rückkehrtangenten kennen. Nach Artikel 7 ergibt sich leicht die Konstruktion.

Ist eine Seite des Dreieckes der Doppelpunkte, z. B. $x_h = 0$, Tangente des Kegelschnittes C^2, so muß $abcdex_h$ ein Brianchon'sches Sechsseit sein und die Kurve C_4 zerfällt in die Gerade x_h und in eine rationale Kurve C_3, welche von der vierten oder dritten Klasse ist, je nachdem der Punkt U_h auf dem Kegelschnitte C^2 nicht liegt oder ein Punkt desselben ist.

Die Konstruktion der Kurven vierter Klasse, wenn drei Doppeltangenten und fünf einfache Tangenten derselben gegeben sind, ergibt sich aus dem vorstehenden auf Grundlage der Dualität.

Zwei der Hauptpunkte sind unendlich fern.

10. Untersuchen wir nun den Fall, wo zwei der Hauptpunkte der Kollineation, z. B. U_1, U_2, somit auch die Seite x_3 des Koordinatendreieckes unendlich fern sind. Hier können wir den Hauptpunkt der Kollineation U_3 zum Anfangspunkt eines schiefwinkligen Parallelkoordinatensystems wählen, $\overline{U_3U_2}$ als X-Achse, $\overline{U_3U_1}$ als dessen Y-Achse. Ordnen wir dem Punkte J der Ebene ε den Punkt J' der Ebene ε' zu, so ist die kollineare Beziehung der Ebenen ε, ε', welche in diesem Falle eine affine ist, bestimmt.

Der dem Punkte P entsprechende Punkt P' ergibt sich aus

$$U_1(U_3U_2JP) = U_1(U_3U_2J'P')$$
$$U_2(U_3U_1JP) = U_2(U_3U_1J'P')$$

Bezeichnen wir mit dem Index 1, respektive 2 die Parallelprojektion eines Punktes zur Koordinatenachse in die X-, respektive Y-Achse, so erhalten wir, $U_3 \equiv O$ gesetzt:

$$(O, \infty, J_h, P_h) = (O, \infty, J_h', P_h'),$$

somit

$$OP_h' = \frac{OJ_h'}{OJ_h} \cdot OP_h. \qquad h = 1, 2 \tag{13}$$

Setzen wir nun

$$\frac{OJ_h'}{OJ_h} = \varkappa_h,$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x' &= \varkappa_1 x \\ y' &= \varkappa_2 y \end{aligned} \tag{14}$$

als Gleichungen der affinen Verwandtschaft, welche wir aus den Gleichungen (1) erhalten, wenn wir setzen:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_1'}{x_3'} = x', \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{x_2'}{x_3'} = y', \quad \frac{a_1}{a_3} = \varkappa_1, \quad \frac{a_2}{a_3} = \varkappa_2,$$

Die Koordinaten der dem Punkte $P(x|y)$ kollinear incidenten Geraden p sind:

$$u = \frac{1-\varkappa_2}{\varkappa_2-\varkappa_1} \cdot \frac{1}{x}$$
$$v = \frac{\varkappa_1-1}{\varkappa_2-\varkappa_1} \cdot \frac{1}{y}$$

Ist $(1|1)$ der Punkt J, so sind $\varkappa_1, \varkappa_2$ die Koordinaten des zugeordneten Punktes J'. Genügen nun diese der Bedingung

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 2, \tag{15}$$

d. i. liegt der Punkt J' auf einer durch den Punkt $J(1\,1)$ gehenden Geraden p, deren Abschnitte auf den Koordinatenachsen gleich 2 sind, so ist

$$u = -\frac{1}{2x}, \quad v = -\frac{1}{2y} \tag{16}$$

unabhängig von der Wahl des zugeordneten Punktes J' auf der Geraden p. Umgekehrt ist

$$x = -\frac{1}{2u}, \quad y = -\frac{1}{2v}. \tag{16'}$$

Setzen wir $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = a^2$, so gehen die Gleichungen[1] (14) mit Rücksicht auf die Relation (15) über in

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{a^2+1}x \\ y' &= \frac{2a^2}{a^2+1}y. \end{aligned} \tag{17}$$

[1] Die mit den Gleichungen (17) gegebene affine Verwandtschaft erhalten wir, wenn $\sphericalangle U_2U_1U_3 = \sphericalangle XY = 90°$, was durch Projektion erreicht wird, auf folgende Weise. Gegeben seien zwei Gerade g_1, g_2, welche einen Winkel 2α einschließen, dessen $\mathrm{tg}\,\alpha = a$; vom Punkte P der Ebene der Geraden g_1g_2 fällen wir auf dieselben Senkrechte $\overline{PN_1}$, $\overline{PN_2}$ und ziehen durch die Fußpunkte auf der einen Parallele zur anderen Geraden. Ihr Schnittpunkt P' ist der entsprechende Punkt und $\overline{PP'} = p$ die ihm kollinear incidente Gerade. Dieselbe ist vom Winkel α unabhängig. Nehmen wir die Symmetralen der Geraden g_1, g_2 zu Koordinatenachsen, dann ist die Abhängigkeit des Punktes P' vom Punkte P durch die Gleichungen (17) gegeben. Ist OM die Abszisse von P, so ist $OA = 2OM$ die Abszisse von P', somit $\overline{AP} \equiv p$. Da nun $\overline{PP'} = \overline{OP}\cos 2\alpha$, ist bei gegebenem α der Ort der Punkte P für konstante Entfernung $\overline{PP'}$ ein Kreis mit dem Anfangspunkte im Koordinatenanfang.

Ist H der Schnittpunkt dieses Kreises mit g_1, so ist $OK = OH\cos 2\alpha$ und wenn wir von H auf g_2 eine Senkrechte $\overline{HK}$ fällen (Fig. 1), dann ist $\overline{OK} = \overline{PP'}$. Umgekehrt ist der Punkt P und der ihm zugeordnete Punkt P' gegeben, dann finden wir die Geraden g_1, g_2 mittels der Relation $\cos 2\alpha = \overline{PP'} : \overline{OP}$. Ist nun $\overline{N_1N_2} \equiv n(u_1|v_1)$ und $\overline{PP'} \equiv p(u|v)$, so ergibt sich

$$u = \frac{u_1^2 - a^2v_1^2}{2(a^2+1)u_1}, \quad v = -\frac{u_1^2 - a^2v_1^2}{2(a^2+1)v_1},$$

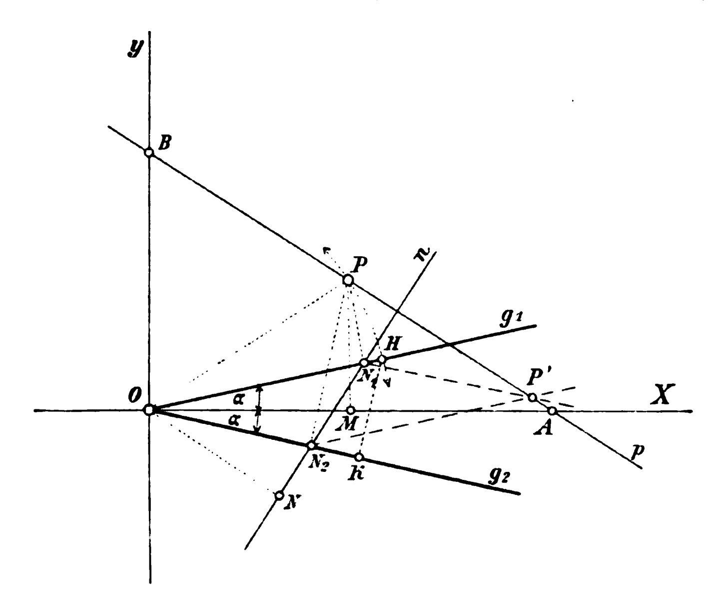
Gerade p durch einen festen Punkt S und ihr kollinear incidenter Punkt.

11. Für $S(\alpha|\beta)$ besteht die Gleichung

$$\alpha u + \beta v + 1 = 0,$$

somit ist die Gleichung der den Strahlen des Büschels (S) incidenten Punkte

$$2xy - \alpha y - \beta x = 0, \tag{18}$$



also ein Kegelschnitt, der durch den Anfangspunkt und durch die unendlich fernen Punkte der Koordinatenachsen gehen

---

woraus wieder

$$u_1 = \frac{2(a^2+1)uv^2}{v^2 - au^2}, \quad v_1 = -\frac{2(a^2+1)u^2v}{v^2 - au^2}$$

folgt. Aus diesen Gleichungen ersehen wir, daß die Geraden p, n in einer birationalen kubischen Verwandtschaft stehen und daß die entsprechenden Geraden aufeinander senkrecht stehen; denn es ist $uu_1 + vv_1 = 0$. Transformieren wir diese letzte Relation mittels der Gleichungen (16), so erhalten wir, daß, wenn zwei Gerade aufeinander senkrecht stehen, projizieren sich die ihnen kollinear incidenten Punkte aus dem Anfangspunkt unter einem rechten Winkel.

muß, somit eine Hyperbel ist, welche durch den festen Punkt S hindurchgeht (Artikel 4) und den Halbierungspunkt C der Strecke OS zum Mittelpunkte hat.

Liegt der Punkt S auf der Koordinatenachse, so zerfällt der Kegelschnitt in diese Koordinatenachse und in eine zur anderen Koordinatenachse parallele Gerade, welche durch den Halbierungspunkt C der Strecke $\overline{OS}$ hindurchgeht.

Sind die unendlich fernen Hauptpunkte imaginäre Kreispunkte, so geht mittels imaginärer Projektion, wenn wir setzen:

$$x = \xi + i\eta, \quad y = \xi - i\eta, \quad \alpha = a + ib, \quad \beta = a - ib,$$

die Hyperbel (18) über in den Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 - a\xi - b\eta = 0.$$

Dasselbe erhalten wir natürlich auch aus Artikel 4, wenn wir

$$x_1 : x_3 = \xi + i\eta, \quad x_2 : x_3 = \xi - i\eta, \quad b_1 y_1 : b_3 y_3 = a + ib,$$
$$b_2 y_2 : b_3 y_3 = a - ib$$

setzen.

Transformation eines zentralen Kegelschnittes als einer Kurve zweiter Klasse.

12. Gegeben sei der Kegelschnitt

$$C^2 \equiv A_{11} u^2 + 2 A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 + 2 A_{13} u + 2 A_{23} v + A_{33} = 0,$$

wo der Voraussetzung gemäß $A_{33} \neq 0$ ist. Die Gleichung der transformierten Kurve C_4 ist

$$C_4 \equiv 4 A_{33} x^2 y^2 - 4 (A_{23} x + A_{13} y) xy + A_{22} x^2 +$$
$$+ 2 A_{12} xy + A_{11} y^2 = 0, \qquad (19)$$

welche wir natürlich aus dem Artikel 5, Gleichung (8), erhalten, wenn wir $x_1 : x_3 = x$, $x_2 : x_3 = y$ und $b_1 : b_2 : b_3 = 1 : 1 : -2$ setzen.

Wie schon aus der Konstruktion ersichtlich ist, sind die unendlich fernen Punkte X_∞, Y_∞ der Koordinatenachsen und der Anfangspunkt der Koordinaten Doppelpunkte der Kurve.

Umgekehrt hat die Gleichung einer solchen Kurve die Form

$$ax^2y^2+(bx+cy)xy+dx^2+2exy+fy^2=0 \qquad (20)$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Gleichung (19) liefert sofort die Proportionalwerte für die A_{hk}, womit auch der Kegelschnitt C^2 als bestimmt erscheint, mithin auch die Erzeugung der Kurve (20) mittels des Kegelschnittes C^2 mit Anwendung der Transformation (16).

Die Gleichung (19) der Kurve C_4 können wir schreiben:

$$4A_{33}xy\left(x-\frac{A_{13}}{A_{33}}\right)\left(y-\frac{A_{23}}{A_{33}}\right)+A_{22}x^2+$$
$$+2\left(A_{12}-2\frac{A_{13}A_{23}}{A_{33}}\right)xy+A_{11}y^2=0,$$

wenn wir die Asymptoten derselben zum Ausdrucke bringen wollen.

Für $A_{12}=A_{13}=A_{23}=0$ ist das Dreieck der Hauptpunkte für C^2 ein Polardreieck und

$$C^2 \equiv A_{11}u^2+A_{22}v^2+A_{33}=0$$

und seine transformierte Kurve ist

$$C_4 \equiv 4A_{33}x^2y^2+A_{11}y^2+A_{22}x^2=0,$$

also eine Kurve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

Bei gleichem Vorzeichen von A_{11} und A_{22}, wenn C^2 also eine Ellipse ist, ist C_4 eine Kreuzkurve,[1] gerade oder schief, je nachdem der Achsenwinkel der Koordinaten ein rechter ist oder nicht.

Sind die Vorzeichen von A_{11}, A_{22} verschieden, somit C^2 eine Hyperbel, so erhalten wir die sogenannte Kohlenspitzenkurve.[2]

---

[1] Loria-Schütte, l. c., 210.

[2] Ibid., 210.

13. Ist der Kegelschnitt C^2 ein Kreis $K(\alpha|\beta|c)$ als Tangentengebilde, so können wir unter Voraussetzung $\widehat{XY} = 90°$ schreiben:

$$K \equiv (\alpha u + \beta v + 1)^2 - c^2(u^2 + v^2) = 0.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung von C^2, so finden wir, daß $C^2 \equiv K$ ist, wenn

$$A_{11}A_{33} - A_{13}^2 = A_{22}A_{33} - A_{23}^2$$
$$A_{12}A_{33} - A_{13}A_{23} = 0$$

Diese Gleichungen drücken die bekannte Tatsache aus, daß, wenn wir die C^2 in Punktkoordinaten ausdrücken, die Koeffizienten von x^2 und y^2 gleich und der Koeffizient von xy gleich Null sein müssen. Die Gleichung der transformierten Kurve von K ist

$$C_4 \equiv 4x^2y^2 - 4(\beta x + \alpha y)xy + (\beta^2 - c^2)x^2 + 2\alpha\beta xy + (\alpha^2 - c^2)y^2 = 0$$

oder

$$\left(x - \frac{\alpha - c}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha + c}{2}\right)\left(y - \frac{\beta - c}{2}\right)\left(y - \frac{\beta + c}{2}\right) - \frac{\alpha\beta}{2}xy +$$
$$+ \frac{\alpha(\beta^2 - c^2)}{4}x + \frac{\beta(\alpha^2 - c^2)}{4}y - \frac{(\alpha^2 - c^2)(\beta^2 - c^2)}{16} = 0,$$

wenn wir die Asymptoten zum Ausdrucke bringen.

Für $K(0|0|c)$ ist C_4 eine gerade zirkulare Kreuzkurve. Dieselbe erhalten wir aus $K\left(0|0|\frac{c}{2}\right)$ als einer Ordnungskurve vermittels einer birationalen kubischen Verwandtschaft[1] oder als Einhüllende der Hyperbeln $xy - \alpha y - \beta x = 0$, deren Mittelpunkt auf dem Kreis $K(\alpha|\beta|c)$ liegt.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung der C_4:

$$r = \frac{\alpha}{2\cos\varphi} + \frac{\beta}{2\sin\varphi} \pm \frac{c}{2\sin\varphi\cos\varphi}.$$

---

[1] Zahradník, Über eine birationale kubische Verwandtschaft und ihre Anwendung. Diese Sitzungsberichte, Bd. CXIV, Abt. IIa, Gleichung (2).

Setzen wir

$$r_1 = \frac{a}{2\cos\varphi}, \quad r_2 = \frac{\beta}{2\sin\varphi}, \quad r_3 = \frac{c}{2\sin\varphi\cos\varphi},$$

so ersehen wir, daß man die Kurve C_4 aus der geraden zirkularen Kreuzkurve und zwei Kreisen durch Addition der Vektoren erhält.

Konstruktion der C_4.

14. Gegeben sei C_4 durch die drei Doppelpunkte O, X_∞, Y_∞ und durch weitere fünf Punkte A, B, C, D, E. Um die Kurve C_4 zu konstruieren, bestimmen wir die zu den Punkten A, B, C, D, E incidenten Geraden a, b, c, d, e, welche als Tangenten des Kegelschnittes C^2 denselben bestimmen. Jeder weiteren Tangente t von C^2 entspricht ein Punkt der Kurve C_4, nämlich der kollinear incidente Punkt T (Halbierungspunkt der Strecke der Tangente zwischen den Koordinatenachsen). Die Gattung des Doppelpunktes O der Kurve C_4 entscheidet die Lage des Punktes O in bezug auf den Kegelschnitt C^2. Soll die Kurve C_4 nicht degenerieren, darf keine Koordinatenachse eine Tangente von C^2 sein.

15. Daß die Konstruktion keine Schwierigkeiten bietet, wenn zwei der Hauptpunkte konjugiert imaginär sind, wurde schon Artikel 9 erwähnt. Analytisch kommt dies auf eine imaginäre Projektion hinaus. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$x = \xi + i\eta, \quad y = \xi - i\eta$$

$$\frac{A_{11}}{A_{33}} = a+ib, \quad \frac{A_{22}}{A_{33}} = a-ib, \quad \frac{A_{13}}{A_{33}} = c+id, \quad \frac{A_{23}}{A_{33}} = c-id;$$

wir erhalten so für $A_{12} : A_{33} = \lambda$ gesetzt:

$$C_4' \equiv 2(\xi^2+\eta^2)^2 - 4(c\xi+d\eta)(\xi^2+\eta^2) +$$
$$+ (a+\lambda).\xi^2 + 2b\xi\eta - (a-\lambda)\eta^2 = 0.$$

α) Ist nun O ein Punkt des Kegelschnittes C^2, so ist

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0, \quad \text{somit} \quad \lambda = \sqrt{a^2+b^2}$$

und C_4' ist eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung mit einem Rückkehrpunkt in O.

β) Für $A_{12}=0$ bilden die Tangenten des Anfangspunktes an C^2 mit den Koordinatenachsen ein harmonisches Büschel.

Hier ist $\lambda=0$ und C_4 geht über in

$$C_4' \equiv 2(\xi^2+\eta^2)^2-4(c\xi+d\eta)(\xi^2+\eta^2)+a(\xi^2-\eta^2)+2b\xi\eta = 0,$$

also in eine bizirkulare rationale Kurve vierter Ordnung, deren Tangenten im Doppelpunkte O zueinander senkrecht stehen.

Für $A_{11}+A_{22}=0$ geht die C_4' über in

$$(\xi^2+\eta^2)^2-2(c\xi+d\eta)(\xi^2+\eta^2)+b\xi\eta = 0.$$

γ) Sind $A_{12}=0$, $A_{13}=0$, $A_{23}=0$, so geht bei erwähnter imaginärer Projektion C_4, welche in diesem Falle (Artikel 13) eine Kreuzkurve ist, über in

$$(\xi^2+\eta^2)^2+\frac{a}{2}(\xi^2-\eta^2)+b\xi\eta = 0,$$

also in die projektive Lemniskate mit einem Inflexionsknoten im Punkte O.

δ) Die Gleichung der Kurve C_4, wenn C^2 ein Kreis ist (Artikel 14), können wir schreiben:

$$C_4 \equiv [2xy-(\beta x+\alpha y)]^2-c^2(x^2+y^2) = H-c^2K_0 = 0.$$

Dieselbe geht bei imaginärer Projektion,[1] wenn

$$\alpha = p+iq, \quad \beta = q_0-iq$$

ist, über in

$$C_4' \equiv (\xi^2+\eta^2-p\xi-q\eta)^2-\frac{c^2}{2}(\xi^2-\eta^2) = K-\frac{c^2}{2}H_0 = 0,$$

für welche Kurve der Punkt $\left(\frac{p}{2}\middle|\frac{q}{2}\right)$ ein sogenannter Fundamentalpunkt[2] ist. Für $K(0|0|c)$ ist C_4 eine zirkulare Kreuzkurve und C_4' eine Bernoullische Lemniskate (vgl. 8).

---

[1] Loria-Schütte, l. c., p. 211; Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Göschen, Leipzig, p. 160.

[2] Loria-Schütte, l. c., p. 112.

Eine Seite des Hauptdreieckes ist Tangente des Kegelschnittes C^2.

16. Im vorhergehenden haben wir vorausgesetzt, daß $A_{hh} \neq 0$ für $h = 1, 2, 3$, jetzt wollen wir die Fälle untersuchen, wo entweder $A_{33} \neq 0$ und A_{11} oder A_{22} gleich Null oder wo $A_{33} = 0$ ist.

Im ersten Falle ist eine der Koordinatenachsen, welche Seiten des Hauptdreieckes bilden, Tangente des zentralen Kegelschnittes C^2; im zweiten Falle ist die unendlich ferne Gerade, die dritte Seite des Hauptdreieckes, eine Tangente des Kegelschnittes C^2, welcher somit in diesem Falle eine Parabel ist.

α) Es sei im ersten Falle die Koordinatenachse $X(0|\infty)$ eine Tangente von C^2, somit $A_{22} = 0$; die Transformierte eines solchen Kegelschnittes zerfällt in die X-Achse (Artikel 8) und in eine rationale Kurve dritter Ordnung

$$C_3 \equiv 4A_{33}x^2y - 4x(A_{23}x + A_{13}y) + (2A_{12}x + A_{11}y) = 0, \qquad (21)$$

welche den unendlich fernen Punkt der Y-Achse zu ihrem Doppelpunkte hat.

Die Gleichung der Kurve C_3 können wir schreiben:

$$C_3 \equiv 4A_{33}x\left(x - \frac{A_{13}}{A_{33}}\right)\left(y - \frac{A_{23}}{A_{33}}\right) + \\ + 2\left(A_{12} - 2\frac{A_{13}A_{23}}{A_{33}}\right)x + A_{11}y = 0. \quad (21$$

Ist die X-Achse eine Scheiteltangente von C^2 und der Anfangspunkt O ihr Berührungspunkt, so ist

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0$$

und die Gleichung des Kegelschnittes C^2 wird

$$C^2 \equiv A_{11}u^2 + 2A_{23}v + A_{33} = 0 \qquad (22)$$

$\left(\text{oder in Punktkoordinaten } x^2 = -2\frac{A_{11}}{A_{23}}y + \frac{A_{11}A_{33}}{A_{23}^2}y^2\right)$.

Die transformierte Kurve besteht aus der X-Achse und aus

$$C_3 \equiv 4A_{33}x^2y - 4A_{23}x^2 + A_{11}y = 0. \tag{23}$$

Schreibt man diese Gleichung

$$y = \frac{4A_{23}x^2}{4A_{33}x^2 + A_{11}},$$

so sieht man, daß wir für

$$\frac{A_{23}}{A_{33}} = 2a, \quad \frac{A_{11}}{4A_{33}} = a^2,$$

somit für

$$A_{11}A_{33} - A_{23}^2 = 0$$

die »geometrische Quadratrix«, welche auch Pseudo-Versiera[1] genannt wird, bekommen.

Setzen wir in die Gleichung (23) der C_3 $y = \frac{A_{23}}{A_{33}} - y_1$, so erhalten wir:

$$C_3 \equiv 4A_{33}x^2y_1 + A_{11}y_1 - \frac{A_{11}A_{23}}{A_{33}} = 0. \tag{24}$$

Aus der Gleichung ersehen wir, daß zwei Asymptoten mit der Y-Achse zur Rückkehrtangente zusammenfallen und die Achse X eine Wendeasymptote ist. Schreiben wir die Gleichung (24)

$$x^2y_1 = \frac{A_{11}}{4A_{33}}\left(\frac{A_{23}}{A_{33}} - y_1\right),$$

so ersehen wir, daß die Kurve C_3, wenn A_{11}, A_{33} gleiche Vorzeichen haben, somit C^2 eine Hyperbel ist, ein »Schützenbogen«[2] ist, dessen Gleichung für

$$\frac{A_{11}}{A_{33}} = 4a^2, \quad \frac{A_{23}}{A_{33}} = b$$

$$x^2y_1 = a^2(b-y) \tag{25}$$

[1] Loria-Schütte, l. c., p. 80; Wieleitner, Über zwei Familien von rationalen Kubiken. Monatshefte für Math. und Physik, XVIII. Jahrg., p. 182, Wien.

[2] L. c., p. 21, Nr. 12.

ist. Dieselbe enthält die Versiera[1] als einen Spezialfall für $b = a$, somit für $A_{11}A_{33} - 4A_{23}^2 = 0$ und für $b = 2a$, somit für $A_{11}A_{33} - A_{23}^2 = 0$ die Pseudo-Versiera,[2] wie wir früher schon erkannten.

Die Hyperbel C^2 (Gleichung 22) transformiert sich also allgemein in einen Schützenbogen, der in eine Versiera[3] übergeht oder in eine Pseudo-Versiera, je nachdem das Achsenverhältnis der Hyperbel gleich 1 : 2 oder 1 : 1 wird.

β) Es sei die unendlich ferne Gerade (0|0) eine Tangente von C^2, somit $A_{33} = 0$ und C^2 eine Parabel. Ihre transformierte Kurve zerfällt in die unendlich ferne Gerade und in die rationale Kurve dritter Ordnung

$$C_3 \equiv 4xy(A_{23}x + A_{13}y) - (A_{22}x^2 + 2A_{12}xy + A_{11}y^2) = 0,$$

also in eine Zissoidale, deren Erzeugungselemente die Hyperbel

$$H \equiv 4xy + \frac{A_{22}}{A_{23}}x + \frac{A_{11}}{A_{13}}y = 0$$

und die Gerade

$$g \equiv A_{23}x + A_{13}y + \frac{A_{11}A_{23}^2 + A_{22}A_{13}^2 - 2A_{12}A_{13}A_{23}}{4A_{13}A_{23}} = 0$$

sind. Die Kurve C_3 hat drei reale Asymptoten, von denen eine die Gerade g ist und die anderen

$$x = \frac{A_{11}}{4A_{13}}, \quad y = \frac{A_{22}}{4A_{23}}$$

sind und sich in einem Punkte schneiden, der zum Zentrum der Hyperbel H in bezug auf den Koordinatenanfang O symmetrisch liegt.

Ist $A_{12} = 0$, so geht die Asymptote g durch den Mittelpunkt der Hyperbel H.

---

1 L. c., p. 76.

2 L. c., p. 78.

3 Andere Verallgemeinerung der Versiera und ihr Verhältnis zur Külpschen Konchoide siehe Dr. Ant. Sucharda, Přispěvek k theorii versiery a Külpovy konchoidy. Prag, Sitzungsberichte, 1904.

Sind die unendlich fernen Hauptpunkte konjugiert imaginär, erhalten wir durch imaginäre Projektion aus der C_3 eine zirkulare Zissoidale, welche für $A_{11} = A_{22}$ und $A_{12} = 0$ eine gerade Strophoide wird.

17. Untersuchen wir noch den Fall, wo die unendlich ferne Gerade die Parabel C^2 im unendlich fernen Punkte der Achse, z. B. der Y-Achse, berührt.

Hier muß außer $A_{33} = 0$ noch $A_{13} = 0$ sein (Artikel 8) und die transformierte Kurve zerfällt in die unendlich ferne Gerade und in die Kurve dritter Ordnung

$$C_3 \equiv 4A_{23}x^2y-(A_{22}x^2+2A_{12}xy+A_{11}y^2) = 0.$$

In diesem Falle ist die unendlich ferne Gerade eine Tangente der C_3, welche wir als eine Zissoidale[1] konstruieren können mit den Erzeugungselementen

$$P \equiv x^2+\frac{A_{12}}{2A_{23}}x+\frac{A_{11}}{A_{23}}y = 0$$

$$g = 4A_{23}y-A_{22} = 0.$$

Parameterdarstellung der transformierten Kurve C_4.

18. Wir sehen, daß der Kegelschnitt C^2 mittels der Relationen (2), beziehungsweise (16) in eine rationale C_4 transformiert wird und haben auch dies für C_4 konstruktiv verwendet. Umgekehrt ist eine rationale C_4 gegeben, so nehmen wir das Dreieck der Doppelpunkte als Hauptdreieck der Kollineation an, welche festgestellt ist, wenn wir einem Punkte J den Punkt J' zuordnen. Die kollinear incidenten Geraden beliebiger fünf Punkte auf der C_4 bestimmen den Kegelschnitt C^2. Hat die Kurve C_4 zwei Doppelpunkte im Unendlichen, ist die Bestimmung der den Punkten von C_4 incidenten Geraden sehr einfach.

---

[1] Vgl. Loria-Schütte, l. c., p. 75. Für $A_{11} = A_{12} = A_{22}$ erhalten wir die sogenannte Kurve von Rolle.

Analytisch verwenden wir nur die Gleichungen (2), beziehungsweise (16). Ist somit eine rationale C_4 gegeben, so finden wir zuerst den entsprechenden Kegelschnitt C^2, für welchen wir die Koordinaten der Tangente rational mittels eines Parameters t bestimmen können, also

$$\lambda u_h = \varphi_h(t); \qquad h = 1, 2, 3$$

somit ist für C_4

$$\lambda x_h = \frac{1}{\varphi_h(t)}$$

Hat die $C_4 = 0$ zwei Doppelpunkte im Unendlichen, so können wir vermittels der Gleichungen (16) $C^2 \equiv f(u, v) = 0$ bestimmen, sodann u, v rational vermittels eines Parameters t ausdrücken und bekommen dann mittels der Gleichungen (16) die Koordinaten x, y eines Punktes der Kurve C_4 rational mittels des Parameters t ausgedrückt.

19. Nehmen wir den Fall, daß C_4 in eine Gerade und eine C_3 degeneriert. Dies tritt bekanntlich ein, wenn

α) $A_{11} = 0$ oder $A_{22} = 0$ ist (Fall α, Artikel 16).

Hier können wir eine Koordinate der Tangente als einen rationalen Parameter betrachten und die andere Koordinate mittels desselben rational ausdrücken. Zum Beispiel bei $A_{22} = 0$

$$u = t, \quad v = -\frac{1}{2}\,\frac{A_{33}+2A_{13}t+A_{11}t^2}{A_{23}+A_{12}t},$$

somit ist für die entsprechende C_3:

$$x = -\frac{1}{2t}, \quad y = \frac{A_{23}+A_{12}t}{A_{33}+2A_{13}t+A_{11}t^2}.$$

β) Ist $A_{33} = 0$, so erhalten wir mittels $u = tv$, wo t ein rationaler Parameter ist,

$$v = \operatorname{rac} \varphi(t), \quad u = t . \operatorname{rac} \varphi(t),$$

somit auch mittels der Gleichungen (16) rationale Werte für die Koordinaten x, y eines Punktes auf der Kurve C^3. Der Substitution $u = tv$ für C^2 entspricht bekanntlich $y = tx$ für C_3.

Auf die reziproken Entwicklungen zur Konstruktion der rationalen Kurven vierter, beziehungsweise dritter Klasse möge nur hingewiesen werden. Hier würden wir den Kegelschnitt als eine Kurve zweiter Ordnung C_2 transformieren mittels der Gleichungen (4), beziehungsweise (16').

Über das radioaktive Verhalten des Wassers von Graz und seiner Umgebung

von

Dr. Albert Wellik.

Aus dem physikalischen Institut der k. k. Universität in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. November 1908.)

J. J. Thomson[1] hat, geleitet von der Erkenntnis, daß die Leitfähigkeit gewöhnlicher Luft beträchtlich zunahm, wenn er sie durch Cambridger Leitungswasser hindurchpreßte, als erster schon im Jahre 1902 gezeigt, daß man durch Erhitzen des Wassers zum Sieden oder mittels Durchperlen der Luft die radioaktive Emanation in Freiheit setzen kann. Seitdem wurden die Untersuchungen des Emanationsgehaltes von vielen Autoren in Angriff genommen, unter anderen 1902 von H. S. Allen[2] und Lord Blythswood in England, 1904 von P. Curie und A. Laborde[3] in Frankreich, in demselben Jahre in Deutschland von Himstedt,[4] Elster und Geitel,[5] Dorn[6] und Schenk,[7] ferner 1904/1905 eine Reihe von Untersuchungen des Emanationsgehaltes in den Quellen der bedeutendsten österreichischen Bäder von H. Mache und St. Meyer.[8]

---

1 J. J. Thomson, Phil. Mag., Sept. 1902.

2 H. S. Allen und Lord Blythswood, Nature, 68, p. 343 (1903); 69, p. 247 (1904).

3 C. R., 138, p. 1150 (1904).

4 F. Himstedt, Ann. d. Phys., 13, p. 573 (1904).

5 J. Elster und H. Geitel, Physik. Zeitschr., 5, p. 321 (1904).

6 E. Dorn, Abhandl. d. Naturf. Ges. Halle, 25, p. 107 (1904).

7 R. Schenk, Inauguraldiss. Halle 1904.

8 H. Mache, Wiener Sitzungsber., 113, Abt. IIa, p. 1329 (1904); H. Mache und St. Meyer, ebenda, 114, Abt. IIa, p. 355 und 545 (1905); H. Mache, St. Meyer und E. v. Schweidler, Wiener Anz. vom 16. Februar 1905.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war, die radioaktiven Eigenschaften einiger Quell- und Brunnenwässer von Graz und seiner Umgebung zu untersuchen, und zwar:

1. quantitativ vergleichbare Messungen des Emanationsgehaltes zu liefern;

2. den Charakter dieser Emanation durch Beobachtung der Abfallskonstante festzustellen;

3. die Abklingungskurven der erregten Aktivität bei allen Quellen, soweit nicht der geringe Betrag derselben eine genauere Messung illusorisch machte, zu bestimmen;

4. schließlich die eventuelle Anwesenheit radioaktiver Muttersubstanz in den hier untersuchten Wässern festzustellen.

An dieser Stelle sei ausdrücklich hervorgehoben, daß es bei den folgenden Untersuchungen nur möglich war, langlebige Emanationen direkt nachzuweisen. Da die Untersuchungen im Laboratorium durchgeführt wurden und von der Probeentnahme bis zur Messung größtenteils mehrere Stunden verstrichen waren, mußten sich die kurzlebigen Emanationen, wie Aktinium- und Thoremanation, naturgemäß der Beobachtung entziehen, es sei denn, daß sie in sehr beträchtlichen Mengen vorhanden sind. Nur rasch durchgeführte Messungen an Ort und Stelle mit einem transportablen Apparat können über das Vorhandensein derartiger Emanationen Aufschluß geben.

In zwei Fällen — wie später berichtet wird — in denen nach den ersten Messungen Thoriumemanation im Wasser anwesend zu sein schien, wurden auch mit einem Fontaktoskop an der Stelle der Probeentnahme die Versuche wiederholt.

I. Methode der Untersuchung.

Der Emanationsgehalt des Wassers wurde nach der jetzt allgemein üblichen, von Elster und Geitel[1] zuerst eingeführten Methode gemessen. Die Versuchsanordnung war der Mache'schen nachgebildet.

Auf einer Glasplatte war eine Blechplatte aufgelegt; darauf stand ein Exner'sches Elektroskop mit parallaxenfreier Spiegelablesung von Elster und Geitel. Die Eichung desselben wurde

---

[1] J. Elster und H. Geitel, Physik. Zeitschr., 3, p. 574 (1902).

mit Akkumulatoren vorgenommen, deren elektromotorische Kraft vorher mit einem Voltmeter genau bestimmt war. Als Zerstreuungskörper wurde nach einem Vorschlage E. v. Schweidler's ein Messingteller mit herabhängenden Stiften verwendet, um im ganzen Glockenraume gleichmäßig Sättigungsstrom zu erzielen. Darüber war eine große zylindrische Glasglocke, deren Innenwand mit einem dicht anschließenden Messingdrahtnetz ausgekleidet war, gestülpt, mit ihrem abgeschliffenen Rande auf die Glasplatte aufgesetzt und mit Vaselinfett vollständig abgedichtet. Das Elektroskop wurde durch ein Fenster aus Spiegelglas abgelesen und mittels eines die Glasplatte isoliert durchsetzenden, mehrfach rechtwinklig gebogenen Drahtstückes, welches durch Drehen an einem isolierenden Griffe mit den am Messingteller angelöteten Stiften zum Kontakt gebracht werden konnte, mit Trockensäule geladen. In der Glasplatte und in einer Öffnung der Glasglocke waren je ein Hahn luftdicht eingesetzt, so daß durch ein mittels eines Motors betriebenes Kautschukgebläse die in der Glasglocke befindliche Luft durch den einen Hahn angesaugt, hierauf in kräftigem Luftstrom durch das zu untersuchende Wasser getrieben, endlich über eine Chlorcalciumvorlage durch den zweiten Hahn wieder eingeführt werden konnte. Durch diesen in sich geschlossenen Luftstrom wird dem emanationshaltigen Wasser die Emanation entzogen und in den Meßraum eingeblasen, wo der Sättigungsstrom gemessen wird.

Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß die unten mitgeteilten Versuche sich nur auf die im Wasser absorbierte Emanation, nicht aber auf Quellgase erstrecken, weil bei keiner der aufgefundenen Quellen ein Aufsteigen freien Gases wahrgenommen wurde. Da die untersuchten Wässer auch nur geringe Mengen absorbierten Gases enthielten, konnte durchwegs die Verwendung der von H. Mache und St. Meyer eingeführten Vorschaltflasche unterbleiben; aus demselben Grunde wurde auch von dem Quecksilberabschluß Mache's und Meyer's Abstand genommen. Um aber dennoch eine eventuelle Undichtigkeit der Apparate unschädlich zu machen, wurde vor Beginn des Durchpressens etwas Luft aus der Glasglocke aspiriert, wodurch schon von Anfang an in

derselben und in den Verbindungsschläuchen ein geringerer Luftdruck herrschte, als dem jeweiligen Barometerstand außerhalb entsprach. Geringe Mengen absorbierten Gases, das beim Prozeß des Durchquirlens der Luft frei wird, hatten dann keine bedeutende Drucksteigerung im Apparat zur Folge. Nach Beendigung des Versuches wurde dann unmittelbar vor dem Abheben der Glasglocke der obere Hahn geöffnet und in der Tat fast immer ein schwaches Einströmen von Luft bemerkt, ein Beweis, daß im Glockenraume keine Drucksteigerung erfolgt war.

Zur Verwendung gelangten zwei Apparate, deren Dimensionen sich wesentlich unterschieden. Der Glassturz des ersten Apparates hatte ein Volumen von 27·3 dm^3, jener des zweiten ein solches von 14·3 dm^3. Das Volumen des Drahtnetzes war im ersten Falle 22·2 dm^3, im zweiten 10·4 dm^3. Die nach der Methode von Harms[1] bestimmten Kapazitäten der beiden Systeme betrugen für die erste Anordnung 18·0 *cm*, für die zweite 17·2 *cm*.

Die Zeit bis zum Erreichen des Gleichgewichtes der Emanation zwischen Wasser und Luft war selbst für das gleiche Wasserquantum niemals gleich; denn da kleine Reibungsunterschiede einen verschieden schnellen Gang des Motors bewirkten, war für die Förderungsmenge der Luft nicht die Zeit seiner Einschaltung maßgebend, sondern die Anzahl der stattgehabten Pressungen des Gummigebläses. Es wurde daher ein Zählwerk angebracht, welches nach jedesmaliger Pressung des Kautschukgebläses um eine Einheit vorwärts sprang. Bei einer Förderungsmenge von 7·0 *l* Luft in 100 Pressungen war dann — die stets verwendete Wassermenge betrug 7·5 *l*, um auch bei schwach aktiven Wässern gut meßbare Effekte zu erzielen — der Gleichgewichtszustand in 6000 Pressungen erreicht, welche in der Regel in einer Zeit von 2 bis $2^1/_2$ Stunden erfolgten. Aus mehrmaligen Versuchen nach dem Vorschlage von H. Schmidt[2] ergab sich, daß bei der verwendeten Versuchsanordnung nach 1000 Pressungen, d. i. bei einer Förderungsmenge von 70 *l* Luft durch 7·5 *l* Wasser 83·6% des

---

[1] Physik. Zeitschr., 5, p. 47 (1904).

[2] Physik. Zeitschr., 8, p. 107 (1907).

maximalen Sättigungsstromes erreicht waren. Es hätte demnach der Messungsvorgang wesentlich abgekürzt werden können; der Umstand jedoch, daß für die induzierte Aktivität oftmals ein zu geringer Betrag erhalten worden wäre, der eine genauere Beobachtung des zeitlichen Abklingens derselben vereitelt hätte, war bestimmend, von diesem abgekürzten Verfahren außer bei Kontrollversuchen und einigen fortlaufenden Aktivitätsmessungen des Grazer Leitungswassers keinen Gebrauch zu machen.

Die Untersuchung der Zerfallsprodukte der Emanation geschah in folgender Weise: Nach Beendigung der Messung des Sättigungsstromes wurde Glassturz und Drahtnetz abgehoben und durch kräftiges, aber vorsichtiges Ausblasen gelüftet, damit nicht die äußerst dünne Haut des aktiven Beschlages abbröckelt. Hierauf wurde Drahtnetz und Glassturz wieder aufgesetzt und durch einige Stunden das Abklingen der induzierten Aktivität beobachtet. Aus der hierfür erhaltenen Kurve wurde der Wert für die Zeit des Abhebens extrapoliert.

Es sei noch bemerkt: Bei der Elster-Geitel'schen Anordnung steht ein offenes Elektroskop im Inneren der Glasglocke; während der ganzen Zeit des Durchpressens der Luft durch das emanationshaltige Wasser diffundiert durch die vom Messingstift durchsetzte Öffnung des Elektroskopes Emanation in das Gehäuse hinein, die auch beim Lüften des Apparates durch Ausblasen durchaus nicht vollkommen entfernt wird Die Folge davon wird sein, daß durch die im Elektroskop nachher noch vorhandene geringe Spur der Emanation die Abfallszeit der induzierten Aktivität verlangsamt wird. Dieser Übelstand wurde zum Teil dadurch beseitigt, daß auf die Elektroskopöffnung ein kleiner Paraffinblock dicht aufgedrückt wurde. Allerdings stieg dann der ursprüngliche Strom um einige Hundertel Volt pro Minute. Derselbe blieb aber nach wie vor nahezu konstant. Die geringe Leitfähigkeit, die Paraffin unter der Einwirkung der Strahlen der Radiumemanation annimmt, brauchte naturgemäß nicht berücksichtigt zu werden.

Der Zerstreuungsteller wurde bei allen Messungen nur positiv geladen, um das Ansetzen des aktiven Niederschlages stets in der gleichen Weise am Drahtnetz zu erzielen.

Zur Methode der Untersuchung sei Folgendes bemerkt: Es bedeute

i_0 die ursprüngliche, am Elektroskop abgelesene Zerstreuung,
i den nach erreichtem Gleichgewicht gemessenen Sättigungsstrom,
i_i den auf die Zeit des Abhebens der Glasglocke extrapolierten Wert der induzierten Aktivität, vermindert um den auf den Reststrom entfallenden Teilbetrag i_0;

ferner bedeute:

R das Volumen des Meßraumes,
V das gesamte, für den Versuch abgeschlossene Luftvolumen,
v das untersuchte Wasserquantum und
E den zu bestimmenden Emanationsgehalt in der Volumeinheit Wasser;

endlich sei

α der Teilungskoeffizient des Wassers für Emanation.

Drückt man die Tatsache, daß die gesamte, vor Beginn der Messung in der Versuchsanordnung enthaltene Emanationsmenge gleich jener nach dem Erreichen gleichmäßiger Verteilung im ganzen Kreise ist, durch eine Gleichung aus, so gilt:

$$v.E = \frac{i-i_0-i_i}{R}(V+\alpha v);$$

setzt man zur Abkürzung $i-i_0-i_i = i'$, dann erhält man den zu bestimmenden Betrag des Emanationsgehaltes in der Volumeinheit Wasser:

$$E = \frac{V+\alpha v}{Rv} \cdot i'.$$

Darin bedeutet α, wie erwähnt, den Teilungskoeffizienten des Wassers für Emanation. Er gibt für das Emanationsgleichgewicht das Verhältnis der in der Volumeinheit des Wassers enthaltenen Emanationsmenge zu der in der Volumeinheit Luft vorhandenen Emanationsmenge

$$\alpha = \frac{E}{v} : \frac{e}{V}.$$

Man wird für den Wert von α in genügender Übereinstimmung mit den von v. Traubenberg[1] für Freiburger Leitungswasseremanation, von Mache[2] für Gasteiner Emanation und R. Hofmann[3] für künstlich aktiviertes Wasser bei Zimmertemperatur gefundenen Zahlen unbedenklich etwa $^1/_8$ setzen dürfen.

In der obigen Formel ist auch die Korrektur, welche angebracht werden muß, um denjenigen Betrag der Emanation in Rechnung zu ziehen, der in der Chlorcalciumvorlage, den Schlauchverbindungen, im Gebläse, ferner im Luftraum oberhalb des Drahtnetzes und des Versuchswassers, endlich auch noch im Wasser nach erreichtem Gleichgewichte zurückbleibt und zum Sättigungsstrom im Meßraume R selbst nichts beiträgt, schon enthalten.

Was die Wahl der Dimension der Gefäße anlangt, so ist theoretisch bei gegebenem Wasserquantum bei unendlich großem Meßraume der größte Sättigungsstrom zu erwarten, wie sich aus der obigen Formel ergibt:

$$i' = E\frac{R.v}{V+\alpha v} = Ev\frac{1}{1+\frac{v'+\alpha v}{R}},$$

wobei v' das oberhalb des Meßraumes im Glassturze, in der Trockenvorlage, im Gebläse und in den Schlauchverbindungen enthaltene Luftquantum bedeutet, so daß $v' = V-R$ ist.

Aus dieser Formel ersieht man, daß bei den gewählten Dimensionen das ideale Maximum bis auf 31·5% bei der ersten, auf 46·5% bei der zweiten Anordnung erreicht war. Mit Rücksicht auf die Dauer der Versuche wurde das Wasserquantum aus praktischen Gründen nicht größer als 7·5 *l* gewählt, das, wie es sich zeigte, auch hinreicht.

II. Durchführung der Messungen.

Aufsuchung und Probeentnahme des Wassers. Bei der vorliegenden Arbeit wurden vornehmlich die Quellen

---

[1] Physik. Zeitschr., 5, 130 (1904).

[2] Wiener Sitzungsber., 113, p. 1329 (1904).

[3] Physik. Zeitsch., 6, 337 (1905).

und Brunnen jenes Niederschlagsgebietes in Betracht gezogen, das von den gegen das Grazer Becken hin abfallenden Lehnen der Hügel und Berge gebildet wird, welche die Stadt Graz am rechten Murufer von Straßgang bis Judendorf und am linken Murufer von Weinzödl bis Raaba einrahmen.

Mit Ausnahme des ausgedehnten Schöcklgebietes wurden die Lehnen mit Aufmerksamkeit begangen und unter Zuhilfenahme von Erkundigungen fast sämtliche Quellen besucht, so daß jedenfalls mehr als 50% aller in diesem Gebiete zutage tretenden Quellen in Untersuchung gezogen erscheinen, während dies beim östlichen Gehänge des Schöckls nur bezüglich eines kleinen Bruchteiles der vorhandenen Quellen der Fall ist.

Obschon es sich empfehlen würde, eine wiederholte Probeentnahme und Untersuchung der Quellwässer vorzunehmen, weil die Quellen nur aus dem Wasser der meteorischen Niederschläge entstehen und je nach der Absorptionsfähigkeit des Bodens für Niederschlagswasser viele derselben während der Regenzeit stärker fließen als während trockener Zeiten, demnach eine Veränderlichkeit ihres Emanationsgehaltes mit der Jahreszeit nicht ausgeschlossen ist, so mußte ich mich doch in den meisten Fällen auf eine einmalige Probeentnahme beschränken.

Hingegen wurde beim Füllen der Wasserprobeflaschen mit großer Vorsicht zu Werke gegangen, um unter Vermeidung einer Durchrüttlung oder Berührung des Probewassers mit Luft ein Entweichen der Emanation möglichst zu verhindern.

Die Flaschen wurden stets vollständig gefüllt, um auch beim Transport eine Luftdurchmischung des Wassers zu vermeiden, und durch Kautschukstöpsel luftdicht abgeschlossen. Um dann die Zirkulation des Blasenstromes zu ermöglichen, wurden von den 8 *l* enthaltenden Flaschen, ohne den Verschluß zu entfernen, durch Öffnung der beiden Hähne und mittels Heberwirkung eines an die lange Röhre angesetzten Schlauches 0·5 *l* abgelassen.

Ausführung der Messungen. Beobachtet wurde zunächst i_0; hierauf wurde das Wasserquantum in den geschlossenen Luftkreis eingeschaltet und die Luft durch das zu untersuchende Wasser bis zur Erreichung des Emanations-

gleichgewichtes, d. i. 2 bis $2^1/_2$ Stunden, gepreßt. Dann wurde i durch Beobachtung ermittelt. Da die in den Meßraum R eingeblasene Emanation auf die Wände des Gefäßes induzierend eingewirkt hat, wurde nach Beendigung des Durchpumpens Glassturz und Drahtnetz abgehoben und der Apparat kräftig gelüftet; nachdem beide wieder aufgesetzt waren, konnte i_i, das ist der auf die Induktion entfallende Teilbetrag des Sättigungsstromes, beobachtet werden. Dieser wurde dann auf die Zeit des Abhebens der Glasglocke extrapoliert. V, R, v konnte durch Messung ermittelt werden. Setzt man die in einem speziellen Falle für i_0, i und i_i gefundenen Werte in die obige Gleichung ein, so ergibt sich daraus der zu bestimmende Emanationsgehalt in der Volumeinheit Wasser.

III. Beschreibung der Lage der untersuchten Quellen.

Um zur Feststellung einer eventuellen Veränderlichkeit des Emanationsgehaltes der hier in Bearbeitung gezogenen Quellen ein späteres Auffinden zu ermöglichen, folgt nachstehend eine kurze Beschreibung derselben:

A. Rechtes Murufer: Niederschlagsgebiet des nördlichen Gehänges des Florianiberges, östlichen Gehänges des Buchkogels, östlichen und westlichen Gehänges des Ölberges, östlichen Gehänges des Kollerberges und Mühlberges, östlichen, westlichen und nördlichen Gehänges des Plabutsch (Fürstenstand) und nordöstlichen Gehänges des Frauenkogels.

17. Quelle am nördlichen Abhang des Florianiberges, ungefähr 700 *m* östlich[1] von Straßgang (sogenanntes »Kasparbründl«), vom Friedhof Straßgang ostwärts durch einen schwach ansteigenden Waldweg erreichbar. Die Quelle fließt in ein betoniertes Becken, das als Wasserbehälter für einen Teil der Straßganger Wasserleitung dient.

19. Quelle am nördlichen Abhange des Florianiberges, 1800 *m* östlich von Straßgang.

---

[1] Alle angegebenen Entfernungen beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, auf die Horizontalprojektion und auf die Mitte der zunächst liegenden Ortschaft als Ausgangspunkt.

33. Quelle, beziehungsweise Reservoir am Südabhange des Buchkogels, im Kehlberg gelegen. Von ihr führt eine 1·6 *km* lange Holzröhrenleitung in den Schloßhof St. Martin. An der Mündung derselben wurde die Flasche gefüllt.

42. Quelle »Beim Bründl«, südlich der Ackerbauschule Grottenhof, am nordöstlichen Fuße des Steilabhanges des Buchkogels entspringend, durch reiche Wassermenge ausgezeichnet. Die Füllung erfolgte aus dem vor der Mündung sich bildenden Becken.

32. Leitungswasser der steiermärkischen Landesackerbauschule Grottenhof. Aus dem oberhalb des Direktionsgebäudes gelegenen Reservoir konnte die Probeentnahme aus hygienischen Gründen nicht erfolgen, sondern geschah am Ende einer an dasselbe angesetzten, etwa 100 *m* langen Eisenröhrenleitung.

22. Quelle, 50 *m* westlich und oberhalb der Ortschaft Krottendorf, am südöstlichen Fuße des Ölberges (Sanatorium Schweizerhof); bei den am 10. Juni 1907 vorgenommenen Grabungen am Bergabhange füllte sich eine 1·5 *m* tiefe Grube aus mehreren kleinen Zuflüssen stets in kurzer Zeit mit Wasser. Die Grube wurde mittels einer Feuerspritzpumpe vollständig entleert und von dem innerhalb 5 Minuten in die Grube nachgeflossenen Wasser die Probe direkt in die Flasche gepumpt.

59. Quelle bei der Militärschießstätte am Feliferhof. Von den vielen unterhalb der großen Schießhalle innerhalb 4 km^2 entspringenden Quellen wurde aus der am leichtesten fangbaren Quelle geschöpft.

71. Quelle in der Einöde, 620 *m* südwestlich von Wetzelsdorf, am Ostabhange des Ölberges. Eine zirka 100 *m* lange Röhrenleitung ist von der eigentlichen Quelle, die nicht zugänglich ist, bis zum Bade Einöd gelegt. An der Ausflußstelle erfolgte die Probeentnahme.

36. Leitungswasser der Hubertusvilla (Lindenhaus) in Wetzelsdorf (Rechbauerweg Nr. 35). Das Reservoir befindet sich etwa 1 *km* westlich ober Wetzelsdorf. Die Probeentnahme geschah am Ende der Leitung im Parke der Villa.

34. Wasserreservoir, 800 *m* westlich von Wetzelsdorf nach Thal, am Zusammenstoß des Südabhanges des Kollerberges

und des Nordabhanges des Ölberges gelegen. Das aus dem Reservoir überfließende Wasser wurde eingefüllt.

43. Quelle, beziehungsweise Wasserbehälter des Schlosses Eggenberg, südöstlich des Gaisberges, oberhalb der Ortschaft Baierdorf gelegen; das aus dem Reservoir überfließende Wasser macht die Größe eines kleinen Baches aus. Die Probeentnahme erfolgte an der Ausflußstelle aus dem Behälter.

65. Richardquelle im Parke der Kuranstalt Eggenberg (Fassung 1899). Der Quellursprung ist durch einen 30 *m* langen Stollen zu erreichen. Die Quelle selbst ist nach starkem Regen ziemlich wasserreich; zur Zeit großer Trockenheit vermindert sich ihre Ergiebigkeit bedeutend. Die Probeentnahme erfolgte an der Mündung der ungefähr 50 *m* langen Röhrenleitung.

64. Wasserbecken, 100 *m* unterhalb der Einsiedelei in Eggenberg, südöstlich der Selmaquelle (Sickerwasser). Der Zufluß in das Becken erfolgt unterhalb des Wasserspiegels. Er steht mit der Selmaquelle wahrscheinlich in keinem Zusammenhange. Die in der Nähe befindliche sogenannte Selmaquelle liefert während eines großen Teiles des Jahres überhaupt kein Wasser. Auch in den Monaten Juni bis Oktober des Jahres 1907 war sie gänzlich versiegt.

66. Wasserbecken (Sickerwasser), wenige Schritte oberhalb der sogenannten Selmaquelle gelegen. Ein Zusammenhang mit der Einsiedeleiquelle ist nicht ausgeschlossen.

67. Einsiedeleiquelle, oberhalb des Kurhauses Eggenberg, am Südgehänge des Mühlberges. Der Quellursprung ist am Ende eines 80 *m* langen, künstlich getriebenen Stollens, woselbst das Wasser aus der Höhe von 2 *m* wasserfallartig herabstürzt. Auch diese Quelle ist nach Zeiten großer Trockenheit sehr wasserarm. Bis zum eigentlichen Ursprung kann man wegen des dort stark sich verengenden Stollens nicht gelangen. Die Probeentnahme erfolgte oberhalb des 2 *m* hohen Wasserfalles.

65, 64, 66, 67 sind keine Quellen im eigentlichen Sinne; sie entspringen aus der Eggenberger Breccie, einem durch Umlagerung entstandenen Trümmergestein, das der Bildung von Quellen überhaupt ungünstig zu sein scheint.

27. Quelle, beziehungsweise Wasserreservoir, 450 *m* nordwestlich der Kirche Eggenberg, am südöstlichen Gehänge des Mühlberges, oberhalb der neuerbauten Villa Schaffer gelegen. Vom Reservoir führt zu dieser eine 500 *m* lange Röhrenleitung, an deren Mündung die Füllung der Flasche erfolgte.

39. »Floraquelle«, südwestlich von Gösting, am Westabhange des Bauernkogels (Fürstenstandes), etwa 0·8 *km* oberhalb der Straße, die von Gösting nach Thal führt.

23. Quelle, 200 *m* westlich der Ortschaft Plabutsch, am Südrande des sogenannten Steinbruchweges (Göstingerstraße Nr. 19). Von dem Ursprung der Quelle, der nicht zugänglich ist, führt eine 150 *m* lange Eisenröhrenleitung zum Steinbruchplatze. Die Füllung geschah am Ende dieser Leitung.

21. Quelle, 300 *m* westlich der Ortschaft Plabutsch, am Nordrande des sogenannten Steinbruchweges entspringend (Reservoir der Kesselfabrik Saiz). Man steigt in einen 4 *m* tiefen Schacht, von dem aus der Ursprung der Quelle durch einen 6 *m* langen unterirdischen Gang erreichbar ist. Dort wurde die Probe entnommen.

20. Quelle unterhalb des Wasserbehälters des k. u. k. Monturdepots, zirka 850 *m* nordwestlich der Ortschaft Plabutsch, am Ostfuße des Bauernkogels an der Göstingerstraße. Die Quelle ist primitiv gefaßt. Die Probeentnahme wurde an der Mündung der Röhre vorgenommen.

28. Wasserbehälter des Plabutscher Schlosses, 1000 *m* nordwestlich der Ortschaft Plabutsch, am östlichen Abhange des Bauernkogels, im Parke oberhalb des Schlosses gelegen. Fünf Quellen, die nicht getrennt aufgefangen werden konnten, fließen in ein großes Sammelbecken, aus dem die Probe entnommen wurde.

30. Quelle 500 *m* südöstlich von Gösting, am nordöstlichen Fuße des Bauernkogels, oberhalb des Brauhauses Gösting. Sie ergießt sich zunächst in ein großes Reservoir; da der Zufluß unter dem Wasserspiegel erfolgt, wurde der Zeitpunkt abgewartet, bis das Reservoir zwecks Reinigung ausgepumpt wurde; dann war die Mündung der Quelle zugänglich und es konnte die Probeentnahme erfolgen. Am Ende einer an dieses Reservoir angesetzten

31. Röhrenleitung (200 *m* lang) wurde eine weitere Probe entnommen. Bei dem großen Fassungsraume des Reservoirs steht das Wasser längere Zeit, bis es zum Auslaufe gelangt. Die am Ende der Leitung entnommene Probe zeigt einen Verlust des Emanationsgehaltes von 18·3% von der am Ursprung der Quelle enthaltenen Emanationsmenge.

38. Quelle, beziehungsweise Wasserreservoir, 300 *m* südwestlich des Schlosses Gösting (Villa Dr. K. Laker). Der Quellursprung war nicht erreichbar. Aus dem 2 *m* tiefen Becken fließt das Wasser nur langsam ab. Der für den Sättigungsstrom erhaltene Wert ist daher als untere Grenze zu betrachten. Durch Pumpen mittels einer bis auf den Grund des Reservoirs reichenden eisernen Saugpumpe wurde die Probe entnommen.

8. Quelle, 200 *m* südlich und unterhalb der Ruine Gösting. Von der »Villa Annenheim« führt ein schmaler Waldweg westwärts zur Quelle hinab. Dieselbe versiegt zeitweise und ist nicht gefaßt, sondern fließt aus vielen kleinen Kanälchen in ein aus Trockenmauerwerk hergestelltes Becken, aus dem die Probeentnahme erfolgte.

26. »Johannenquelle« (K. J. Schwarz' Hochquellenwasserleitung), etwa 500 *m* nordwestlich der Ortschaft Raach, am Nordostabhange des Steinberges. Die Probe wurde nicht aus dem Reservoir entnommen, sondern am Ende einer an dieses angesetzten, etwa 200 *m* langen Eisenröhrenleitung. Die Quelle selbst ist derart ergiebig, daß das über das Reservoir überfließende Wasser die Größe eines kleinen Baches ausmacht.

37. Wasserreservoir, 600 *m* südwestlich von Judendorf, 400 *m* östlich der Kirche Straßengel am Waldrande. Da das Reservoir mit einer Steinplatte vermauert war, geschah die Entnahme der Probe am Ende einer etwa 80 *m* langen Röhrenleitung.

41. Quelle der »sieben Bründl« zwischen Raach und Judendorf, 1 *km* östlich der Eisenbahnstation Judendorf. Von der Quelle führt eine 10 *m* lange Holzröhrenleitung, an deren Ende sieben Ausflußröhren angesetzt sind, unterhalb des Bahndammes zur Straße. An der Mündung einer der Röhren wurde die Probeentnahme vorgenommen.

B. Linkes Murufer: Südliches Gehänge des Kanzlkogels und Rohrerberges, westliches Gehänge des Kohlernicklkogels, südwestliches Gehänge des Schöckls, südliches Gehänge der Platte, Nordlehne des Mariatroster Tales, West- und Südlehne des Ruckerlberges und Westlehne des Höhenrückens bis Raaba, endlich die Schöpfbrunnen des Grazer Wasserwerkes in der Talsohle und einige Brunnen von Graz.

24. Quelle, 400 *m* nördlich der Ortschaft Weinzödl, am Südabhange des Admonterkogels. Die sehr ergiebige Quelle, die auch zur Zeit großer Trockenheit nicht wasserärmer wird, entspringt in unmittelbarer Nähe der Villa Dr. Metz am Waldrande. 10 *m* von ihr entfernt, entspringt eine noch reichlicher fließende Quelle, die aber nicht zugänglich war.

35. Quelle, 750 *m* nördlich des Schlosses St. Gotthard, am Ostabhange des Kanzlkogels (Admonterkogels). Die Quelle fließt aus einer Felsspalte in ein kleines, natürliches Becken, aus dessen Grunde die Probeentnahme erfolgte.

62. Quelle am Rohrerberg, 1000 *m* nördlich von St. Veit, nicht gefaßt.

40. Ursprung des Pailbaches, dessen Mündung in die Mur 1·8 *km* oberhalb der Weinzödlbrücke erfolgt, nördlich des Dynamitmagazins des k. u. k. Artilleriezeugsdepots in Schattleiten.

9. Andritzursprung, am Fuße der nach Südwest steil abfallenden Kalchleiten. Die Quellen des Ursprunges der Andritz fließen in ein großes natürliches Bassin von 2 bis 3 *m* Tiefe. Nahe dem Zufluß, der unter dem Wasserspiegel erfolgt, führt über dasselbe ein schmaler Steg. Von diesem aus konnte die Füllung vorgenommen werden.

Von den am Südostfuße des Schöckls in und oberhalb Radegund entspringenden Quellen wurden folgende untersucht:

1. Melaniequelle (Fassung 1864), westlich Radegund, am Hohenwartsteig ($t = 9 \cdot 2°$ C.).

4. Theresienquelle, nördlich des Kurhauses Radegund entspringend ($t = 8 \cdot 7°$ C.).

3. Bertaquelle, nordöstlich des Polensteines, oberhalb der Douchequelle gelegen ($t = 7 \cdot 8°$ C.).

5. Schindlerquelle (Fassung 1864), östlich der Bertaquelle ($t = 8 \cdot 5°$ C.).

2. Rosaquelle (Fassung 1903, $t = 9 \cdot 3°$ C.).

6. Source des paresseux, nördlich des Teiches von Radegund, auf dem Wege vom Kursaal zur Rosaquelle gelegen ($t = 10 \cdot 8°$ C.).

7. Eremitenquelle (Fassung 1870), entspringt an der Südseite der Kirche von Radegund ($t = 8 \cdot 7°$ C.).

Sämtliche untersuchten Radegunder Quellen sind sehr gut gefaßt.

8. Annenquelle in Mariatrost. Dieselbe entspringt am rechten Ufer des Kroisbaches, unterhalb der Brücke in Mariatrost. Der Ursprung der Quelle liegt nur wenig höher als das Niveau des Baches.

50. Leitungswasser auf der Anhöhe der Mariatrosterkirche, dessen Reservoir auf der sogenannten »Fasslhöhe« gelegen ist. Die Länge der Röhrenleitung beträgt 2·4 *km*.

11. Quelle am Südwestabhange der Platte, unterhalb des Gehöftes »Lechbauer«. Die Quelle fließt in vielen kleinen Äderchen in ein aus Trockenmauerwerk angelegtes Becken. Auf den Grund desselben wurde ein Schlauch eingeführt und die Flasche gefüllt.

52. Quelle nordöstlich der Ziegelbrennerei in Unterandritz, 750 *m* östlich von Unterandritz, am Unterweizbache.

12. Ulrichsquelle (Ulrichsbrunnen), nordöstlich des Steinbruches Andritz, südlich von Unterandritz, in der Kirche St. Ulrich. Die Quelle entspringt hinter dem Hochaltar der Kirche St. Ulrich (Ulrichsquelle) und fließt zunächst in ein gefaßtes Becken. Da weder Mündung der Quelle noch Becken zugänglich war, wurde die Probe am Ende der an das Becken angesetzten, etwa 150 *m* langen Holzröhrenleitung entnommen (»Ulrichsbrunnen«).

45. Quelle im Keller des Hauses Quellengasse Nr. 86 am Rosenberg. Die Quelle fließt in ein gemauertes, 3 m^3 fassendes Becken. Da die Quelle, deren Zufluß unter dem Wasserspiegel erfolgt, wenig ergiebig ist, dürfte das Wasser schon längere Zeit gestanden haben, so daß der für den Emanationsgehalt gemessene Wert jedenfalls als untere Grenze zu betrachten ist.

61. Quelle im Mariagrünerwalde, 1200 *m* nordwestlich von Kroisbach. Dieselbe ist gut gefaßt und leicht zugänglich.

13. Quelle am Südabhange des Rainerkogels, 200 *m* unterhalb der Rainerwarte gelegen. Das Wasser fließt in vielen kleinen Äderchen in ein 1 m^3 Wasser fassendes Becken. Dasselbe wurde vorerst mittels der Heberwirkung des Schlauches entleert. Nachdem in 15 Minuten das Wasser wieder bis zum oberen Rande gestiegen war, geschah die Probeentnahme vom Grunde des Beckens.

14. Quelle am Südwestabhange des Rainerkogels, 150 *m* unterhalb der Rainerwarte. Charakter der Quelle wie 13.

10. Quelle nordöstlich des Karmelitenklosters an der Grabenhofstraße. Dieselbe stellt sich dar als ein etwa 5 *m* tiefes, aus Trockenmauerwerk hergestelltes Sammelbecken, in das das Wasser des anliegenden durchtränkten Bodens sowohl seitlich wie von unten innerhalb der durch die konstante Wasserstandshöhe von 2 *m* gegebenen Zone durch die feinen Erdkapillaren eindringt. Da die Quelle somit direkt nicht fangbar ist, wurde das Reservoir zunächst rasch mit einer starken Saugpumpe entleert und, nachdem in 10 Minuten sich dasselbe wieder bis 2 *m* gefüllt hatte, die Probeentnahme durch direktes Pumpen in die Flasche vorgenommen.

57. Quelle am Westabhange des Rosenberges, an der Quellengasse gelegen, entspringt in einer ausgemauerten Vertiefung.

68, 69, 70, 73. Quellen Nr. I, II, III, IV des sogenannten »Quellengartens« am Südwestfuße des Rosenberges (Körblerstraße Nr. 43, ehemals Sanatorium Gondola), sämtliche sind gut gefaßt. Ein Zusammenhang zwischen 69 und 70 ist nicht ausgeschlossen. Die Probeentnahme erfolgte bei allen vier Quellen durch Ansetzen des Schlauches an die Ausflußröhre und Einführung desselben auf den Boden der Flasche.

25. Türkenbrunnen am Grazer Schloßberg. Der Brunnen ist 95 *m* tief, der Grund desselben also 1 *m* unter dem Niveau der Mur. Der Zufluß des Wassers erfolgt am Grunde von vier Seiten, so daß sicher nicht die gesamte Wassermenge von der Mur herrührt. Die Schöpfung erfolgte durch Hinabsenken eines 80 *l* fassenden Eimers.

58. Wasserreservoir des Haller Schlosses am Westabhange des Ruckerlberges. Das Wasser fließt durch einen Kanal in ein großes, mit Holzverkleidung überdachtes Bassin. Da die Quelle selbst nicht erreichbar ist, erfolgte die Probeentnahme vom Spiegel des Bassins mit Schöpfer und Einfüllung in die schräg gehaltene Flasche.

47. Quelle in Waltendorf (Hauptstraße Nr. 36), 500 *m* nordöstlich von Waltendorf. Die Quelle ist der Zufluß des hinter dem genannten Hause gelegenen Teiches, der im Sommer abgelassen ist. Die Quelle war daher zugänglich.

48. Quelle, 600 *m* nördlich Raaba, an der westlichen Lehne des Bergrückens Messendorf—Raaba. Die Probeentnahme der ergiebigen Quelle erfolgte wegen sehr geringen Gefälles des abfließenden Wassers mit Schöpfer und Einfüllen in die schräg gehaltene Flasche.

75—81. Das Grazer Wasserwerk. Eine ausführliche Angabe der Lage der Schöpfstellen und ihrer Entfernung von der Mur findet sich am Anfang der diesbezüglichen Abhandlung Dr. H. Hammerl's.[1]

Daraus sei die gegenseitige Entfernung der Brunnen entnommen; sie beträgt:

Vom Hauptbrunnen zum Hofbrunnen					35 *m*
»	Hofbrunnen zum I. Wiesenbrunnen				143
»	I. Wiesenbrunnen zum II. Wiesenbrunnen				140
»	II.	»	» III.	»	140
»	III.	»	» IV.	»	120

Außerdem ist seit 1896 eine weitere Schöpfstelle, das Andritzer Schöpfwerk, angelegt, welches in der Richtung nach Norden, 2·4 *km* vom IV. Wiesenbrunnen entfernt, liegt.

---

1 Archiv für Hygiene, XXVII. Bd., 1896, p. 264. »Das Wasserwerk der Stadt Graz vom hygienischen Standpunkt aus betrachtet«, von Dr. H. Hammerl.

Die Distanz der einzelnen Schöpfstellen von der Mur ist:

Von der Mur zum	Hauptbrunnen	44 *m*
»	Hofbrunnen	37
»	I. Wiesenbrunnen	19
»	II. »	20
»	III. »	30
»	IV. »	35
zur	Andritzer Schöpfstelle	100

IV. Messungsergebnisse.

1. Emanationsgehalt des Wassers.

In folgender Tabelle sind die Resultate der Messungen zusammengestellt.

Die erste Kolumne enthält den Emanationsgehalt der untersuchten Wässer, ausgedrückt in absoluten elektrostatischen Stromeinheiten, bezogen auf einen Liter Wasser. Diese Zahlen sind der Bequemlichkeit halber mit 10^3 multipliziert und bedeuten somit die tausendfache Stärke desjenigen Sättigungsstromes in elektrostatischen Einheiten, den die in einem Liter Wasser enthaltene Emanation unterhalten kann; sie sind von den Dimensionen des benutzten Apparates unabhängig, bilden ein absolutes Maß des Emanationsgehaltes und sind mit den von H. Mache und St. Meyer (l. c.) für die wichtigsten österreichischen Bäder gefundenen analogen Daten direkt vergleichbar.

Die Zahlen enthalten die bereits oben angegebene Korrektur wegen der Aktivierung durch Induktion sowie auch wegen des nicht zur Beobachtung kommenden Betrages der in den Vorlagen und im Wasser selbst nach erreichter homogener Verteilung zurückbleibenden Emanation. Auch sind hierin alle Angaben mittels der Abfallskonstanten der Emanation auf die Zeit der Probeentnahme (zweite Kolumne) reduziert.

Da ein Zusammenhang der Größe des Emanationsgehaltes mit dem geologischen Aufbau des wasserführenden Bodens

sich unverkennbar kundgibt, ist die Aneinanderreihung der untersuchten Quellen und Brunnen in der tabellarischen Zusammenstellung der Messungsergebnisse nach dem Alter des Gesteins, aus dem die Quellen an der Erdoberfläche zutage treten, durchgeführt. Bezüglich der in diesen Tabellen bei einzelnen Gruppen der vorerwähnten Annahme scheinbar widersprechenden Aktivitätsgrößen wird unter Hinweis auf die geologische Karte von Prof. R. Hörnes (Geologische Manuskriptkarte von Graz und Umgebung, 1 : 14.000) auf die Wahrscheinlichkeit aufmerksam gemacht, daß die betreffenden Wässer längere Zeit mit einer Gesteinsart in Berührung gewesen sein dürften, welche größere Mengen radioaktiver Emanation an das Wasser abgibt als jene Bodenart, die an der Stelle des Wasseraustrittes sichtbar ist. Die Angaben in Tabelle I, die Aktivität des Grazer Wasserwerkes betreffend, sind nur als Annäherungen zu betrachten, da die Aktivität sehr variabel ist.[1]

[1] Siehe A. Wellik, die Radioaktivität des Grazer Trinkwassers und ihre Abhängigkeit vom Stande der Mur. Mitt. des nat. Ver. für Steiermark, 1909.

Tabelle I.

Zusammenstellung der quantitativen Messungsergebnisse der auf Radioaktivität untersuchten Quell- und Brunnenwässer von Graz und Umgebung.

Nr.	Bezeichnung der Quellen, beziehungsweise Brunnen	Oberflächlich liegende Bodenarten		$i.10^3$ in e. s. E.	Korrektionszeit in Stunden	(HC) des III. Stad. der Induktion in Minuten	$i.10^6$ in e. s. E. der nachgebildeten Emanation	Milligramm radioaktiver Substanz in 10^8 l Wasser	Anmerkung
1	Melaniequelle (am Südostfuße des Schöckls in Radegund)	Urgestein	Gneis v. Radegund	12·9	27 1/4	28	23·4	7·8	
2	Rosaquelle (am Südostfuße des Schöckls in Radegund)			12·5	13 1/2	35	48·8	16·3	
3	Bertaquelle (am Südostfuße des Schöckls in Radegund)			11·6	14	36	27·3	9·1	
4	Theresienquelle (am Südostfuße des Schöckls in Radegund)			10·3	24	32	15·3	5·1	
5	Schindlerquelle (am Südostfuße des Schöckls in Radegund)			9·41	17	33	8·9	3·0	
6	Source des paresseux (am Südostfuße des Schöckls in Radegund)			8·82	31 1/4	28	6·7	2·2	
7	Eremitenquelle (am Südostfuße des Schöckls in Radegund)			6·24	12	34	9·6	3·2	
8	Annenquelle in Mariatrost	Silur	*a)* Schöcklkalk	0·88	16 1/2	29	3·1	1·0	
9	Andritzursprung			0·08	48	30*	—	—	
10	Quelle NE des Karmelitenklosters an der Grabenhofenstraße		*b)* Semriacher-schiefer	2·58	19 1/2	38*	—	—	
11	Quelle am SW-Abhang der Platte			0·83	18	36*	—	—	

12	Ulrichsbrunnen NE des Steinbruches Andritz	Silur		0·62	48	36*	0	0	
13	Quelle am Südabhang des Rainerkogels	Silur		0·60	$4^1/_4$	—	0	0	
14	Quelle am SW-Abhang des Rainerkogels (Villa Margot)	Silur		0·23	$25^1/_4$	36*	—	—	
15	Brunnenwasser von der Platte (Stephaniewarte)	Silur		0·12	$5^1/_4$	28	5·7	1·9	
16	Brunnenwasser westl. des Schlosses Gösting (Gösting Nr. 87)..	Silur	*c)* Bythotrephisschiefer	1·34	24	28	0	0	
17	Quelle am Nordabhang des Florianiberges (»Kasparbründl«)...	Unterdevon	*a)* Quarzit und Dolomit	2·33	5	30	0	0	
18	Quelle unter der Ruine Gösting (Villa Annenheim)...........	Unterdevon		1·57	18	34	9·6	3·2	
19	Quelle am NW-Abhang des Florianiberges	Unterdevon		1·52	5	30	10·1	3·4	
20	Quelle unterhalb des Wasserbehälters des k. u. k. Monturdepots .	Unterdevon		1·48	$17^3/_4$	28	0	0	
21	Quelle an der Göstingerstraße oberhalb des Steinbruchweges	Unterdevon		0·58	$17^1/_2$	28	0	0	
22	Quelle westlich von Krottendorf (Sanatorium Schweizerhof) ...	Unterdevon		0·49	$18^1/_2$	28	5·4	1·8	
23	Quelle am Südrand des Steinbruchweges (Göstingerstraße 19) ...	Unterdevon		0·48	18	33	8·2	2·7	

Nr.	Bezeichnung der Quellen, beziehungsweise Brunnen	Oberflächlich liegende Bodenarten	$i . 10^3$ in e. s. E.	Korrektionszeit in Stunden	(HC) des III. Stad. der Induktion in Minuten	$i . 10^6$ in e. s. E. der nachgebildeten Emanation	Milligramm radioaktiver Substanz in 10^8 *l* Wasser	Anmerkung
24	Quelle nördlich von Weinzödl, am Südabhang des Admonterkogels	Unterdevon	0·29	21¼	—	4·1	1·4	
25	Türkenbrunnen am Grazer Schloßberg		0·09	3¼	35	34·1	11·4	
26	Johannenquelle, NW der Ortschaft Raach....................		0·08	27	36, 11h	31·4	10·5	Außer Ra noch Th
27	Wasserreservoir der Villa Schaffer am Fürstenwartweg in Eggenberg		0·08	18	30	0	0	
28	Wasserreservoir des Plabutscher Schlosses, NW der Ortschaft Plabutsch		0·01	17¼	27	0	0	
29	Brunnenwasser der Villa Dr. Caspaar in Gösting............		0·00	27¾	—	15·3	5·1	
30	Quelle südlich von Gösting, bei der Schießstätte Gösting.........	*b)* Korallenkalk und Schiefer des Korallenkalkes	3·11	4	—	2·7	0·9	
31	Dieselbe am Auslauf der 200 *m* langen Leitung		2·54	15	28	—	—	

32	Leitungswasser d. steierm. Landesackerbauschule Grottenhof....	Unterdevon		2·49	$5^1/_4$	27	4·8	1·6	
33	Leitungswasser des Schlosses St. Martin (Quelle im Kehlberg)...			2·17	$4^1/_2$	31	0	0	
34	Wasserreservoir von Wetzelsdorf an der Einödstraße			1·71	$4^3/_4$	28	0	0	
35	Quelle am Ostabhang des Admonterkogels...............			1·58	18	36*	0	0	
36	Leitungswasser der Hubertusvilla am Rechbauerweg in Wetzelsdorf			1·33	4	—	15·0	5·0	
37	Wasserreservoir östlich von Straßengel bei Judendorf..........			1·14	4	36	0	0	
38	Wasserreservoir SW des Schlosses Gösting (Villa Laker)			1·13	$4^1/_2$	—	8·9	3·0	
39	Floraquelle am Westabhang des Bauernkogels...............			0·64	73	36*	0	0	
40	Ursprung des Pailbaches			0·62	$7^1/_4$	29	52·6	17·5	
41	Quelle der »Sieben Bründl« zwischen Raach und Judendorf...			0·29	$18^1/_2$	28, 10·6h	0	0	Außer Ra noch Th
42	Quelle »Beim Bründl«, südlich der Ackerbauschule Grottenhof....			0·28	$4^1/_2$	33	0	0	

Nr.	Bezeichnung der Quellen, beziehungsweise Brunnen	Oberflächlich liegende Bodenarten		$i \cdot 10^3$ in e.s.E.	[illegible]	(ZC) des III. Stad. der Induktion in Minuten	$i \cdot 10^3$ in e.s.E. der nachgebildeten Emanation	Milligramm radioaktiver Substanz in 10^8 l Wasser	Anmerkung
43	Wasserreservoir des Schlosses Eggenberg, SE des Gaisberges	Unterdevon		0·15	15%	34	0	0	
44	Brunnenwasser am NE-Abhang des Buchkogels			0·003	25		8·8	1·1	
45	Quelle im Keller des Hauses Quellengasse Nr. 80 am Rosenberg	Tertiärformation	Schotter, Sand und Lehm der Belvedereschichten	2·02	11%	28	9·0	8·8	
46	Brunnenwasser nördlich der Eisenbahnstation Authal			1·70	4%	31	0	0	
47	Quelle NW von Waltendorf (Hauptstraße Nr. 36)			1·60	6	30	0	0	
48	Quelle nördlich von Raaba, an der westl. Lehne des Bergrückens			1·28	5%	31	0	0	
49	Brunnenwasser Heinrichstraße 109			1·10	20%	30*			
50	Leitungswasser auf der Anhöhe der Mariatrosterkirche			0·90	30%		30·2	13·1	
51	Brunnenwasser in Mariagrün Nr. 127			0·90	24	32*	-		

52	Quelle NE der Ziegelbrennerei in Unter-Andritz	Tertiärformation	Schotter, Sand und Lehm der Belvedereschichten	0·88	23	35	4·1	1·4	
53	Brunnenwasser oberhalb der ehem. Lehmfabrik bei St. Peter			0·86	6	28	2·5	0·8	
54	Brunnenwasser des Schlosses Lustbühel			0·81	5½	30	1·8	0·6	
55	Brunnenwasser des Knaben-Erziehungssanatoriums in St. Veit			0·73	21½	28	23·4	7·8	
56	Brunnenwasser »zur Waldesruhe« im Mariatrosterwald			0·59	6¼	36*	—	—	
57	Quelle am Westabhang des Rosenberges (Quellengasse)			0·54	51¾	33*	—	—	
58	Wasserreservoir d. Hallerschlosses (Westabhang d. Ruckerlberges)			0·38	12¼	—	6·7	2·2	
59	Quelle bei der Militärschießstätte am Feliferhof			0·27	22½	—	12·4	4·1	
60	Brunnenwasser von Teichhof bei Mariatrost			0·14	6¼	31*	—	—	
61	Quelle im Mariagrünerwald, westlich von Kroisbach			0·11	4½	31	8·5	2·8	
62	Quelle am Rohrerberg, nördlich von St. Veit			0·08	31¼	30*	6·1	2·0	
63	Brunnenwasser von der Hilmwarte			0·01	3½	—	—	—	

Nr.	Bezeichnung der Quellen, beziehungsweise Brunnen	Oberflächlich liegende Bodenarten		$i.10^3$ in e. s. E.	Korrektionszeit in Stunden	$\dot{(HC)}$ des III. Stad. der Induktion in Minuten	$i.10^6$ in e. s. E. der nachgebildeten Emanation	Milligramm radioaktiver Substanz in 10^8 *l* Wasser	Anmerkung
64	Wasserbecken 50 *m* unterhalb der Selmaquelle	Quartär	Eggenberger Konglomerat	1·80	$5^1/_2$	30	—	—	
65	Richardquelle (1899) im Parke der Kuranstalt Eggenberg	Quartär		0·52	$4^3/_4$	30	0	0	
66	Wasserbecken unter der Einsiedelei in Eggenberg	Quartär		0·30	$19^1/_4$	—	3·1	1·0	
67	Einsiedeleiquelle am Südabhang des Mühlberges	Quartär		0·06	22	—	0	0	
68	Quelle Nr. III des ehem. Sanatoriums Gondola (Körblerstr. 43)	Diluvium		2·17	$20^1/_2$	—	4·1	1·4	
69	» » I des ehem. Sanatoriums Gondola (Körblerstr. 43)	Diluvium		1·83	$3^1/_2$	29	4·1	1·4	
70	» » II des ehem. Sanatoriums Gondola (Körblerstr. 43)	Diluvium		1·67	$6^3/_4$	28	1·1	0·4	
71	Quelle südlich Wetzelsdorf am Ostabhang des Ölberges	Diluvium		1·36	$17^3/_4$	35	0	0	
72	Brunnenwasser des Hotels Tivoli in Gösting	Diluvium		1·24	$17^1/_2$	36	11·5	3·8	

73	Quelle Nr. IV des ehem. Sanatoriums Gondola (Körblerstr. 43).	Diluvium		1·05	4 1/2	28	0	0	
74	Brunnenwasser vom Hofe des physikalischen Instituts	Diluvium		0·75	6 1/4	28*	7·1	2·4	
	Schöpfstellen des Grazer Wasserwerkes:								
75	VII. Hauptbrunnen	Alluvium	Kiesschotter	1·06	3 1/4	—	0	0	
76	V. Hofbrunnen..			1·38	8 1/2	28	0	0	
77	I. Wiesenbrunnen			0·85	26	35	10	3·3	
78	II. Wiesenbrunnen			0·76	6	29	6·7	2·2	
				0·79	22	30	2·3	0·8	
79	III. Wiesenbrunnen			0·65	27 1/4	30	17·8	5·9	
				0·62	28	30	—	—	
				0·56	7	30	20·5	6·8	
80	IV. Wiesenbrunnen			0·78	4 3/4	33*	—	—	
				0·69	21	—	0	0	
81	VI. Andritzer Schöpfwerk.......			1·02	26	32	0	0	

2. Zerfallsgeschwindigkeit der Emanation.

Es wurde die Abfallsgeschwindigkeit der Emanation einer größeren Anzahl von Wasserproben von verschiedenen Teilen der Umgebung Graz untersucht. Die folgende Tabelle II enthält eine Zusammenstellung der bei den untersuchten Wässern aus den Beobachtungen konstruktiv gewonnenen Werte des τ und der Halbwertsperiode in Tagen. Die Abklingung ist innerhalb der Beobachtungsfehler in vollkommener Übereinstimmung mit dem Exponentialgesetz.

Tabelle II.

	Nr. in der Tabelle I	Bezeichnung der Probe	Zeit in Tagen, über welche sich die bezügliche Beobachtungsreihe erstreckt	$\tau = \frac{1}{\lambda}$ in Sekunden	Halbwertsperiode in Tagen
1		Grazer Leitungswasser (in mehreren Beobachtungsreihen)	8. bis 22. Dezember 1906	$4 \cdot 91 . 10^5$	3·94
			16. bis 23. Dezember 1906	$3 \cdot 99 . 10^5$	3·21
			14. Febr. bis 9. März 1907	$4 \cdot 41 . 10^5$	3·54
2	74	Brunnenwasser im Hofe des physikal. Instituts	17. bis 30. Jänner 1907	$3 \cdot 74 . 10^5$	3·00
3	9	Andritzursprung	21. bis 25. März 1907	$4 \cdot 76 . 10^5$	3·82
4	57	Quelle am Westabhang des Rosenberges (Quellengasse)	24. bis 28. März 1907	$4 \cdot 94 . 10^5$	3·96
5	58	Wasserreservoir des Hallerschlosses am Ruckerlberg	12. bis 19. Juni 1907	$4 \cdot 02 . 10^5$	3·23
6	39	Floraquelle am Westabhang des Bauernkogels bei Gösting	13. bis 20. April 1907	$4 \cdot 63 . 10^5$	3·71

Für die Halbierungskonstante ist in den untersuchten Wasserproben (vom Brunnenwasser im Hofe des physikalischen Instituts abgesehen) 3·21 bis 3·96 Tage erhalten worden.

P. Curie[1] fand dafür 3·99 Tage ($\tau = 4{\cdot}97.10^5$ sec[1]), Rutherford und Soddy[2] 3·71 Tage ($\tau = 4.63.10^5$ sec[1]), Bumstead und Wheeler[3] 3·88 Tage, Sackur[4] 3·86 Tage ($\lambda = 2{\cdot}8.10^{-6}$ sec^{-1}) und die neueste Bestimmung von G. Rümelin[5] ergibt 3·75 Tage. Ebert und Evers[6] fanden für das Abfallen der Emanation der Bodenluft 3·2 Tage als Halbwertsperiode und E. Adams[7] für Brunnengase eine Halbwertsperiode von 3·4 Tagen. Diese niedrigen Halbierungskonstanten sowie die von mir in einzelnen Fällen gefundenen (3·00, 3·21, 3·23, 3·54) pflegen durch Undichtigkeiten des Apparats erklärt zu werden; es scheint jedoch folgende Ursache wahrscheinlicher zu sein: Da geringe Spuren von Vaselinfett, Kautschuk u. dgl. die Emanation zu absorbieren vermögen und vermutlich auch an der Innenwand der Glasglocke Emanationsatome adhärieren, und zwar nach Maßgabe einer vorhandenen Feuchtigkeitsschichte an der Innenwand der Glocke — der Vorgang ist noch nicht genügend aufgeklärt — so geht dadurch der Ionisierungsbereich der adhärierenden α-Partikelchen der Emanation zur Hälfte verloren. Eine Überschlagsrechnung lehrt, daß, falls ein Drittel der vorhandenen Emanationsatome während der Exposition absorbiert würde, statt der Periode von 3·8 Tagen eine von ungefähr 3·00 Tagen erhalten werden müßte. Jedenfalls wird man daher wohl sagen dürfen, daß die Emanation aller hier untersuchten Quellen mit Radiumemanation identisch ist.

Die Frage, ob die im Wasser absorbierte Emanation nach dem gleichen Gesetz abklingt wie in Luft, wurde dadurch entschieden, daß zu gleicher Zeit drei 7·5 *l* fassende Flaschen mit Proben des Grazer Leitungswassers gefüllt wurden und ihr Emanationsgehalt an verschiedenen Tagen gemessen wurde. Hierbei ist der zuerst erhaltene Wert des Sättigungsstromes

---

1 C. R., *135*, p. 857, 1902.
2 Phil. Mag., April 1903.
3 Amer. Journ. Science, Februar 1904.
4 Chem. Ber., *38*, 1753 bis 1756, 1905.
5 Phil. Mag., *14*, 550, 1907.
6 Physik. Zeitschr., *4*, p. 162, 1902.
7 Phil. Mag., Nov. 1904.

unter Zugrundelegung des für $\lambda_{Ra\text{-}Em.}$ geltenden Wertes von der Zeit der Messung auf die Zeit der Entnahme extrapoliert.

Grazer Leitungswasser am 3. Juni 1907, 2^h p.

Zeit in Tagen nach der Probeentnahme	$i.10^3$ e. s. E.	
	beobachtet	berechnet
0	—	1·37
0·86	1·17	1·17
4·09	0·69	0·65
7·73	0·41	0·34

Innerhalb der Fehlergrenzen zeigt sich also auch im Wasser dieselbe Abfallsgeschwindigkeit der Emanation wie in Luft.

Berechnet man das Volumen der in 1 *l* der stärkst aktiven Quelle (Nr. 1, Melaniequelle in Radegund) vorhandenen Emanationsmenge, so ergibt sich Folgendes. Nach Versuchen von Ramsay und Soddy erzeugen 60 *mg* $RaBr_2$ in 5·3 Tagen 0·035 mm^3 Emanation. Es entwickelt demnach 1 *mg* reines Radiumbromid in einer Sekunde $\frac{0\cdot035}{86.400.5\cdot3\times60}\,mm^3$ Emanation. 1 *mg* reines Radiumbromid liefert nach Untersuchungen von Curie und Laborde in 19·7 Minuten einen Sättigungsstrom von 720 e. s. E. Es werden daher *x* elektrostatische Einheiten pro Sekunde von $\frac{x}{10^{-3}}\,2.10^{-10}\,mm^3$ Emanation erzeugt. Die stärst aktive Radegunderquelle (Melaniequelle) liefert einen Sättigungsstrom von $12\cdot9.10^{-3}$ e. s. E. pro Sekunde. Das Volumen der in 1 *l* dieser Quelle vorhandenen Emanationsmenge beträgt demnach $2\cdot7.10^{-8}\,mm^3$ Emanation.

3. Zerfallsgeschwindigkeit der Emanationsprodukte.

Entfernt man nach erreichtem Gleichgewicht zwischen Emanation und induzierter (erregter) Aktivität jene durch Abheben und Ausblasen der Glasglocke sowie durch kräftiges

Lüften des Drahtnetzes, so bleibt noch der Betrag der induzierten Aktivität übrig, der im allgemeinen 30 bis 40% des zuletzt gemessenen Sättigungsstromes ausmacht.

Der Abfall der induzierten Aktivität ist wegen seines außerordentlich charakteristischen Verhaltens für Radiuminduktion von besonderem Interesse; es wurden daher die Zerfallskurven der induzierten Aktivität bei vielen Quell- und Brunnenwässern untersucht und sie stimmten in den meisten Fällen sehr gut mit den für Radiuminduktion entsprechenden Kurven überein. Nur die Abfallskurve der Induktion der Quelle der »Sieben Bründl« zwischen Raach und Judendorf (Nr. 41) und der Johannenquelle in Raach (Nr. 26) lassen, soweit der geringe Effekt eine genaue Messung ermöglichte, außer auf Radiumemanation noch auf den Gehalt an Thor schließen (Halbwertsperiode 36 Minuten und 11 Stunden).

Charakteristisch sind die drei aufeinanderfolgenden Umwandlungen. Die Strahlungsintensität sinkt in den ersten 10 Minuten sehr rasch (erstes Stadium). Nach weiteren 5 Minuten hat sie einen Wert erreicht, von dem aus sie im Verlauf der nächsten 20 Minuten nur sehr wenig sinkt, ja sogar, und zwar nach Maßgabe der Expositionsdauer, konstant bleibt (zweites Stadium). Dann folgt eine Periode langsamer Abnahme, die zuletzt nach einem Exponentialgesetz verläuft (drittes Stadium). In diesem dritten Stadium sinkt die Aktivität in 28 Minuten auf den halben Wert.

Die bezüglich dieser Stufe für die einzelnen Proben erhaltenen Werte sind in der dritten Kolumne der Zusammenstellung der Messungsergebnisse vermerkt. Als Ursache der größeren Beträge dürfen durchaus nicht Beobachtungsfehler angenommen werden. Die etwas höheren Werte der Halbierungskonstante dieses letzten Stadiums rühren vielmehr nach den von Curie und Danne[1] beschriebenen Versuchen davon her, daß gewisse Substanzen, wie Zelluloid, Kautschuk etc., die Emanation zu absorbieren und zurückzuhalten vermögen. Es ist also durch die Anwesenheit vermutlich ähnlich wirkender Körper, wie Paraffin, Kautschuk, geringer Spuren von Vaseline-

---

[1] C. R. *136*, p. 364, 1903.

fett u. dgl. bewirkt, daß sie, indem sie mit Emanation in Berührung kommen, während der Exposition der Emanation diese an ihrer Oberfläche okkludieren; nach Beendigung der Exposition diffundiert sie dann allmählich wieder heraus, wodurch eine beträchtlich langsamere Abklingung der erregten Aktivität verursacht wird, obwohl im allgemeinen ihre Abklingungsgeschwindigkeit unabhängig von der materiellen Natur der exponierten Körper ist.

Dies erklärt auch die größere Periode von 35 Minuten, zu der Adams[1] für die von der Emanation des Cambridger Leitungswassers und Burton[2] für die von der Emanation aus Rohpetroleum in Ontario (Kanada) hervorgerufene erregte Aktivität gelangt. Allerdings stellen ihre Werte nur eine Annäherung dar, da sie auch den Gang der Entaktivierung im unregelmäßig verlaufenden ersten und zweiten Stadium mit einbeziehen.

Bei den hier durchgeführten Messungen dürfte, wie bereits erwähnt, der Grund für die höheren Werte der Periode des dritten Stadiums außerdem noch darin liegen, daß während der Exposition Emanation in das offene Elektroskop hineindiffundiert und dann ihrerseits nach dem Lüften und Wiederzusammensetzen des Apparats in den Glockenraum gelangt und so eine scheinbar langsamere Abklingung verursacht. Nach Einsetzen eines Paraffinverschlusses in die Elektroskophülse scheint dieser Übelstand einigermaßen beseitigt zu sein. Die noch ohne Paraffinverschluß für die dritte Entwicklungsstufe erhaltenen Werte der Periode sind in der Tabelle I mit einem Sterne versehen. Als Mittel für die Halbierungskonstante ergibt sich 29·5 bei den Werten ohne Stern und 34 bei denen mit Stern.

Der beobachtete Abfall der Induktion wurde bei den meisten Quellen mit dem aus der Rutherford'schen Formel

$$\frac{J_t}{J_0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} e^{-\lambda_3 t} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} e^{-\lambda_2 t}$$

[1] Phil. Mag., Nov. 1903.

[2] Phil. Mag., Okt. 1904.

folgenden verglichen, wobei

$$\lambda_2 = 5 \cdot 38 . 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

und

$$\lambda_3 = 4 \cdot 13 . 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

gesetzt wurde. Die Übereinstimmung erwies sich durchwegs als innerhalb der Beobachtungsfehler gelegen. Als Beispiel mögen die Zahlen der Tabelle III und IV dienen.

Tabelle III.

Bertaquelle in Radegund.

Zeit in Minuten nach beendeter Exposition	Aktivität in Volt/Min.		Δ
	beobachtet	berechnet	
32	21·2	21·0	—0·2
34	20·2	20·5	+0·3
38	19·3	19·4	+0·1
40	18·7	18·9	+0·2
44	17·5	17·5	0·0
47·5	16·4	16·6	+0·2
52	15·4	15·4	0·0
56	14·6	14·4	—0·2
61	13·5	13·3	—0·2
65	12·1	12·4	+0·3
70	11·3	11·3	0·0
75	9·86	10·3	+0·41
83	8·90	8·79	—0·11
89	7·81	7·81	0·0
96	6·99	6·80	—0·19
103	5·84	5·90	+0·06
113	4·89	4·77	—0·12
125	3·83	3·70	—0·13
135	3·00	2·90	—0·03
153	2·17	2·00	—0·17
168	1·49	1·43	—0·06
185	0·97	0·97	0·0
205	0·62	0·61	+0·01

Tabelle IV.

Römerquelle in Radegu

Zeit in Minuten nach beendeter Exposition	Aktivität in Volt/Min.		
	beobachtet	berechnet	
20	15·6	15·7	
26	14·1	14·5	
40	13·5	13·5	
46	12·9	12·4	
50	11·7	11·6	
56	10·7	10·6	
62	9·22	9·83	
66	8·42	8·84	
73	8·20	8·06	
79	7·08	7·17	
85	6·52	6·39	
94	5·39	5·34	—
102	4·66	4·53	—
112	3·74	3·70	—
122	3·14	2·98	—
134	2·34	2·29	—
144	1·97	1·84	—
154	1·45	1·47	−0
171	1·15	1·00	+0
			−0

4. Gelöste emanierende Substanz im Wass

Um Aufschluß zu gewinnen, ob emanierende
selbst im Wasser gelöst war, wurden die meisten P
ausgekocht und so die in ihnen vorhandene Emanati
fast vollständig entfernt. Ließ sich nach etwa 30tägige
in luftdicht verstöpselten Flaschen nach dem Durch
Luft keine Emanation nachweisen, so konnt
werden, daß keine emanierende Substanz im
ist. In vielen Fällen trat denn auch nach dem D
Luft durch das Wasser keine Steigerung d

Luft im Apparate ein. Eine größere Anzahl von ausgekochten Wasserproben zeigte jedoch ein wenn auch schwaches Regenerierungsvermögen der Emanation. Dies läßt darauf schließen, daß Muttersubstanz selbst im Wasser gelöst sein muß. Wegen der geringen Menge der gelösten Substanz und des durch sie nachgebildeten Emanationsbetrages konnte das Abklingen der nachgebildeten Emanation und Induktion nicht verfolgt werden; es wurde daher der direkte Nachweis, daß die in den betreffenden Proben gelöste radioaktive Substanz Radium selbst sei, nicht geliefert; doch ist nach allen vorangegangenen Aktivitätsmessungen fast mit Sicherheit anzunehmen, daß die emanierende Substanz mit Radium selbst identisch ist. Unter dieser Voraussetzung dürfte es vielleicht interessieren, die Menge der in den betreffenden Proben gelösten Substanz wenigstens der Größenordnung nach kennen zu lernen.

Nimmt man nach den Versuchen von Curie und Laborde an, daß $0 \cdot 36 \times 10^{-5} g$ $RaBr_2$ im Gleichgewicht mit einer Emanationsmenge sind, die einen Sättigungsstrom von $1 \frac{\text{e.s.E.}}{\text{sec}}$ liefert, so erhält man die in der fünften Kolumne der Tabelle I angegebenen Werte.

V. Zusammenfassung der Resultate.

1. Sämtliche von verschiedenen Teilen der Umgebung Graz untersuchten Quell- und Brunnenwässer enthalten radioaktive Emanation. Die stärkst aktiven Quellen entspringen im Urgestein (Gneis von Radegund) am Südostfuß des Schöckls. Die Aktivität der übrigen Quellen scheint mit dem geologischen Alter des Gesteins zuzunehmen. Näheren Aufschluß könnte erst eine Untersuchung von Gesteinsproben liefern. Die Aktivität ändert sich mitunter sehr bedeutend von einer Quelle zur nächsten, die oft in unmittelbarer Nähe derselben gelegen ist.

2. Bis zu welchem Grade die Aktivität der Quellen konstant ist, konnte nicht ermittelt werden. Eventuelle Schwankungen werden jedenfalls nur hervorgerufen durch meteorologische Einflüsse, wie Barometerschwankungen, Regenmenge etc.

3. Die Emanation sämtlicher Quellen sinkt exponential mit einer Periode ab, die mit jener der Radiumemanation entsprechenden identisch ist. Die Emanation klingt im Wasser nach demselben Gesetz und mit derselben Periode ab wie in Luft.

4. Die beobachteten Abklingungskurven der induzierten Aktivität stimmen sehr gut mit den von Curie für Radium angegebenen entsprechenden Kurven oder mit der von Rutherford für Ra-Induktion theoretisch abgeleiteten Formel überein. Die Abklingungskurven der Induktion der »Quelle der sieben Bründl« zwischen Raach und Judendorf und der »Johannenquelle« nordwestlich der Ortschaft Raach lassen den Gehalt an Thor vermuten; doch läßt sich dieses Resultat wegen des schwachen Effektes dieser Quellen nicht mit voller Sicherheit aussprechen.

5. In vielen Wässern von Graz und Umgebung wurde eine nicht unerhebliche Restaktivität festgestellt, die auf ein im Wasser gelöstes Radiumsalz schließen läßt. Wegen der geringen Menge der gelösten Substanz und des durch sie nachgebildeten Emanationsbetrages konnte das Abklingen der Emanation und ihrer Induktion nicht verfolgt werden. Die vorhergehenden Untersuchungen aller Proben lassen aber den sicheren Schluß zu, daß auch die im Wasser gelöste Substanz mit Radium selbst identisch ist.

Über eine Methode der gleichzeitigen Messung von elektromotorischen Kräften und inneren Widerständen bei gleichzeitigen beliebigen kontinuierlichen Änderungen derselben

von

Dr. **Justus Rožič.**

(Mit 3 Textfiguren.)

Graz, physikalisches Institut, 8. November 1908.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. November 1908.)

Im heurigen Sommer machte im physikalischen Institut der Universität Graz Herr Regimentsarzt Dr. O. Albrecht Versuche mit elektrischen Strömen, welche vom menschlichen Körper ausgehen; es handelte sich nun festzustellen, wo die Schwankungen des Stromes herrührten, ob sich die elektromotorische Kraft oder der Widerstand des menschlichen Körpers oder beide änderten, wenn auf den Körper psychische oder physische Reize wirkten. Die Versuche wurden im physikalischen Institut begonnen und auf der hiesigen Nervenklinik fortgesetzt und ergaben zufriedenstellende Resultate. Die Ergebnisse wird Herr Dr. Albrecht in einer medizinischen Zeitschrift[1] publizieren; ich will hier nur die von mir vorgeschlagene Methode der Messung kurz erläutern.

Stromstärke, elektromotorische Kraft und Widerstand hängen durch das Ohm'sche Gesetz zusammen:

$$J = \frac{E}{w_i + w_a}.$$

In unserem Falle ist w_i, der innere Widerstand des menschlichen Körpers, die eine Unbekannte und E, die elektromotorische Kraft, die zweite Unbekannte. Den inneren Widerstand

[1] Monatsschrift für Psychiatrie und Neurologie (Berlin).

mit der Wheatstone'schen Brücke und Wechselstrom zu messen, ist von vornherein nicht ausführbar, weil diese Methode zu viel Zeit in Anspruch nimmt und sich unterdessen Änderungen im menschlichen Körper vollziehen. Um aber die beiden Unbekannten zu eliminieren, braucht man unbedingt zwei voneinander unabhängige Gleichungen, die gleichzeitig experimentell gefunden werden müssen. Die zweite Gleichung soll lauten:

$$J' = \frac{E}{w_i + w'_a}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich sowohl E als auch w_i berechnen.

$$w_i = \frac{J' w'_a - J w_a}{J - J'} \quad \text{und} \quad E = J \cdot \left(\frac{J' w'_a - J w_a}{J - J'} + w_a \right).$$

Es lag nun die Schwierigkeit darin, diese beiden Gleichungen sich gleichzeitig oder wenigstens in einer so kurzen Zeitdifferenz zu verschaffen, daß die Änderung der beiden Größen E und w_i nicht merklich werden konnte. Ja, die Aufgabe verlangte sogar für sehr schnell aufeinanderfolgende Momente je zwei solche Gleichungen. Auch das wurde auf dieselbe Weise mit beliebiger Verkürzung der Zeitdifferenz erreicht. Zur Messung wurden zwei empfindliche D'Arsonvalgalvanometer, Widerstände und ein Stromwechsler gebraucht.

Das Prinzip, welches dabei zur Anwendung kam, basiert auf der Tatsache, daß ein Galvanometer nicht nur durch kontinuierliche Ströme, sondern auch durch Stromstöße abgelenkt wird. Es werden die beiden Galvanometer abwechselnd durch den Strom, der aus dem menschlichen Körper kommt, abgelenkt. Die Ablenkung ist konstant, weil die Anzahl der Stromstöße so groß gemacht werden kann, daß ein Schwanken nicht wahrgenommen wird.

Die Anordnung des Versuches läßt sich aus der beistehenden Skizze leicht ersehen.

Der Stromwechsler (Fig. 2 und 3) besteht aus zwei gezähnten Messingrädern, welche durch eine Hartgummiplatte voneinander isoliert sind; die Zähne des einen Rades koinzidieren mit den Lücken des anderen. Auf die Peripherie wird

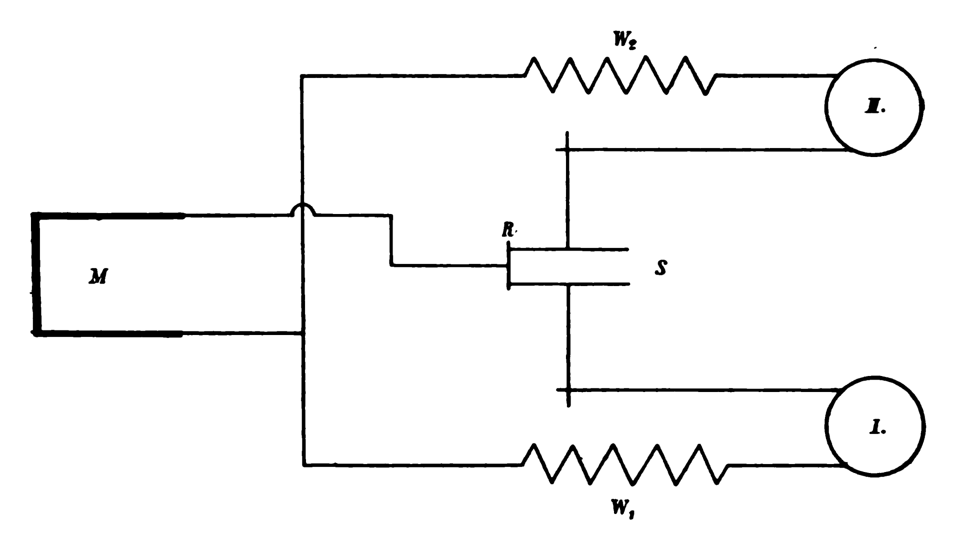


Fig. 1.
M Menschlicher Körper, *S* Stromwechsler, I und II Galvanometer, W_1 und W_2 Widerstände.

ein Kontakträdchen *R* ebenfalls aus Messing durch eine Feder angedrückt. Der Strom geht wechselweise einmal auf die rechte

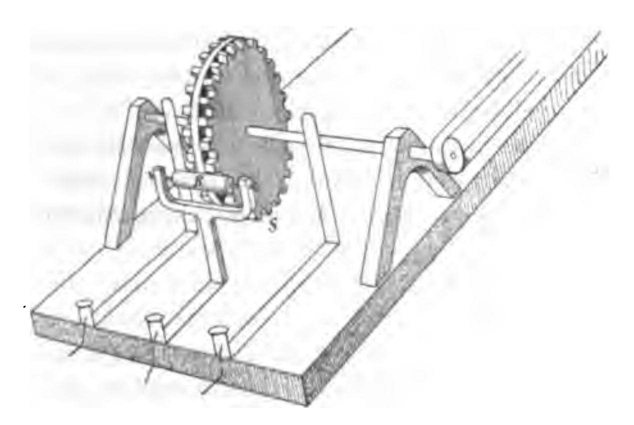


Fig. 2.

Scheibe des Rades, von dort durch die Achse zum Galvanometer I und wieder zurück zum Körper. Dann wird der Strom auf einen Moment unterbrochen, worauf der Schluß mit der linken Scheibe und dem damit verbundenen Galvanometer II

eintritt, um wieder unterbrochen zu werden und von neuem auf die rechte Seite überzuspringen. Das wiederholt sich je nach der Rotationsgeschwindigkeit des Rades. Eine Anzahl von 100 Stößen pro Sekunde ist sehr leicht zu erreichen, was vollkommen genügt, um das Schwanken der Galvanometer aus diesem Grunde zu vermeiden. Es zeigte sich auch bei den Versuchen, daß ein ziemlich unregelmäßiges Drehen des Rades keine Unregelmäßigkeit verursachte. Das Rad des Stromwechslers kann mit der Hand oder mit einem Motor angetrieben werden.

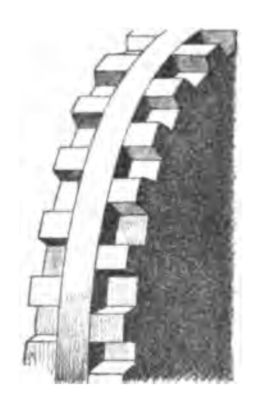


Fig. 3.

Selbstverständlich ist die Ablenkung des Galvanometers bei Stromstößen kleiner als bei der Einschaltung derselben elektromotorischen Kraft bei konstantem Strom. Es ist zu bedenken, daß das Galvanometer während der Zeit, in welcher der Strom aussetzt, seine Ruhelage zu erreichen sucht. Da aber die Eichung des Galvanometers unter denselben Verhältnissen, d. h. mit rotierendem Rade stattfindet, so ist die Richtigkeit der Messung trotzdem garantiert; nur ist das Galvanometer scheinbar unempfindlicher.

Um den vollständigen Verlauf einer physiologischen Wirkung auf die elektromotorische Kraft und den Widerstand des menschlichen Körpers darzustellen, müßte man die Ablenkungen am Galvanometer photographisch registrieren und aus den Photogrammen die jeweiligen E und w_i rekonstruieren.

Schneedichtebestimmungen auf dem Hohen Sonnblick (3106 *m*)

von

Dr. A. Defant,

Assistent an der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie.

(Mit 4 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. November 1908.)

Einen vierwöchentlichen Aufenthalt im August dieses Jahres am Hohen Sonnblick benutzte ich, um Schneedichtebestimmungen in den verschiedenen Tiefen des großen Goldbergferners vorzunehmen. Gleichzeitig waren auch Temperaturmessungen in den entsprechenden Tiefen geplant, doch wollte der Zufall, daß am zweiten Tage nach dem Versenken der Platinthermometer in das Firnfeld bei einem fast den ganzen Nachmittag anhaltenden Gewitter der Blitz mehrere Male in die elektrische Leitung zwischen Thermometern und Observatorium einschlug und dieselbe an mehreren Stellen beschädigte, wodurch leider weitere Messungen unmöglich wurden. So beschränkte man sich auf die Schneedichtebestimmungen, die in den verschiedenen Tiefen des Firnfeldes ausgeführt wurden und trachtete, soweit als die etwas ungünstigen Witterungsverhältnisse es gestatteten, so viel Messungen als möglich vorzunehmen, um eine Vorstellung zu bekommen, wie die Dichte in den tieferen Lagen eines Firnfeldes sich zu den oberen verhält. Temperaturbeobachtungen wurden nur insoweit ausgeführt, als stündlich von früh bis abends an einem 5 *cm* tief im Schnee eingesenkten Quecksilberthermometer die Schneetemperaturen abgelesen wurden. Während der ganzen

Zeit der Messungen war das Wetter nicht besonders schön und für solche Messungen aus dem Grunde etwas ungünstig, als gerade vor dem Beginn derselben Regenfälle die oberen Schneeschichten vollständig durchnäßten, worauf intensive Schneefälle die vom Wasser durchtränkte obere Schneeschichte mit einer mächtigen Neuschneelage überdeckten.

Die Messungen erstrecken sich auf die Zeit vom 6. bis 21. August 1908, wobei wegen der etwas langen Zeit, die man zu einer Messungsreihe verwendet, täglich bloß zwei bis drei Beobachtungen ausgeführt werden konnten.

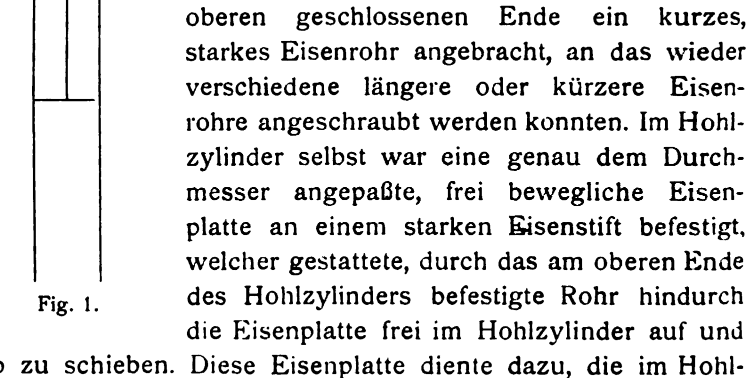


Fig. 1.

Folgende kleine Tabelle I gibt die meteorologischen Faktoren, die zu jener Zeit am Hohen Sonnblick-Observatorium herrschten, wieder.

Die Bestimmung der Schneedichte wurde folgendermaßen vorgenommen.

An einem 30 *cm* langen Hohlzylinder aus starkem Eisenblech mit einem inneren Durchmesser von 4·63 *cm* war an seinem oberen geschlossenen Ende ein kurzes, starkes Eisenrohr angebracht, an das wieder verschiedene längere oder kürzere Eisenrohre angeschraubt werden konnten. Im Hohlzylinder selbst war eine genau dem Durchmesser angepaßte, frei bewegliche Eisenplatte an einem starken Eisenstift befestigt, welcher gestattete, durch das am oberen Ende des Hohlzylinders befestigte Rohr hindurch die Eisenplatte frei im Hohlzylinder auf und ab zu schieben. Diese Eisenplatte diente dazu, die im Hohlzylinder befindliche Schneemenge herauszuschieben.

Nebenstehende kleine Figur gibt eine kleine Zeichnung dieses einfachen Instruments.[1]

---

[1] Mittels dieses Instruments wurden bereits im Sommer 1907 am Hohen Sonnblick von Dr. W. Schmidt und mir Schneedichtebestimmungen vorgenommen.

Tabelle I.

Meteorologische Beobachtungen am Hohen Sonnblick vom 5. bis 21. August 1908.

Tag	Temperatur					Mittlere Bewölkung	Niederschlags-		Bemerkungen
	7^h a.	2^h p.	9^h p.	24 stünd. Mittel	Max. Min.		Menge	Form	
5	—0·8	+2·0	+0·6	0·1	2·0, —1·8	6	2·1	≡, Δ, *	2^{h}30 p. ☈; 4^h p. Δ bis 4^{h}42 ☈
6	—0·4	+1·4	+1·0	0·6	1·4, —0·5	10	6·4	≡⋮ ●	● und ≡ fast den ganzen Tag.
7	+0·8	+2·4	—2·2	0·5	3·0, —2·6	8	30·0	≡^{2} *	Nachmitt. zeitw. ☈ mit ●, nachts *
8	—1·4	—1·8	—2·8	—1·7	—0·8, —2·4	10	10·2	≡^{0} *	*fall dauert fort. Sturm!
9	—2·4	—1·8	—2·6	—1·3	—1·8, —3·1	10	0·8	≡^{1} *	Bis 7^h a. *; *treiben; 10^{h}55 ☈ ≡^{2}
10	—4·7	—2·2	—0·8	—2·8	—0·8, —4·7	2	0·0		Schöner Tag, unten ≡
11	—2·4	0·0	—0·2	—1·1	0·0, —3·0	5	1·4	Δ	≡ ringsum; 4^{h}28 p. ☈, in SE <
12	0·0	—2·2	—6·2	—2·4	0·0, —6·5	10	1·2	≡⋮	Nachmittags starkes ≡⋮
13	—5·4	—1·2	—2·8	—3·5	—1·2, —6·5	10	14·2	≡^{0} *	5^{h}7 p. *, dauert die Nacht an!
14	—5·2	—1·0	—0·8	—2·3	—0·6, —5·3	9	0·9	*	Langs. Aufh., tagsüber noch etwas *
15	—0·8	—0·2	—0·2	—0·3	—0·2, —0·8	8	0·2	*	1^h p. kurzer *fall, 7^{h}45 Δ ≡
16	—1·8	—4·2	—5·6	—3·5	—0·7, —6·0	10	8·7	≡^{0} *	Den ganzen Tag leichter *fall.
17	—6·6	—5·2	—5·6	—5·8	—4·6, —6·6	7	0·2	*	Bis 9^h a. *fall, sehr fein.
18	—4·4	—0·8	—2·4	—3·0	—0·6, —5·6	6	3·1	* Δ^2	Mittags etwas *, 7^{h}10 ☈ und Δ
19	—4·4	—2·0	—1·4	—2·8	—0·8, —4·4	2	0·0		Schöner Tag.
20	—2·3	+1·0	+0·4	—0·6	1·0, —3·4	6	0·3	●	8^h p. etwas Regen.
21	+1·0	+3·0	+1·8	1·9	3·5, 0·6	4	1·0	● ☈	Bis 7^h a. ●, 5^{h}15 p. ☈

Die Messungen wurden nun auf folgende Weise ausgeführt. Die Eisenplatte im Hohlzylinder wurde vollständig bis zum oberen Rande herausgezogen, der Hohlzylinder in den Schnee eingeschoben so weit, als man gerade beabsichtigte, ohne daß dabei jedoch der Schnee zusammengepreßt wurde. Die Strecke, um welche man den Zylinder in den Schnee einschob, durfte 30 *cm* nicht überschreiten und man konnte stets an den Griffstangen, die am Zylinder angeschraubt waren, abmessen, wie weit der Zylinder im Schnee steckte. Der Schnee bleibt im Hohlzylinder fest, letzterer wird von den Griffstangen abgeschraubt und die Schneemenge mittels der Eisenplatte aus dem Zylinder in passende Behälter aus Blech gesammelt. So wurden gewöhnlich zuerst die obersten 25 *cm* Schnee aus den Schneelagen herausgenommen, hierauf nach Entfernung des Hohlzylinders in demselben Loche weitergestochen und die nächsten 25 *cm* herausgenommen und wieder entleert. So ging es weiter, so lange, bis man entweder auf Eis oder Felsen kam oder die Länge der Griffstangen es nicht mehr erlaubte. Letztere besaßen insgesamt eine Länge von 3 *m* 50 *cm*, so daß leicht die Dichtebestimmung bis 3 *m* Tiefe ausgeführt werden konnte. Die im Zylinder enthaltenen Schneemengen wurden in besonderen Behältern gesammelt, sodann geschmolzen und die daraus sich ergebende Wassermenge gemessen.

Bei den Messungen wurde stets darauf geachtet, daß der Hohlzylinder nach jeder Bestimmung von Schnee frei war und daß beim Hinabsenken desselben in das bereits vorhandene Loch kein Schnee von den Seitenwänden mitgenommen wurde. Fehler, die dadurch entstehen, könnten nämlich ziemlich groß ausfallen, namentlich bei tieferen Schneeschichten, so daß bei der ganzen Messung eine gewisse Vorsicht nötig ist. Der Dichtebestimmung des Schnees und Firnes stellen sich an und für sich eigentümliche Schwierigkeiten entgegen, die in der leichten Zusammendrückbarkeit der Schneemasse liegen. Ein genau bestimmtes Volumen zu erhalten, ist immer schwer und man muß sich begnügen, durch häufig wiederholte Messungen und Mittelbildung die Beobachtungsfehler zu eliminieren, um die tatsächlichen Verhältnisse mit einem einigermaßen befriedigenden Ergebnis darzustellen.

Die Messungen wurden am großen Goldbergferner, der sich im Süden des Sonnblickgipfels ausdehnt, vorgenommen, und zwar an einer Stelle, die 150 *m* vom Hause entfernt war (Ort Nr. 1). Diese Stelle lag zirka 50 *m* unterhalb der oberen Schneegrenze des Firnfeldes und unterhalb einer mächtigen Gletscherspalte, die sich in einer Breite von $1^1/_2$ *m* durch das ganze Firnfeld hinzog. Durch Hineinwerfen von Steinen konnte man leicht konstatieren, daß die Spalte außerordentlich tief war.

Am Ort Nr. 1 wurden die meisten (sechs im ganzen) Beobachtungsreihen ausgeführt. Weitere Beobachtungen wurden an Stellen vorgenommen, die oberhalb der Spalte lagen und in der geraden Verbindungslinie des südlichsten Felsblockes und der Stelle Nr. 1 sich befanden. Sie waren (Nr. 2 bis 9) ungefähr zirka 10 Schritte voneinander entfernt. An jeder einzelnen wurden durchschnittlich drei Messungsreihen ausgeführt.

Als Nullpunkt für die Zählung der Tiefe wurde eine Marke an einem tief im Schnee eingeschlagenen Pfahle benützt.

Folgende Tabellen II und III geben die Resultate der Beobachtungen.

Wie diese Tabellen zeigen, wurden die ersten sechs Messungen am Ort Nr. 1 zu einem Mittelwert vereinigt, sowie die Messungsreihen an den Stellen Nr. 2 bis 8 zu einem zweiten; in beiden ist mit der Tiefe eine Zunahme der Schneedichte wahrzunehmen, und zwar steigt in beiden Fällen die Dichte bis zu einer Tiefe von 87·5 *cm*, in der sie ein Maximum erreicht; sodann nimmt die Dichte ein wenig wieder ab, worauf eine weitere Zunahme der Schneedichte erfolgt. Fig. 2 und 3 geben die graphischen Darstellungen dieser Mittelwerte wieder. Im ersten Mittelwert wird nach den Figuren das mittlere Dichtemaximum in einer Tiefe von 82 *cm*, beim zweiten in einer Tiefe von 70 *cm* erreicht. Die Ursache dieser mittleren dichteren Schneeschichte liegt in den Witterungsverhältnissen, die vor dem Zeitbeginn der Messungen liegen. Ziemlich intensive Regenfälle hatten bloß die obersten Schichten durchnäßt und beim Wiedergefrieren eine rauhe Eiskruste gebildet. Diese Eiskruste hatte höchstens eine Dicke von 10 *cm* erreicht, da das Regenwasser sicher nicht allzu tief in den Hochschnee eingesickert war.

Tabelle II.

Schneedichtebestimmungen an Ort Nr. 1.

(150 *m* in südl. Richtung vom Observatorium, unterhalb einer Gletscherspalte.)

Tiefe in Zentimeter	Datum: August						Mittel
	7.	9.	10.	11.	11.	12.	
	Zahl:						
	1	2	3	4	5	6	
— 12·5	—	0·172	—	—	—	—	—
+ 12·5	—	0·324	0·317	0·303	0·248	0·205	0·280
37·5	0·369	0·500	0·320	0·391	0·406	0·361	0·388
62·5	0·460	0·579	0·477	0·506	0·525	0·423	0·515
87·5	0·518	**0·632**	**0·594**	**0·639**	**0·690**	0·535	**0·682**
112·5	**0·542**	0·516	0·774	0·618	0·797	**0·597**	0·608
137·5	0·524	0·558	0·575	0·606	0·475	0·497	0·536
162·5	0·518	0·566	0·537	0·637	0·532	0·512	0·534
187·5	0·516	0·522	0·525	0·647	0·493	0·508	0·542
212·5	0·542	0·561	0·566	0·626	0·527	0·501	0·556
237·5	0·553	0·597	0·582	0·649	0·519	0·481	0·556
262·5	0·560	0·586	0·537	0·650	0·594	0·581	0·583
287·5	0·562	0·574	—	0·599	0·584	0·571	0·578
312·5	0·621	0·573	0·575	0·669	0·604	0·580	0·607
337·5	—	—	0·595	—	—	—	—
362·5	—	—	0·661	—	—	—	—

Anmerkungen:

1. Bei ≡; * naß, bei 312 *cm* bereits körniges Firneis, grobkörnig bereits seit 250 *cm*; obere *schichte mit ● durchtränkt. Temp. in 5 *cm* Tiefe 0·0° C.
2. Neuschnee 41 *cm*; 8^h a. Kruste 4 *cm*, hart, bei 1^h p. Eisschichte, schwer zu durchstoßen, zirka 8 *cm* dick, dann körnig.
3. Neuschnee 38 *cm*, bei 110 *cm* Eisschicht, ziemlich tief, dann körnig. Temp. in 5 *cm* —0·1° C. 4^h p.
4. Neuschnee 35 *cm*, oberste Kruste 4 *cm*; 8^h a.
5. 4^h p. Neuschneeschichte 27·5 *cm*, Eisschichte bei 90 *cm*, ziemlich fest; dann körnig.
6. Neuschneehöhe 24·5 *cm*, den ganzen Tag ≡⁝, Kruste etwas reifartig; Eisschichte bei 85 *cm*.

Tabelle III.

Schneedichtebestimmungen an den Stellen Nr. 2 bis 8.

Tiefe in Zentimeter	Stelle Nr. 2	3	4	5	6	7	8	Mittel
Datum: August	13.	13., 18.	14., 17.	14., 17., 18.	15., 17., 18., 19.	15., 17., 19.	17., 19.	
Mittel aus Beobachtung Nr.	1	2	2	3	5	3	3	
+12·5	0·379	0·274	0·213	0·165	0·189	0·208	0·235	0·236
37·5	0·462	0·471	0·312	0·235	0·262	0·309	0·346	0·344
62·5	0·477	0·500	0·551	0·575	0·509	0·540	0·485	0·505
87·5	0·572	0·570	0·573	0·596	0·567	0·505	(0·685)	**0·564**
112·5	0·544	0·590	0·511	0·572	0·557	0·496	—	0·545
137·5	0·598	0·626	0·630	0·610	0·547	0·555	—	0·594
162·5	0·675	0·732	0·808	0·606	0·579	0·647	—	0·674
187·5	0·823	—	—	0·813	0·750	—	—	0·795

Anmerkungen:

Nr. 2. Bei 80 *cm* Eisschichte, bei 187 *cm* Eis, durchsichtig, klar, Neuschnee 19 *cm*, Rauhreif.

Nr. 3. Bei 80 *cm* Eisschichte, bei 175 *cm* Eis, Neuschneelage 24 *cm*.

Nr. 4. Bei 90 *cm* Eisschichte, bei 161 *cm* Eis, Neuschneelage 23·5 *cm*. Temp. 5 *cm* tief —0·3° C.

Nr. 5. Bei 75 *cm* Eisschichte, bei 185 *cm* Eis, Neuschnee 27 *cm*.

Nr. 6. * naß! Neuschnee 27 *cm*; bei 194 *cm* Eis.

Nr. 7. Neuschnee 23 *cm*; Eis bei 165 *cm*.

Nr. 8. Neuschnee 36 *cm*; Eis bei 110 *cm*; oberste *schichte naß!

Auf die etwas wärmere Zeitperiode folgte sodann eine kältere und auf der Eiskruste sammelte sich der Schnee intensiver Schneefälle und begrub sie so in eine tiefere Lage, den alten Schnee vom neuen trennend.

Die Unterschiede beider Schneelagen konnte man bereits bei den Messungen deutlich konstatieren. Die oberen Schneeschichten bestanden aus einem leichten, blendendweißen Hoch-

schnee, der aus feinen, kleinen Eisnädelchen und Eissternchen bestand und so eine feinkörnige Mengung von Eis und Luft darstellt.

Unter der mittleren Eiskruste dagegen waren die Krystallnadeln zu immer größeren Körnern gruppiert. Der Schnee wird schwerer, körniger und ist nicht mehr so blendend weiß wie

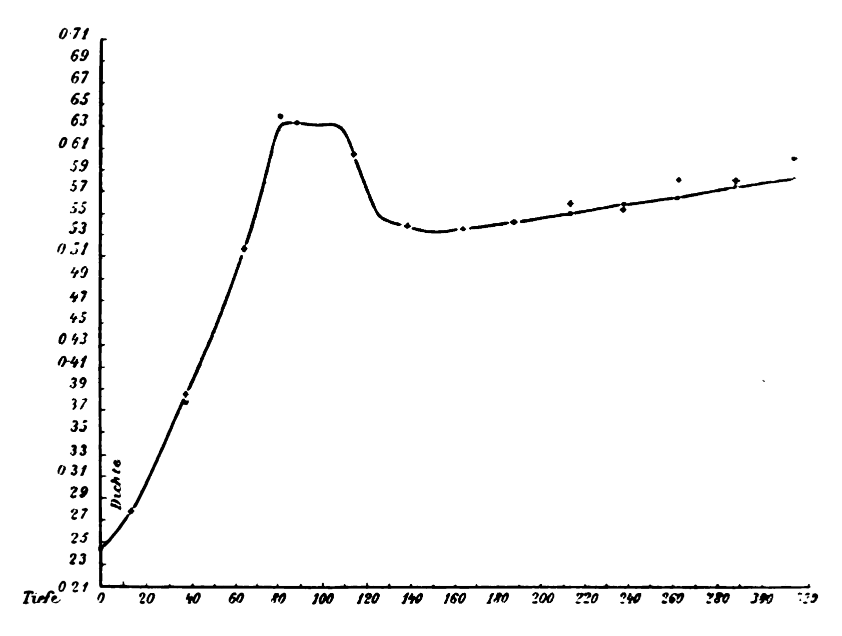


Fig. 2. **Ort Nr. 1.**

oben; wir haben echten Firnschnee vor uns. Die Körner nehmen an Größe mit der Tiefe zu und, genau betrachtet, erkennt man, daß sie aus vollständig durchsichtigem Eise bestehen, in das viele kleine Luftblasen eingeschlossen sind. Der Firnschnee hat seine Krystallstruktur vollständig verloren, indem durch häufiges Schmelzen und Wiedergefrieren die Spitzen und Nadeln der Krystalle abgeschmolzen sind und das eindringende Schmelzwasser um einzelne Kerne zu einem Korne zusammenfriert. So konnten bei unseren Messungen gut die Übergänge von feinkörnigem Hochfirn unterhalb der Eiskruste bis zum grobkörnigen Tieffirn in zirka 3 *m* Tiefe übersehen werden.

In den Messungen oberhalb der Gletscherspalte, bei den Stellen Nr. 2 bis 8 konnte auch der schroffe Übergang von

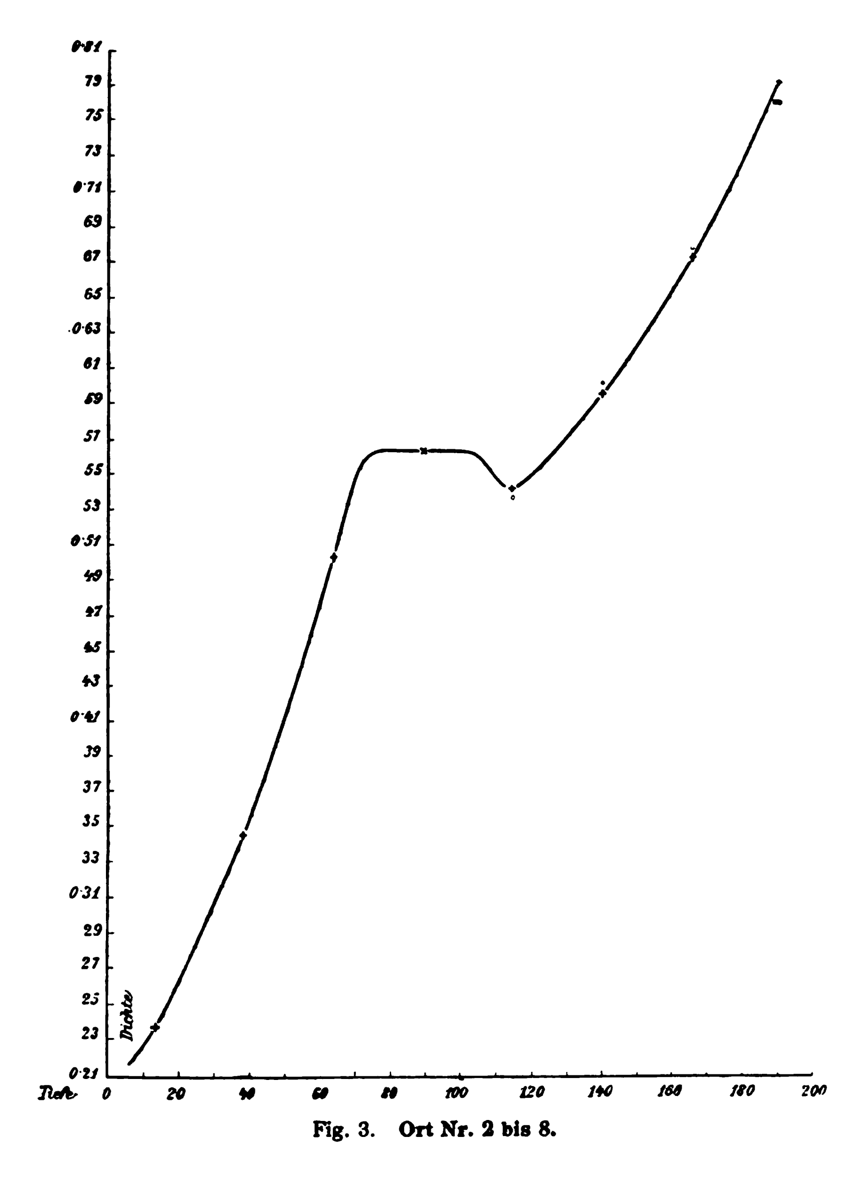


Fig. 3. **Ort Nr. 2 bis 8.**

Firnschnee zu Firneis beobachtet werden. Je tiefer man schreitet, desto größer werden die Firnkörner, jedoch ist der Übergang

von grobkörnigem Firn zu Firneis ein plötzlicher und unvermittelter. Das Firneis ist sehr fest und hart, jedoch nicht so dicht wie Gletschereis, ist von kleinen Blasen, die mit Luft erfüllt sind, durchzogen, bildet aber ein zusammenhängendes Ganzes. Mittels unseres Apparats konnte man von Firneis nur ganz dünne Scheiben herausbekommen, die aus sehr klarem Eise bestanden und eine Dichte von zirka 0·85 ergaben.

Was die Zunahme der Dichte mit der Tiefe bewirkt, ist mannigfaches. Frischgefallener Schnee drückt sich zu einem kleineren Volumen zusammen, wenn er einer höheren Temperatur ausgesetzt wird. Der Schnee besteht aus einem weiten Netz von Kapillarröhrchen, die das Wasser in sich wie ein Schwamm aufnehmen; die Luft, welche den größeren Teil eines bestimmten Schneevolumens ausmacht, wird durch die Poren ausgetrieben und die Dichte nimmt zu.

Bei dem Wärmeaustausch in den Oberflächenschichten der Schneelagen ist vor allem darauf zu achten, daß die Wärme vollständig dazu benützt wird, die obersten Schneeschichten zu schmelzen und nur insoweit mittelbar auf die unteren einen Einfluß ausübt, daß das Schmelzwasser langsam etwas einsickert, während dagegen die Kälte, wenn sie längere Zeit anhält, allmählich in immer tiefere Schichten bis in die tiefsten eindringt und nicht wie die Wärme, die an der Oberfläche vollständig verbraucht wird, für dieselben verloren geht. Eine weitere Ursache der zunehmenden Verdichtung des Schnees mit der Tiefe ist der Druck, den die oberen Schneelagen auf die unteren ausüben. Das Schneevolumen wird um so kleiner, je größer der Druck ist, der auf ihm lastet; die Luft wird ausgequetscht und die Dichte nimmt daher mit der Tiefe zu.

Zur analytischen Darstellung der Schneedichte mit der Tiefe wird von den meisten Autoren fast stets angenommen, daß die Dichte proportional der Tiefe zunehme und daß, wenn ρ die Dichte des Schnees, z die Tiefe, von der Oberfläche aus gerechnet, bedeutet, die Zunahme durch die Formel $\rho = \rho_0 + az$ dargestellt sein würde. Ein Blick auf unsere graphischen Darstellungen Fig. 2 und 3 zeigt uns sofort, daß diese Beziehung sicherlich für die oberen Schichten der Schneelagen nicht erfüllt ist. Die Zunahme erfolgt in einer gegen die Ordinaten-

achse schwach konkaven Kurve und kann somit durch eine lineare Beziehung nicht dargestellt werden.

Eine logarithmische Beziehung, von Abe[1] zuerst abgeleitet, gibt, wie wir sehen werden, viel besser mit den Tatsachen übereinstimmende Werte. Bezeichnet p den Druck der Schneedecke in der Tiefe z, so ist $\rho dz = dp$. Nimmt man weiters an, daß die Dichte des Schnees proportional dem Drucke der darüberlagernden Schneelagen ist, so ist $\rho = \rho_0 + Kp$, worin ρ_0 die Dichte an der Oberfläche und K eine Konstante bedeutet. Aus diesen zwei Gleichungen für ρ können wir p eliminieren und wir erhalten

$$Kdz = \frac{d\rho}{\rho}.$$

Ist ρ_0 die Dichte an der Oberfläche, so folgt

$$\log \rho = \log \rho_0 + Kz.$$

Diese Beziehung wurde auf unsere vier Kurvenzweige in Fig. 2 und 3 angewendet und ergab für die Zunahme der Schneedichte mit der Tiefe folgende Gleichungen:

Für Fig. 2, gültig von $z = 0$ bis $z = 80$:

$$\log \rho = \log 0\cdot 2404 + 0\cdot 00529 z;$$

für Fig. 2, gültig von $z = 162\cdot 5$ bis $z = 312\cdot 5$:

$$\log \rho = \log 0\cdot 4863 + 0\cdot 00025 z;$$

für Fig. 3, gültig von $z = 0$ bis $z = 70$:

$$\log \rho = \log 0\cdot 1946 + 0\cdot 00663 z;$$

für Fig. 3, gültig von $z = 112\cdot 5$ bis $z = 187\cdot 5$:

$$\log \rho = \log 0\cdot 3198 + 0\cdot 00201 z.$$

Diese vier Gleichungen stellen die Kurvenäste mit großer Genauigkeit dar, so daß die Abweichungen der beobachteten und berechneten Werte vollständig innerhalb der Beobachtungsfehler liegen. Folgende kleine Tabelle gibt diese Abweichungen für die einzelnen Kurven wieder.

---

[1] Meteorolog. Zeitschrift, Bd. 25, 1908, p. 461.

Tabelle IV.

Tiefe in Zentimeter	Berechnete Dichte ρ	Beobachtete Dichte ρ	Differenz
Fig. 2			
12·5	0·28[illegible]	0·28[illegible]	[illegible]
37·5	0·379	0·388	−0·009
62·5	0·515	0·515	0·000
8[illegible]	0·637	0·635	−0·002
162·5	0·534	0·534	0·000
187·5	0·542	0·542	0·000
212·5	0·550	0·556	+0·006
237·5	0·557	0·556	−0·001
262·5	0·566	0·583	+0·017
287·5	0·574	0·578	+0·004
312·5	0·582	0·607	+0·025
Fig. 3			
12·5	0·236	0·236	0·000
37·5	0·345	0·344	−0·001
62·5	0·5[illegible]5	0·515	0·000
112·5	0·538	0·545	+0·007
137·5	0·604	0·594	−0·010
162·5	0·678	0·674	−0·004
187·5	0·762	0·795	+0·033

Betrachten wir nun die Werte K in den vier Gleichungen und die zugehörigen Werte von ρ_0:

K	ρ_0
0·00663	0·1946
0·00529	0·2404
0·00201	0·3198
0·00025	0·4863

so finden wir die auffallende Tatsache, daß K regelmäßig abnimmt, wenn ρ_0 zunimmt, und zwar gehören diese Werte einer Kurve an, die Fig. 4 uns zeigt. Es besteht somit eine Beziehung zwischen ρ_0 und K, derart, daß wir eventuell in den obigen Gleichungen bloß mit einer Konstante auskommen könnten, während jetzt deren zwei, die gegenseitig voneinander abhängen, notwendig sind, um die Zunahme der Dichte mit der Tiefe analytisch darzustellen.

Da bereits Okada in »Journal of meteor. society of Japan, 1907, No 4« zur Bestimmung des Wärmeumsatzes in einer

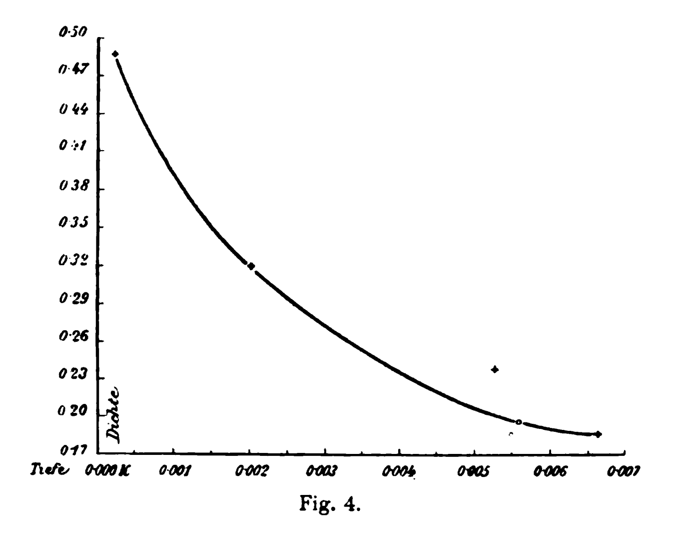


Fig. 4.

Schneedecke in Winterschneelagen die spezifische Dichte des Schnees in verschiedenen Tiefen gemessen, weiters Abe zu demselben Zwecke auch solche Bestimmungen gemacht hat, so wurde auch auf diese Beobachtungswerte die logarithmische Beziehung angewendet und man erhielt für die Zunahme der Dichte mit der Tiefe folgende Gleichungen:

$$\text{Okada} \ldots\ldots \log \rho = \log 0\cdot1952 + 0\cdot00558 z,$$
$$\text{Abe} \ldots\ldots \log \rho = \log 0\cdot1854 + 0\cdot00545 z.$$

Betrachten wir nun diese Werte von ρ_0 und K mit denen, die wir erhalten haben, so sehen wir, daß sie der Größenord-

nung zu unseren Werten sehr gut passen und die Beziehung zwischen ρ_0 und K nicht stören.

Die analytische Gleichung 1 gibt uns eigentlich keine Anhaltspunkte, wie man sich den Vorgang der Verdichtung der tieferen Schneeschichten vorstellen soll und gibt bloß eine Formel, die man eventuell dort benützen kann, wo man in die Rechnung die Zunahme der Dichte mit der Tiefe in geschlossener Form einführen muß, z. B. bei der Berechnung des Wärmeumsatzes in einer Schneedecke; sie besitzt keine weitere physikalische Bedeutung.

Denkt man sich nun vorerst überhaupt keine verdichtenden Kräfte in der Schneedecke vorhanden, so wird die Dichte überall in jeder Tiefe denselben Wert wie an der Oberfläche besitzen, da ein bestimmtes Schneevolumen keinen Veränderungen ausgesetzt ist. In diesem Falle würde in unserer früheren, die Zunahme der Dichte mit der Tiefe darstellenden Formel $\rho = \rho_0 + Kp$ die Konstante $K = 0$ sein.

Gehen wir nun zu dem der Wirklichkeit näher liegenden Falle über, daß das Schneevolumen durch den Druck, den die darüberliegenden Schichten ausüben, gewissen Veränderungen unterworfen ist, so können wir hier zwei voneinander verschiedene Fälle unterscheiden. Greifen wir irgendwo in der Tiefe z ein bestimmtes Volumen v Schnee heraus, so wird dieses Volumen zum Teil aus Wasser, zum Teil aus Luft bestehen, und zwar derart, daß, wenn man das Wasser von der Luft trennen könnte, $v_l\, cm^3$ Luft und $v_\omega\, cm^3$ Wasser darin enthalten wären.

Lassen wir nun auf dieses Volumen $v = v_\omega + v_l$ einen allseitigen Druck p wirken, so wird sich das Volumen v des Schnees verkleinern. Da sich nun das Volumen des Wassers v_ω nicht ändern kann, so wird das Luftvolumen v_l Änderungen unterworfen sein. Diese Änderung des Luftvolumens v_l kann nun zweifach sein: Erstens kann v_l sich deshalb verkleinern, weil die Luft jetzt unter einem größeren Drucke p steht und komprimiert wird, ohne daß Luft entweicht, zweitens aber können wir annehmen, daß infolge des Druckes eine gewisse Luftmenge aus dem Schnee herausgetrieben wird und entweicht und die Verkleinerung von v_l davon herrührt.

Betrachten wir nun einmal den ersten Fall. An der Oberfläche des Schnees wirkt bloß der Luftdruck p_0, in einer bestimmten Tiefe z dagegen neben dem Luftdruck p_0 noch das Gewicht der darüberliegenden Schneeschichten p, so daß hier der Schnee unter einem Drucke p_0+p steht. Ein Schneevolumen v_0 an der Oberfläche setzt sich aus $v_{0,\omega}$ cm^3 Wasser und aus $v_{0,l}$ cm^3 Luft zusammen und dementsprechend ein Schneevolumen v in der Tiefe z aus v_ω Wasser und v_l Luft. Nun wissen wir, daß $v_{0,\omega} = v_\omega$ ist und daß sich, wenn keine Luft entweicht, wie wir ja annehmen wollen, die Luftvolumina umgekehrt wie die Drucke, denen sie ausgesetzt sind, verhalten, also

$$\frac{v_l}{v_0} = \frac{p_0}{p_0+p}.$$

Da nun $v = v_{0,\omega}+v_l$ ist, so wird

$$v = v_{0,\omega}+v_{0,l}\frac{p_0}{p_0+p}$$

oder

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{p_0+p}{v_{0,\omega}(p_0+p)+v_0 p_0}.$$

Da p gegenüber p_0 eine sehr kleine Zahl ist, so können wir p gegen p_0 vernachlässigen und für $v_{0,\omega}(p_0+p)$ den Ausdruck $v_{0,\omega}p_0$ nehmen. Führen wir diese Vereinfachung, die sicher erlaubt ist, ein, so erhalten wir

$$\rho = \rho_0\left(1+\frac{p}{p_0}\right)$$

oder

$$\rho = \rho_0+\frac{\rho_0}{p_0}p.$$

Nach unseren früheren, empirisch die Abhängigkeit der Dichte vom Drucke wiedergebenden Gleichung $\rho = \rho_0+Kp$ haben wir K als von ρ_0 abhängig erhalten. Nach diesen Überlegungen müßte dann $K = \frac{\rho_0}{p_0}$ sein, falls unsere Annahmen über den physikalischen Vorgang der Schneeverdichtung richtig wären. Unsere Gleichung gibt uns zwar eine Beziehung

zwischen [illegible] und K liegen, diese entsprechen nicht im geringsten der empirisch gefundenen. Außerdem ergibt sich für K ein [illegible] zu kleiner Wert als jener, der den Beobachtungen entspricht. Setzen wir nämlich $\rho_1 = [illegible]$ g pro ccm [illegible], so folgt $K = [illegible]$, ein Wert, der [illegible] kleiner als der empirisch gefundene ist. Ein kleiner Wert von K würde einer sehr geringen Zunahme der Dichte mit der Tiefe entsprechen, was schon daraus hervorgeht, daß die Volumsänderungen der Schneemasse infolge Kompression der in ihr enthaltenen Luft nur sehr geringfügig ausfallen können.

Wir kommen jetzt somit zum zweiten Falle, in welchem angenommen wird, daß die Kompression der Schneemasse durch den Druck der überlagernden Schichten Luft aus dem [illegible] entweicht. [illegible] das Volumen der Schneemasse [illegible] und die Dichte derselben steigert. Sei an der Oberfläche das Schneevolumen v_1, in der Tiefe z dagegen v, so können wir [illegible] $v = v_1 - \Delta v_1$ setzen, wenn Δv_1 die Volumsverminderung von v_1 infolge des Entweichens einer bestimmten Menge Luft bedeutet. Diese Volumsverminderung v_1 ist nun [illegible] proportional dem Volumen v_1 selbst, da um so mehr Luft entweicht, je größer das Volumen v_1 ist; weiter ist Δv_1 auch dem Drucke p proportional, da unter denselben Verhältnissen bei einem größeren Drucke der Schnee stärker komprimiert wird, somit mehr Luft entweichen kann als bei einem geringeren Drucke. Wir können somit $\Delta v_1 = \gamma v_1 p$ setzen, wobei uns dann γ die Volumsverkleinerung der Volumseinheit bei einem Drucke $p = 1$ angibt.

Führen wir nun Δv_1 in unsere frühere Beziehung ein, so wird

$$v = v_1 (1 - \gamma p)$$

und somit

$$\frac{\rho_1}{\rho} = 1 - \gamma p.$$

Das empirische Gesetz der Dichtezunahme mit der Tiefe, das wir gefunden haben, lieferte die Gleichung

$$\log \frac{\rho_1}{\rho} = -Kz.$$

Der Zusammenhang zwischen γ und K wird dann erhalten, wenn wir diese beiden Gleichungen in Verbindung miteinander bringen. Es ergibt sich

$$\log(1-\gamma p) = -Kz$$

oder schließlich

$$\gamma = \frac{1-10^{-Kz}}{p}.$$

Sind unsere Annahmen über den Verdichtungsprozeß des Schnees in tieferen Lagen richtig, so muß diese Gleichung für zusammengehörige Werte von K, z und p stets dieselbe konstante Zahl γ liefern. An den früher mitgeteilten Beobachtungsresultaten sind wir nun in der Lage, diese Bedingungsgleichung zu prüfen. Aus den Beobachtungen ergeben sich folgende Werte für γ:

		Tiefe *cm*					
		5	15	25	35	45	55
Okada							
$K = 0\cdot00558$	p in g	1·00	3·22	5·75	8·62	11·89	15·60
	γ	0·062	0·054	0·048	0·042	0·037	0·032
Abe							
$K = 0\cdot00545$	p	0·95	3 04	5·66	8 54	11·80	15·49
	γ	0·064	0·056	0·048	0·042	0·037	0·032
Ort Nr. 1	z	12·5	37·5	62·5	87·5		
$K = 0\cdot00529$	p	3·2	11·4	22·6	37·0		
	γ	0·044	0·031	0·024	0·018		
Ort Nr. 2 bis 8	p	2·7	9·9	20·5			
$K = 0\cdot00663$	γ	0·064	0·052	0·030			

Diese berechneten Werte von γ zeigen uns sofort, daß von einer Konstanz des Wertes γ nicht die Rede sein kann, da ja die Zahlen systematisch mit zunehmender Tiefe abnehmen. Tragen wir jedoch in ein Koordinatensystem die Tiefen als Ordinaten, die Werte γ als Abszissen ein, so ergibt sich die auffallende Tatsache, daß die Werte γ auf geraden Linien liegen, somit γ eine lineare Funktion der Tiefe z ist. Berechnen wir nun die Gleichungen dieser Geraden, so finden wir

für Okada .... $\gamma = 0 \cdot 063 - 0 \cdot 000575\, z$

für Abe .... $\gamma = 0 \cdot 064 - 0 \cdot 000574\, z$

a für Ort Nr. 1 .... $\gamma = 0 \cdot 048 - 0 \cdot 000375\, z$

b für Ort Nr. 2 bis 8 ..... $\gamma = 0 \cdot 073 - 0 \cdot 000625\, z$

als Mittelwert $\frac{a+b}{2}$ ..... $\gamma = 0 \cdot 061 - 0 \cdot 000500\, z$

Man erhält somit für γ tatsächlich an der Oberfläche ($z = 0$), so verschieden auch die Anfangsbedingungen sind, von denen wir ausgegangen, einen konstanten Wert 0·062. Für jede tiefere Schichte bleibt in allen Fällen γ ebenfalls konstant, jedoch ist es etwas kleiner als an der Oberfläche und in jeder ihr überliegenden Schichte. Was bedeutet nun dies? Da γ die Volumsverkleinerung der Volumseinheit bei dem Drucke $p = 1$ infolge des Entweichens einer bestimmten Menge Luft, so würde dies heißen, daß diese Menge nicht für alle Tiefen dieselbe ist, sondern der Faktor, welcher angibt, eine wie große Menge Luft unter einem bestimmten Druck entweicht, hängt von der Tiefe ab. Daß diese Zahl γ für die Oberfläche und die tieferen Schichten nicht denselben Wert haben kann, ist leicht verständlich. Die Umstände, unter denen sich an der Erdoberfläche das Schneevolumen befindet, sind ganz andere als in einer bestimmten Tiefe. An der Oberfläche ist der Raum nach oben, wohin die Luft entweichen kann, vollständig frei, es wird dem Entweichen der Luft kein Hindernis gesetzt und der Prozeß kann ungestört vor sich gehen; in der Tiefe dagegen ist das Schneevolumen auf allen Seiten von fast gleich dichten Schneelagen umgeben und das Entweichen von Luft wird nicht so leicht vonstatten gehen wie an der Oberfläche, da sich unten die Luft erst durch die ganze Schichte hindurcharbeiten muß, bis sie frei wird. Diese Überlegung sagt uns aber nichts anderes, als daß γ mit der Tiefe abnehmen muß, und zwar je tiefer das Schneevolumen sich befindet, um so größer wird die Differenz zwischen dem γ an der Oberfläche und dem tatsächlichen sein. Der Faktor, der die Abnahme von γ mit der Tiefe angibt, zeigt sich in unseren Gleichungen ebenfalls als fast konstant, im Mittel 0·00055 und gibt so

ebenfalls einen Anhaltspunkt für Richtigkeit unserer Überlegungen.

Aus dieser letzten, den beobachteten Tatsachen am nächsten kommenden Darstellung der Schneedichte mit der Tiefe und deren Ursachen finden wir somit, daß der mächtigste Faktor der Verdichtung der unteren Schneelagen der Druck der überlagernden Schneeschichten ist, welcher die Luft aus dem Schnee austreibt und dadurch die Dichte desselben steigert. Andere Faktoren wirken störend auf eine regelmäßige Abnahme der Dichte mit der Tiefe, indem sie bloß die oberen Schneeschichten beeinflussen und erst mittelbar von Einfluß auf die unteren sein können.

Zusammenfassend können wir somit sagen:

Bei den am Hohen Sonnblickferner vorgenommenen Schneedichtebestimmungen ist eine regelmäßige Zunahme der Schneedichte mit der Tiefe wahrzunehmen, zu dessen Erklärung vollständig die Annahme hinreicht, daß der Druck der überlagernden Schneeflächen die unteren komprimiert, die Luft, die sich in den Poren des Schnees befindet, zum Teil austreibt und die Dichte desselben vergrößert. Andere verdichtende Faktoren bewirken eine Störung in der regelmäßigen Zunahme der Dichte mit der Tiefe, indem dieselben vorwiegend die Dichte der Oberflächenschichten vergrößern, die unteren jedoch fast intakt lassen. Bei den Messungen konnten gut die charakteristischen Unterschiede zwischen Hochschnee, Firnschnee und Firneis beobachtet werden. Hochschnee hat eine mittlere Dichte von 0·35, Firnschnee von 0·55 und Firneis eine Dichte von zirka 0·85. Der Übergang von Hochschnee in Firnschnee ist allmählich so wie jener von Hochfirn in Tieffirn, unvermittelt jedoch jener von Tieffirn in Firneis.

Landau E., Über einen Grenzwertsatz.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1089—1094.

Grenzwertsatz.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p 1089—1094.

Landau E., Über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression und die Primideale in einer Idealklasse.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Primzahlen in einer arithmetischen Progression und Primideale in einer Idealklasse.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Primideale in einer Idealklasse.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Arithmetische Progression, Primzahlen in derselben.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Forchheimer Ph., Über einige Grundwasserspiegel.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1109—1126.

Konforme Abbildung, angewendet auf Grundwasserspiegel.
Forchheimer Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1109—1126.

Nabl J., Über die Störung der Wirkung eines radioaktiven Gases in einem geschlossenen Gefäß durch einen, für die Wirkung undurchlässigen, hineinragenden zylindrischen Stab.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1127—1157.

Landau E., Über einen Grenzwertsatz.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1089—1094.

Grenzwertsatz.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1089—1094.

Landau E., Über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression und die Primideale in einer Idealklasse.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Primzahlen in einer arithmetischen Progression und Primideale in einer Idealklasse.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Primideale in einer Idealklasse.
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Arithmetische Progression, Primzahlen in derselben
Landau E., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1095—1107.

Forchheimer Ph., Über einige Grundwasserspiegel.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1109—1126.

Konforme Abbildung, angewendet auf Grundwasserspiegel.
Forchheimer Ph., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1109—1126.

Nabl J., Über die Störung der Wirkung eines radioaktiven Gases in einem geschlossenen Gefäß durch einen, für die Wirkung undurchlässigen, hineinragenden zylindrischen Stab.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1127—1157.

Radioaktives Gas, Störung, dessen Wirkung in einem geschlossenen Gefäß durch einen für die Wirkung undurchlässigen hineinragenden zylindrischen Stab.
Nabl J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd 117 (1908), p. 1127—1157.

Zylindrischer Stab (Elektrode), dessen Störung der Wirkung eines radioaktiven Gases innerhalb eines geschlossenen Gefäßes.
Nabl J., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1127—1157.

Sirk H., Über die Beziehung zwischen mittlerer freier molekularer Weglänge und dem Brechungsexponenten eines Gases.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1159—1164.

Mittlere freie molekulare Weglänge, ihre Beziehung zum Brechungsexponenten des betreffenden Gases.
Sirk H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1159—1164.

Brechungsexponent eines Gases, seine Beziehung zur mittleren freien molekularen Weglänge.
Sirk H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1159—1164.

Kinetische Gastheorie. Berechnung einer Beziehung zwischen mittlerer freier molekularer Weglänge und Brechungsexponenten eines Gases.
Sirk H., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1159—1164.

Zahradník K., Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung, respektive Klasse vermittels der kollinear incidenten Elemente.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1167—1190.

Kurven, rationale, dritter und vierter Ordnung.
Zahradník K., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1167—1190.

Schneedichtebestimmungen auf dem Hohen Sonnblick (3106 m).
Defant A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., II a. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1231—1249.

Sonnblick, Schneedichtebestimmungen auf dem Hohen Sonnblick (3106 m).
Defant A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1231—1249.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE.

CXVII. BAND. X. HEFT.

ABTEILUNG IIa.

ENTLHÄT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

Über die Wahl der »kanonischen Verteilung« von Systemen in der statistischen Mechanik

von

A. Waßmuth,

k. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Dezember 1908.)

Die statistische Mechanik betrachtet eine große Zahl (N) voneinander unabhängiger, mechanischer Systeme von identischer Beschaffenheit, die nur verschieden sind in der Phase, d. h. in ihrem durch Konfiguration und Geschwindigkeit bestimmten Zustand. Die einzelnen Systeme dieser »Systemmenge« werden sich in einem bestimmten Augenblick in sehr verschiedenen Phasen befinden. Auch die Kräfte in den einzelnen Systemen sollen stets durch dieselbe Funktion der Koordinaten darzustellen sein.

So können wir uns z. B. vorstellen, daß jedes dieser N Systeme stets aus denselben ν materiellen Punkten bestände, die nur zu einer bestimmten Zeit in den verschiedenen Systemen verschiedene Lagen (Koordinaten) und verschiedene Geschwindigkeiten aufweisen. Existiert ein Potential für die wirkenden Kräfte, so soll dieses in jedem System dieselbe Funktion der Koordinaten sein.

Die N Systeme bestehen ohne Wechselwirkung nebeneinander. Ein beliebiges System sei durch die generellen Koordinaten: $q_1, q_2, \ldots q_n$ und durch die entsprechenden Momente (Impulse) $p_1, p_2, \ldots p_n$ bestimmt, wobei also, wenn ε die Summe aus der potentiellen Energie ε_q und der aktuellen ε_p vorstellt, irgendein p_s gefunden wird durch die Beziehung:

$$p_s = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \dot{q}_s},$$

und für $\frac{dq_s}{dt}$ die Bezeichnung $\dot{q}_s$ gesetzt ist.

In der statistischen Mechanik sucht man Gruppen von Systemen auf, bei denen die Phase zwischen vorgeschriebenen, nahen Grenzen liegt. Als die Zahl jener Systeme, deren Phase zwischen den Grenzen:

$$q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$$

und

$$q_1+dq_1, q_2+dq_2, \ldots q_n+dq_n, p_1+dp_1, p_2+dp_2, \ldots p_n+dp_n$$

liegt, kann ein Ausdruck von der Form:

$$D.dq_1.dq_2\ldots dq_n.dp_1.dp_2\ldots dp_n = D.d\lambda$$

gelten, wobei D im übertragenen Sinne die Dichte im Raumelement (von $2n$ Dimensionen):

$$d\lambda = dq_1.dq_2\ldots dq_n.dp_1.dp_2\ldots dp_n$$

heißt und D eine Funktion von $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ und eventuell der Zeit t ist.

Es läßt sich strenge (z. B. mit Hilfe von Hamilton's partiellen Differentialgleichungen[1]) beweisen, daß der Zustand dann ein stationärer wird, wenn die Dichte D eine Funktion der Energie ε ist, d. h., daß bei einer Verteilung der Systeme nach der Regel:

$$D = \text{Funkt.}\,(\varepsilon)$$

in einer gewissen Zeit ebenso viele Systeme aus der Gruppe $d\lambda$ ausscheiden, als in derselben Zeit hinzukommen.

Da $D.d\lambda$ die Zahl der Systeme im Elemente $d\lambda$ angibt, so bekommen wir, wenn wir über alle vorhandenen Phasen (über alle q und alle p) summieren, die Zahl N der Systeme, oder es ist:

$$N = \int\limits_{\text{über alle Phasen}} D.d\lambda \qquad (1)$$

---

[1] Willard Gibbs, Grundlagen der statistischen Mechanik; deutsch bearbeitet von Zermelo, Leipzig 1905, p. 30. — H. A. Lorentz, Abhandlungen, Leipzig 1906, I, p. 280.

Als einfache Form wählt Gibbs für D die Beziehung:

$$D = Ne^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}} \tag{2}$$

und sagt, daß dann eine kanonische Verteilung der Systeme stattfände. Der Modul T der Verteilung soll eine stets positive Konstante sein. Desgleichen sei auch ψ eine Konstante, die nach (1) bestimmt ist durch:

$$1 = \underset{\text{über alle Phasen}}{\int \ldots\ldots\ldots\ldots \int} e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}} . d\lambda \tag{3}$$

Gibbs meint, daß die kanonische Verteilung den denkbar einfachsten Fall vorstelle, da »sie die Eigenschaft hat, daß, wenn das System aus Teilsystemen mit besonderen Energien besteht, die Gesetze der Phasenverteilung in den einzelnen Teilen von derselben Natur sind«.

Damit soll wohl ausgedrückt werden, daß, falls

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r \quad \text{und} \quad \psi = \psi_1 + \ldots + \psi_r$$

ist, man hat:

$$P = \frac{D}{N} = e^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}} = e^{\frac{\psi_1-\varepsilon_1}{T}} . e^{\frac{\psi_2-\varepsilon_2}{T}} \ldots e^{\frac{\psi_r-\varepsilon_r}{T}} = P_1 . P_2 \ldots P_r,$$

wo irgendein P_s gegeben ist durch:

$$P_s = e^{\frac{\psi_s-\varepsilon_s}{T}},$$

also dieselbe Form wie P aufweist.

Man kann die Frage aufwerfen, welchen Erfahrungssatz man etwa herbeiziehen könnte, um direkt von der allgemeinsten Form: $D =$ Funkt. (ε) auf die kanonische Verteilung: $D = Ne^{\frac{\psi-\varepsilon}{T}}$ geführt zu werden.

So könnte man etwa: $D = NF\left[\frac{\psi-\varepsilon}{T}\right]$ annehmen, also sicher einen stationären Zustand voraussetzen und nun die

Funktion F so wählen, daß man, den gewöhnlichen Weg einschlagend, für reversible Prozesse zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik auf mechanische Weise geführt werde. Dieser Weg wurde — mit einer gewissen Einschränkung — von H. Burbury[1] betreten; er hat aber das Unangenehme, daß er das Anzustrebende vorweg hinwegnimmt.

Im folgenden soll deshalb ein anderer Vorgang eingehalten werden. Wir gelangen ebenfalls zur kanonischen Form, wenn wir dem Durchschnittswert eines Teiles der aktuellen Energie ε_p eine gewisse Bedingung vorschreiben. Da ε_p eine quadratische Form der $p_1, p_2, \ldots p_n$ ist, so besteht die Gleichung (Gibbs, l. c., 48)

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} p_1 \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p_1} + \ldots + \frac{1}{2} p_n \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p_n};$$

dabei kann, weil die potentielle Energie ε_q von den p unabhängig ist, auf der rechten Seite dieser Gleichung statt ε_p auch: $\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ genommen werden.

Setzen wir nun das Grundgesetz in der gewiß allgemeinen Form:

$$D = NF\left[\frac{\psi - \varepsilon}{T_1}\right] = N.F\left[\eta\right],$$

wo $\frac{\psi - \varepsilon}{T_1} = \eta$ ist, voraus, so wird der Durchschnittswert des ersten Summanden von ε_p gegeben sein durch:

$$\overline{\frac{1}{2} p_1 \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p_1}} = \underset{\text{über alle Phasen}}{\int \ldots\ldots\ldots \int} \frac{1}{2} p_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1} . F\left[\frac{\psi - \varepsilon}{T_1}\right] dq_1 \ldots dp_n.$$

Dabei hat die Funktion F die Bedingung 1, d. i. die Gleichung:

$$1 = \underset{\text{über alle Phasen}}{\int \ldots\ldots\ldots \int} F(\eta) . dq_1 \ldots dp_n$$

---

[1] H. Burbury; The second law of Thermodyn. Phil. Mag. June 1894.

zu erfüllen, so daß durch Division dieser beiden Gleichungen erhalten wird:

$$\overline{\frac{1}{2}p_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_1}} = \frac{\int\cdots\int dq_1\ldots dq_n.dp_2\ldots dp_n\int\frac{1}{2}p_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_1}F(\eta)dp_1}{\int\cdots\int dq_1\ldots dq_n.dp_2\ldots dp_n\int F(\eta)dp_1}.$$

Wegen: $\frac{\psi-\varepsilon}{T_1}=\eta$ wird: $-\frac{1}{T_1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_1}=\frac{\partial\eta}{\partial p_1}$ und, falls man noch: $F(\eta)=\frac{\partial G(\eta)}{\partial\eta}$ setzt, wo $G(\eta)$ eine neue Funktion von η darstellt, wird:

$$\int\frac{1}{2}p_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_1}F(\eta)dp_1 =$$

$$= -\frac{T_1}{2}\int p_1\frac{\partial G(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p_1}dp_1 = -\frac{T_1}{2}\Big|p_1 G(\eta)\Big| + \frac{T_1}{2}\int G(\eta)dp_1,$$

wo für die Grenzen der Integration die entsprechenden Werte der p_1 zu nehmen sind.

Es werde angenommen, daß sich diese Grenzen und die Funktion $G(\eta)$ so wählen lassen, daß das außerhalb des Integrals stehende Glied verschwindet, d. h. daß:

$$\Big|p_1.G(\eta)\Big| = 0 \tag{4}$$

sei. Dann wird der Durchschnittswert des ersten Postens der kinetischen Energie:

$$\overline{\frac{1}{2}p_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_1}} = \frac{T_1}{2}\cdot\frac{\int\cdots\int dq_1\ldots dq_n.dp_2\ldots dp_n\int G(\eta)dp_1}{\int\cdots\int dq_1\ldots dq_n.dp_2\ldots dp_n\int F(\eta)dp_1}.$$

Schreiben wir diesem Durchschnittswert die Bedingung (A) vor, daß er unabhängig sei von der vorhandenen Konfiguration, d. i. unabhängig von den Werten der $q_1\ldots q_n$, so kann dies unter der Voraussetzung, daß die Grenzen der p von den q nicht abhängen, jedenfalls geschehen, wenn:

$$G(\eta) = F(\eta).f_1(T_1) \tag{5}$$

ist, wobei $f_1(T_1)$ eine Funktion der für alle Systeme konstanten T_1 ist und als Teil der kinetischen Energie positiv sein muß.[1]

Die Beziehung (5) ist also hinreichend; es läßt sich aber auch zeigen, daß sie notwendig gelten muß, wenn die Bedingung A erfüllt sein soll.

Soll nämlich:

$$\int G(\tau)\, dp_1 = f_1(T_1) \int F(\tau)\, dp_1 = f_1(T_1) \int \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau}\, dp_1,$$

oder

$$\int_{p_1'}^{p_1''} \left[G(\tau) - f_1(T_1) \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} \right] dp_1 = 0 \text{ sein,}$$

wobei p_1' und p_1'' die Integrationsgrenzen vorstellen, und ist $F(\tau) = \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau}$ im Bereich der oberen Grenze stetig, so ist es auch $G(\tau)$ und die vorstehende Gleichung gibt nach der oberen Grenze p_1'' differenziert

$$\left[G(\tau) - f_1(T_1) \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} \right]_{p = p_1''} = 0;$$

eine ähnliche Beziehung gilt auch für die untere Grenze. Wegen der Willkürlichkeit dieser Grenzen folgt nun als notwendig wieder die Beziehung (5).

Die Annahme A führt wesentlich schon zur kanonischen Form, denn aus (5) folgt:

$$\frac{1}{f_1(T_1)} = \frac{F(\tau)}{G(\tau)} = \frac{1}{G(\tau)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau}, \quad \text{d. h.} \quad G(\tau) = C e^{\frac{\tau}{f_1(T_1)}},$$

wo C die Konstante T_1 enthalten kann. Weiter wird:

$$F(\tau) = \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} = \frac{C}{f_1(T_1)} e^{\frac{\tau}{f_1(T_1)}},$$

d. h.

$$\Sigma = N \frac{C}{f_1(T_1)} e^{\frac{\tau}{f_1(T_1)}} = N [illegible] \frac{C}{f_1(T_1)} e^{[illegible]}. \qquad (6)$$

---

[1] Der [illegible] Mittelwert [illegible] wird dann gleich [illegible] $f_1(T_1)$.

Diese Form unterscheidet sich in der Tat von der kanonischen nur durch die Wahl der Konstanten; nehmen wir $C = f_1(T_1)$ und setzen: $T_1 . f(T_1) = T$, so fallen beide Ausdrücke zusammen. Der obige Mittelwert $\overline{\frac{1}{2} p_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1}}$ wird dann gleich $\frac{1}{2} T$. Wir wollen voraussetzen, daß die denkbar verschiedensten Werte der Impulse p — für rechtwinklige Koordinaten von Massenpunkten sind die p den »Geschwindigkeiten« proportional — auftreten, so daß die Grenzen der p von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen und demnach auch von den q unabhängig sind. Die eben abgeleitete Form: $G(\eta) = C . e^{\frac{\eta}{f_1}}$ befriedigt dann auch die Gleichung (4).

Unter der Voraussetzung der Bedingung (5), die, wie wir sahen, zur kanonischen Form führt, wird auch der Durchschnittswert des zweiten Postens der kinetischen Energie, d. i. $\overline{\frac{1}{2} p_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_2}}$ gleich $\frac{T_1}{2} f_1(T_1) = \frac{1}{2} T$ usw., so daß der Durchschnittswert der gesamten aktuellen Energie eines Systems die Größe $\frac{n}{2} T$ für jede Konfiguration hat. Dies ist (Gibbs l. c., p. 46) gleich wahr, ob wir den Durchschnitt für die ganze Gesamtheit nehmen oder ihn auf eine einzelne Konfiguration beschränken.

Setzen wir voraus, daß die Grenzen der p von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, so folgt umgekehrt aus der Forderung, daß der Durchschnittswert der kinetischen Energie eines Systems von der Konfiguration (den verschiedenen Werten der q) unabhängig sei, notwendig die kanonische Form für D. Der Durchschnittswert von ε_p ist nämlich gleich der Summe der n Posten von der Form: $\overline{\frac{1}{2} p_s \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p_s}}$; diese sämtlichen n Posten müssen aber untereinander gleich sein, da kein Grund für das Überwiegen eines Summanden vorliegt.

Für den Mittelwert $\overline{\varepsilon_p}$ der kinetischen Energie erhalten wir:

$$\overline{\varepsilon_p} = n . \overline{\frac{1}{2} p_1 \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p_1}},$$

so daß nun unter Erinnerung an die Grenzen von p_1 die obige Deduktion wiederum Platz greifen kann.

Wir sehen also: der Mittelwert der kinetischen Energie wird, wenn die Impulse (Geschwindigkeiten) alle möglichen Werte aufweisen, für einen stationären Zustand nur dann von der jeweiligen Konfiguration unabhängig sein, wenn die Dichte die kanonische Form aufweist.

Gibt es nun einen Fall, der verlangt, daß der Durchschnittswert der kinetischen Energie unabhängig von der Konfiguration sei? Wir meinen, diese Forderung finde sich bei dem Satze:

»Wenn zwei Körper K und L einander, ohne sich zu mischen, berühren, so wird die innere Bewegung der Teilchen von K die von L nur dann nicht beeinträchtigen, wenn — ganz abgesehen von der Konfiguration — der Durchschnittswert der kinetischen Energie von K gleich dem von L ist; nur dann kommt es zu keinem Übergang von aktueller Energie.«

Von diesem Satze ausgehend, gelangt man auf obigem Wege wieder zur kanonischen Form.

Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie

von

Ludwig Tuschel.

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Oktober 1908.)

I. Die sphärische Abbildung allgemeiner Schraubflächen.

Man erhält bekanntlich das sphärische Bild einer Fläche Φ_1, indem man jedem ihrer Punkte p_1 jenes Gegenpunktepaar $pp_\times$ einer zugrundegelegten Kugel Φ zuordnet, in welchem die Tangentialebenen $\pi\pi_\times$ zur Tangentialebene π_1 des Punktes p_1 parallel sind.

Soll nun die sphärische Abbildung in der darstellenden Geometrie eine Verwertung finden, so muß es ermöglicht werden, einen zeichnerisch leicht durchführbaren Übergang von den Punkten der Kugel zu den entsprechenden Punkten der zu untersuchenden Fläche zu bewerkstelligen.[1]

Im Folgenden soll ein solcher Übergang für allgemeine Schraubflächen gezeigt werden.

Die konstruktive Lösung der Aufgabe, parallel zu einer gegebenen Ebene π an die Schraubfläche Φ_1 eine Tangentialebene zu legen und deren Berührungspunkt p_1 mit der Fläche zu finden, wird sehr einfach, wenn man folgende Abbildung[2]

---

[1] Vgl. A. Adler, Zur sphärischen Abbildung der Flächen. Diese Sitzungsberichte, Bd. CX, Abt. IIa (1901), p. 50 bis 72.

[2] Diese Abbildung findet sich erwähnt bei E. Müller, Lehrb. d. darst. Geom., I, Leipzig 1908, Nr. 139; Prof. E. Müller hat in einer im Studienjahre 1907/08 an der technischen Hochschule in Wien gehaltenen Sondervorlesung über »Schraub-, Dreh- und Schiebflächen« die konstruktive Behandlung der Schraubflächen, insbesondere der Schatten- und Beleuchtungskonstruktion auf diese Abbildung gegründet.

benützt: Man wähle in der Schraubachse A einen sich im Abstand der reduzierten Ganghöhe von der (zu A senkrechten) Bildebene Π_1 befindlichen Punkt s und ordne nun jeder Tangentialebene π_1 jene um — 90° gedrehte Gerade P zu, die als Schnitt der Bildebene mit einer durch s gehenden, zu π_1 parallelen Ebene $\bar{\pi}$ entsteht.

Es liegt daher nahe, zuerst den Zusammenhang zu untersuchen, der zwischen der sphärischen Abbildung und jener Abbildung besteht, die jeder Tangentialebene π_1 einer beliebigen Fläche Φ_1 die Schnittlinie der Bildebene mit einer

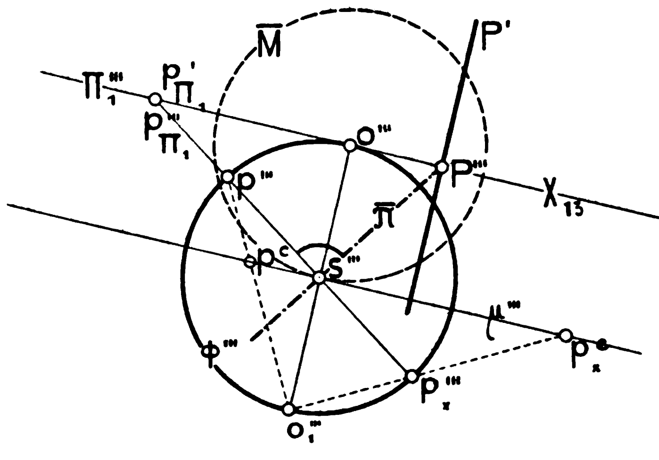


Fig. 1.

durch einen beliebigen Punkt s hindurchgehenden, zu π_1 parallelen Ebene $\bar{\pi}$ zuordnet. Es möge diese Abbildung kurz »Zuordnung« genannt werden.

Zur Vereinfachung wähle man als Bildebene Π_1 eine Tangentialebene der Kugel und den Punkt s im Kugelmittelpunkt. Der Berührungspunkt von Π_1 mit der Kugel heiße o, sein Gegenpunkt o_1.

Es sei (Fig. 1) $pp_\times$ das sphärische Bild eines Punktes p_1 von Φ_1. Da die Symmetrieebene $\bar{\pi}$ des Punktepaares $pp_\times$ zur Tangentialebene π des Punktes p parallel ist, so schneidet sie die Bildebene Π_1 in der der Tangentialebene π_1 des Punktes p_1 zugeordneten Geraden P. Die Verbindungsgerade von p und $p_\times$

und die Ebene $\bar{\pi}$ sind nun zwei entsprechende Elemente in der Polarität des Minimalkegels $\varkappa$ (mit der Spitze s). Projiziert man demnach p und $p_\varkappa$ aus s auf die Bildebene Π_1, so erhält man einen Punkt p_{Π_1}, welcher der Pol der Geraden P bezüglich des nullteiligen Kreises $\overline{M} = [\varkappa\Pi_1]$[1] sein muß.

Daher gilt: Die Projektion einer auf der Kugel Φ beliebig vorgegebenen Kurve C aus s auf die Bildebene ist eine Kurve C_{Π_1}, die an dem nullteiligen Kreise $\overline{M}$ polarisiert, die der Abwickelbaren längs der entsprechenden Kurve C_1 auf Φ_1 zugeordnete Kurve $\overline{C}$ ergibt.

Umgekehrt: Kennt man die der Abwickelbaren längs einer Kurve C_1 auf Φ_1 zugeordnete Kurve $\overline{C}$, so erhält man durch deren Polarisation an dem nullteiligen Kreise $\overline{M}$ eine Kurve C_{Π_1}, die aus dem Punkte s auf die Kugel projiziert, das sphärische Bild der Kurve C_1 liefern muß.

Mit diesem Zusammenhang der beiden Abbildungen ist somit auch eine rein geometrische Behandlungsweise der sphärischen Abbildung einer Fläche, insbesondere einer Schraubfläche gegeben.

Die stereographische Projektion[2] des Punktepaares $pp_\varkappa$ aus dem Punkte o_1 auf die durch s gehende, zu Π_1 parallele Ebene μ ist ein Punktepaar $p^c p^c_\varkappa$, dessen Symmetrale orthogonal auf die Bildebene projiziert, die Gerade P ergeben muß. Man kann daher behaupten:

Die der Tangentialebene eines beliebigen Punktes einer Fläche Φ_1 zugeordnete Gerade ist der Grundriß der Symmetralen jenes Punktepaares, das man erhält, wenn man die sphärischen Bilder des betreffenden

---

[1] Bezeichnungsweise siehe E. Müller, Lehrb. d. darst. Geometrie, I, Leipzig 1908.

[2] Die stereographische Projektion ist ausführlich behandelt bei E. Reusch: »Die stereographische Projektion« (1881). Eine einheitliche, auf die Theorie des Imaginären gestützte Behandlungsweise findet die stereographische Projektion in einer von Prof. E. Müller im Studienjahr 1906/07 gehaltenen Sondervorlesung über »Stereographische Projektion und Zyklographie«.

Punktes der Fläche Φ_1 aus dem Punkte o_1 stereographisch auf die Ebene μ projiziert.

Daß die der Abwickelbaren längs einer Lichtgleiche einer Fläche zugeordnete Kurve ein Kegelschnitt sein muß, ist ohne weiteres klar. Es folgt aber diese Tatsache auch aus der Polarität $\overline{M}\begin{cases} p_{\text{II}_1} \\ P \end{cases}$, wenn man beachtet, daß das sphärische Bild einer Lichtgleiche immer Lichtgleiche der Kugel für dieselbe Lichtstrahlrichtung ist.

Für die Eigenschattengrenze C_1 von Φ_1 ist das sphärische Bild ein Großkreis C und C_{II_1} eine gerade Linie.

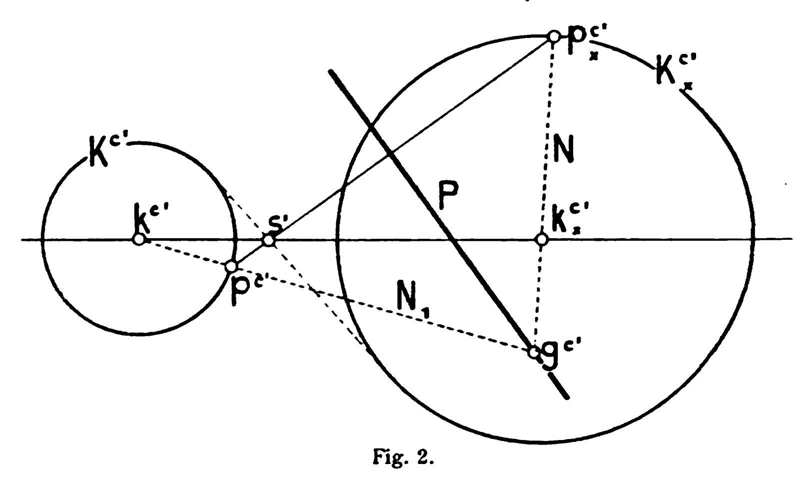


Fig. 2.

Dieser entspricht in der Polarität des nullteiligen Kreises $\overline{M}$ ein Punkt $\overline{l}$, welcher der der Lichtrichtung zugeordnete Punkt sein muß. Man erkennt leicht, daß $\overline{l}$ der Grundriß des Mittelpunktes von C^c ist. Daher gilt:

Der der Lichtrichtung zugeordnete Punkt ist immer Mittelpunkt des Grundrisses der stereographischen Projektion der Kugeleigenschattengrenze.

Es seien (Fig. 2) $K^{c'}$ und $K^{c'}_{\times}$ die Grundrisse der stereographischen Projektionen der sphärischen Bilder einer Isophote. Die Symmetralen P der Punktepaare $p^{c'}p^{c'}_{\times}$ müssen nach dem oben bewiesenen Satze die der Abwickelbaren längs der Lichtgleiche zugeordneten Kurve, also einen Kegelschnitt $\overline{P}$ umhüllen.

Es entsteht nun die Frage, wie man den Berührungspunkt $g^{c'}$ von P mit $\overline{P}$ ermitteln könne, eine Aufgabe, die bei der Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkte der Lichtgleiche einer Schraubfläche eine Rolle spielt.[1] Die Projektion jenes Großkreises G, welcher K in p berührt, aus dem Punkte s auf Π_1 ist eine gerade Linie G_{Π_1}, deren Pol $g^{c'}$ (bezüglich $\overline{M}$) der Grundriß des Mittelpunktes von G^c ist. Den Tangentialebenen in sämtlichen Punkten des Kreises G sind Gerade zugeordnet, die durch $g^{c'}$ hindurchgehen. Beschreibt also $p^{c'}$ ein Linienelement von $K^{c'}$, so wird sich P momentan um den Punkt $g^{c'}$ drehen, der somit als Schnittpunkt zweier benachbarter Tangenten des Kegelschnittes $\overline{P}$ der Berührungspunkt der Geraden P mit $\overline{P}$ sein muß.

Man findet daher den Berührungspunkt als Schnitt von P mit einer der Geraden N oder N_1 oder, wenn P noch nicht gezeichnet ist, als Schnitt der Geraden N und N_1.

Wird die Gerade $p^{c'}p^{c'}_{\chi}$ zu einer gemeinsamen Tangente an $K^{c'}$ und $K^{c'}_{\chi}$, so schneiden sich N und N_1 im unendlich fernen Punkt von P oder P wird zu einer Asymptote.

Da die aus den Mittelpunkten $k^{c'}$ und $k^{c'}_{\chi}$ an $\overline{P}$ legbaren Tangenten auch die Kreise $K^{c'}$ und $K^{c'}_{\chi}$ berühren, so müssen $k^{c'}$ und $k^{c'}_{\chi}$ die Brennpunkte von $\overline{P}$ sein.

Die Richtkegel der Abwickelbaren längs der Isophengen einer beliebigen Fläche sind bekanntlich Kegel zweiten Grades, die den Lichtstrahl L und den Sehstrahl S zu Fokalgeraden haben. Schneidet man diese Kegelschar Σ mit der Bildebene Π_1, so erhält man die den Abwickelbaren längs der Isophengen zugeordneten Kurven, die an $\overline{M}$ polarisiert, die zentralen Projektionen der sphärischen Bilder sämtlicher Isophengen aus s auf Π_1 sind.[2]

---

[1] Es sei diesbezüglich auf die Sondervorlesung Prof. E. Müller's über »Schraub-, Dreh- und Schiebflächen« verwiesen, in der unmittelbar aus der oben erwähnten Abbildung eine sehr einfache Tangentenkonstruktion abgeleitet wird.

[2] Es wird als bekannt vorausgesetzt, daß die sphärischen Bilder der Isophengen einer Fläche Isophengen der Kugel sind, für dieselbe Licht- und Sehrichtung.

Wegen $S \perp \Pi_1$ stellt $[\Sigma\Pi_1]$ eine Kegelschnittschar mit dem gemeinsamen Brennpunkt s' dar. Das polare Gebilde von $[\Sigma\Pi_1]$ muß somit ein Kreisbüschel sein. Projiziert man dieses Büschel B aus s auf die Kugel, so erhält man die sphärischen Bilder sämtlicher Helligkeitsgleichen.

Die beiden aus L an sämtliche Kegel der Schar Σ legbaren Tangentialebenen $\lambda_1\lambda_2$ schneiden Π_1 in zwei konjugiert imaginären Geraden L_1L_2, die an $\overline{M}$ polarisiert, die Grundpunkte des Büschels B bilden müssen. Da λ_1 und λ_2 den Minimalkegel $\varkappa$ berühren, so müssen L_1 und L_2 Tangenten des Kreises $\overline{M}$ sein. Da nun die Berührungspunkte, die L_1 und L_2 mit $\overline{M}$ bilden, die Pole dieser Geraden bezüglich M sind, so folgt, daß die reellen Vertreter der Grundpunkte des Büschels B das zum Grundriß des Lichtstrahles symmetrische Gegenpunktepaar eines Kreises $K^{c'}$ bilden, der den reellen Vertreter von M in Gegenpunkten schneidet und dessen Mittelpunkt $k^{c'}$ der zu $l = [L\Pi_1]$ bezüglich $\overline{M}$ inverse Punkt ist. Daraus folgt:

Die Projektion der sphärischen Bilder sämtlicher Isophengen aus s auf Π_1 ist ein Kreisbüschel B, dessen Grundriß auf die Ebene μ mit der stereographischen Projektion des Büschels der Kugelisophoten identisch ist.

II. Konstruktion der Lichtgleichen einer allgemeinen[1] Schraubfläche auf Grund der sphärischen Abbildung.

Die stereographische Projektion der Kugelisophoten stellt sich als Kreisbüschel B^c dar. Die Konstruktion der Isophoten einer allgemeinen Schraubfläche Φ_1 wird sich daher dann einfach gestalten, wenn es gelingt, unmittelbar aus der stereographischen Projektion des spärischen Bildes eines beliebigen Punktes von Φ_1 die schon um $+90°$ gedrehte Gerade P[2] zu finden. (In der Folge soll diese, um $+90°$

[1] Eine Fläche, die durch Schraubung einer beliebigen Kurve B um eine Achse A entsteht.

[2] Eine positive Drehung erfolgt deshalb, weil s unterhalb der Bildebene Π_1 angenommen wird. Der Kugelmittelpunkt liege in der Schraubachse A.

gedrehte Gerade P als die der Tangentialebene zugeordnete Gerade bezeichnet werden).

Man könnte sie im Grundriß als Symmetrale des um + 90° gedrehten Punktepaares $p^c p^c_\times$ erhalten. Es kann aber der Fall eintreten, daß einer dieser Punkte nicht mehr in der

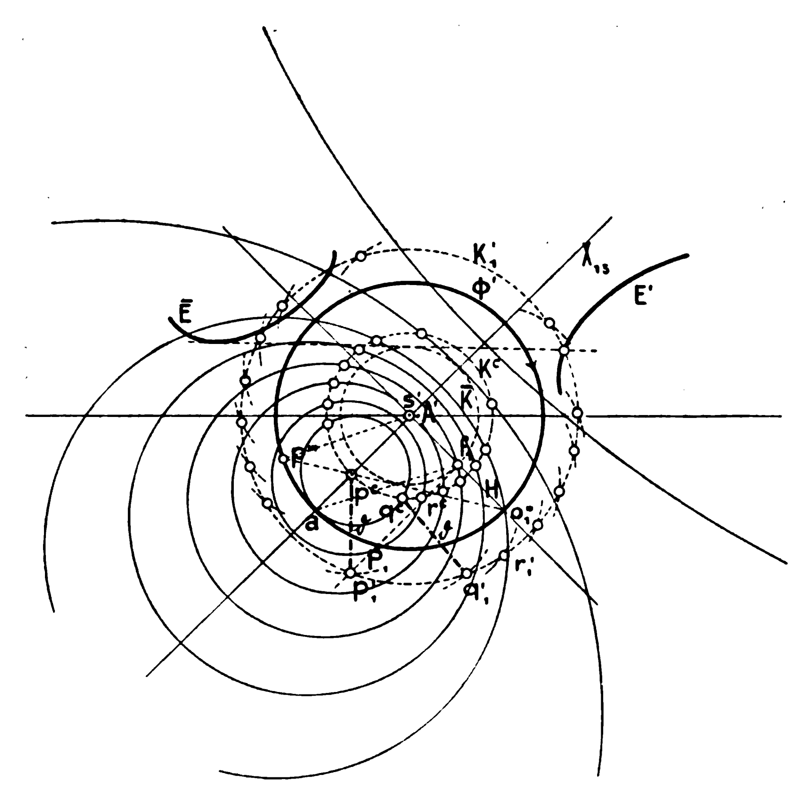


Fig. 3.

Zeichenfläche liegt. Es empfiehlt sich daher (Fig. 3), sofort den schon um + 90° gedrehten Seitenriß der Ebene $\bar{\pi}$, also die durch a gehende, zu $p'''s'''$ parallele Gerade mit der Geraden H zum Schnitte zu bringen. Die gesuchte Gerade P_1 ist dann mit dem Lote, das man im erhaltenen Schnittpunkt f_1 auf H errichten kann, identisch.

Beschreibt p^c einen Kreis K^c, dessen Mittelpunkt mit s' zusammenfällt, so durchläuft f_1 einen mit K^c konzentrischen

Kreis $\overline{K}$ und der aus dem Grundriß der erzeugenden Kurve E und der der Abwickelbaren längs E zugeordneten Kurve $\overline{E}$ leicht zu ermittelnde Berührungspunkt p_1 auf Φ_1 eine Bahnschraublinie K_1.

Sind nun auf K^c einige Punkte $q^c, r^c, \ldots$ gegeben, so findet man die Grundrisse der entsprechenden Punkte auf der Schraubfläche dadurch, daß man die Strecke $\mathfrak{b} = \overline{p_1' p^c}$ verschraubt.

Bedeuten $q^c, r^c \ldots$ die Schnittpunkte des Kreisbüschels B^c mit dem willkürlich angenommenen Kreise K^c, so müssen die Punkte $q_1', r_1' \ldots$ schon Punkte sein, welche sämtliche Grundrißlichtgleichen aus K_1' herausschneiden. Man kann somit auf bequeme Weise beliebig viele Punkte der Grundrißlichtgleichen konstruieren, ohne die den Abwickelbaren längs der Lichtgleichen zugeordneten Kegelschnitte verzeichnen zu müssen.[1]

Da nun, wie oben (p. 1265) gezeigt wurde, die Berührungspunkte von P mit dem Kegelschnitte $\overline{P}$ sehr leicht erhältlich sind und die Involution konjugierter Tangenten in den Punkten einer Bahnschraublinie überall dieselbe bleibt, so gelingt es, mit wenigen Strichen die Tangenten an die Isophoten in den Punkten einer Bahnschraublinie zu konstruieren.

III. Die sphärische Abbildung der Wendelfläche.

Für eine Wendelfläche Φ_1 ist die der geradlinigen Erzeugenden E zugeordnete Kurve $\overline{E}$ ein Punkt der unendlich fernen Geraden von Π_1. Es fällt daher K_1' mit $\overline{K}$ zusammen und der Grundriß des einem Punkte p der Kugel Φ entsprechenden Punktes p_1 ist der Fußpunkt f_1 des Lotes, das man aus dem Grundriß der Schraubachse A auf die der Tangentialebene in p_1 zugeordnete Gerade P_1 fällen kann. Daraus folgt:

---

[1] Vgl. J. Sobotka, Über developpable Berührungsflächen an windschiefe Helikoide, Monatsh. f. Math. u. Phys., IV. Jahrg. (1893); ferner: Theodor Schmid, Über Berührungskurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide und ein dabei auftretendes zwei-zweideutiges Nullsystem, diese Sitzungsberichte, Bd. XCIX (1890), p. 952 und über Beleuchtungskurven der windschiefen Helikoide, Monatsh. f. Math. u. Phys., II. Jahrg., p. 333 bis 342.

Der Grundriß der einer beliebig auf Φ vorgegebenen Kurve C entsprechenden Kurve C_1 der Wendelfläche ist Fußpunktenkurve der der Abwickelbaren längs C_1 (oder C) zugeordneten Kurve $\overline{C}$, bezüglich A' als Pol.

Bei Aufsuchung von p_1' ist es natürlich nicht nötig, die Gerade P_1 selbst zu verzeichnen, da sich (Fig. 3) der Punkt $f_1 = p_1'$ auch im Schnitte der durch a gehenden, zu $p'''s'''$ parallelen Geraden mit H ergibt.

Es soll nun in der Folge nicht der Punkt p selbst, sondern seine um A um $+90°$ gedrehte Lage als sphärisches Bild des Punktes p_1 bezeichnet werden. Unter dieser Voraussetzung ist dann $f_1 = p_1'$ immer der Mittelpunkt des Punktepaares $p^{c'} p_{\times}^{c'}$ (p. 1263). Es gilt demnach folgender Satz:

Der Grundriß des einem Punkte p von Φ entsprechenden Punktes p_1 der Wendelfläche ist Mittelpunkt jenes Punktepaares, das man erhält, wenn man p und seinen Gegenpunkt $p_{\times}$ stereographisch auf die Ebene μ projiziert.

Die Projektion des Punktes p aus s auf Π_1 ist ein Punkt p_{Π}, welcher der bezüglich $\overline{M}$ inverse Punkt zu f_1 sein muß.

Bringt man demnach den Träger des sphärischen Bildes eines Punktes der Wendelfläche mit der Bildebene zum Schnitt, so erhält man einen Punkt p_{Π_1}; der bezüglich des nullteiligen Kreises $\overline{M}$ zu diesem Punkte inverse Punkt ist schon der Grundriß des entsprechenden Punktes der Wendelfläche.

Damit ist eine einfache Beziehung zwischen den Gegenpunktepaaren der Kugel Φ und den Grundrissen der entsprechenden Punkte der Wendelfläche gegeben. Man kann also behaupten:

Das bezüglich des nullteiligen Kreises $\overline{M}$ inverse Gebilde des Grundrisses einer beliebig auf der Wendelfläche vorgegebenen Kurve C_1 ist identisch mit der zentralen Projektion des sphärischen Bildes dieser Kurve aus dem Punkte s auf die Bildebene Π_1; umgekehrt: Das bezüglich $\overline{M}$ inverse Bild der Projektion einer beliebig auf der Kugel Φ vorgegebenen Kurve C

aus s auf Π_1 ist Grundriß der entsprechenden Kurve der Wendelfläche.

Mit Hilfe dieses Satzes ist man nun imstande, jede Geometrie der Kugel auf eine Geometrie der Wendelfläche zu übertragen.

Da die Wendelfläche eine Minimalfläche ist, so ist ihre sphärische Abbildung winkeltreu. Überträgt man daher irgendeine Geometrie der Kugel auf die Wendelfläche, so müssen in dieser Geometrie die Sätze, die sich auf Winkeleigenschaften beziehen, dieselben wie in der Kugelgeometrie sein.

Es soll nun eine ganz spezielle Geometrie der Kugel auf die Wendelfläche übertragen werden. Man betrachte nämlich eine Geometrie, die durch bekannte Übertragung der projektiven Geometrie eines Bündels s auf eine um den Scheitel geschlagene Kugel Φ entsteht. Als duale Elemente dieser Geometrie gelten Großkreis und Gegenpunktepaar (das kurz wieder als »Punkt« bezeichnet werden soll). Um zu einer metrischen Geometrie überzugehen, betrachte man im Bündel die in der Ebene μ liegenden Minimalgeraden als absolute Gebilde. Die Kugel Φ ist dann als eine Pseudoebene aufzufassen, deren absolute Punkte sich aus s auf Π_1 als die absoluten Punkte dieser Ebene projizieren. Was entspricht nun den Punkten und Großkreisen von Φ auf der Wendelfläche?

Der Punkt p_1' stellt den Grundriß einer ganzen Reihe von Punkten dar, die in einer zu A parallelen Geraden liegen. Der Kürze wegen soll diese diskontinuierliche Folge von Punkten wieder als »Punkt« bezeichnet werden. Die Punkte der Pseudoebene Φ sind daher eindeutig auf die Punkte der Wendelfläche (der Pseudoebene Φ_1) bezogen.

Die Projektion eines Großkreises aus s auf Π_1 ist eine gerade Linie, deren inverses Bild bezüglich $\overline{M}$ ein durch A' hindurchgehender Kreis. Daraus folgt, daß jedem Großkreis von Φ eine die Achse der Wendelfläche schneidende Schraublinie entspricht. Es sind demnach Schraublinie und Punkt die dualen Elemente in der betrachteten Pseudogeometrie der Wendelfläche.

Jene sphärischen Kegelschnitte von Φ, die durch die absoluten Punkte dieser Ebene hindurchgehen, sollen »Pseudokreise« von Φ heißen. Ihnen entsprechen auf der Wendelfläche Kurven, deren Grundrisse Kreise, und zwar die bezüglich $\overline{M}$ inversen Gebilde zu den Projektionen der Pseudokreise aus s auf Π_1 sind. Es mögen diese Kurven der Wendelfläche als »Pseudokreise« der Ebene Φ_1 bezeichnet werden.

Nach einem oben bewiesenen Satze bilden die Grundrißisophengen der Kugel ein Büschel sphärischer Kegelschnitte, bei welchem zwei seiner Grundpunkte mit den absoluten Punkten der Bildebene zusammenfallen.[1] Sie stellen daher ein Pseudokreisbüschel vor. Die entsprechenden Kurven der Wendelfläche müssen somit ein Pseudokreisbüschel der Ebene Φ_1 bilden. Daraus ergibt sich der bekannte Satz:

Die Grundrißisophengen einer Wendelfläche stellen sich als Kreisbüschel dar.

Den beliebigen Kegelschnitten der Pseudoebene Φ, zu welchen natürlich auch die Kleinkreise der Kugel zu rechnen sind, entsprechen auf der Wendelfläche Kurven, die der Kürze wegen »Pseudokegelschnitte« der Wendelfläche benannt werden sollen und die sich im Grundriß als bizirkulare Kurven vierter Ordnung (mit A' als Doppelpunkt) darstellen.

Es ist klar, daß die Isophoten einer Wendelfläche ein Büschel solcher Kegelschnitte bilden und sich daher im Grundriß als inverses Gebilde eines Kegelschnittbüschels (dem Schnittsystem der Isophotoiden[2] mit Π_1) projizieren.

Man kann nun behaupten, daß dieses Büschel aus der Gesamtheit aller Pseudokegelschnitte besteht, die zwei konjugiert imaginäre, durch eine Rechtwinkelschraublinieninvolution definierte Schraublinien in

---

[1] Die beiden anderen Grundpunkte sind mit den absoluten Punkten der zum Lichtstrahl senkrechten Ebenen identisch, da man die Rollen von L und S beliebig vertauschen kann.

[2] Es sind damit die die Kugelisophoten aus dem Mittelpunkte projizierenden Kegel gemeint. Der Name »Isophotoid« stammt von L. Burmester.

zwei gegebenen Punkten berühren. Es ist dies sofort klar, wenn man bedenkt, daß die Isophoten einer Kugel ein Büschel sphärischer Kegelschnitte bilden, die zwei durch eine Rechtwinkelinvolution definierte, konjugiert imaginäre Großkreise in zwei gegebenen Punkten (den absoluten Punkten der zum Lichtstrahl senkrechten Ebenen) berühren.

In der ebenen Geometrie und folglich auch in der betrachteten Pseudogeometrie der Wendelfläche besteht der Satz:

Legt man an sämtliche Kegelschnitte, die zwei gegebene Gerade G_1 und G_2 in zwei gegebenen Punkten p und q berühren, aus einem Punkte g die Tangenten, so erfüllen die Berührungspunkte einen Kegelschnitt, der durch g, p, q und durch $[G_1 . G_2]$ hindurchgehen muß.

Nun bilden, wie eben gezeigt wurde, die Isophoten einer Wendelfläche ein solches Büschel. Es gilt daher der Satz:

Legt man aus einem beliebigen Punkte g_1 der Wendelfläche an sämtliche Isophoten die berührenden Schraublinien, so erfüllen die Berührungspunkte einen Pseudokegelschnitt K_1, also eine Kurve, deren Grundriß durch Inversion an $\overline{M}$ in einen Kegelschnitt übergehen muß. K_1 enthält natürlich g_1 und den hellsten Punkt h_1.

Zum Zwecke der Konstruktion dieses Pseudokegelschnittes K_1 projiziere man die Kugelisophoten und das sphärische Bild von g_1 aus s auf eine zum Lichtstrahl senkrechte Ebene ε. Man erhält dadurch ein Büschel konzentrischer Kreise und einen Punkt g_ε. Die Berührungspunkte der Tangenten, die man aus g_ε an sämtliche Kreise von B_ε legen kann, erfüllen einen Kreis K_ε, der, aus s auf Π_1 projiziert, einen Kegelschnitt K_{Π_1} liefert, dessen inverses Bild bezüglich $\overline{M}$ den Grundriß des gesuchten Pseudokegelschnittes ergeben muß.

Interessant und für die Verzeichnung der Isophoten von Wichtigkeit dürfte ein Sonderfall obigen Satzes sein. Man kann nämlich behaupten:

Die Berührungspunkte der Tangenten, die man aus dem Grundriß der Achse an sämtliche Grundrißlichtgleichen der Wendelfläche legen kann, liegen in einer durch den Grundriß des hellsten Punktes $\overline{h_1}$

hindurchgehenden, zum Grundriß des Lichtstrahls parallelen Geraden (vgl. Fig. 4).

Um dies einzusehen, ist es nötig, zuerst folgenden Satz nachzuweisen: Die Projektion des Kreises K_ε aus s auf die Kugel Φ ist ein sphärischer Kegelschnitt K_Φ, der nicht bloß durch die absoluten Punkte von ε, sondern auch durch die absoluten Punkte der zum Träger des sphärischen Bildes von g_1 senkrechten Ebenen hindurchgeht. Man erkennt dies sofort, wenn man die Verhältnisse auf der unendlich fernen Ebene Ω_∞ betrachtet:

Der Träger des sphärischen Bildes von g_1 sei G, sein uneigentlicher Punkt g_∞. Die unendlich ferne Gerade der zu G senkrechten Ebenen sei mit $U_{1\infty}$, die unendlich ferne Gerade der Ebene ε mit $U_{2\infty}$ bezeichnet. Der unendlich ferne Punkt des Lichtstrahls L[1] sei l_∞. Da die Isophotoiden einer Kugel Drehkegel mit der gemeinsamen Drehachse L sind, so folgt, daß sie mit Ω_∞ ein Büschel von Kegelschnitten gemeinsam haben, die den absoluten Kegelschnitt J_∞ in den Punkten, welche die Gerade $U_{2\infty}$ aus J_∞ herausschneidet, doppelt berühren. Die Berührungspunkte der aus g_∞ an sämtliche Kegelschnitte dieses Büschels legbaren Tangenten erfüllen einen Kegelschnitt K_{Φ_∞} (die Projektion von K_Φ aus s auf Ω_∞). Da auch J_∞ dem Büschel angehört, so müssen die Berührungspunkte der aus g_∞ an J_∞ legbaren Tangenten ein Punktepaar der Kurve K_{Φ_∞} bilden. Mit anderen Worten: Die Schnittpunkte der Geraden $U_{1\infty}$ (der Polaren von g_∞ bezüglich J_∞) mit J_∞ sind zwei Punkte des Kegelschnittes K_{Φ_∞}. Damit ist dargetan, daß K_{Φ_∞} und somit auch K_Φ durch die absoluten Punkte der zu G senkrechten Ebenen hindurchgeht.

Fällt nun G mit A zusammen, so bilden die berührenden Großkreise das Büschel der Meridiane und deren entsprechende Kurven die Erzeugenden der Wendelfläche. Die Kurve K_Φ ist in diesem Falle ein Pseudokreis, da die absoluten Punkte der zu G senkrechten Ebenen mit den absoluten Punkten der Bildebene zusammenfallen. Da nun K_Φ durch

---

[1] Es ist natürlich der um die Achse A um $+90^\circ$ gedrehte Lichtstrahl gemeint.

o und *h* (den hellsten Punkt der Kugel) hindurchgeht und bezüglich der Ebene $[LA]$ symmetrisch ist, so stellt seine Projektion aus *s* auf Π_1 einen über $h_{\Pi_1}A'$ als Durchmesser errichteten Kreis dar. Das inverse Bild dieses Kreises bezüglich $\overline{M}$ muß daher eine gerade Linie sein, die durch

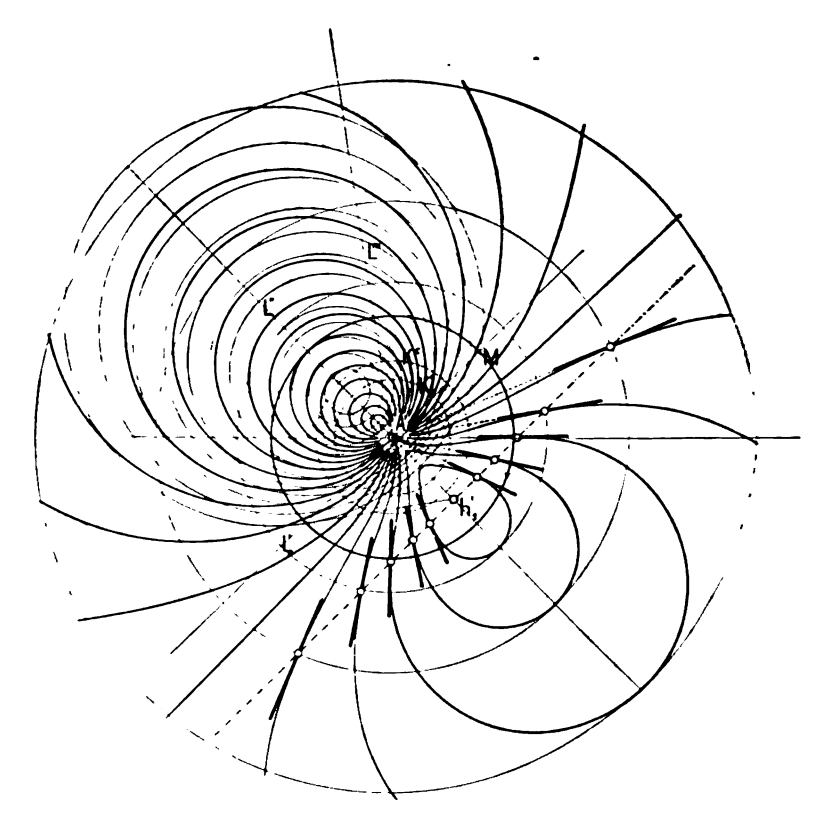


Fig. 4.

den Grundriß des hellsten Punktes hindurchgeht und auf dem Grundriß des um $+90°$ gedrehten Lichtstrahls senkrecht steht. Damit ist obige Behauptung erwiesen.

Es sollte mit diesem Beispiel gezeigt werden, wie man mit Hilfe der sphärischen Abbildung Sätze der Geometrie der Ebene unmittelbar auf die Wendelfläche übertragen kann. Es gibt natürlich eine ganze Reihe solcher

Sätze, die man auf anderem Wege vielleicht nicht so einfach beweisen könnte. Erwähnt sei nur noch, daß die Isophoten einer Wendelfläche die orthogonalen Trajektorien eines Schraublinienbüschels sind.

Konstruktion der Lichtgleichen einer Wendelfläche.

Die Verzeichnung der Lichtgleichen kann nach der für allgemeine Schraubflächen angegebenen Methode (p. 1266) durchgeführt werden. Sie vereinfacht sich wesentlich, da K_1' mit $\overline{K}$ zusammenfällt.

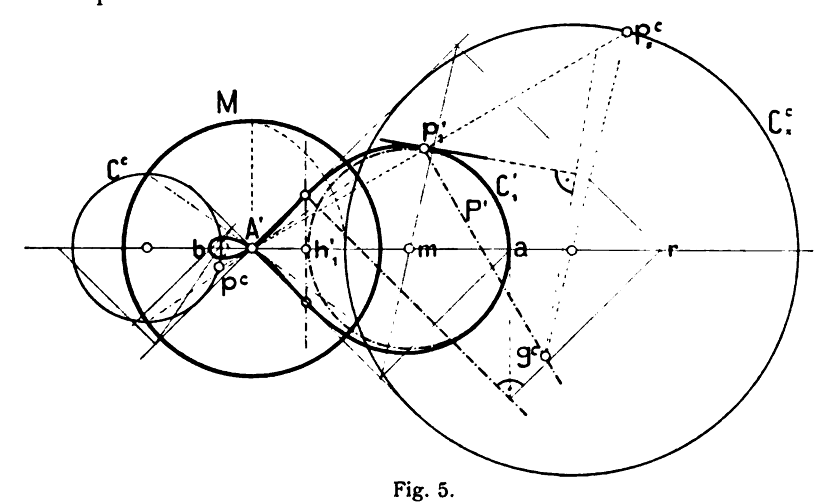


Fig. 5.

Es dürfte sich empfehlen, das Kreisbüschel B^c (die stereographische Projektion der Kugelisophoten) um $+90°$ zu drehen und die Schnittpunkte des Kreises K^c mit dem gedrehten Büschel B^c aus A' auf K_1' zu projizieren (Fig. 4). Man kann dann nämlich unmittelbar die Konstruktion der Tangente und des Krümmungskreises in einem beliebigen Punkte einer Grundrißlichtgleiche durchführen. Es soll dies zugleich mit der Konstruktion einer einzelnen Lichtgleiche gezeigt werden:

Um die Lichtgleichen einzeln konstruieren zu können (Fig. 5), benütze man den aui p. 1269 bewiesenen Satz, welcher besagt, daß der Grundriß des einem Punkte p der Kugel entsprechenden Punktes p_1 der Mittelpunkt des Punktepaares $p^c p_x^c$

ist. Durchläuft demnach $p^c p^c_\chi$ die stereographische Projektion einer Kugelisophote C, so beschreibt der Mittelpunkt p'_1 den Grundriß der entsprechenden Lichtgleiche auf der Wendelfläche.

Da C'_1 Fußpunktenkurve des der Abwickelbaren zugeordneten Kegelschnittes $\overline{P}$ ist (p. 1269) und man für jede Gerade P'[1] den Berührungspunkt g^c mit $\overline{P}'$ leicht ermitteln kann (p. 1265), so ist man imstande, eine kinematische Konstruktion der Tangente und des Krümmungskreises[2] für jeden Punkt von C'_1 anzugeben.

Aus der sphärischen Abbildung ergibt sich noch eine andere Erklärung der Tangentenkonstruktion: Die Tangente in p an C ist mit der in p legbaren Tangente eines den Kreis C berührenden Großkreises G identisch. Der über g^c (dem Mittelpunkt der stereographischen Projektion von G) und A' als Durchmesser errichtete Kreis muß der Grundriß der dem Großkreis G entsprechenden Schraublinie und die in p'_1 an diesen Kreis errichtete Tangente zugleich Tangente an den Grundriß der Isophote sein. Man erkennt, daß man genau zu denselben Konstruktionslinien gelangt wie bei der auf kinematischem Wege gefundenen Lösung.

Von besonderer Wichtigkeit für die Verzeichnung von C'_1 sind die Tangenten im Doppelpunkt A', ferner die Krümmungskreise in den Scheiteln a und b und die Tangenten, die man aus A' an C'_1 legen kann.

Was letztere betrifft, so wurde schon gezeigt (p. 1272), daß ihre Berührungspunkte mit C'_1 in einer durch k'_1 gehenden, zum Grundriß des Lichtstrahls parallelen Geraden liegen. Die Tangenten selbst sind mit den gemeinsamen Tangenten an C^c und C^c_χ identisch.

Man erkennt leicht, daß die Tangenten in A' die Verbindungsgeraden von A' mit jenen Punkten des Kreises $M = [\Phi\mu]$ sind, welche dieser mit C^c (oder C^c_χ) gemeinsam hat.

---

[1] Grundriß von P auf μ.

[2] Siehe A. Mannheim, Cours de la géométrie descriptive, 1880, p. 196 und 197.

Die Krümmungsmittelpunkte m und m_1 für die Scheitel a und b konstruiere man gemäß der Gleichung:

$$\frac{1}{A'm} = \frac{1}{A'r} - \frac{1}{A'a},$$

in der r den Krümmungsmittelpunkt von $\overline{P}'$ für den Punkt a bezeichnet.

Da die einem Großkreis entsprechende Kurve der Wendelfläche eine die Schraubachse schneidende Schraublinie ist (p. 1270), so folgt der bekannte Satz:

Die Eigenschattengrenze der Wendelfläche ist eine deren Achse schneidende Schraublinie.

IV. Bestimmung der Glanzkurve einer unendlich fernen Kurve.

Die sphärische Abbildung gestattet auch, folgende Aufgabe zu lösen: Es sei ein Punkt a_∞ (ein Punkt der unendlich fernen Ebene) und eine spiegelnde Fläche Φ_1 gegeben. Man soll auf Φ_1 jene Kurve C_1 aufsuchen, in deren Punkten die durch a_∞ gehenden Strahlen reflektiert, eine Regelschar von gegebenem Richtkegel bilden.

Bezeichnet C_∞ die unendlich ferne Kurve dieses Kegels, so soll unter C_1 die »Glanzkurve« von C_∞ für a_∞ verstanden werden.

Bildet man C_1 sphärisch ab, so erhält man eine Kurve C, in deren Punkten die aus a_∞ kommenden Strahlen ebenfalls nach den Punkten von C_∞ reflektiert werden. Es gilt daher folgender Satz:

Das sphärische Bild der Glanzkurve einer Kurve C_∞ für a_∞ ist Glanzkurve der Kugel für dieselbe Kurve C_∞ und denselben Punkt a_∞.

Gelingt sohin die sphärische Abbildung der spiegelnden Fläche, so ist die Bestimmung der Glanzkurve auf die Lösung der Aufgabe zurückgeführt, die Glanzkurve von C_∞ bezüglich a_∞ für eine Kugel zu ermitteln.

Im Folgenden soll eine rein geometrische Beziehung erläutert werden, die zwischen den Punkten der unendlich fernen Ebene (dem Felde Ω_∞) und ihren Glanzpunkten auf der Kugel besteht. Die Gesamtheit dieser Punkte möge das »Glanzfeld« der Kugel für a_∞ heißen.

Sei p_∞ ein Punkt des Feldes Ω_∞ (Fig. 6). Bringt man die Halbierende des aus den durch s gehenden Geraden A und P gebildeten Winkels γ mit der Kugel Φ zum Schnitt, so erhält man den Glanzpunkt p des Punktes p_∞ für a_∞. Man erkennt sofort, daß die stereographische Projektion von p_Φ (der Pro-

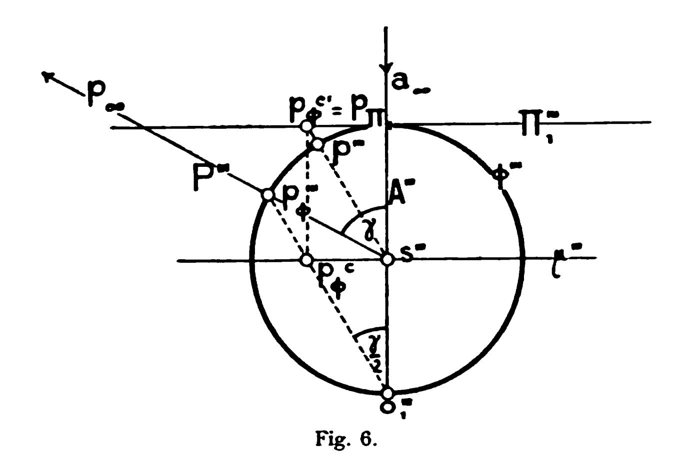


Fig. 6.

jektion von p_∞ aus s auf Φ) auf die Ebene μ der Grundriß der Projektion des Glanzpunktes p aus s auf die Bildebene Π_1 ist. Daher gilt:

Projiziert man das Feld Ω_∞ aus s auf Φ, so erhält man ein Feld Ω_Φ, dessen stereographische Projektion (auf μ) orthogonal auf die Bildebene projiziert, mit der zentralen Projektion des Glanzfeldes aus s auf die Bildebene identisch ist.

Mit Hilfe dieses Satzes ist man imstande, sofort zu jeder Kurve C_∞ von Ω_∞ die entsprechende Kurve des Glanzfeldes (die Glanzkurve) zu bestimmen. Ist die spiegelnde Fläche Φ_1 eine Schraubfläche, so bedeutet das um $+90^\circ$ gedrehte, bezüglich des nullteiligen Kreises $\overline{M}$ polare Gebilde von $C_\Phi^{c'}$ schon die der Abwickelbaren längs der gesuchten

Glanzkurve zugeordnete Kurve (p. 1263). Es ist daher für Schraubflächen nicht nötig, das sphärische Bild der Glanzkurve zu verzeichnen.

Es sollen nun die sphärischen Bilder der Glanzkurven eines Kegelschnittbüschels B_∞ ermittelt werden, dessen Projektion B_Φ ein Büschel paralleler Kleinkreise (Kugelisophoten) darstellt.

Die stereographische Projektion von B_Φ ist ein Kreisbüschel B_Φ^c, dessen Grundriß die Projektion der sphärischen Bilder der Glanzkurven aus s auf Π_1 ist.

Nun besteht der auf p. 1266 bewiesene Satz: Der Grundriß der stereographischen Projektion des Kugelisophotenbüschels ist identisch mit der zentralen Projektion sämtlicher Kugelisophengen aus s auf Π_1. Es müssen demnach sämtliche Isophengen die Glanzkurven des Büschels B_∞ sein.

Es ergibt sich dieser Satz auch unmittelbar, ohne Benützung des auf p. 1266 bewiesenen Satzes, wenn man Folgendes beachtet:

Alle Kegelschnitte des Büschels B_∞ berühren den absoluten Kegelschnitt in zwei Punkten i und j, den absoluten Punkten der zum Lichtstrahl L senkrechten Ebenen. Nun ist aber die Glanzkurve des absoluten Kegelschnittes J_∞ mit diesem selbst identisch; denn $J_\Phi = J_\infty$ und die Projektion von $J_\Phi^{c'}$ aus s auf Φ ist wieder J_∞. Die beiden Punkte i und j müssen demnach als selbstentsprechende Punkte zwei Grundpunkte des Büschels der Glanzkurven sein. Die beiden anderen Grundpunkte sind die absoluten Punkte der Bildebene, da $B_\Phi^{c'}$ ein Kreisbüschel ist. Nun bilden sämtliche Isophengen einer Kugel ein Büschel sphärischer Kegelschnitte, das genau dieselben Grundpunkte hat. Es müssen demnach tatsächlich die Glanzkurven des Büschels B_∞ mit dem Isophengenbüschel der Kugel identisch sein.

Beachtet man, daß die sphärischen Bilder der Isophengen einer Fläche Isophengen der Kugel sind und daß das Schnittsystem B_∞ der Isophotoiden mit der unendlich fernen Ebene identisch mit dem Schnittsystem der in den Isophoten der Fläche errichteten Normalien mit der unendlich fernen Ebene

ist, so kann man folgende Definition der Isophengen einer Fläche aufstellen:

Sämtliche Isophengen einer Fläche sind die Glanzkurven jenes Kegelschnittbüschels, das die in sämtlichen Isophoten der Fläche errichteten Normalien aus der unendlich fernen Ebene herausschneiden.

Es gestatten demnach die Spiegelungsgesetze einen einfachen Übergang von den Isophoten einer Fläche zu deren Isophengen.

Untersuchung der Wolkenelemente auf dem Hohen Sonnblick (3106 *m*)

von

Dr. **Arthur Wagner,**

Assistent an der k. k. Zentralanstalt für Meteorologie.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Dezember 1908.)

Ein fast vierwöchentlicher Aufenthalt auf dem Hohen Sonnblick im Juli 1908 gab mir Gelegenheit, die Wolkenelemente zu untersuchen. Der Zustand einer Wolke hängt — abgesehen von der Temperatur — wesentlich von ihrem Gehalt an Wasser sowohl in gasförmigem Zustand als auch in Form von Tröpfchen oder Eiskrystallen ab und ferner von der Größe der kondensierten Teilchen.

Das erste Merkmal, der Gehalt an gasförmigem Wasser, wird in der Regel ausgedrückt durch die relative Feuchtigkeit; hierbei interessierte hauptsächlich, wie weit dieselbe bei Nebel vom Zustand der Sättigung nach aufwärts oder abwärts abweiche. Die häufig beobachtete Tatsache, daß Haarhygrometer bei Nebel unter oder über 100% anzeigen, sollte durch wiederholte Messungen mit möglichst genau geprüften Hygrometern kontrolliert und wenn möglich der Zusammenhang dieser Erscheinung mit anderen meteorologischen Elementen festgestellt werden.

Über den Gehalt an flüssigem Wasser in Wolken liegen bisher nur wenig Messungen vor. Die früher angewendete Aspirationsmethode führte nicht zum Ziele, da der Aspirationsstrom viel zu schwach war, um die mit beträchtlicher Geschwindigkeit umherfliegenden Nebeltröpfchen in die Rohröffnung einzusaugen. Erst F. Exner machte auf diesen Umstand

aufmerksam, worauf V. Conrad[1] nach einer einwandfreien Methode den Wassergehalt in Wolken bestimmte; doch schien es wünschenswert, die gewonnenen Resultate durch weitere Messungen zu bekräftigen. Zugleich mit dem Wassergehalt wurde auch die gleichzeitig herrschende Sehweite gemessen, um eine Kontrolle über die Verläßlichkeit der Methode zu haben.

Die Tröpfchengröße, beziehungsweise die Größe der Eiskrystalle wurde nach der optischen Methode sowohl bei Mondringen als auch bei künstlich erzeugten Ringen gemessen.

1. Relative Feuchtigkeit.

Zur Bestimmung der relativen Feuchtigkeit wurden vier Haarhygrometer verwendet, und zwar zwei Lambrecht'sche, ein nach Angaben Pircher's konstruiertes Hygrometer, bei welchem das Haarbündel durch ein einziges Haar ersetzt ist, und ein Koppe'sches. Sie wurden an der Nordostecke des Zittelhauses, etwa 2 *m* von der Mauer entfernt, frei aufgehängt, woselbst sie bei Nebel den ganzen Tag verblieben, um Fehler durch rasche Temperaturänderungen auszuschließen. Die Ablesung geschah gleichzeitig mit den später zu besprechenden Wassergehaltsmessungen und gelegentlich auch außer diesen Terminen.

Um auch Übersättigung messen zu können, wurde der Zeiger bei Sättigung durch die obere Stellschraube ungefähr auf die Mitte der Skala eingestellt und die Angaben nachträglich auf den richtigen Stand reduziert. Die Amplitude wird zwar hierdurch in der Umgebung des Sättigungspunktes etwas kleiner, doch gewinnt man an Sicherheit der Einstellung, da durch die horizontale Lage des Übertragungshebels die spannende Wirkung desselben auf das Haarbündel am größten ist. Die Größe der Amplitude ergab sich aus den Angaben der Hygrometer bei Sättigung und in einem Keller, in welchem eine relative Feuchtigkeit von ungefähr 95% herrschte. Letztere wurde durch wiederholte Messung mit einem Taupunkt-Hygrometer von Alluard bestimmt, während der Sättigungszustand

---

[1] V. Conrad, Über den Wassergehalt der Wolken. Denkschriften d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, 73. Bd.

in einem Dampfkästchen hergestellt wurde, wie sie bei den Koppe'schen Hygrometern gebräuchlich sind. Die Zeigerstellung, die sich übrigens im Laufe der ganzen Beobachtungsreihe sehr wenig änderte, wurde ungefähr jeden zweiten oder dritten Tag kontrolliert.

Nachstehend folgen die Angaben der vier Hygrometer in extenso, und zwar der Reihe nach die beiden Lambrecht'schen (1, 2), das von Pircher (3) und das Koppe'sche (4). In der siebenten Kolonne ist das Mittel der vier Ablesungen zu finden, in der letzten ist die jeweilige Witterung kurz charakterisiert.

Zahl	Datum	Hygrometer				Mittel	Anmerkung
		1	2	3	4		
1	13. 4 p.	101	102	105	104	103	Den ganzen Tag ≡; zeitweise ● △.
2	13. 6^{30} p.	101	101	99	106	102	
3	13. 7 p.	103	101	99	106	102	
4	14. 8^{15} a.	101	100	99	103	101	In der Frühe ≡⁝, nachm. ✱ △ mit Unterbr. bis 9 p.
5	14. 3^{30} p.	100	104	102	104	103	
6	14. 6^{10} p.	—	104	102	104	103	
7	14. 11^{45} p.	—	100	—	—	100	
8	15. 10 a.	101	103	105	106	104	Den ganzen Tag △ ▲ mit Unterbr.
9*	16. 1^{55} p.	89	87	92	97	91	Dünner ≡, $\odot^0$; ≡⁝, △ mit Unterbr.
10	16. 4 p.	100	100	102	96	100	
11	16. 6^{30} p.	100	100	104	—	101	
12	17. 5^{45} p.	103	104	107	102	104	Ab 4 p. ≡.
13	17. 8^{45} p.	103	103	102	101	102	
14	17. 10^{15} p.	102	102	98	98	100	
15*	19. 4^{10} p.	95	92	96	97	95	$\odot^0$.
16	19. 6^{45} p.	103	102	103	103	103	Ab 2 p. ≡; $✱^0$ mit Unterbr.
17	19. 9^{15} p.	103	102	102	103	103	
18*	20. 2^{15} p.	90	92	92	89	91	Dünne ≡ Decke; ⊙ zeitweise matt sichtbar
19*	20. 4^{15} p.	97	95	96	90	94	
20*	21. 2^{10} p.	90	87	90	93	90	$\odot^0$, ● mit Unterbr.
21	21. 7 p.	105	104	102	101	103	
22	21. 9 p.	100	105	102	102	102	
23*	22. 4^{30} p.	70	74	68	85	74	Vorm. klar, ab 2 p ≡ Fetzen, R. F. stark schwankend.
24	22. 6 p.	103	105	100	105	103	
25	23. 10^{30} a.	98	100	100	105	101	10 a.— 12 a. u. 6 p.— 8 p. ≡, d. übr. Zeit klar.
26	23. 7 p.	106	105	107	104	106	

Zahl	Datum	Hygrometer 1	2	3	4	Mittel	Anmerkung
27	24. 7^{30} a.	100	100	100	101	100	I. d. Fr. ≡ Fetzen, dann d. g. Tag ruhiger ≡, abds. klart es auf kurze Zeit auf.
28	24. 10^{30} a.	104	102	104	101	103	
29	24. 12^{30} a.	103	102	105	100	103	
30	24. 3 p.	103	103	101	100	102	
31	24. 6^{15} p.	105	104	102	101	103	
32	25. 8^{30} a.	104	103	107	101	104	⊙⁰ ≡ Fetzen, d. g. Tag ≡.
33	25. 10^{15} a.	104	103	95	100	101	
34*	25. 1^{30} p.	97	98	96	99	98	
35	25. 4 p.	103	103	104	103	103	
36	25. 6 p.	103	103	104	102	103	
37	25. 8^{15} p.	103	103	102	102	103	
38	25. 10^{30} p.	102	103	102	102	102	
39	27. 8^{30} a.	103	105	102	100	103	Vorm. ≡, nachm. zeitw. ●.
40	27. 10^{30} a	101	102	100	100	101	
	Mittel:	100.0	100.0	99.9	100.4	100·1	

Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, zeigen alle vier Hygrometer bei Nebel fast immer über 100% Feuchtigkeit an, ausgenommen die wenigen mit * bezeichneten Fälle, bei welchen die Nebeldecke so dünn war, daß die Sonne einen merklichen Einfluß ausüben konnte. Die Hygrometer selber wurden in allen diesen Fällen von der Sonne nicht getroffen, so daß man auf eine tatsächliche Erniedrigung der relativen Feuchtigkeit infolge Erwärmung der Luft schließen muß. Der Mittelwert aller Fälle beträgt 100%, wenn wir jedoch die eben erwähnten Fälle weglassen, erhalten wir der Reihe nach die Mittel:

102·3% 102·5% 102·5% 102·1 %,

während die sieben weggelassenen Fälle die Mittel ergeben:

89·7% 89·3% 90·0% 92·9%.

Vergleicht man die Angaben der vier Hygrometer untereinander, so findet man bei den ersten zwei eine recht gute Übereinstimmung, während die zwei anderen manchmal um einige Prozent bald in der einen, bald in der anderen Richtung

vom Mittel abweichen; die mittlere Abweichung vom Mittel beträgt der Reihe nach:

$$1\cdot 1\%\quad 1\cdot 1\%\quad 1\cdot 6\%\quad 2\cdot 2\%.$$

Die Ursache dieser ungleichmäßigen Übereinstimmung liegt vermutlich darin, daß bei den nur mit einem Haar versehenen Hygrometern Wassertröpfchen, die sich an der Hebelübertragung ansetzen können, einen viel größeren unkontrollierbaren Einfluß auf die Zeigerstellung ausüben können als bei den viel stabileren Lambrecht'schen.

Es fragt sich nun, ob die von den Hygrometern in den meisten Fällen angezeigte Übersättigung der Luft wirklich reell oder sonstwie auf unkontrollierbare Ursachen zurückzuführen sei. Von vornherein könnte man einwenden, daß die gebräuchliche Eichmethode unzulässig sei, daß in den Dampfkästchen überhaupt nicht Sättigung hergestellt werden könne. Um diesen Einwand zu beseitigen, wurden die in üblicher Weise eingestellten Hygrometer in die Dampfkästchen gebracht, welche nun durch Klebwachs vollständig abgedichtet und durch 8 Tage in einen Keller gestellt wurden, der bei fast konstanter Temperatur eine Feuchtigkeit von ungefähr 95% aufwies. Die Zeigerstellung änderte sich gegen die ursprünglich ermittelte fast gar nicht. Unrichtige Einstellung bei der Eichung war also nicht die Ursache davon, daß die Hygrometer Übersättigung anzeigten.

Ferner wäre es denkbar, daß durch das Gewicht der am Haarbündel sich ansetzenden Wassertropfen dasselbe eine Verlängerung erfährt, die eine Vergrößerung der relativen Feuchtigkeit vortäuschen würde. Einer quantitativen Untersuchung hält jedoch dieser Einwand nicht stand. Nach Pircher[1] dehnt sich ein Haar bei der Belastung von 1 *g* um $l.0\cdot 0027$ aus, wenn l die Länge des Haares bedeutet. Die Verlängerung des Haares in der Nähe des Sättigungspunktes beträgt bei der Vergrößerung der relativen Feuchtigkeit um 1% etwa $l.0\cdot 00007$; es wäre also, um eine Übersättigung von 4% vor-

[1] J. Pircher, Über Haarhygrometer. Denkschriften d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, 73. Bd., p. 277.

zutäuschen, bereits eine Belastung jedes einzelnen Haares von 0·1 *g* notwendig, ein Betrag, der sicherlich nicht den wirklichen Verhältnissen entspricht. Es bleibt somit nichts übrig, als an eine tatsächliche Übersättigung der Luft zu denken. Allerdings bleibt nach der Theorie von Sresnevsky noch unaufgeklärt, wie das menschliche Haar auch Übersättigung anzeigen könne.

Der Beweis für die Übersättigung der Luft durch ein Taupunkt-Hygrometer wollte nicht gelingen. Theoretisch sollte die Betauung bei Übersättigung bereits bei einer höheren als der äußeren Lufttemperatur eintreten, doch war es schwierig, bei der matten Beleuchtung im Nebel das erste Eintreten der Kondensation auf der blanken Fläche im richtigen Moment zu konstatieren; andrerseits ist dadurch die Möglichkeit einer Übersättigung der Luft bei Nebel nicht ausgeschlossen, da die Betauung ebenfalls eine gewisse Übersättigung zur Bedingung hat.

Es erübrigt noch, jene Umstände anzuführen, welche eine tatsächliche Übersättigung der Luft bei Nebel verursachen können. Haben wir einen abgeschlossenen Raum über Wasser, so wird ein Teil des letzteren in den gasförmigen Zustand übergehen, und zwar bis zu einem Maximalbetrag, der zugleich mit dem maximalen Dampfdruck nur von der Temperatur abhängt. Der Raum heißt dann »gesättigt«. Haben wir statt der ebenen Wasserfläche gekrümmte Oberflächen, wie sie in der Natur bei Nebeltröpfchen vorkommen, so ist der Dampfdruck über letzteren nach Lord Kelvin größer als in ersterem Falle; hiermit ist auch die maximale Wassermenge, die ein bestimmtes Volumen bei derselben Temperatur in gasförmigem Zustand enthält, größer als über einer ebenen Wasserfläche; die Luft in Wolken muß demnach, wenn wir die erste Definition der Sättigung festhalten, »übersättigt« genannt werden. Rechnen wir jedoch den Betrag dieser Übersättigung aus, so finden wir den Einfluß der Oberflächenkrümmung bei Tröpfchen, wie sie im Nebel vorkommen, verschwindend klein: er beträgt für eine Temperatur von 0° C. und einem mittleren Tropfendurchmesser von 0·03 *mm* nur wenige Hundertelprozent, ist somit mit unseren Instrumenten nicht meßbar. In der Natur spielt somit dieser Prozeß, wie Trabert glaubt, kaum eine große Rolle.

Eine Erklärung für die Übersättigung könnte in folgender Erscheinung gefunden werden: In allen Fällen, in welchen der Nebel sich unter dem Einfluß der Sonnenstrahlung auflöste, zeigten die Hygrometer eine beträchtlich kleinere Feuchtigkeit an als 100%; letztere mußte also bedeutend unter den Sättigungspunkt sinken, bevor sich der Nebel auflöste. Ganz analog wäre es denkbar, daß beim Kondensationsprozeß, sei es in einem aufsteigenden Luftstrom, sei es infolge Abnahme der Temperatur durch Bodenausstrahlung, auch wenn schon Nebeltröpfchen vorhanden sind, erst eine gewisse meßbare Übersättigung vorhanden sein müsse, damit sich weitere Nebeltröpfchen ausscheiden können.

II. Wassergehalt in Wolken.

Um den Wassergehalt in Wolken zu bestimmen, wurde wesentlich dieselbe Methode angewendet, der sich bereits Conrad mit Erfolg bedient hat: Eine große Flasche wird luftleer gepumpt, nach Öffnen eines Hahnes mit weiter Bohrung stürzt die Wolkenluft in kürzester Zeit hinein, worauf die in der Flasche enthaltene feuchte Luft über Trockenröhren geleitet wird. Die Gewichtszunahme der absorbierenden Substanz dividiert durch das bekannte Volumen der Flasche ergibt dann die gesamte, in der Volumeneinheit der Wolke enthaltene Wassermenge.

In unserem Falle wurde eine gewöhnliche Korbflasche von 13·56 *l* Inhalt mit einem angeschliffenen Glaseinsatz *A* versehen, der einen Hahn H_1 mit einer 11 *mm* weiten Bohrung hatte; das Röhrchen *r* vermittelt mit dem Inneren der Flasche eine zweite Verbindung, die durch den Hahn H_2 abgesperrt werden kann. Am inneren Ende von *r* wird ein Gummischlauch angesetzt, der bis zum Boden der Flasche reicht. Ein zweiter Glasschliff *B* trägt das Manometer *m* sowie einen Schweifhahn H_3, der sowohl die Verbindung Flasche—Manometer als auch Flasche—äußere Luft herstellen kann.

Um eine Messung auszuführen, wird H_2 mit einer Pumpe und durch H_1 und H_3 das Innere der Flasche mit dem Manometer verbunden. Ich hatte eine einstiefige Geryk-Ölluftpumpe zur Verfügung, die es gestattet, die Flasche in etwa 10 Minuten

auf ungefähr 15 *mm* Quecksilberdruck zu evakuieren. Daun wird H_1 und H_2 geschlossen, die Verbindung mit der Pumpe gelöst und der Einsatz B abgenommen. Durch Öffnen des Hahnes H_2 wird die Flasche mit Wolkenluft gefüllt, der Einsatz B wieder aufgesetzt und der Hahn H_3 so gedreht, daß die

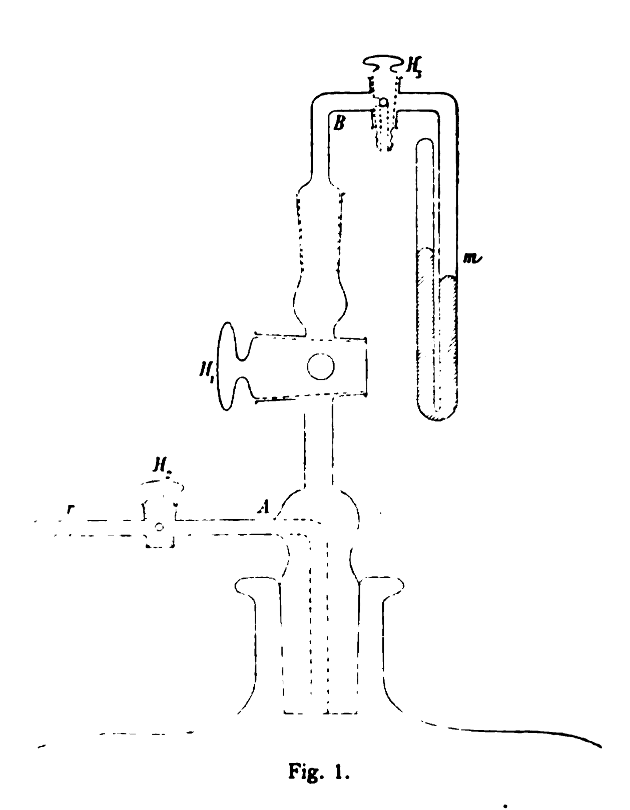


Fig. 1.

Flasche mit der äußeren Luft verbunden ist. H_3 wird mit einem Trockenturm, H_2 mit drei hintereinander geschalteten Trockenröhren verbunden und durch das ganze System ein Luftstrom von etwa 1 *l* pro Minute gesaugt. Als Trockensubstanz wurde Schwefelsäure und Clorcalcium verwendet. Der Aspirator bestand aus zwei durch einen Schlauch verbundenen Blechgefäßen von je 30 *l* Inhalt, von denen das eine auf einem Tisch, das andere auf dem Boden stand. Die im Trockenturm getrocknete Luft gelangt in die Flasche, nimmt die darin

enthaltene Feuchtigkeit mit und gibt sie in den Trockenröhren wieder ab.

Gleichzeitig mit dem Füllen der Flasche mit Nebelluft wurde auch ein aspiriertes Thermometer abgelesen sowie die früher erwähnten vier Hygrometer, von denen in nachstehender Tabelle stets der Mittelwert aller vier Angaben mitgeteilt ist.

Um die gleichzeitig herrschende Fernsicht zu bestimmen, waren von einem Standpunkt aus die Entfernungen von mehreren Objekten mittels Meßband abgemessen worden, so daß eine Schätzung der Sehweite auf einige Meter genau, leicht möglich war. In nachstehender Tabelle ist aus der ersten Kolonne das Datum jeder Messung ersichtlich, die zweite und dritte enthält den jeweiligen Manometer- und Barometerstand, aus welchen das in der vierten Kolonne mitgeteilte korrigierte Volumen berechnet wurde. In der fünften und sechsten Kolonne steht die absolute Gewichtszunahme der Trockenröhren und die pro Volumseinheit der Nebelluft, in der siebenten und achten die Temperatur und relative Feuchtigkeit. Neun gibt die bei der betreffenden Temperatur und Feuchtigkeit in der Volumseinheit enthaltene gasförmige Wassermenge an, in der zehnten Kolonne ist die Differenz zwischen sechster und neunter, also die Wassermenge in flüssigem Zustand gebildet. In der elften Kolonne ist die jeweilig ermittelte Sehweite mitgeteilt, während in der letzten Kolonne der Witterungscharakter kurz angemerkt ist (siehe die Tabelle auf p. 1290).

Der größte Wassergehalt wurde am 17. Juli 10^{15} p. gefunden mit 4·84 *g* pro Kubikmeter; leider konnte an diesem Tage selbst mit der Laterne die Sehweite nicht bestimmt werden, da dieselbe infolge des heftigen Sturmes außerhalb des Windschattens des Hauses erlosch. Doch war der Nebel so dicht, daß der Schatten meines Kopfes im Scheine der Laterne in greifbarer Nähe auf dem Nebel projiziert war; ringsum war in matten Farben eine Glorie sichtbar. Die Werte des Wassergehaltes sinken bis zu 0·12 *g* pro Kubikmeter bei einer Sehweite von 100 *m*. Ein geringerer Wassergehalt dürfte bei der verwendeten Methode wohl nicht mehr mit Sicherheit nachgewiesen werden können. Das Mittel aller Messungen beträgt 1·80 *g*, also rund 2 *g* pro Kubikmeter. Die Messung am

Datum	Manometer in Hg *mm*	Barometer Hg *mm*	Korrigiertes Volumen in *l*	Gewichtszunahme *mg*	Zunahme pro *V*-Einheit *g/m³*	Temperatur Grad Celsius	Relative Feuchtigkeit %	Gasförmiges Wasser *g/m³*	Flüssiges Wasser *g/m³*	Sehweite *m*	Anmerkung
13. 4 p.	12	524	13·26	82·1	6·19	2·1	103	5·79	0·40	80	Zeitw. Δ.
14. 6^{10} p.	7	523	13·39	80·0	5·98	0·5	103	5·19	0·79	80	Zeitw. Δ, ∗.
16. 6^{30} p.	3	524	13·47	56·1	4·17	—4·3	101	3·60	0·57	90	
17. 8^{45} p.	10	521	13·30	114·3	8·59	1·2	102	5·39	3·20	30	
17. 10^{15} p.	19	521	13·07	130·4	9·98	0·8	100	5·14	4·84	—	W-Sturm, ≡ sehr dicht.
19. 11^{20} a.	2	516	13·51	126·2	7·42	—0·1	99	4·79	2·63	30	Zwischen d. Messungen Δ⁰, zeitw. ⊙⁰.
19. 4^{10} p.	5	517	13·44	95·7	7·12	—0·2	95	4·56	2·56	45	
19. 6^{45} p.	9	517	13·33	110·6	8·30	—0·4	103	4·69	3·41	30	
19. 9^{15} p.	10	518	13·30	105·2	7·91	—0·4	103	4·89	3·02	—	
20. 2^{15} p.	8	519	13·34	92·5	6·93	1·2	91	4·80	2·13	50	⊙⁰; d. g. Tag Δ, ∗ mit Unterbr.
21. 2^{10} p.	5	522	13·44	69·5	5·17	—0·2	90	4·32	0·85	70	⊙⁰; vor- u. nachher ∗ u. ●.
21. 7 p.	8	523	13·37	73·2	5·48	—0·4	103	4·89	0·59	70	
21. 9 p.	5	524	13·41	86·3	6·44	—0·4	102	4·83	1·61	50	Sturm.
22. 4^{30} p.	7	525	13·38	79·6	5·95	2·8	74	4·35	1·60	65	Nur kurze Zeit ≡.
24. 10^{30} a.	10	524	13·30	60·5	4·55	—2·1	103	4·32	0·23	90	
24. 12^{30} p.	13	525	13·23	72·4	5·47	—1·4	103	4·53	0·94	65	
25. 10^{15} a.	12	525	13·26	83·5	6·30	—0·2	101	4·85	1·45	40	D. g. Tag gleichmäßiger ≡.
25. 1^{30} p.	10	525	13·30	69·2	5·20	0·5	98	4·94	0·26	100	
25. 4 p.	10	525	13·31	72·0	5·41	0·8	103	5·29	0·12	100	
25. 6 p.	9	525	13·33	74·6	5·60	0·7	103	5·26	0·34	80	
27. 8^{30} a.	15	527	13·18	134·6	9·98	1·5	103	5·54	4·44	25	Dichter ≡, gegen Mittag Aufheiterung.
27. 10^{30} a.	9	527	13·33	118·0	8·85	1·6	101	5·47	3·38	35	

22. Juli, 4^{30} p. scheint zweifelhaft zu sein, da bei dem nur kurze Zeit andauernden Nebel die Hygrometer sich sicherlich nicht auf die während der Messung vorhandene relative Feuchtigkeit hatten einstellen können.[1] In der Kolonne »Relative Feuchtigkeit« sind die tatsächlichen Angaben der Hygrometer mitgeteilt, da für den Fall, daß alle Angaben über 100% zu korrigieren wären, die Werte für den Wassergehalt sich nur wenig ändern. Als Mittelwert würde sich dann ergeben $1\cdot 88 g/m^3$. Die Angabe Conrad's, daß der Gehalt an flüssigem Wasser stets kleiner sei als der an gasförmigem, wurde auch bei dieser Messungsserie bestätigt gefunden.

Um die Abhängigkeit der Sehweite vom Wassergehalt zu veranschaulichen, wurden die Werte nach Gruppen geordnet und zu Mitteln vereinigt, die nachstehend mitgeteilt sind. In der Kurve (p. 1292) sind als Abszissen die Mittelwerte des Wassergehaltes, als Ordinaten die entsprechenden Sehweiten eingetragen. Conrad fand beim selben Wassergehalt etwas geringere Sehweiten, was bei dem subjektiven Kriterium der Methode nicht verwundern kann.

Wassergehalt g/m^3	Sehweite m
0·32	90
0·75	75
1·55	52
2·43	42
3·33	32
4·44	25

[1] Bei den Messungen, welche Conrad auf dem Hohen Sonnblick anstellte, fallen die niedrigen Werte der relativen Feuchtigkeit auf; für drei Messungen am 29. Juni 1900 werden nämlich der Reihe nach 50, 70, 70% angegeben, was um so unwahrscheinlicher erscheint, als der Hygrograph an diesem Tage nie unter 94% gesunken ist. Werden die Angaben des letzteren der Rechnung zugrunde gelegt, so resultieren nicht einmal diejenigen Wassermengen, welche in gasförmigem Zustand hätten vorhanden sein sollen.

III. Tropfengröße.

Die Tropfengröße wurde nach der optischen Methode gemessen, und zwar wurde als Lichtquelle in der Regel eine Acetylenlaterne benützt, einmal konnte auch der erste Mond-

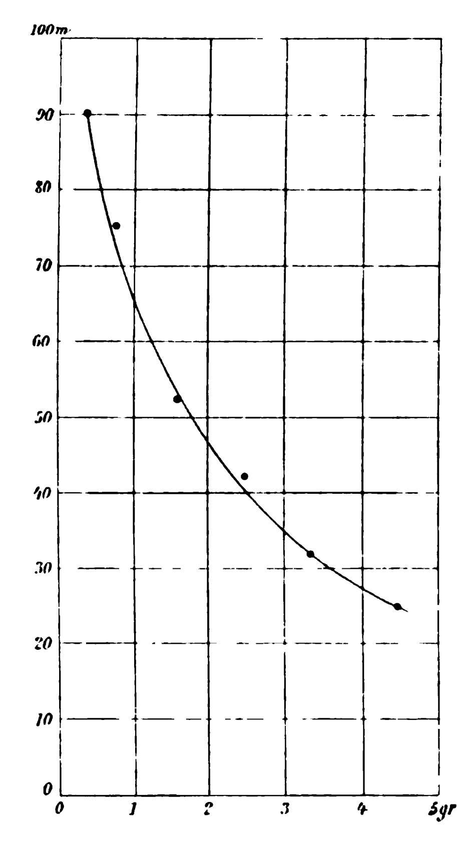


Fig. 2 (siehe p. 1291).

ring gemessen werden. Der Gesichtswinkel wurde durch einen Maßstab bestimmt, an dem mehrere Visierkorne verschiebbar waren; der Standpunkt des Auges war durch eine kleine Öffnung an einem Ende des Maßstabes fixiert. Aus 18 an 3 Tagen ausgeführten Messungen mit der künstlichen Lichtquelle ergibt sich ein mittlerer Tropfendurchmesser von 33 μ;

der größte und kleinste Wert war 38, beziehungsweise 29 μ. Drei Messungen des ersten Mondringes ergaben im Mittel 35 μ.

Übersicht.

Die Resultate vorstehender Messungen können kurz folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Auf Grund der Angaben von vier verschiedenen Haarhygrometern betrug die relative Feuchtigkeit bei dichtem Nebel fast immer mehr als 100%; war die Sonne durch den Nebel sichtbar, so sank die relative Feuchtigkeit unter 100%. Die Erscheinung kann dadurch erklärt werden, daß die Kondensation, beziehungsweise Auflösung des Nebels der Temperaturänderung nachhinkt.

2. Aus 22 Messungen des Wassergehaltes von Wolken ergibt sich im Mittel ein Gehalt von flüssigem Wasser von rund 2 *g* pro Kubikmeter. Der größte Wert wurde mit 4·84 *g* gefunden, der kleinste betrug 0·12 *g*.

3. Der Totalgehalt an Flüssigkeit schwankt innerhalb enger Grenzen (größter Wert 9·98 *g*, kleinster 4·17 *g* pro Kubikmeter) und ist insofern von der Temperatur abhängig, als einer höheren Temperatur ein größerer Wassergehalt entspricht. Der Gehalt an flüssigem Wasser kann dagegen offenbar bis auf Null herabsinken. Eine Abhängigkeit von der Temperatur konnte hier nicht gefunden werden.

4. Der Gehalt an flüssigem Wasser wurde stets kleiner gefunden als der an gasförmigen.

5. Die Sehweite ist dem Gehalt an flüssigem Wasser umgekehrt proportional; eine Abhängigkeit derselben von der Größe der Tropfen konnte bei der geringen Anzahl der Messungen von Tropfendurchmessern nicht gefunden werden.

Wien, k. k. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik.

Ergebnisse einiger Temperaturregistrierungen im Wolfgangsee

von

Dr. **Felix M. Exner.**

(Mit 6 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Dezember 1908.)

Im Sommer 1907 hatte ich durch Thermometermessungen eigentümlich große Temperaturschwankungen in tieferen Schichten des Wolfgangsees festgestellt.[1] Um über dieselben näheres zu erfahren, versuchte ich im verflossenen Sommer (1908), die Wassertemperaturen durch Registrierapparate aufzeichnen zu lassen. Zu diesem Zwecke stellte mir die k. k. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien mehrere Richard'sche Thermographen zur Verfügung, wofür ich derselben meinen besten Dank ausspreche.

Diese Apparate mußten vor der direkten Berührung des Wassers geschützt werden und wurden zu diesem Zwecke in Kupferkessel gestellt; letztere konnten ziemlich vollständig gegen das Eindringen des Wassers abgedichtet werden. Die Kessel, von denen mir gleichfalls die k. k. Zentralanstalt für Meteorologie zwei Exemplare anfertigen ließ, wurden samt den Thermographen in horizontaler Lage an einem Drahtseil in den See gelassen; das Seil war an einem hölzernen Schwimmer befestigt, dieser im Seegrund verankert.

Die Richard'schen Thermographen der gewöhnlichen Art schreiben Temperaturkurven für eine Woche; nach Ablauf dieser Zeit mußten die Kessel aus dem Wasser gezogen, die

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CXVII (1908), Abt. IIa.

Thermographen mit neuen Papierstreifen versehen und deren Uhrwerke aufgezogen werden. Die ursprünglich zur Aufzeichnung der Lufttemperatur bestimmten Thermographen haben eine Skala von etwa $^3/_2$ *mm* pro Grad. Für die Aufzeichnung der Wassertemperaturen wurde die Amplitude ungefähr auf das Doppelte vergrößert, so daß eine Ordinate von 3 *mm* 1° Temperaturschwankung bedeutet.

Die Einschließung der Instrumente in Kupferkessel hat eine ziemlich große Trägheit derselben gegenüber Änderungen der Wassertemperatur zur Folge, da der Thermograph rundum von Luft umgeben ist. Bei plötzlicher Übersetzung des Kessels samt Instrument aus wärmerem in kühleres Wasser zeigte sich, daß der Thermograph erst nach etwa einer Stunde die konstante Temperatur der neuen Umgebung annahm. Große Temperaturdifferenzen gleichen sich natürlich sehr rasch aus, aber der Ausgleich geringer Differenzen von etwa 1° dauert recht lange. Die Eintrittszeiten der Temperaturextreme werden etwas gefälscht, die ganze Temperaturkurve etwas verzögert, auch die Intensitäten infolgedessen verringert. Kurz dauernde Perioden der Temperatur werden gegenüber länger dauernden geschwächt. Da es sich aber hier zunächst um qualitative Feststellung der Erscheinungen handelte, wurde auf diesen Mangel weiter nicht Rücksicht genommen.

Die Beobachtungen geschahen ungefähr an der nämlichen Stelle wie im Vorjahr, am Nordende des Wolfgangsees, bei Brunnwinkl, etwa 100 *m* vom Ufer entfernt, wo der See zirka 50 *m* tief war. Da die Messungen des Jahres 1907 darauf hindeuteten, daß die Temperaturschwankungen durch Oszillationen der Sprungschicht entstehen, suchte ich zuerst die Lage derselben auf. Zu diesem Zwecke wurde eine verkorkte leere Flasche in verschiedene Tiefen des Sees hinabgelassen, unten entkorkt, worauf sie sich mit dem Wasser der betreffenden Tiefe füllte, dann heraufgezogen und die Temperatur dieses Wassers gemessen. Solche direkte Temperaturmessungen wurden von 2 zu 2 *m* von der Oberfläche bis zu 16 *m* Tiefe angestellt und daraus die Lage der Sprungschicht zwischen 8 und 12 *m* gefunden. Demgemäß wurden die zwei Thermographen in diese beiden Tiefen versenkt, um die Sprungschicht

zwischen sie einzuschließen. Die direkten Temperaturbeobachtungen wurden alle 3 bis 4 Tage wiederholt.

Die Beobachtungen und Registrierungen begannen am 22. Juli und konnten von mir nur einen Monat fortgeführt werden. Nach meiner Abreise übernahm Herr Karl R. v. Frisch die Bedienung der Instrumente und setzte die Beobachtungen bis zum 21. September fort; für diese Mühewaltung sage ich ihm auch hier meinen herzlichen Dank.

Die Temperaturregistrierungen während dieser 2 Monate sind leider durchaus nicht lückenlos; besonders im letzten Monat traten häufig Störungen in der Aufzeichnung ein, die teilweise daher kamen, daß die Thermographen durch die große Feuchtigkeit litten, der sie fortwährend ausgesetzt waren. Außerdem aber wurden mehrmals die Schreibhebel der Instrumente durch die heftigen Bewegungen, denen sie zeitweise bei Stürmen ausgesetzt waren, abgehoben und setzten dann nicht mehr richtig ein. Der Schaden wurde immer nur nach Ablauf einer Woche bemerkt, weswegen die Registrierungen vieler Tage überhaupt fehlen. Da somit das Beobachtungsmaterial dieser beiden Monate nicht vollständig ist, sehe ich von einer Wiedergabe des gesamten aufgezeichneten Materials ab und werde nur jene Registrierkurven zum Schlusse durch Stundenwerte der Temperatur wiedergeben, die eine nähere Bearbeitung erfahren haben.

Die Temperaturkurven aus 8 *m* Tiefe machen in der Mehrzahl den Eindruck eines recht unregelmäßigen Verlaufs; die Temperatur bleibt längere Zeit fast konstant, dann tritt eine Ausbuchtung der Kurve ein, die nach mehreren Stunden wieder verschwindet. Die Kurven aus 12 *m* Tiefe sehen dagegen aus, als würden periodische Störungen der Temperatur in dieser Tiefe vorkommen; die Temperatur bleibt hier fast keine Stunde konstant. In den Extremwerten der Kurve treten häufig Zacken auf, welche auf Interferenzen verschiedener Perioden hindeuten. Besonders auffallend ist folgender Unterschied in den Kurven von 8 und 12 *m*. Die extremen Werte (Zacken) der Kurve sind in 8 *m* nach abwärts gerichtet, deuten also eine Temperaturerniedrigung unter den Normalstand an, die Zacken in 12 *m* sind nach aufwärts gerichtet im Sinne einer Temperatur-

erhöhung. Die Störungen gehen also von der Mittelschicht aus, die die obere Schicht abkühlt, die untere erwärmt. Da die großen Schwankungen der Temperatur an einer Stelle ihre Ursache nur in Platzänderungen der verschieden warmen Wassermassen haben können, läßt sich schließen, daß die Schicht in rund 10 *m* Tiefe manchmal in höhere, manchmal in tiefere Lagen kommt.

Im Vorjahr wurde die Beobachtung gemacht, daß in 7 und 12 *m* Tiefe einander entgegengesetzte Temperaturschwankungen von eintägiger Periode auftraten, derart, daß mit einem Temperaturmaximum in 7 *m* ein Minimum in 12 *m* fast gleichzeitig eintrifft. Diese Erscheinung konnte heuer nicht beobachtet werden. Es hat zwar den Anschein, daß oben und unten (in 8 und 12 *m*) die gleiche Periode vorhanden ist, wenigstens während eines Teiles der 2 Monate, in welchen beobachtet wurde, doch beträgt die Phasendifferenz dann viel weniger als 180°. Meist war, wie oben gesagt, in 8 *m* überhaupt keine periodische Temperaturschwankung vorhanden. Als Beispiel gleichzeitiger Temperaturschwankungen in 8 und 12 *m* mögen die Registrierungen vom 28. bis 31. August dienen. Die folgende Figur zeigt den Gang der Temperatur in dieser Zeit (obere Kurve für 8 *m*, untere für 12 *m* Tiefe). Aus den Ordinaten ist nur die Temperaturschwankung (Δ), nicht die Temperatur selbst zu entnehmen.

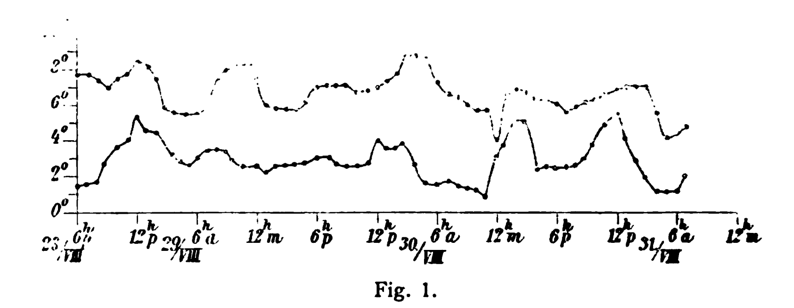


Fig. 1.

Diese Temperaturschwankungen scheinen durch starken Südostwind eingeleitet worden zu sein, der am 28. August um 11^h abends beobachtet wurde. Der für den Wolfgangsee eigentümliche Wind weht im Tale des Sees vom unteren Ende

zum oberen herauf und bestreicht den See in der Richtung seiner Längenausdehnung; dadurch verursacht er am oberen Ende, dem Beobachtungsorte, mitunter recht beträchtliche Wellen. Wie die Beobachtungen zeigten, war er meist die Ursache des Eintretens stärkerer Temperaturoszillationen in 12 *m* Tiefe. Dieser Südostwind erzeugte in der Nacht des 28. August in 8 und 12 *m* Tiefe bedeutenden Temperaturanstieg; offenbar mußte das leewärts getriebene, warme Oberflächenwasser am oberen Ende des Sees in die Tiefe steigen; die Erwärmung mußte dabei wegen der Lage der Sprungschichte in 12 *m* Tiefe größer sein als in 8 *m*, wie die Beobachtung bestätigt. Der Südostwind hatte am 29. August nachts schon aufgehört und am Morgen dieses Tages trat offenbar die Rückströmung in den Gleichgewichtszustand und über diesen hinaus ein, die Temperatur sank oben und unten. Die folgenden Temperaturschwankungen bis zum 30. August müssen wohl als ein Ausklingen der ersteren angesehen werden, bei dem aber schon Phasendifferenzen zwischen unten und oben entstanden; und zwar schwingt die obere Schicht langsamer als die untere, was mit der Theorie, wie später gezeigt wird, übereinstimmt. Am 30. August morgens wurde Regen mit starkem Westwind beobachtet. Dieser Wind breitet sich, von der Lage der Berge beeinflußt, vom Nordwestende her fächerförmig aus und weht dann über den See in seiner Längsrichtung hinab. Er scheint mit einem Sinken der Temperatur besonders in 8 *m* Tiefe verbunden zu sein, wie sich auch in anderen Registrierkurven zeigt. Es ist wohl das Natürlichste, anzunehmen, daß das oberflächlich leewärts getriebene Wasser am oberen (Luv-) Ende des Sees durch aufsteigendes kaltes aus der Tiefe ersetzt wird; da die Sprungschicht zwischen 8 und 12 *m* liegt, muß die hiedurch verursachte Abkühlung in 8 *m* größer sein als in 12 *m*.

Der Westwind hörte am 30. August vormittags wieder auf, starker Regen setzte ein und dauerte nachmittags und nachts. Es scheinen nun wieder die Schwingungen längere Zeit mit ungleicher Phase angedauert zu haben, doch ist eine genaue Erklärung jeder einzelnen Kurvenausbuchtung natürlich unmöglich. Die Abkühlung am 30. August beträgt in 8 *m* Tiefe

von 5^h früh bis 12^h mittags 5°. Am folgenden Tage wurde durch direkte Messungen die Temperatur in 8 *m* zu 18·2°, in 10 *m* zu 17·3°, in 12 *m* zu 12·8° und in 14 *m* zu 11·4° gefunden. Es bedeutet daher eine Temperaturerniedrigung von 5° eine Wasserverlagerung von 4 *m* Vertikaldistanz; das Wasser aus 12 *m* Tiefe wurde ins Niveau von 8 *m* gehoben. Nach dem Aufhören des Windes stieg die Temperatur am Nachmittag des 30. August in 12 *m* Tiefe um etwa 4°. Es fiel also das gehobene Wasser wieder in die Tiefe hinab.

Es mögen noch zwei Beispiele von sehr starken Temperaturschwankungen folgen, die leider beide nur in einer Tiefe registriert wurden. Die gleichzeitigen Kurven aus der zweiten Tiefenstufe sind schlecht oder gar nicht aufgezeichnet worden. Da wurde, zunächst wieder bei sehr heftigem Westwind, in 8 *m* Tiefe am 2. und 3. September die folgende Temperaturkurve aufgezeichnet:

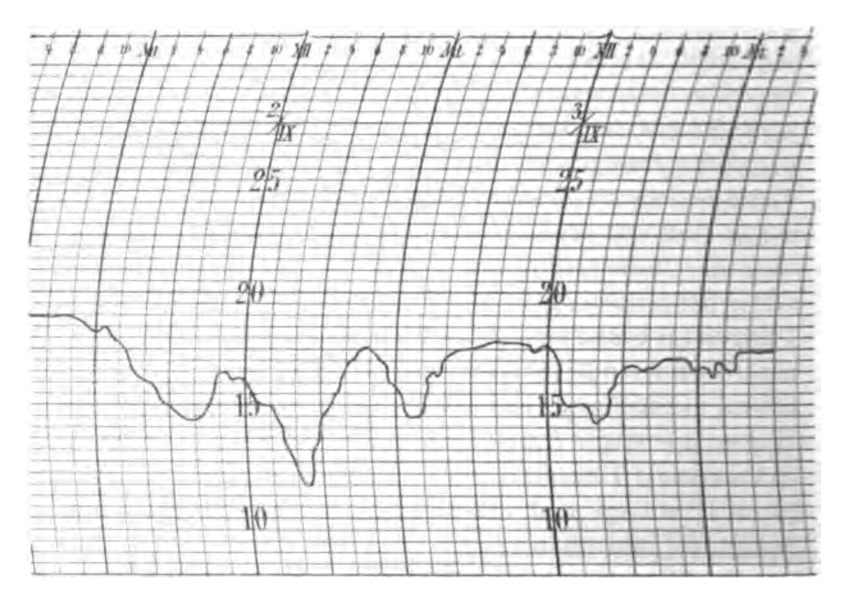


Fig. 2.

Wieder scheinen hier die Abweichungen von der Normaltemperatur der Tiefenlage hauptsächlich nach abwärts erfolgt zu sein, wie beim obigen Beispiel in 8 *m* Tiefe, im Sinne einer nach aufwärts gerichteten Bewegung des Wassers. Am Nach-

mittag des 2. September erfolgte ein Temperaturanstieg von 6° in zirka 4 Stunden. Es ist wohl ausgeschlossen, daß diese Schwankungen durch andere Ursachen entstanden sind als Verschiebungen der Wassermassen.

Des weiteren wurde bei starkem Südostwind in 12 *m* Tiefe am 13. und 14. August die Temperaturkurve der Fig. 3 aufgezeichnet (diese Kurven Fig. 2 und 3 sind in natürlicher Größe wiedergegeben). Es sind dies zugleich die stärksten

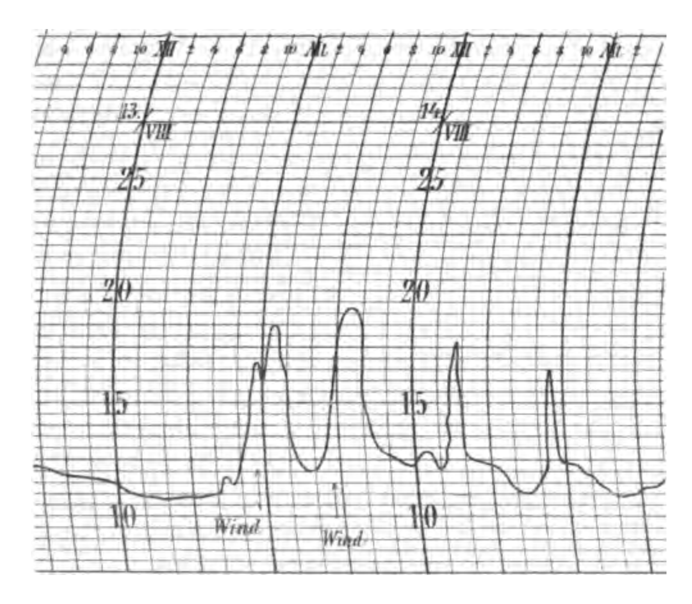


Fig. 3.

jemals registrierten Temperaturschwankungen. Der Südostwind setzte um etwa 10ʰ abends des 13. August ein und dauerte ein paar Stunden in der Nacht; dann begann er neuerlich um etwa 4ʰ früh und hielt wieder einige Stunden an. Aus der Verdickung der Kurven, die in dieser Zeichnung nicht wiederzugeben war, erkennt man deutlich, daß die ersten beiden Zacken nach oben kurz nach dem zweimaligen Einsetzen des Windes entstanden. Die Wellen schaukeln nämlich den Schwimmer und verursachen so ein Zittern der Schreibfeder.

Man sieht hier ganz deutlich den erwärmenden Einfluß des Südostwindes in 12 *m* Tiefe. Die warmen Wässer werden

offenbar am Leeende des Sees in die Tiefe gedrängt. Die Schwankungen der Temperatur betragen im Maximum 7° in 3 bis 4 Stunden. Die nachfolgenden Schwingungen, die dritte und vierte Zacke, folgen nach je 8 Stunden und scheinen freie Schwingungen der Wasserschichten zu sein. Nachdem, wie zu Anfang hervorgehoben wurde, die Kessel, welche die Thermographen einschließen, eine ziemlich starke Dämpfung der Temperaturänderungen hervorrufen, so dürften in Wirklichkeit die Amplituden der Schwingungen noch etwas größer gewesen sein. Direkte Temperaturmessungen hatten am 13. August in 6 *m* Tiefe 18·7°, in 8 *m* 18·7°, in 10 *m* 15·2°, in 12 *m* 11·3° ergeben; die Wasserverlagerung hat daher mindestens 4 *m*, vielleicht noch mehr betragen.

Man hat sich demnach, wie dies Watson und Wedderburn getan haben, vorzustellen, daß die ober- und unterhalb der Sprungschicht gelegenen Wassermassen wie zwei getrennte, übereinander liegende Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes schwingen. Durch mechanische Stauung der Wassermassen an der Oberfläche infolge des Windes wird die Sprungschicht aus der horizontalen Lage gebracht; dieselbe muß auf der Leeseite des Sees sinken, so daß Temperaturerhöhung eintritt, auf der Luvseite steigen (Abkühlung), wofür die Beispiele mit Südostwind und Westwind Belege liefern. Nach Aufhören der Windstauung vollführt die Sprungschicht dann allmählich abklingende stehende Schwingungen.

Im Vorjahr hatte ich in 7 und 12 *m* deutliche 24stündige Temperaturperioden gefunden. Die heurigen Beobachtungen lieferten für 8 *m* selten periodische Kurven, für 12 *m* hingegen fast immer; doch war ihr Aussehen meist recht kompliziert, besonders wenn stürmische Winde vorangegangen waren. Es schien aber in einer ziemlich ruhigen Zeit vom 22. Juli bis zum 5. August, während welcher der Apparat in 12 *m* Tiefe tadellos zeichnete, die Andeutung einer eintägigen Periode vorhanden zu sein, mit einem Maximum der Temperatur bei Nacht, in Übereinstimmung mit dem Resultat des Vorjahres für die gleiche Tiefe. In der Nacht vom 5. zum 6. August trat heftiger Südostwind ein, die Temperaturschwankungen wurden größer und unregelmäßiger; zahlreiche Interferenzzacken schienen das

Vorhandensein mehrerer Perioden anzudeuten. Um über den normalen Temperaturgang und den durch den Wind gestörten Gang derselben etwas Näheres zu erfahren, habe ich die Aufzeichnungen vom 22. Juli bis zum 10. August analysiert, und zwar die vom 22. Juli bis 5. August getrennt von jenen vom 5. bis 10. August, welche durch den Wind gestört schienen.

Hierzu wurden die Stundenwerte den Kurven entnommen und nun die wahrscheinlichsten Perioden berechnet, welche in diesen Zahlenfolgen verborgen sein konnten. Die Rechnung wurde für Perioden von 28, 26, 25, 24... bis 2 Stunden ausgeführt, indem die Zahlenfolgen in Reihen zu 28, 26, 25, 24... 2 Stück gruppiert wurden und das Mittel dieser Reihen gezogen wurde. Es ergaben sich so Stundenwerte für eine etwa vorhandene 28-, 26, 25-, 24-...2stündige Periode. Mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnete ich für jede Stundenwertgruppe die der betreffenden Periode entsprechende Amplitude einer Sinusschwingung.

Diese etwas mühsame Rechnung gibt natürlich um so genauere Werte der Amplitude, je größer die Anzahl der zur Verfügung stehenden Einzelwerte ist. Demgemäß mußte die Rechnung für die erste Beobachtungsreihe vom 22. Juli bis 5. August bessere Resultate ergeben als für die nur fünftägige zweite vom 5. bis 10. August. In jeder Gruppe fallen wieder die Amplituden am sichersten aus, bei welchen das Mittel aus möglichst vielen Zahlen genommen ist, also die Amplituden kurzer Perioden. Auch sind diese verhältnismäßig kleiner, da die errechneten Amplituden physikalisch nicht vorhandener Perioden mit zunehmender Zahl der Beobachtungen gegen Null konvergieren müssen.

Die Fig. 4 gibt zwei Kurven wieder, welche den Zusammenhang der wahrscheinlichen Amplitude mit der Periodendauer darstellen; und zwar gilt die untere Kurve (I) für die Beobachtungen vom 22. Juli bis 5. August, die obere (II) für jene vom 5. bis 10. August. Aus der unteren erkennt man deutlich die Existenz einer 24stündigen und einer achtstündigen Temperaturperiode in 12 *m* Tiefe. Die Analyse ergibt, daß das Maximum der 24stündigen Periode auf 1^h nachts fällt, was mit den Beob-

achtungen vom Vorjahr sehr gut übereinstimmt. Die achtstündige Periode kann, da es sich bei der eintägigen gleichfalls um Schwankungen der Sprungschicht handeln muß, als Oberschwingung der ersteren aufgefaßt werden, und zwar als eine solche mit drei Knotenpunkten, da die Grundschwingung nur einen haben wird.

Die Kurve II zeigt überhaupt größere Amplitudenwerte, erstens weil die Temperaturschwankungen zwischen dem 5. und 10. August größer waren als vorher, zweitens aber auch, weil

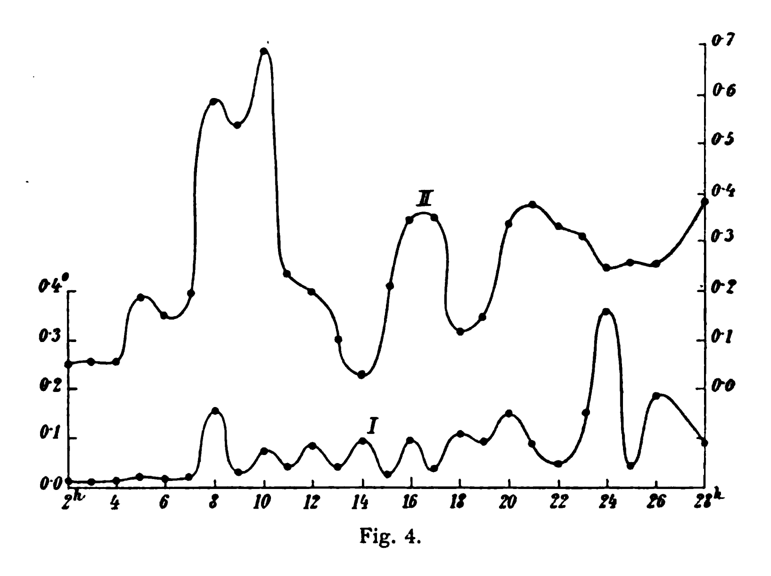


Fig. 4.

die Anzahl der Beobachtungswerte eine viel geringere ist. Aus letzterem Grunde kann auch auf den Verlauf der Kurve II zwischen etwa 16 bis 28^h in der Abszisse kein Gewicht gelegt werden, wie sich aus dem Folgenden noch ergeben wird. In der Kurve II springen vor allem die Amplituden einer acht- und einer zehnstündigen Welle hervor; sie sind so ausgeprägt, daß ihnen Realität zugeschrieben werden kann. Die achtstündige ist die gleiche wie in Kurve I, die zehnstündige ist neu und die eigentliche Wirkung des Südostwindes. Daß dem so ist, erkennt man auch bei Betrachtung der reduzierten Registrierkurven, welche deutliche Maxima der Temperatur in 9 bis 11 Stunden Abstand zeigen. Ob die einigermaßen hervortretende

Amplitude bei fünf- und 16stündiger Periode Realität besitzt, ist aus dieser Kurve wohl nicht zu entscheiden, doch sprechen die folgenden Ergebnisse dafür.

Die Analyse der Stundenwerte für verschiedene angenommene Periodendauern mittels der Methode der kleinsten Quadrate liefert vielleicht die einwandfreiesten Werte, welche für diese »Periodogramme« zu erhalten sind; trotzdem führt eine bedeutend einfachere Methode zu fast den gleichen Ergebnissen. Aus den mittleren Stundenwerten für jede Periodendauer habe ich den größten und kleinsten Wert entnommen und die Differenz dieser Größen, die unperiodische Schwankung, als Amplitude aufgetragen; die Kurven, welche man auf diese Weise für die Gruppen I und II der Beobachtungen erhält, stimmen viel besser miteinander überein als die der Fig 4. Es mag dies vielleicht auch daher kommen, daß die Temperaturschwankungen tatsächlich nicht nach Sinuskurven, wie dies zur Berechnung angenommen wurde, verlaufen. Daß die Kurven mit wachsender Schwingungsdauer ansteigen, rührt wieder von der größeren Ungenauigkeit der Amplituden längerer Perioden gegenüber jenen kürzerer her.

In Fig. 5 bedeutet wie in Fig. 4 I das Periodogramm für die Beobachtungen vom 22. Juli bis 5. August, II jenes für die Beobachtungen vom 5. bis 10. August. Der Maßstab der Ordinaten in Kurve II ist gegenüber jenem in Kurve I auf die Hälfte verkleinert.

In der unteren Kurve bemerkt man wieder die Periode von 24 und die von 8 Stunden deutlich ausgeprägt; die erstere liegt hier allerdings nicht genau bei 24 wie in Fig. 4, Kurve I, sondern zwischen 23 und 24. Außer diesen beiden Perioden tritt noch recht deutlich die von 16 Stunden hervor, die wir schon in Fig. 4, Kurve II, gefunden hatten. In der oberen Kurve ist eine 23stündige Periode, ferner eine 16-, 10- und 8-stündige deutlich ausgesprochen. Die erste fehlte in der früheren Berechnung mittels der Methode der kleinsten Quadrate; es scheint, daß die letzte einfache Methode bei kleinem Beobachtungsmaterial recht vorteilhaft angewendet wird. Die 16stündige und ebenso die achtstündige Periode ist in Kurve II die gleiche wie in Kurve I; es dürfte daher auch die 16stündige Periode

reell sein, obwohl sie in Fig. 4, Kurve I, fehlt. Außerdem tritt in der oberen Kurve, Fig. 5, noch die zehnstündige Periode hervor, wie in Fig. 4, Kurve II, und auch eine Andeutung einer fünfstündigen Periode ist hier wie dort vorhanden.

Es läßt sich also schließen: In den durch starke Winde nicht gestörten Temperaturschwankungen in 12 *m* Tiefe ist eine 24stündige oder vielleicht $23^1/_2$stündige, ferner eine achtstündige Periode bestimmt, eine 16stündige sehr wahrscheinlich vorhanden. Bei starkem Südostwind werden diese Perioden

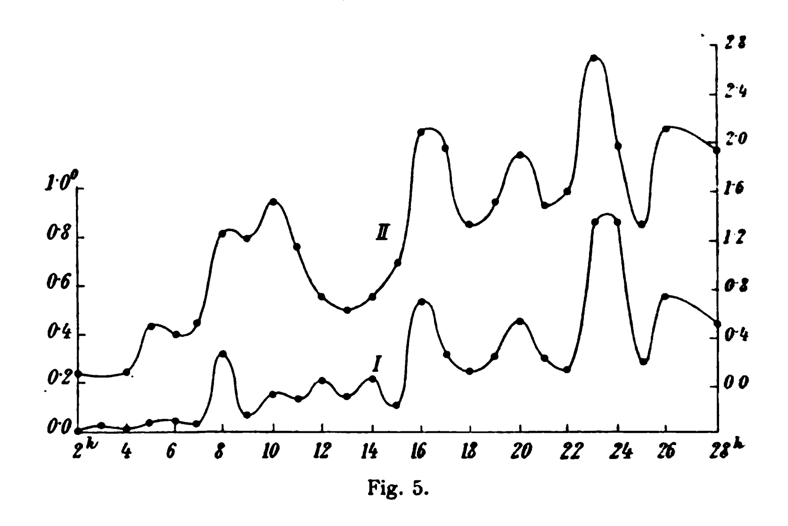


Fig. 5.

gleichfalls beobachtet, doch tritt dann noch eine ausgesprochene, zirka zehnstündige und vielleicht nebstbei eine fünfstündige Periode zu ihnen hinzu. Letztere sind als direkte Wirkung des Windes aufzufassen, welcher auf der Leeseite des Sees die Sprungschicht in die Tiefe drückt.

Die Unterwasserseiches müssen ebenso wie die der Oberfläche an den Enden des Sees stets Schwingungsbäuche haben. Es kann somit die 24stündige Periode die Grundschwingung mit einem Knoten, die 16stündige die erste Oberschwingung mit zwei, die achtstündige die zweite mit drei Knotenpunkten sein. Bei der komplizierten Gestalt des Wolfgangsees (Einschnürung in der Mitte) verhalten sich die Perioden der Oberflächenseiches nicht wie die ganzen Zahlen (siehe A. Defant,

Über die stehenden Seespiegelschwankungen in Riva am Gardasee, diese Sitzungsber., 1908), es ist dies darum auch für die unterseeischen Seiches nicht wahrscheinlich. Genaueres läßt sich vorläufig nicht darüber sagen. Die zehnstündige Periode ist eine andere Schwingungsart, die fünfstündige vielleicht ihre erste Oberschwingung.

Wegen des nächtlichen Temperaturmaximums und der großen Amplituden, die ich im Vorjahr für die 24stündige Periode fand, sprach ich damals die Ansicht aus, es könnten keine Ursachen, die mit der Sonnenstrahlungsperiode des Tages direkt zusammenhängen, diese Temperaturperiode in 12 *m* Tiefe erzeugen, und meinte, die Periode von 24 Stunden könnte »auch zufällig nahe der Eigenschwingung des Seebeckens bei bestimmter Temperaturschichtung entsprechen«. Diese Ansicht glaube ich nunmehr bestätigen zu können. Es liegt nämlich nahe, anzunehmen, daß zwischen dem 22. Juli und dem 5. August der See — durch keine stärkeren Winde gestört — als Ganzes in einem ziemlich stationären Zustand war und gewisse von früher vorhandene Sprungschichtschwankungen den ganzen See als stehende Wellen einnahmen. Die Grundschwingung des ganzen Sees wäre demnach (ganz zufällig) die 24stündige Periode. Nach dem plötzlichen Auftreten des Südostwindes wurden wahrscheinlich die nordwestliche und südöstliche Seehälfte, die durch eine mehrere Kilometer lange, seichte und ziemlich schmale Wasserstraße verbunden sind, jede einzeln in Schwingungen versetzt, die sich erst mit der Zeit zu einem neuen stationären Zustand des ganzen Sees ausbildeten. Die nordöstliche Hälfte, in welcher die Beobachtungen gemacht wurden, müßte danach als Grundschwingung eine zehnstündige Periode gehabt haben. Merkwürdigerweise werden diese Vermutungen durch eine allerdings nur angenäherte Rechnung bestätigt.

W. Schmidt leitete kürzlich[1] für die Schwingungen, welche an der Grenzschicht zweier verschieden schwerer Flüssigkeiten entstehen, eine Formel ab, die in vereinfachter

---

[1] Stehende Schwingungen in der Grenzschicht zweier Flüssigkeiten. Diese Sitzungsber., Bd. 117 (1908), Abt. IIa.

Form früher schon B. R. Watson benutzt hat. Nach ihr ist die Schwingungsdauer der Grundschwingung τ gegeben als

$$\tau = 2l\sqrt{\frac{\frac{\rho}{h}+\frac{\rho'}{h'}}{g(\rho-\rho')}}$$

(l Länge des Seebeckens, ρ, ρ' Dichten, h, h' Höhen der beiden Schichten, g Schwere). Beschränken wir uns hier auf rohe Annäherungen, so haben wir für den Wolfgangsee $l = 12$ *km* zu setzen. Die mittlere Tiefe des Sees sei zirka 70 *m*, die Sprungschicht liegt während der Beobachtungszeit im Mittel 10 *m* unter der Oberfläche, also $h = 60$ *m*, $h' = 10$ *m*. Die Temperatur der unteren Schicht sei 5°, die der oberen 15°; dann ist $\rho = 0\cdot99999$, $\rho' = 0\cdot99913$. Damit findet man $\tau = 24\cdot5$ Stunden. Bei der Roheit dieser Annahmen ist die Übereinstimmung erstaunlich gut.

Die obere, nordwestliche Seehälfte bis zur Enge ist nun zirka 5 *km* lang. Mit Beibehaltung der übrigen Daten ergibt sich damit die Grundschwingung dieser Seehälfte zu 10·2 Stunden. Auch diese Größe stimmt ausgezeichnet mit der aus den Beobachtungen abgeleiteten Periode der gestörten Schwankungen. Die obigen Vermutungen scheinen also richtig zu sein. Eine genauere Bestätigung derselben durch die Theorie wäre, wie W. Schmidt sagt, erst mit einer der Chrystal'schen nachgebildeten Rechnung der Unterwasserseiches möglich.

Die obige Formel gibt auch eine Erklärung der früher berührten Verzögerung der Temperaturextreme im Niveau von 8 *m* gegenüber jenen in 12 *m* Tiefe (siehe Fig. 1). Die Schwingungsdauer einer dünneren Schicht ($h' = 8$ *m*) ist nämlich um etwa das 1·2fache größer als die der Schichte $h' = 12$ *m*.

Das Beobachtungsmaterial sowie die Stundenwerte der beiden Beobachtungsgruppen für alle berechneten Perioden sind am Schlusse zusammengestellt.

Zu anderen Zeiten, bei anderen Temperaturen können natürlich die Unterwasserseiches des Wolfgangsees ganz andere Perioden haben.

Wie oben gesagt, wurden neben den Registrierungen auch alle 3 bis 4 Tage einmal direkte Temperaturmessungen angestellt. Dieselben sind in Tab. I und IV mitgeteilt. Trägt man diese Beobachtungen in ein Koordinatensystem ein, dessen Abszisse die Zeit (Ende Juli bis Ende September), dessen Ordinate die Tiefe unter der Seeoberfläche bedeutet, so kann man Isothermen zeichnen und mittels dieser die Temperatur für verschiedene Tage und Tiefen recht gut interpolieren. Auf diese Weise ergibt sich folgende Temperaturtabelle, in welcher nur die eingeklammerten Werte keine direkten Messungen bedeuten.

Tabelle I.

Temperaturverteilung in 0 bis 16 *m* Tiefe vom 27. Juli bis 21. September 1908 (Celsiusgrade).

Datum	0	2	4	6	8	10	12	14	16	Mittlere Temperatur
	Meter									
27./VII.	18·8	(19·0)	17·6	(16·4)	(14·0)	(11·8)	8·7	(8·5)	(8·0)	13·7
31.	19·8	(20·5)	(20·1)	(18·6)	(15·9)	13·0	11·1	(10·1)	(9·2)	15·5
3./VIII.	20·2	(19·5)	(19·4)	(19·1)	(16·5)	13·8	10·6	(10·4)	9·8	15·5
6.	20·5	20·0	(20·0)	(19·2)	(16·5)	(13·1)	11·4	(10·5)	(9·8)	15·8
10.	21·4	(19·5)	(19·2)	(18·8)	18·6	(14·5)	11·0	(10·5)	9·9	16·0
13.	18·5	18·6	18·7	18·7	18·7	15·2	11·3	10·5	10·1	15·8
17.	17·8	17·9	18·0	18·0	17·9	14·8	11·1	10·4	10·2	15·3
20.	(18·1)	(17·9)	(17·9)	(17·2)	(16·6)	(15·1)	(13·5)	(11·4)	(10·7)	15·4
24.	18·4	18·2	17·8	17·5	16·6	16·0	15·4	12·6	11·6	16·1
27.	19·2	19·0	19·0	19·0	18·6	15·0	12·6	11·9	10·9	16·3
31.	18·2	18·4	18·5	18·5	18·2	17·3	12·8	11·4	10·3	16·2
4./IX.	17·4	17·4	17·5	17·4	17·4	17·2	12·5	10·5	10·2	15·5
8.	19·5	17·7	17·2	17·1	16·9	15·6	12·4	11·6	11·1	15·5
12.	16·5	16·4	16·4	16·5	15·1	14·0	13·1	12·0	11·0	14·7
16.	16·5	16·2	16·2	16·0	16·1	13·6	11·8	11·1	10·5	14·6
21.	16·0	15·8	16·0	15·9	15·9	15·9	14·2	12·2	(12·4)	15·0
Mittel	18·6	18·3	18·1	17·7	16·8	14·7	12·1	11·0	10·4	

Um den Gang der Temperatur während der beiden Monate besser verfolgen zu können, habe ich Durchschnittswerte für je 10 bis 14 Tage aus diesen Reihen berechnet:

Tabelle II.

Temperatur in den Zeitabschnitten:

vom	bis	0	2	4	6	8	10	12	14	16
		Meter								
27./VII.	6./VIII.	19·8	19·7	19·3	18·3	15·7	12·9	10·5	9·9	9·2
6./VIII.	17./VIII.	19·6	19·0	19·0	18·7	17·9	14·4	11·2	10·5	10·0
17./VIII.	27./VIII.	18·4	18·3	18·2	17·9	17·4	15·2	13·2	11·6	10·9
27./VIII.	8./IX.	18·6	18·1	18·1	18·0	17·8	16·3	12·6	11·4	10·6
8./IX.	21./IX.	17·1	16·5	16·5	16·4	16·0	14·8	12·9	11·7	11·7

Man erkennt aus beiden Tabellen, wie die Wärme sich im Laufe des Sommers in tiefere Schichten des Wassers bewegt, während die oberen Schichten an Temperatur abnehmen. In der letzten Rubrik der ersten Tabelle wurde die mittlere Temperatur der Wasserschicht von der Oberfläche bis zu 16 *m* Tiefe aus den stufenweisen Beobachtungen berechnet. Man sieht, daß diese mittlere Temperatur ihr Maximum gegen Ende August erreichte, im übrigen aber im Intervall weniger Tage erheblich schwankte. Sehr genau ist freilich die Berechnung dieser Mitteltemperaturen nicht, da die Schwankungen der Sprungschichttemperaturen, wie wir oben gesehen haben, sehr groß sind und daher der Zufall die Messung beeinflußt. Man sieht ferner, daß die Sprungschicht während der ganzen 2 Monate ungefähr im Mittel in 10 *m* Tiefe liegen bleibt und sich nicht nach abwärts bewegt. Die Verteilung der Temperatur verändert sich gleichwohl bedeutend, da die Temperaturdifferenzen zwischen oben und unten gegen den Herbst bedeutend abnehmen.

Es lag nahe, den Gang der Seetemperaturen während der beiden Monate mit den gleichzeitigen atmosphärischen Verhältnissen zu vergleichen. Die Strahlung der Sonne wurde nicht gemessen; so blieb nichts übrig, als den Gang der Lufttemperatur an ihrer statt heranzuziehen. Ich bediente mich hierzu der Beobachtungen der meteorologischen Station Strobl-Weißenbach, nahe dem Südende des Wolfgangsees gelegen, aus welchen ich fünftägige Temperaturmittel entnahm.

Es ist nun von vornherein nicht wahrscheinlich, daß die Lufttemperatur mit der mittleren Seetemperatur der Schicht 0 bis 16 *m* parallel geht, da das Wasser als Wärmespeicher funktioniert. Nehmen wir in ganz roher Annäherung an, daß die Wärmemenge, welche der See in der Zeiteinheit aufnimmt, sich zusammensetzt aus einem positiven, der mittleren Lufttemperatur proportionalen Teile und einem negativen Teile, der Ausstrahlung und Verdunstung. Die genannte Wärmemenge ist der Temperaturerhöhung des Sees in der Zeiteinheit proportional. Man kann also setzen, wenn L die Lufttemperatur,

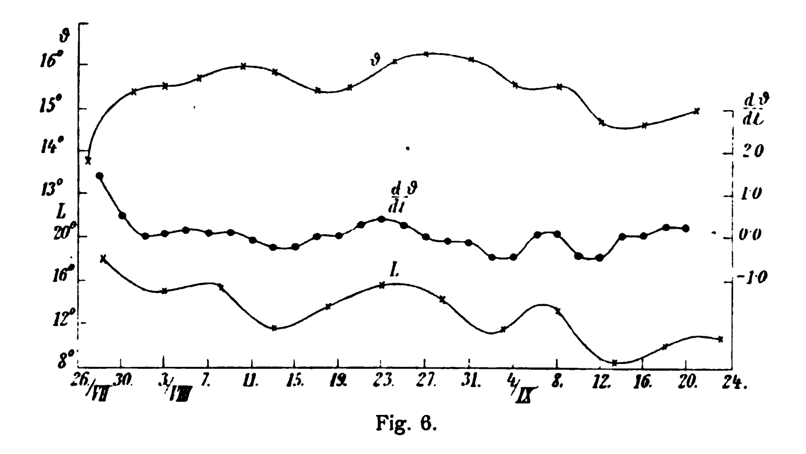


Fig. 6.

A die (konstant angenommene) Wärmeabgabe, ϑ die Seetemperatur und t die Zeit bedeutet,

$$dt(aL - A) = c\,d\vartheta \quad \text{oder} \quad c\frac{d\vartheta}{dt} = aL - A.$$

Hier sind a und c Konstante. Die zeitliche Änderung der Seetemperatur muß also, wenn der See als Wärmespeicher funktioniert, ungefähr parallel der Lufttemperatur verlaufen. Die Beobachtungen bestätigen dieses Resultat recht gut. In der obigen Figur bedeutet L den Verlauf der Lufttemperatur an der Station Strobl-Weißenbach in fünf(bis sechs)tägigen Mitteln, ϑ jenen der mittleren Temperatur des Sees in der Wasserschicht von 0 bis 16 *m*. Aus dieser Kurve ist die darunter abgebildete $\frac{d\vartheta}{dt}$ abgeleitet, indem der Kurve ϑ für je

einen ersten und dritten Tag die Temperatur entnommen wurde und die Differenz dieser beiden am zweiten Tage als $\frac{d\vartheta}{dt}$ eingetragen wurde.

Der Parallelismus zwischen den Kurven L und $\frac{d\vartheta}{dt}$ scheint mir zufriedenstellend zu sein und zu dokumentieren, wie der See als Wärmereservoir zur Wirkung kommt. Die quantitative

Tabelle

Stündliche Werte der Temperatur in Celsiusgraden

Datum	1h a.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h m.
22./VII.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
23.	12·5	12·5	12·3	12·2	12·1	12·2	12·4	12·4	12·3	12·1	11·8	11·6
24.	12·6	12·8	13·0	13·4	13·3	13·3	13·0	13·1	13·2	13·0	13·0	12·9
25.	12·7	13·0	13·2	13·6	13·6	13·0	12·9	12·6	12·5	12·4	12·4	12·1
26./VII.	13·6	13·5	13·4	13 2	13·1	12·9	12·7	12·6	12·6	12·6	12·7	12·6
27.	12·9	12·9	12·8	12·8	12·8	12·6	12·6	12·5	12·5	12·4	12·3	(12·3
28.	11·0	11·2	11·2	11·4	11·2	11·3	11·3	10·7	10·8	10 9	11·0	11·0
29.	11·1	11·5	11·4	11·4	11·2	10·6	10·8	10·7	11·0	11·4	11·7	11·8
30.	10·0	11·0	11·3	11·4	11·3	11·3	11·0	11·0	10·8	10·5	10·3	10·5
31.	11·6	11·2	11·5	11·6	11·5	11·0	10·6	9·9	10·0	10·1	10·6	10·9
1./VIII.	10·5	10·2	10·0	10·1	10·5	10·6	10·1	10·2	10·0	9·8	10·3	10·0
2.	10·3	10·1	10·1	10·7	11·0	10·2	9·8	9·6	9·7	10·1	10·2	10·2
3.	11·0	10·6	11·4	11·2	11·0	10·4	10·2	10·3	10·1	(10·7)	(11·3)	(11·8)
4.	11·8	11·8	11·9	11·8	11·8	11·5	11·4	11·4	11·5	11·5	11·5	11·1
5.	13·4	13·4	12·8	12·7	12·8	13·0	12·9	12·7	12·4	12·2	11·9	11·9
6./VIII.	14·6	13·6	12·4	12·3	12·5	11·8	12·1	11·8	12·5	13·8	13·7	11·3
7.	12·0	11·5	11·2	11·4	13·6	12·6	13·5	12·9	12·9	11·8	11·8	12·0
8.	10·8	11·0	12·4	11·9	11·6	11·5	11·8	11·9	11·6	11·2	10·9	10·9
9.	12·5	10·9	10·4	10·3	10·3	11·1	12·8	13·9	14·8	12·1	11·4	11·6
10.	12·4	13·0	12·2	11·7	11·6	11·1	11·2	11·4	11·2	11·1	—	—

Auswertung der obigen Gleichung schien mir etwas zu unsicher, um sie zu versuchen.

Ich füge zum Schlusse das benützte Zahlenmaterial bei, und zwar zunächst die Stundenwerte aus den Registrierkurven in 12 *m* Tiefe, soweit sie zur Berechnung der Schwingungsperioden verwendet worden sind.

III.

vom 22. Juli bis 10. August in 12 *m* Tiefe.

1h p.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h p.
—	—	—	—	—	—	12·3	12·0	12·1	12·4	12·6	12·9
11·7	11·5	11·6	11·6	11·7	11·9	11·7	12·0	11·7	11·7	11·7	12·0
12·8	12·7	12·5	12·2	12·1	12·1	12·3	12·5	13·0	13·2	13·3	13·1
12·0	12·1	12·2	12·1	12·0	12·1	12·4	12·7	13·2	13·1	13·0	13·6
12·5	12·5	12·4	12·4	12·3	12·1	12·1	12·0	12·0	12·4	12·9	12·9
(12·2)	(12·1)	(12·1)	(12·0)	(11·9)	(11·9)	11·8	11·7	11·5	11·5	11·4	11·1
10·5	10·0	9·9	10·0	10·1	10·2	10·5	10·6	11·1	11·2	11·4	11·1
11·6	11·4	10·5	10·0	9·8	10·1	11·2	11·4	12·5	12·0	11·6	10·9
10·6	10·7	10·4	10·5	10·6	10·9	10·8	11·2	11·5	11·8	12·0	11·5
10·6	10·2	10·2	10·1	10·4	11·3	11·8	12·0	11·7	11·1	11·0	11·0
11·5	11·1	10·0	10·5	10·4	10·3	10·5	9·9	10·0	11·0	11·5	10·7
10·2	10·1	10·1	10·2	10·4	10·5	11·0	11·3	11·7	11·9	11·4	11·3
12·3	12·3	11·7	11·7	11·6	11·8	12·6	12·4	12·6	12·4	12·0	12·0
11·4	12·5	12·7	12·6	12·4	12·3	12·5	12·7	13·2	13·2	13·0	13·1
11·9	11·9	11·6	11·3	11·3	11·5	12·2	11·7	11·7	11·6	11·6	13·6
11·0	10·9	11·3	12·5	12·5	14·8	12·5	12·4	13·6	12·4	12·8	12·5
11·1	11·3	12·4	12·6	12·6	11·9	11·2	11·1	11·1	11·6	11·0	11·1
11·6	15·2	14·8	15·0	12·7	12·2	11·7	11·9	13·6	13·6	13·9	13·0
11·6	12·7	12·9	12·9	12·9	12·8	12·3	11·6	11·6	11·2	11·3	11·6
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

1312

einen

und d

getra·

mir
See

n =								
18	17	16	15	14	13	12	11	10
Stunden								
0·12	0·04	0·10	0·02	0·09	0·04	0·09	0·04	0·07
0·11	0·34	0·36	0·21	0·03	0·10	0·20	0·23	0·69
0·26	0·33	0·55	0·13	0·23	0·15	0·22	0·15	0·16
1·3	1·9	2·1	1·0	0·7	0·6	0·7	1·1	1·5

n =							
9	8	7	6	5	4	3	2
Stunden							
0·02	0·16	0·02	0·02	0·02	0·01	0·01	0·01
0·54	0·58	0·19	0·14	0·19	0·06	0·06	0·05
0·08	0·34	0·05	0·06	0·06	0·02	0·02	0·01
1·2	1·3	0·5	0·4	0·5	0·1	0·1	0·1

Die folgende Tabelle IV enthält jene direkten Temperaturbeobachtungen, welche wegen ihrer Tiefenlage in Tabelle I nicht wiedergegeben werden konnten, aber zur Interpolation der daselbst eingeklammerten Werte dienten.

Tabelle IV.

Datum	Tiefe	Temperatur	Datum	Tiefe	Temperatur	Datum	Tiefe	Temperatur
27./VII.	7 *m*	15·3°	3./VIII.	1 *m*	19·6°	10./VIII.	3 *m*	19·3°
	9	12·7		3	19·4		5	19·0
				5	19·4			
31./VII.	3 *m*	20·7°		7	18·3			
	5	19·7						
	7	17·3	6./VIII.	5 *m*	19·9°			
	15	9·7		9	13·8			

Die Tabelle V enthält schließlich die Amplitudenwerte, welche für die verschiedenen Periodenannahmen berechnet wurden: und zwar bedeuten die Größen a die mittels der Methode der kleinsten Quadrate nach der Bessel'schen Formel berechneten Amplituden, die Größen b die absoluten Schwankungen in den mittleren Stundenwerten der Perioden. a_1 und b_1 beziehen sich auf die Registrierperiode vom 22. Juli bis 5. August, a_2, b_2 auf jene vom 5. bis 10. August. Die Größen a_1, a_2 wurden zur Zeichnung der Kurven in Fig. 4, die Größen b_1, b_2 zur Zeichnung jener in Fig. 5 verwendet.

Tabelle V.

Amplituden der verschiedenen Perioden in Celsiusgraden.

	$n =$								
	28	26	25	24	23	22	21	20	19
	Stunden								
a_1	0·09	0·19	0·03	0·36	0·14	0·05	0·09	0·15	0·09
a_2	0·38	0·26	0·26	0·25	0·31	0·33	0·38	0·35	0·15
b_1	0·46	0.57	0·28	0·88	0·86	0·25	0·29	0·46	0·31
b_2	1·9	2·1	1·3	1·9	2·7	1·6	1·5	1·9	1·5

	$n =$								
	18	17	16	15	14	13	12	11	10
	Stunden								
a_1	0·12	0·04	0·10	0·02	0·09	0·04	0·09	0·04	0·07
a_2	0·11	0·34	0·36	0·21	0·03	0·10	0·20	0·23	0·69
b_1	0·26	0·33	0·55	0·13	0·23	0·15	0·22	0·15	0·16
b_2	1·3	1·9	2·1	1·0	0·7	0·6	0·7	1·1	1·5

	$n =$							
	9	8	7	6	5	4	3	2
	Stunden							
a_1	0·02	0·16	0·02	0·02	0·02	0·01	0·01	0·01
a_2	0·54	0·58	0·19	0·14	0·19	0·06	0·06	0·05
b_1	0·08	0·34	0·05	0·06	0·06	0·02	0·02	0·01
b_2	1·2	1·3	0·5	0·4	0·5	0·1	0·1	0·1

Kinematische Interpretation der Maxwellschen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie

(Fortsetzung)

von

Lucius Hanni in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Dezember 1908.)

III.

Bei der bereits angegebenen Interpretation des Gleichungssystems 19*b*) ist vorausgesetzt, daß jede der stetigen Funktionen v_x, v_y, v_z innerhalb eines Volumelementes durch ihren Grenzwert ersetzt werden kann. Daraus folgt noch nicht, daß dann auch die Beschleunigungskomponenten auf der linken Seite von 19*b*) für alle Punkte dieses Volumelementes denselben Wert haben; tritt aber dieser Fall ein, so ist die angegebene Interpretation von 19*b*) sogar nicht mehr anwendbar. Es liegt nun die Frage nahe, welche Bedeutung das System 19*b*) hat, wenn man es auf die Punkte eines Volumelementes anwendet, innerhalb dessen die partiellen Differentialquotienten auf der linken Seite durch die Grenzwerte

$$\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \qquad 33)$$

ersetzt werden können; dieser Grenzübergang ist formell dem analog, durch den 19*a*) in 13) übergeht. Wie im folgenden gezeigt werden soll, hat auch das Gleichungssystem, das man nach Anwendung dieses Grenzüberganges aus 19*b*) erhält, eine einfache kinematische Bedeutung und die beiden Systeme 19) können auch jetzt wieder auf zwei Systeme zurückgeführt

werden, die man rein geometrisch interpretieren kann und die dann zueinander reziprok sind.

Es möge nun das System 19*b*) auf die Punkte eines solchen Bereiches angewendet werden, innerhalb dessen jeder der als stetig vorausgesetzten Differentialquotienten von $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ nach x, y, z durch seinen von x, y, z unabhängigen Grenzwert ersetzt werden kann, so daß dann die Funktionen auf der linken Seite von 19*b*) die Werte 33) annehmen, und es sei t ein Parameter. Unter diesen Annahmen ergibt sich durch dasselbe Verfahren, durch das 19*a*) zusammen mit 5) in das System 24) übergeführt wurde, daß auch 19*b*) zusammen mit 9) dem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
w^2\varphi_x &= \left(\frac{du_z}{dt} + \frac{dv_z}{dt}\right)y + \left(\frac{du_y}{dt} - \frac{dv_y}{dt}\right)z \\
w^2\varphi_y &= \left(\frac{du_x}{dt} + \frac{dv_x}{dt}\right)z + \left(\frac{du_z}{dt} - \frac{dv_z}{dt}\right)x \qquad 34) \\
w^2\varphi_z &= \left(\frac{du_y}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\right)x + \left(\frac{du_x}{dt} - \frac{dv_x}{dt}\right)y
\end{aligned}
$$

äquivalent ist, wenn man ebenso wie im II. Teile durch Einführung von Hilfsgrößen u_x, u_y, u_z zu 19*b*) noch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial u_y}{\partial t} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial z}\right) \qquad 35) \\
\frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{w^2}{2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

hinzufügt. Da die letzten Gleichungen einfach als Ausdruck dafür angesehen werden können, daß die Differentialquotienten auf beiden Seiten von 12) im allgemeinen nicht einander gleich sind, so sind sie weder eine Verallgemeinerung noch eine Beschränkung von 19*b*) und es ist daher das System 34) unter den angegebenen Bedingungen den Gleichungen 19*b*) und 9)

äquivalent. Sind wie früher v_x, v_y, v_z Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes x, y, z und φ_x, φ_y, φ_z von x, y, z und dem Parameter t abhängige Winkel, so können auch u_x, u_y, u_z und die Konstante w wieder als Geschwindigkeiten interpretiert werden.

Die kinematische Bedeutung von 34) kann jetzt leicht in der Weise gefunden werden, daß man darin zunächst

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{du_y}{dt} = \frac{du_z}{dt} = 0$$

setzt, so daß 34) in das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w^2 \varphi_x &= \frac{dv_z}{dt} y - \frac{dv_y}{dt} z \\ w^2 \varphi_y &= \frac{dv_x}{dt} z - \frac{dv_z}{dt} x \\ w^2 \varphi_z &= \frac{dv_y}{dt} x - \frac{dv_x}{dt} y \end{aligned} \qquad 36)$$

übergeht. Wie man unmittelbar sieht, sind die Ausdrücke auf der linken Seite dieses Gleichungssystems Beschleunigungsmomente in bezug auf die drei Achsen des Koordinatensystems; daher sind φ_x, φ_y, φ_z diesen Momenten proportional. Daß in 36) φ_x, φ_y, φ_z als Winkel angesehen werden können und welche Bedeutung dann diese Winkel abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor hier haben, findet man, wenn man berücksichtigt, daß die Gleichungen 19) von der Wahl des Anfangspunktes des Koordinatensystems unabhängig sind. Es kann somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Gleichungen 19) der Anfangspunkt des Koordinatensystems in einen Punkt innerhalb des betrachteten Volumelementes verlegt werden. Infolgedessen ist dann in jeder der drei Koordinatenebenen die doppelte Flächenzahl des rechtwinkligen Momentendreieckes, dessen Katheten die in die betreffende Ebene fallende Komponente der Beschleunigung und ihr Abstand vom Anfangspunkte des Koordinatensystems sind, auch

gleich dem Produkt aus dem Quadrat dieser Beschleunigungskomponente mit dem in diesem rechtwinkligen Dreieck der Beschleunigungskomponente anliegenden unendlich kleinen Winkel. Bezeichnet man diesen Winkel mit χ_x, beziehungsweise χ_y, χ_z, so sind in 36) die Ausdrücke auf der linken Seite und daher auch die Winkel φ_x, φ_y, φ_z den durch diese Konstruktion definierten Winkeln χ_x, χ_y, χ_z proportional, da die Beschleunigung in allen Punkten des betrachteten Volumelementes nach Voraussetzung dieselbe Größe und Richtung hat. Diese Interpretation von φ_x, φ_y, φ_z genügt zugleich auch schon der Forderung, daß diese Winkel Funktionen von x, y, z und t seien; denn die ihnen proportionalen Winkel χ_x, χ_y, χ_z sind nicht nur von x, y, z, sondern auch von der Größe und Richtung der Beschleunigung, d. i. vom Parameter t abhängig.

Ebenso wie im speziellen Falle 36) sind auch in dem speziellen Falle von 34), wo

$$
\begin{aligned}
w^2 \varphi_x &= \frac{d u_z}{d t} y + \frac{d u_y}{d t} z \\
w^2 \varphi_y &= \frac{d u_x}{d t} z + \frac{d u_z}{d t} x \qquad\qquad 37) \\
w^2 \varphi_z &= \frac{d u_y}{d t} x + \frac{d u_x}{d t} y
\end{aligned}
$$

ist, die Ausdrücke auf der linken Seite Beschleunigungsmomente. Setzen wir wieder voraus, daß der Anfangspunkt des Koordinatensystems, auf das die Gleichungen 19*b*) bezogen sind, im Innern des betrachteten Volumelementes liegt, so können φ_x, φ_y, φ_z wieder als Winkel angesehen werden, die dem im betreffenden rechtwinkligen Momentendreieck der unendlich kleinen Kathete gegenüberliegenden Winkel proportional sind. Die Art des Zusammenhanges der Momente auf der linken Seite der Gleichungen 37) mit den einzelnen Momenten auf ihrer rechten Seite ergibt sich aus der bekannten Bedeutung des Gleichungssystems 30*b*), mit dem 37) abgesehen von der Schreibweise identisch ist. Überhaupt tritt die Analogie zwischen den Systemen 30*b*) und 37) und ebenso

auch die zwischen 30a) oder 16) und 36) noch mehr hervor, wenn man in den Systemen 30) δx, δy, δz mit Rücksicht auf die rechte Seite dieser Gleichungen auch als Momente betrachtet, so daß diese Gleichungssysteme ebenfalls ihrem Inhalte nach übereinstimmen.

Die Gleichungen 34) vergleichen wir nun mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} v_x &= \left(\frac{d\psi_y}{dt} + \frac{d\varphi_y}{dt}\right)z + \left(\frac{d\psi_z}{dt} - \frac{d\varphi_z}{dt}\right)y \\ v_y &= \left(\frac{d\psi_z}{dt} + \frac{d\varphi_z}{dt}\right)x + \left(\frac{d\psi_x}{dt} - \frac{d\varphi_x}{dt}\right)z \\ v_z &= \left(\frac{d\psi_x}{dt} + \frac{d\varphi_x}{dt}\right)y + \left(\frac{d\psi_y}{dt} - \frac{d\varphi_y}{dt}\right)x, \end{aligned} \tag{38}$$

die sich aus 24) ergeben und, wie im II. Teile bewiesen wurde, den Systemen 19a) und 20a) äquivalent sind, wenn man diese nur auf die Punkte eines Volumelementes anwendet und t als Parameter betrachtet. Zerlegt man das System 34) in die Systeme 36) und 37), 38) in 16) und

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d\psi_y}{dt} z + \frac{d\psi_z}{dt} y \\ v_y &= \frac{d\psi_z}{dt} x + \frac{d\psi_x}{dt} z \\ v_z &= \frac{d\psi_x}{dt} y + \frac{d\psi_y}{dt} x, \end{aligned} \tag{39}$$

so ergibt sich nämlich in analoger Weise wie im II. Teile, daß 34) und 38) zueinander reziprok sind. Denn zunächst sind ihre Teilsysteme 16) und 36) zueinander reziprok. Um dies zu zeigen, wählen wir aus der Schar der Werte x, y, z drei zusammengehörige, aber sonst beliebige heraus, so daß x, y, z in 16) und 36) die Bedeutung von Koeffizienten haben. Durch 16) und 36) werden dann die beiden Kurven

$$\xi = v_x(t), \quad \eta = v_y(t), \quad \zeta = v_z(t) \tag{40a}$$

und

$$\xi' = \varphi_x(t), \quad \eta' = \varphi_y(t), \quad \zeta' = \varphi_z(t) \tag{40b}$$

in solcher Weise durch ein Nullsystem einander zugeordnet, daß den Punkten der einen Kurve die Normalebenen der anderen entsprechen und umgekehrt. Geht man jetzt wie in den analogen Fällen im I. und II. Teile von den als fest angenommenen Werten von x, y, z wieder zu Veränderlichen über, so erhält man eine dreifach unendliche Schar von Nullsystemen, von denen durch jedes den Punkten der Kurve 40a) die Normalebenen der Kurve 40b) und den Punkten von 40b) die Normalebenen von 40a) zugeordnet werden. Die analogen Überlegungen kann man jetzt auch auf die Systeme 39) und 37) anwenden; nur tritt jetzt an die Stelle eines Nullsystems ein Polarsystem. Somit sind die Systeme 34) und 38) zueinander reziprok.

Wie bei der früher angegebenen Interpretation von 19b) ist auch hier die Beschränkung auf ein Volumelement wieder notwendig und hinreichend dazu, um von 19b) zu Gleichungen von der Form 34) zu gelangen. Ebenso können dann auch die Gleichungen 9) wieder durch die allgemeineren 20b) ersetzt werden.

Um nun zu untersuchen, in welcher Beziehung die im I. und II. Teil angegebene Interpretation von 19b) zu der hier angegebenen steht, betrachten wir die Systeme 34) und 29) und setzen voraus, daß in 29) für $\frac{\alpha_1}{\rho}, \frac{\beta_1}{\rho}, \frac{\gamma_1}{\rho}, \frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ die Ausdrücke 27) eingesetzt seien, so daß auch die einzelnen Produkte auf der rechten Seite von 29) Beschleunigungsmomente sind. Es unterscheiden sich dann 34) und 29) nur noch dadurch voneinander, daß bei den in 34) auftretenden Beschleunigungsmomenten die Beschleunigungskomponenten für alle Punkte des betrachteten Volumelementes dieselben sind, während die in 29) nach Einsetzen der Ausdrücke 27) auftretenden Momente aus dem Produkt einer von x, y, z abhängigen Beschleunigung mit einer von diesen Veränderlichen unabhängigen Länge bestehen. Von vornherein haben beide Interpretationen dieselbe Berechtigung; es kann jedoch durch das Hinzutreten anderer Gesichtspunkte angezeigt erscheinen, die eine der anderen vorzuziehen.

Auch die hier angegebene reziproke Zuordnung der Gleichungen 34) und 38) unterscheidet sich in gewisser Hinsicht von der jener Systeme, auf die die Maxwell'schen Gleichungen im I. und II. Teile zurückgeführt wurden; während dort der Parameter t nicht explizit auftritt, ist dies hier der Fall, und zwar enthalten 34) und 38) schon die kinematischen Grundgleichungen. Diese Eigenschaft haben 34) und 38) mit der zwischen Bahnkurve und dazu gehörigem Hodographen in der Ebene bestehenden reziproken Verwandtschaft gemeinsam; denn auch bei diesen beiden Kurven sind die kinematischen Grundgleichungen schon in den geometrischen Beziehungen der einen zur anderen enthalten.

IV.

Zu den beiden bereits angegebenen Methoden, die Maxwell'schen Gleichungen auf Gleichungssysteme zurückzuführen, die im Sinne der Geometrie zueinander reziprok sind, kann man auch von einem gemeinsamen Gesichtspunkt aus gelangen, von dem aus sich zugleich eine dritte Art ihrer Zurückführung auf zwei reziproke Systeme ergibt. Dabei machen wir wieder wie früher die Voraussetzung, daß in 19) und 20) die Differentialquotienten stetige Funktionen von x, y, z seien und t ein Parameter sei; außerdem ersetzen wir vorläufig die Gleichungen 20) durch 14) und 9). Um nun zu Gleichungen zu gelangen, die die Systeme 29), 34) und 38) als spezielle Fälle enthalten, bilden wir die vollständigen Differentiale dv_x, dv_y, dv_z, $d\varphi_x$, $d\varphi_y$, $d\varphi_z$ und setzen dann darin nach Einführung der durch 21) und 35) definierten Hilfsfunktionen ψ_x, ψ_y, ψ_z, u_x, u_y, u_z für die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z die Ausdrücke 22) und die analogen, aus 19b) und 35) sich ergebenden Ausdrücke ein. Man erhält so die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} dv_x &= \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial t}\right) dz + \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}\right) dy \\ dv_y &= \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial t}\right) dx + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial t}\right) dz \qquad 41a) \\ dv_z &= \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial t}\right) dy + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial t}\right) dx \end{aligned}$$

$$w^2 d\varphi_x = \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\right) dy + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{\partial v_y}{\partial t}\right) dz$$

$$w^2 d\varphi_y = \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial t}\right) dz + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial v_z}{\partial t}\right) dx \qquad 41b)$$

$$w^2 d\varphi_z = \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\right) dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{\partial v_x}{\partial t}\right) dy,$$

die unter den angegebenen Bedingungen den Gleichungen 19) nach Hinzufügung von 14) und 9) äquivalent sind. Wir gehen nun von den Gleichungen 41) aus und wenden sie auf die Punkte eines Volumelementes an. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem man die Größe des Volumelementes so wählt, daß jeder der Differentialquotienten auf der rechten Seite von 41) durch seinen von x, y, z unabhängigen Grenzwert ersetzt werden kann, dem er sich innerhalb des betrachteten Volumelementes nähert, oder nicht. Im ersten dieser Fälle gelangt man von den Systemen 41) in der bereits angegebenen Weise zu den reziproken Systemen 34) und 38).

Im zweiten Falle, wo die Differentialquotienten auf der rechten Seite von 41) von x, y, z abhängig bleiben sollen, betrachten wir, um von 41) zu zwei reziproken Systemen zu gelangen, die Differentiale dx, dy, dz als Funktionen einer von x, y, z und t unabhängigen Veränderlichen τ, indem wir sie durch die Ausdrücke $w_x d\tau$, $w_y d\tau$, $w_z d\tau$ ersetzen, in denen w_x, w_y, w_z noch beliebig zu wählende Funktionen von τ sind, die nur der Bedingung genügen müssen, daß $w_x d\tau, w_y d\tau, w_z d\tau$ genügend klein gewählt werden können. Wie die im I. und II. Teil angegebene Interpretation von 19b) zeigt, kann man 41b) auf die Punkte eines solchen Volumelementes anwenden, innerhalb dessen jede der Funktionen v_x, v_y, v_z, u_x, u_y, u_z durch ihren Grenzwert ersetzt werden kann, dem sie sich innerhalb dieses Volumelementes nähert, während die Differentialquotienten auf der rechten Seite von 41b) noch von x, y, z abhängig bleiben. In derselben Weise wie das System 29) in die beiden Systeme 31) zerlegt wurde, zerlegen wir jetzt auch 41b) in zwei Systeme und verfügen über die noch

willkürlich zu wählenden Funktionen w_x, w_y, w_z dann so, daß wir in dem einen dieser beiden Systeme

$$w_x = \frac{w^2}{v^2} v_x, \quad w_y = \frac{w^2}{v^2} v_y, \quad w_z = \frac{w^2}{v^2} v_z,$$

im anderen

$$w_x = \frac{w^2}{u^2} u_x, \quad w_y = \frac{w^2}{u^2} u_y, \quad w_z = \frac{w^2}{u^2} u_z$$

setzen, wo jeder der Ausdrücke $v_x, v_y, v_z, u_x, u_y, u_z$ schon den Grenzwert der betreffenden Funktion bedeuten soll, dem sie sich in der Umgebung eines Punktes x, y, z für $t = \tau$ nähert und

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

ist. Für einen einzelnen Punkt innerhalb des betrachteten Volumelementes erhält man dann aus 41 b) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
v^2 \frac{d\varphi_x^{(1)}}{d\tau} &= \frac{dv_z}{dt} v_y - \frac{dv_y}{dt} v_z \\
v^2 \frac{d\varphi_y^{(1)}}{d\tau} &= \frac{dv_x}{dt} v_z - \frac{dv_z}{dt} v_x \\
v^2 \frac{d\varphi_z^{(1)}}{d\tau} &= \frac{dv_y}{dt} v_x - \frac{dv_x}{dt} v_y \\
u^2 \frac{d\varphi_x^{(2)}}{d\tau} &= \frac{du_z}{dt} u_y + \frac{du_y}{dt} u_z \\
u^2 \frac{d\varphi_y^{(2)}}{d\tau} &= \frac{du_x}{dt} u_z + \frac{du_z}{dt} u_x \\
u^2 \frac{d\varphi_z^{(2)}}{d\tau} &= \frac{du_y}{dt} u_x + \frac{du_x}{dt} u_y,
\end{aligned}\right\} \quad 42\,b)$$

falls in 41 b)

$$\varphi_x = \varphi_x^{(1)} + \varphi_x^{(2)}, \quad \varphi_y = \varphi_y^{(1)} + \varphi_y^{(2)}, \quad \varphi_z = \varphi_z^{(1)} + \varphi_z^{(2)}$$

ist. Da in den Differentialquotienten auf der rechten Seite von 42b) $t = \tau$ gesetzt werden kann, so sind diese Gleichungen dem dritten System von 1), beziehungsweise dem zweiten System von 32) und der Beziehung

$$v \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} \qquad 43)$$

äquivalent. Wendet man jetzt die Systeme 42b) auf jeden Punkt innerhalb des betrachteten Volumelementes an, so läßt sich die Gesamtheit dieser Systeme 42b) dadurch in eines zusammenfassen, daß man in 42b) partielle Differentialquotienten schreibt. Dieses System ist dann dem System 41b) äquivalent, wenn 41b) auf die Punkte eines solchen Volumelementes beschränkt wird, innerhalb dessen jede der Funktionen v_x, v_y, v_z, u_x, u_y, u_z durch ihren Grenzwert ersetzt werden kann. Die kinematische Bedeutung von 41b) ist in diesem Falle bereits im I. und II. Teile angegeben.

Um nun ein dem System 42b) analoges und dazu reziprokes aus 41a) zu erhalten, nehmen wir an, daß in 41a) dx, dy, dz wieder gleich $w_x d\tau$, $w_y d\tau$, $w_z d\tau$ sein sollen. In den Differentialen auf der linken Seite von 41a) setzen wir dann

$$v_x = v_x^{(1)} + v_x^{(2)}, \quad v_y = v_y^{(1)} + v_y^{(2)}, \quad v_z = v_z^{(1)} + v_z^{(2)}$$

und zerlegen 41a) in analoger Weise in zwei Systeme wie das System 24). Nach dieser Zerlegung von 41a) verfügen wir jetzt über die noch willkürlich gelassenen Funktionen w_x, w_y, w_z in der Weise, daß wir im einen System

$$w_x = v_x^{(1)}, \quad w_y = v_y^{(1)}, \quad w_z = v_z^{(1)},$$

im anderen

$$w_x = v_x^{(2)}, \quad w_y = v_y^{(2)}, \quad w_z = v_z^{(2)}$$

setzen, wo jeder der Ausdrücke $v_x^{(1)}, v_y^{(1)}, v_z^{(1)}, v_x^{(2)}, v_y^{(2)}, v_z^{(2)}$ schon den Grenzwert der betreffenden Funktion bedeuten soll, dem sie sich in der Umgebung eines Punktes x, y, z für $t = \tau$ nähert. Für einen einzelnen Punkt innerhalb dieses Volumelementes ergeben sich dann aus 41a) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x^{(1)}}{d\tau} &= \frac{d\varphi_y}{dt} v_z^{(1)} - \frac{d\varphi_z}{dt} v_y^{(1)} \\
\frac{dv_y^{(1)}}{d\tau} &= \frac{d\varphi_z}{dt} v_x^{(1)} - \frac{d\varphi_x}{dt} v_z^{(1)} \\
\frac{dv_z^{(1)}}{d\tau} &= \frac{d\varphi_x}{dt} v_y^{(1)} - \frac{d\varphi_y}{dt} v_x^{(1)} \\
\frac{dv_x^{(2)}}{d\tau} &= \frac{d\psi_y}{dt} v_z^{(2)} + \frac{d\psi_z}{dt} v_y^{(2)} \\
\frac{dv_y^{(2)}}{d\tau} &= \frac{d\psi_z}{dt} v_x^{(2)} + \frac{d\psi_x}{dt} v_z^{(2)} \\
\frac{dv_z^{(2)}}{d\tau} &= \frac{d\psi_x}{dt} v_y^{(2)} + \frac{d\psi_y}{dt} v_x^{(2)}
\end{aligned}\right\} \qquad 42a)$$

Da in den Differentialquotienten auf der rechten Seite dieser Gleichungen wieder $t = \tau$ gesetzt werden kann, so sind sie dem ersten System von 1) und 32) und der Beziehung 43) äquivalent. Wendet man die Systeme 42*a*) auf jeden Punkt innerhalb des betrachteten Volumelementes an, so läßt sich die Gesamtheit dieser Systeme 42*a*) in eines zusammenfassen, indem man in 42*a*) partielle Differentialquotienten einführt. Dieses System ist dann dem System 41*a*) äquivalent, falls 41*a*) auf die Punkte eines solchen Volumelementes beschränkt wird, innerhalb dessen jede der Funktionen v_x, v_y, v_z durch ihren Grenzwert ersetzt werden kann. Wie man jetzt unmittelbar sieht, haben die Gleichungen 42*a*) dieselbe kinematische Bedeutung wie 42*b*), und zwar auch dann, wenn in den beiden Systemen 42) partielle Differentialquotienten eingeführt sind; dann stellen sie nämlich die Bewegung der Punkte eines Volumelementes dar, die bei einer Verschiebung seiner Punkte eintritt, wie sie bei der Interpretation von 29) beschrieben wurde. Nach entsprechender Wahl der Bezeichnungsweise sieht man zugleich auch, daß die Systeme 42*a*) und 42*b*) zueinander reziprok sind, wenn man den Ausdrücken von der Form $\frac{d\varphi}{dt}$ die von der Form $\frac{dv}{dt}$ als reziprok zuordnet. Die

Zurückführung der Gleichungen 19) auf zwei reziproke Systeme von der Form 42) mit darin auftretenden partiellen Differentialquotienten ist deswegen besonders bemerkenswert, weil diese beiden reziproken Systeme dieselbe kinematische Bedeutung haben.

Bei den beiden bisher angegebenen Arten, die Systeme 41) auf zwei reziproke zurückzuführen, sind zur gegenseitigen Zuordnung die Differentiale auf der linken Seite und die Differentialquotienten auf der rechten verwendet worden. Es sind dann nur diese beiden Arten der Zurückführung von 41) auf zwei reziproke Systeme möglich, je nachdem man nämlich den Grenzübergang in der Weise macht, daß die Differentialquotienten auf der rechten Seite von 41) noch von x, y, z abhängig sind oder nicht. Im ersten Falle wurden dabei dx, dy, dz durch $w_x d\tau$, $w_y d\tau$, $w_z d\tau$ ersetzt. Dies ist jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit; denn es läßt sich immer eine solche Größe $d\tau$ angeben, daß die Quotienten $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$ einen endlichen Grenzwert haben, ohne daß über die Differentiale dx, dy, dz deswegen eine spezialisierende Voraussetzung gemacht werden muß. Dagegen muß eine solche deswegen gemacht werden, weil dazu, daß jedes der beiden Systeme 41) eine reziproke Verwandtschaft darstellt, durch die den Ausdrücken von der Form $\frac{dv}{dt}$ die von der Form $\frac{d\varphi}{dt}$ zugeordnet werden, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, daß die Systeme 41) in der angegebenen Weise auf die Punkte eines Volumelementes beschränkt werden und w_x, w_y, w_z die in die Systeme 42) eingeführten Werte annehmen, wenn die Komponenten von v und φ die im Anfang des II. Teiles festgesetzte Bedeutung haben sollen. Um dies zu zeigen, genügt es, das eine der Systeme 41), z. B. 41*b*), zu betrachten und darin

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$$

zu setzen. Es läßt sich dann 41 *b*) auf das dritte System von 1) und die Beziehung

$$w^2 d\varphi = \frac{\partial v}{\partial t} ds \tag{44}$$

zurückführen. Sollen nun die Ausdrücke von der Form $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ einander zugeordnet sein, so muß außer dem dritten System von 1) für einen einzelnen Punkt x, y, z dann auch noch eine Beziehung von der Form

$$w_1 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

bestehen, in der w_1 noch zu bestimmen ist. Welcher Wert für w_1 einzusetzen ist, ergibt sich aus der festgesetzten Bedeutung von φ und v und daraus, daß wegen des Bestehens des dritten Systems von 1) die Richtungen von w_1, $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ aufeinander senkrecht stehen; es ist daher w_1 gleich v und man erhält somit die Beziehung 43). Da in 44) ds von x, y, z unabhängig sein muß, so können 43) und 44) nur dann zugleich bestehen, wenn man 44) nur auf die Punkte eines solchen Volumelementes anwendet, innerhalb dessen die Funktion v durch ihren von x, y, z unabhängigen Grenzwert ersetzt werden kann, so daß man $ds = v\,dt$ setzen darf.

Neben diesen beiden Arten, die Gleichungen 41) auf zwei reziproke Systeme zurückzuführen, liegt jetzt noch die Möglichkeit vor, den Differentialen auf der linken Seite von 41) die Differentiale dx, dy, dz als reziprok zuzuordnen. Tut man dies zunächst in 41 *b*), so gelangt man zu den Gleichungen 29), zu denen die aus 41 *a*) sich ergebenden Gleichungen 24) reziprok sind. Ordnet man dagegen in 41 *a*) die Differentiale auf der linken Seite und die auf der rechten einander als reziprok zu oder, was dasselbe ist, die Komponenten von $\frac{dv}{dt}$ und w_x, w_y, w_z, so genügt eine Transformation von der Form

$$w = \rho \frac{d\varphi}{dt},$$

um an Stelle dieser Zuordnung eine solche zu erhalten, daß den Ausdrücken von der Form $\frac{dv}{dt}$ solche von der Form $\frac{d\varphi}{dt}$ entsprechen. Da man in den Gleichungen 42a) auf der rechten Seite die Komponenten von $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ wieder durch w_x, w_y, w_z ersetzen darf und 42a) dann bei der Anwendung einer solchen Transformation ungeändert bleibt, so lassen sich in dem Falle, wo in 41a) die Differentiale auf der linken Seite denen auf der rechten als reziprok zugeordnet werden, die Systeme 41) auf die beiden reziproken Systeme 42) zurückführen.

Bei jedem der Systeme 41) ist in den beiden gerade betrachteten Fällen, wo die Differentiale auf beiden Seiten von 41) einander als reziprok zugeordnet sind, die Beschränkung auf die Punkte eines Volumelementes als von solcher Art vorausgesetzt, daß die Differentialquotienten auf der rechten Seite von x, y, z abhängig sind. Daher bleibt noch der Fall zu berücksichtigen, wo diese Differentialquotienten innerhalb eines Volumelementes durch ihren von x, y, z unabhängigen Grenzwert ersetzt werden können und die Differentiale auf beiden Seiten von 41) einander als reziprok zugeordnet sind. Es ist jedoch nicht notwendig, diesen letzten Fall noch eigens zu untersuchen; denn schon aus der Beschaffenheit der drei bisher angegebenen reziproken Zuordnungen von 41) ergibt sich, daß nur diese drei Arten der Zurückführung von 41) auf zwei reziproke Systeme möglich sind. Sollen sich nämlich die Systeme 41) auf zwei reziproke Systeme zurückführen lassen, so müssen dann auch die zwei Paare von Systemen, die man durch die bisher angewandte Zerlegung eines jeden der Systeme 41) in zwei Systeme erhält, zueinander reziprok sein. Dies ist nur möglich, wenn man diese beiden Paare auf je zwei der Beziehungen 1) und je zwei von 32) zurückführen kann, nachdem man in 32) noch das dem zweiten System von 1) analoge System hinzugefügt hat. Von den drei Systemen 1) oder 32) können nun auf drei und nur drei verschiedene Arten zwei einander zugeordnet werden, so daß drei und nur drei Arten von reziproker Zuordnung der Systeme 41) möglich sind. Die drei bisher angegebenen reziproken Systeme, auf die die Gleichungen 41) durch Beschränkung auf die Punkte eines

Volumelementes zurückgeführt wurden, enthalten nun gerade alle drei möglichen Zuordnungen von je zweien der Systeme 1) und 32); daher gibt es keine Zurückführung der Systeme 41) auf zwei reziproke Systeme, die von den drei bisher angegebenen wesentlich verschieden wäre.

Daraus, daß nur drei verschiedene Arten der Zurückführung von 41) auf zwei reziproke Systeme möglich sind, folgt zunächst, daß man nicht nur von den Gleichungen 41) zu den drei angegebenen Arten der Zurückführung der Systeme 19) auf zwei reziproke gelangt, sondern auch durch die im I. Teile für einen speziellen Fall durchgeführte Methode, indem man von den Beziehungen 1) und 32) ausgeht. Ferner ergibt sich jetzt, daß die Beschränkung von 41) auf die Punkte eines Volumelementes, die bisher angenommen wurde, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, um 41) auf zwei dazu äquivalente reziproke Systeme zurückführen zu können; denn sie ist in jedem der drei möglichen bereits behandelten Fälle notwendig, wenn die Funktionen v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z die vorausgesetzte kinematische Bedeutung haben. Da nun mit 41) ebenfalls die Gleichungen 19) und 20) auf die Punkte eines Volumelementes angewendet werden müssen und die Gleichungen 20) sich dann durch 9) und 14) ersetzen lassen, so fällt endlich auch die bei der Einführung von 41) gemachte Annahme, daß 9) und 14) bestehen, mit der aus 19) sich ergebenden Bedingung, daß die Gleichungen 20) bestehen, zusammen.

Sonnblick, Hoher (3106 m), Untersuchung der Wolkenelemente auf demselben.
Wagner A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1281—1293.

Exner F. M., Ergebnisse einiger Temperaturregistrierungen im Wolfgangsee. Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295—1315.

Temperaturregistrierungen, Ergebnisse einiger — im Wolfgangsee.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295—1315.

Seetemperatur, Ergebnisse einiger Temperaturregistrierungen im Wolfgangsee.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295—1315.

Hanni L., Kinematische Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Fortsetzung.) Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Maxwell'sche Gleichungen, Kinematische Interpretation derselben mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Fortsetzung.)
Hanni L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Reziprozitätsprinzip der Geometrie, Kinematische Interpretation der Maxwell-schen Gleichungen mit Rücksicht darauf. (Fortsetzung.)
Hanni L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Waßmuth A., Über die Wahl der »kanonischen Verteilung« von Systemen in der statistischen Mechanik.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1253—1260.

Verteilung von Systemen nach der kanonischen Form.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1253—1260.

Statistische Mechanik, die kanonische Verteilung der Systeme in derselben.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p 1253—1260.

Tuschel L., Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280.

Sphärische Abbildung in der darstellenden Geometrie.
Tuschel L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280.

Schraubenflächen.
Tuschel L., Sitz. Ber der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280.

Glanzkurvenermittlung.
Tuschel L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280

Wagner A., Untersuchung der Wolkenelemente auf dem Hohen Sonnblick (3106 *m*).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1281—1293.

Wolkenelemente, Untersuchung derselben auf dem Hohen Sonnblick (3106 *m*).
Wagner A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1281—1293.

1

Waßmuth A., Über die Wahl der »Kanonischen Verteilung« von Systemen in der statistischen Mechanik.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1253—1260.

Verteilung von Systemen nach der kanonischen Form.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1253—1260.

Statistische Mechanik, die kanonische Verteilung der Systeme in derselben.
Waßmuth A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1253—1260.

Tuschel L., Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280.

Sphärische Abbildung in der darstellenden Geometrie.
Tuschel L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280.

Schraubenflächen.
Tuschel L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280.

Glanzkurvenermittlung.
Tuschel L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1261—1280.

Wagner A., Untersuchung der Wolkenelemente auf dem Hohen Sonnblick (3106 m).
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1281—1293.

Wolkenelemente, Untersuchung derselben auf dem Hohen Sonnblick (3106 m).
Wagner A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1281—1293.

Sonnblick, Hoher (3106 *m*), Untersuchung der Wolkenelemente auf demselben.
Wagner A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908). p. 1281—1293.

Exner F. M., Ergebnisse einiger Temperaturregistrierungen im Wolfgangsee.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295 - 1315.

Temperaturregistrierungen, Ergebnisse einiger — im Wolfgangsee.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295—1315.

Seetemperatur, Ergebnisse einiger Temperaturregistrierungen im Wolfgangsee.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295 - 1315.

Hanni L., Kinematische Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Fortsetzung.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Maxwell'sche Gleichungen, Kinematische Interpretation derselben mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Fortsetzung.)
Hanni L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Reziprozitätsprinzip der Geometrie, Kinematische Interpretation der Maxwell-schen Gleichungen mit Rücksicht darauf. (Fortsetzung.)
Hanni L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Sonnblick, Hoher (3106 m), Untersuchung der Wolkenelemente auf demselben.
Wagner A., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1281—1293.

Exner F. M., Ergebnisse einiger Temperaturregistrierungen im Wolfgangsee.
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295—1315.

Temperaturregistrierungen, Ergebnisse einiger — im Wolfgangsee.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295—1315.

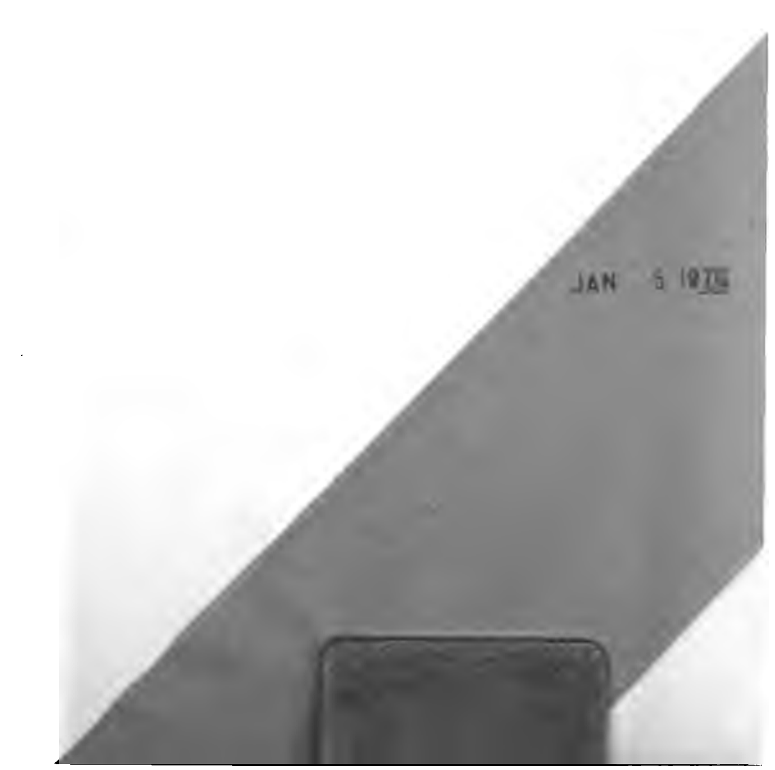
Seetemperatur, Ergebnisse einiger Temperaturregistrierungen im Wolfgangsee.
Exner F. M., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1295—1315.

Hanni L., Kinematische Interpretation der Maxwell'schen Gleichungen mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Fortsetzung.)
Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Maxwell'sche Gleichungen, Kinematische Interpretation derselben mit Rücksicht auf das Reziprozitätsprinzip der Geometrie. (Fortsetzung.)
Hanni L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.

Reziprozitätsprinzip der Geometrie, Kinematische Interpretation der Maxwell-schen Gleichungen mit Rücksicht darauf. (Fortsetzung.)
Hanni L., Sitz. Ber. der Wiener Akad., IIa. Abt., Bd. 117 (1908), p. 1317—1331.


Stanford University Libraries
3 6105 007 785 350


JAN 5 1976

